TP1 OPT201:Équilibre d'une chaîne articulée

LIAO Puwei

November 26, 2020

1 Introduction

Le but de ce TP est de chercher la position d'équilibre statique d'une chaîne formé de barres rigides.Pour modéliser ce problème comme un problème d'optimisation , Ici on cherche le énergie minimum ce qui est équivalent à trouver la position d'équilibre statique.

2 Pratique

e: valeur de l'énergie potentielle

On utilise la formule

$$e(x,y) = \sum_{i=1}^{n_b} L_i \frac{y_i + y_{i-1}}{2}$$

Pour i=1, on prend $y_{1-1} = y_0 = 0$, car le point de départ commence par (0,0), et pour i = nb on prend $y_{n_b} = B$, puis on peut obtenir facilement la valeur d'énergie, en écrivant un boucle sur les paramètres donnés, on obtient $e = -2.2800$

c: valeur en xy des contraintes sur la longueur des barres

On peut utiliser la formule pour chaque terme de vecteur

$$c_i(x,y) = l_i^2 - L_i^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 - L_i^2$$

C'est un vecteur colonne de dimension n_b, de même, on prend $x_0 = 0$, et $x_{n_b} = A$, puis en écrivant un boucle sur les paramètres donnés pour remplir chaque élément dans ce vecteur.

Ici on obtient dans le cas test:

$$c = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.04 \\ -0.05 \\ 0.04 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

g: gradient de e en xy

C'est un vecteur-colonne de dimension $2n_n$

En calculant le gradient, on peut avoir $g(i) = \frac{\partial e}{\partial x_i} = 0$, car e ne dépend pas de x, il nous reste qu'à calculer les termes pour y , ici $g(i+n_n) = \frac{\partial e}{\partial y_i} = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}$, finalement, en prenant les paramètres donnés, en écrivant un boucle.On obtient le vecteur suivante:

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{L_1+L_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{L_{n_b-1}+L_{n_b}}{2} \end{pmatrix}$$

Dans le cas test on obtient:

$$g = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.60 \\ 0.40 \\ 0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

a:Le jacobien de c

a indique le jacobienne contraintes d'égalité en xy de fonction c, ce qui nous donne la matrice suivante après avoir calculé:

$$\begin{pmatrix} 2(x_1-x_0) & & & & 2(y_1-y_0) & & & \\ -2(x_2-x_1) & 2(x_2-x_1) & & & -2(y_2-y_1) & 2(y_2-y_1) & & \\ & -2(x_3-x_2) & 2(x_3-x_2) & & & -2(y_3-y_2) & 2(y_3-y_2) & \\ & & & 2(x_{nn}-x_{nn-1}) & & & & 2(y_{nn}-y_{nn-1}) \\ & & & -2(x_{nn+1}-x_{nn}) & & & & -2(y_{nn+1}-y_{nn}) \end{pmatrix}$$

D'après cet expression, on est capable de coder la matrice jacobien:

on met d'abord les valeurs au bords, c'est à dire les valeurs a(1,1), a(nn+1,nn),a(1,nn+1),a(nn+1,2*nn) pour la raison que le point de départ (0,0) et ainsi le point d'arrivé (A,B) n'est pas inclus dedans les coordonnées xy, dans ce cas :

$$a_{1,1} = 2(x_1 - 0) = 2x_1$$

$$a_{nn+1,nn} = -2(A - x_{nn})$$

$$a_{1,nn+1} = 2(y_1 - 0) = 2y_1$$

$$a_{nn+1,2nn} = -2(B - y_{nn})$$

Une fois qu'on aura écrit les valeurs au bords, on peut écrire 2 boucle parcourt x et y respectivement pour remplir les éléments de matrice a, pour le boule de x , on part de 2 à nn pour le y on part de même itération que x mais avec un décalage de nn en colonne ce qui nous donne :

$$a_{i,i} = 2(x_i - x_{i-1})$$

$$a_{i,i-1} = -2(x_i - x_{i-1})$$

$$a_{i,i+nn} = 2(y_i - y_{i-1})$$

$$a_{i,i-1+nn} = -2(y_i - y_{i-1})$$

finalement, on peut obtenir notre matrice de jacobien a.

$$g = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & -0.6 \end{pmatrix}$$

hl:Le hessien du lagrangien de c

Le hessien du lagrangien en xy et lm nous donne la formule suivante:

$$\nabla^2_{xx}\ell(x,\lambda) = \nabla^2 e(x) + \sum_{i\in E} \lambda_i \nabla^2 c_i(x)$$

dans ce cas , car $\nabla e(x)$ dépend que de L, donc on en déduit facilement que $\nabla^2 e(x) = 0$, la formule devient alors:

$$\nabla^2_{xx}\ell(x,\lambda) = \sum_{i\in E} \lambda_i \nabla^2 c_i(x)$$

ici ,il nous faut calculer une somme matricielle, car pour chaque $\nabla^2 c_i(x)$ c'est une matrice de taille 2nn*2nn, calculons d'abord les valeurs au bords ,c'est à dire, on fait une initialisation sur cette matrice en prenant les point d'extrêmité ,c'est pour la même raison que précédente, car le point de départ (0,0) et ainsi le point d'arrivé (A,B) n'est pas inclus dedans les coordonnées xy.Ceci nous donne

$$hl_{1,1} = 2\lambda_1$$

$$hl_{nn+1,nn+1} = 2\lambda_1$$

$$hl_{nn,nn} = 2\lambda_{nb}$$

$$hl_{2nn,2nn} = 2\lambda_{nb}$$

pour les autres $\lambda_i \nabla^2 c_i(x)$,

$$\lambda_i \nabla^2 c_i(x) = \lambda_i \begin{pmatrix} & \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_{j-1}^2} & \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_{j-1}\partial x_j} & & & \\ & \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j \partial x_{j-1}} & \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j^2} & & & \\ & & & & & \\ & & & & \frac{\partial^2 C_i}{\partial y_{j-1}^2} & \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_{j-1}\partial y_j} \\ & & & & \frac{\partial^2 C_i}{\partial y_j \partial y_{j-1}} & \frac{\partial^2 C_i}{\partial y_j^2} \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

à partir de ce formule obtenu, on est capable de calculer le hessien de c en prenant un boucle par rapport à chaque terme non nul,c'est à dire:

$$hl_{i,i} = hl_{i,i} + 2\lambda_i$$

$$hl_{i,i-1} = hl_{i,i-1} - 2\lambda_i$$

$$hl_{i-1,i} = hl_{i-1,i} - 2\lambda_i$$

$$hl_{i-1,i-1} = hl_{i-1,i-1} + 2\lambda_i$$

$$hl_{nn+i,nn+i} = hl_{nn+i,nn+i} + 2\lambda_i$$
$$hl_{nn+i,nn+i-1} = hl_{nn+i,nn+i-1} - 2\lambda_i$$
$$hl_{nn+i-1,nn+i} = hl_{nn+i-1,nn+i} - 2\lambda_i$$
$$hl_{nn+i-1,nn+i-1} = hl_{nn+i-1,nn+i-1} + 2\lambda_i$$

ici ,

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j \partial x_{j-1}} = \frac{\partial^2 C_i}{\partial y_j \partial y_{j-1}} = -2$$
$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 C_i}{\partial y_j^2} = 2$$

Avec les temres lagrangien [0.01,0.01,0.01,0.01,0.01], on obtient le resultat dans le cas test:

$$hl = \begin{pmatrix} 0.040000 & -0.020000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ -0.020000 & 0.040000 & -0.020000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & -0.020000 & 0.040000 & -0.020000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.020000 & 0.040000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.040000 & -0.020000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & -0.020000 & 0.040000 & -0.020000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & -0.020000 & 0.040000 & -0.020000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & -0.020000 & 0.040000 \end{pmatrix}$$

3 Vérification des dérivées

dans cette partie, on s'intéresse à vérifier le gradient et la matrice jacobienne, puis calculer l'érreur des dérivées.
Pour calculer l'érreur, on utilise l'exactitude des dérivée, qui donne par la formule

$$\frac{\phi(x + t_i e^i) - \phi(x - t_i e^i)}{2t_i}$$

Où ϕ est la fonction à dérivée
avec e^i le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^n$, $t_i = \epsilon^{\frac{1}{2}} max(1, |x_i|)$ (ϵ = *eps en matlab)*

3.1 gradient

D'après le codage, on peut obtenir:

```
1 ; pas: 1.490116e-08; f'(x): 0.000000e+00; DF: 0.000000e+00
  ;erreur: 0.000000e+00
2 ; pas: 1.490116e-08; f'(x): 0.000000e+00; DF: 0.000000e+00
  ;erreur: 0.000000e+00
3 ; pas: 1.490116e-08; f'(x): 0.000000e+00; DF: 0.000000e+00
  ;erreur: 0.000000e+00
4 ; pas: 1.490116e-08; f'(x): 0.000000e+00; DF: 0.000000e+00
  ;erreur: 0.000000e+00
5 ; pas: 1.490116e-08; f'(x): 6.000000e-01; DF: 6.000000e-01
  ;erreur: 9.934107e-09
6 ; pas: 2.235174e-08; f'(x): 4.000000e-01; DF: 4.000000e-01
  ;erreur: 9.934108e-09
7 ; pas: 2.235174e-08; f'(x): 2.500000e-01; DF: 2.500000e-01
  ;erreur: 3.973643e-08
```

```
8 ; pas: 1.937151e−08; f'(x): 3.500000e−01; DF: 3.500000e−01
   ;erreur: 3.929977e−09
```

Ceci montre que l'érreur est assez petit.

3.2 Jacobien

De la même façon, on obtient

```
(1, 1) -> 0.0000000037253
(2, 1) -> 0.00000000093132
(2, 2) -> 0.00000000093132
(3, 2) -> 0.00000000034925
(3, 3) -> 0.00000000034925
(4, 3) -> 0.00000000023283
(4, 4) -> 0.00000000023283
(5, 4) -> 0.00000000093132
(4, 7) -> 0.00000000062088
(4, 8) -> 0.0000000026507
(5, 8) -> 0.0000000020537
```

ce qui montre l'érreur de la matrice jacobienne est aussi assez petit

4 Parties théoriques

4.1 Question 1

Notons X l'espace vectoriel des contraintes, $X = \bigcap_{i=1}^{nb}\{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 - L_i = 0\}$
Supposons qu'il existe une chaîne admissible, alors on a $X \neq \emptyset$ Montrons que (P) admet au moins une solution.
On a l'ensemble des coordonnées $y := (y_i)_{i\in 1,\ldots,nb}$, où nb est le nombre de barres, de dimension finie.
Comme on a aussi $-\infty < y_i < +\infty$, y est aussi bornée. On en déduis qu'il existe α tel que $e(x,y) = \sum_{i=1}^{nb} L_i \frac{y_i+y_{i-1}}{2} \leq \alpha \quad \forall i$
On a :

$$\begin{aligned}
epi(e) =& \{(x,y,\alpha) \in \mathbb{R}^{|E|} \times \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{nb} L_i \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \leq \alpha\} \\
&= \{(x,y,\alpha) \in \mathbb{R}^{|E|} \times \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{nb} L_i \frac{y_i + y_{i-1}}{2} - \alpha \leq 0\} \\
&= g^{-1}(]-\infty, 0])
\end{aligned}$$

où $g(x,y) = e(x,y) - \alpha$ donc $epi(e)$ est fermé (image réciproque d'un fermé par une fonction continue).Donc e est fermé.
X est un espace borné, et fermé car intersection de fermés, donc compact.
Finalement, comme e est fermé et X est un compact non vide, on en conclu qu'il existe au moins une solution au problème (P).

4.2 Question 2

Soit x_* une solution du problème (P), on a le lagrangien du problème : $l(x,\lambda) = e(x) + \lambda^T c(x)$.
Car x_* est une solution du problème, elle vérifie la condition nécéssaire d'optimalité de premier ordre :

Si $c'(x_*)$ est surjective, il existe $\lambda_* \in \mathbb{R}^{|E|}$ tel que $\nabla_x l(x_*, \lambda_*) = 0$

Ici,

$$c'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{x_1} & \frac{\partial c_1}{x_2} & \dots & \frac{\partial c_1}{x_{nn}} & \frac{\partial c_1}{y_1} & \dots & \frac{\partial c_1}{y_{nn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial c_{nb}}{x_1} & \frac{\partial c_{nb}}{x_2} & \dots & \frac{\partial c_{nb}}{x_{nn}} & \frac{\partial c_{nb}}{y_1} & \dots & \frac{\partial c_{nb}}{y_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & 2(x_2 - x_1) & 0 & \cdots & 0 & -2(y_2 - y_1) & 2(y_2 - y_1) & \cdots & 0 \\ 0 & -2(x_3 - x_2) & 2(x_3 - x_2) & \cdots & 0 & 0 & -2(y_3 - y_2) & 2(y_3 - y_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -2(A - x_{nn}) & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2(B - y_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $\forall i x_i \neq y_i$ et $x_i \neq x_{i+1}$ et $x_i \neq 0$. Cela suffit à dire que les vecteurs colonnes sont non nuls et forment une famille libre, donc $rg(c') = n$. Ainsi la matrice est surjective.
Donc si x_* est une solution de (P), on peut en déduire qu'il existe λ_* tel que $\nabla_x l(x_*, \lambda_*) = 0$