

# Équilibre d'une chaîne articulée

LIAO Puwei et HATON Romain

December 11, 2021

## 1 Introduction

Dans notre projet, on va prendre en compte la présence d'un plancher convexe linéaire par morceaux, La chaîne, qui doit rester au-dessus de ce plancher, c'est pour cette raison, on ajoute les contraintes inégalités pour dire que la chaîne est toujours au dessus de ce plancher, introduisons alors ce problème d'optimisation:

$$(P_2) \quad \begin{cases} \min e(x, y) \\ c_i(x, y) = 0, & i \in [1 : n_b] \\ c_i(x, y) \leq 0, & i \in [n_b + 1 : n_b + pn_n], \end{cases}$$

pour résoudre ce problème, on utilise 2 méthodes différents:méthode de Newton et méthode de quasi Newton.

## 2 Méthode de Newton

Les contraintes inégalités nous donnent les expressions suivantes pour exprimer la chaîne reste au-dessus de ce plancher:

$$c_{n_b+(j-1)n_n+i}(x, y) \equiv r_j + x_i s_j - y_i \leq 0$$

Dans ce cas d'optimisation, notre expression de jacobienne ai est une matrice de taille  $n_n * p \times 2n_n$ :

$$\begin{pmatrix} s_1 & & & -1 & & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & s_1 & & -1 \\ s_2 & & & -1 & & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & s_2 & & -1 \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ s_p & & & -1 & & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & s_p & & -1 \end{pmatrix}$$

et de plus, les contraintes d'inégalités étant affines cela ne change pas la hessien du lagrangien, ce qui nous donne donc :

$$\nabla_{xx}^2 \ell(x, \lambda) = \nabla^2 e(x) + \sum_{i \in E} \lambda_i \nabla^2 c_i(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla^2 c_i(x) = \nabla^2 e(x) + \sum_{i \in E} \lambda_i \nabla^2 c_i(x)$$

### 3 Partie théorique

#### 3.1

Si on prend  $M_k = I$ , alors l'algorithme ne converge plus. En effet, si on prend  $M_k = I$ , le problème se réécrit de la façon suivante :

$$(P_3) \quad \begin{cases} \min_{d \in \mathbf{R}^n} \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} \|d\|^2 \\ c_E(x_k) + c'_E(x_k) d = 0 \\ c_I(x_k) + c'_I(x_k) d \leq 0. \end{cases}$$

On s'intéresse au terme de la direction de descente de gradient  $\nabla f(x_k)^T d$  car le terme  $\frac{1}{2} \|d\|^2$  pénalise juste la direction. Alors on a d'après Cauchy-Schwarz :

$$|\nabla f(x_k)^T d| \leq \|\nabla f(x_k)\| \|d\| \implies \nabla f(x_k)^T d \geq -\|\nabla f(x_k)\| \|d\|$$

À chaque itération, nous aurons une solution similaire à une descente de gradient simple qui convergera à l'ordre 1 assez lentement (même une divergence dans le cas 4a). Avec l'approximation  $M_k = H_k + E_k$  de la hessienne, nous avons une convergence à l'ordre 2.4.

Voici le cas test 4.a avec  $M_k = I$  :

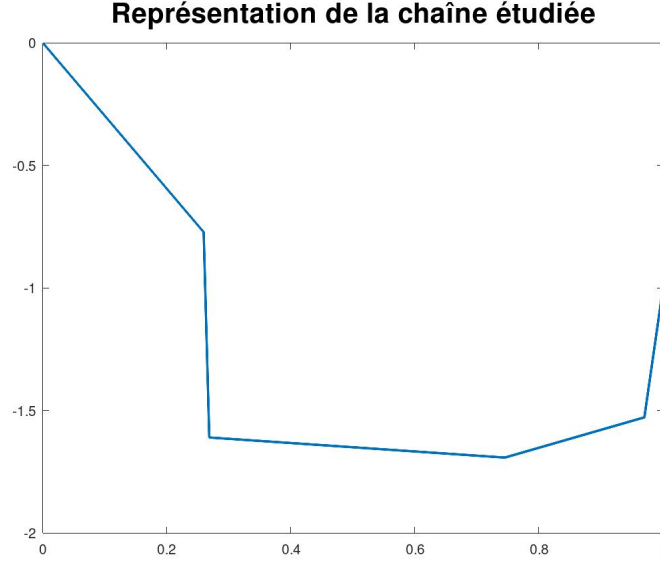


Figure 1: Cas test 4.a avec  $M_k = I$

### 3.2

On suppose que l'on connaisse une solution  $x^*$  avec les contraintes qualifiées, on a d'après KKT qu'il existe  $\lambda^*$  tel que :

$$\begin{cases} \nabla_x l(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla c(x^*)^T \lambda^* = 0 \\ c_E(x^*) = 0 \\ 0 \leq (\lambda^*)_I \perp c_I(x^*) \leq 0. \end{cases}$$

En prenant  $\lambda_0$  tel que les coefficients des contraintes d'inégalité actives sont nuls et le reste non nuls, on peut calculer  $\lambda^*$  en prenant l'inverse de  $\nabla_{c_{E \cup I^0}}(x^*)$ . En effet, cette matrice est inversible parce que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$  (hypothèse du début). On obtient :

$$\lambda_i^* = \begin{cases} (-\nabla_{c_{E \cup I^0}}(x^*))^{-1} \nabla f(x^*)_i & \text{si } i \in E \cup I^0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3.3

Si on a  $(x^*, \lambda^*)$  qui vérifie  $\nabla_{xx} l(x^*, \lambda^*)$  est définie positive sur  $\text{Ker}(\nabla c_E(x^*))$  et de plus on a :

$$\begin{cases} \nabla_x l(x^*, \lambda^*) = 0 \\ c_E(x^*) = 0 \end{cases}$$

et si de plus les contraintes d'inégalité sont non actives alors on a que  $x^*$  est un minimum local. Donc on peut dire que le point limite est un minimum local s'il vérifie ces conditions pour un problème avec contraintes d'égalité.

### 3.4

Le comportement différent du cas test 4a est dû à l'approximation de la hessienne par  $M_k$ . L'algorithme converge vers un point qui vérifie les conditions de la réponse précédente d'un problème avec contraintes d'égalité parce que  $M_k > 0$  ce qui n'était pas le cas avant. Ceci assure que la solution  $d_k$  du problème quadratique osculateur est une bonne direction de descente. De plus, il n'y a pas de plancher donc toutes les contraintes d'inégalité sont non actives et donc on converge vers un minimum global.

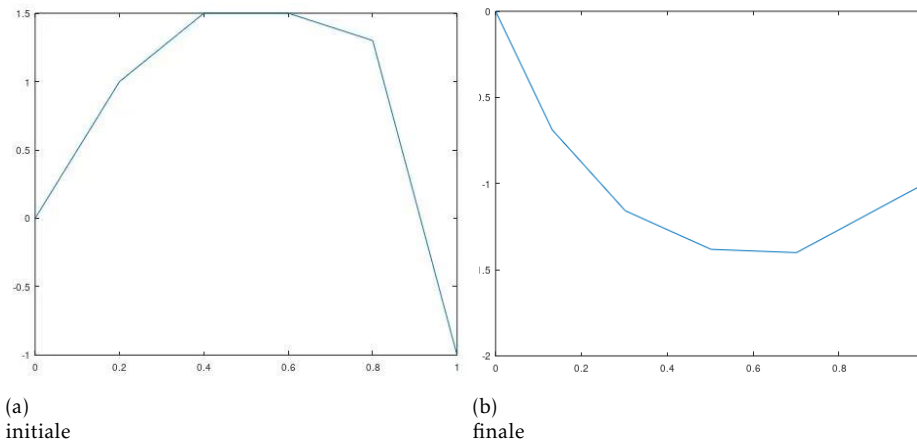
### 3.5

Non, nous n'observons pas une convergence quadratique cela est dû à la perte d'information sur les dérivées secondes en faisant l'approximation de  $H_k$  pour obliger la factorisation de Cholesky.

## 4 Cas-tests

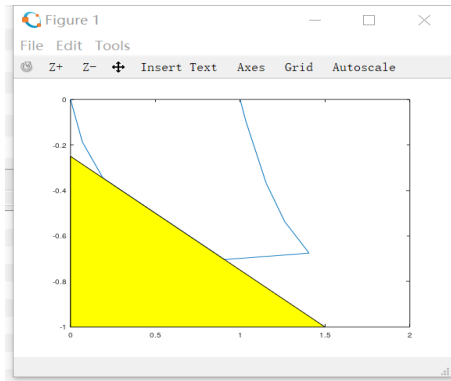
### 4.1 cas-test 4.a

Dans ce cas test, nous avons une chaîne équilibrée sans plancher, donc nous n'avons pas de contraintes inégalités, nous ne prenons pas de lagrangien d'inégalité pour le point initial en prenant  $p=0$ . Voici les graphes des chaînes initiale en prenant lagrangien d'égalité égale à  $-ae^T \backslash g$  et finale après un certain nombre d'itérations :



## 4.2 cas-test 4.b

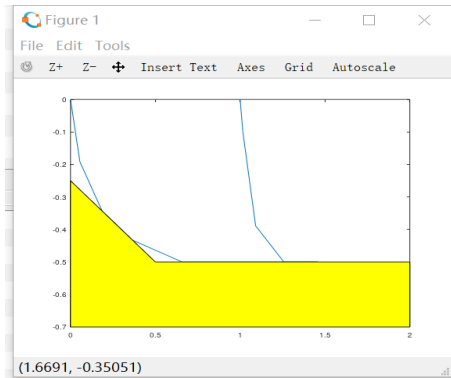
Dans ce cas test, on a un plancher de  $p=1$ , on a alors le graphe suivant de la chaîne finale après plusieurs itérations:



On remarque bien que la chaîne finale est bien au dessus du plancher en jaune sur la figure ci-dessus.

## 4.3 cas-test 4.c

Ce cas test ressemble au cas test précédent mais avec un plancher horizontal en plus, on a un plancher avec  $p=2$ , on a alors le graphe suivant de la chaîne finale après plusieurs itérations:



On remarque bien que la chaîne finale est bien au dessus du plancher en jaune sur la figure ci-dessus.

## 5 Méthode de quasi Newton

## 6 Questions théoriques

### 5.1

Pour déterminer la vitesse de convergence d'une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = \{(x_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers une solution  $z^* = (x^*, \lambda^*)$  que l'on ne connaît pas, on étudie

$$\frac{\|z_{k+1} - z^*\|_\infty}{\|z_k - z^*\|_\infty}$$

où  $\|x\|_\infty = \max(x_i)$ . Le fait qu'on ne connaisse pas la solution, nous ramène à trouver une quantité dont nous connaissons la limite c'est pour cela que nous posons :

$$F : z_k \mapsto \begin{pmatrix} \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k) \\ c_E(x_k) \\ c_I(x_k)^T \lambda_I \end{pmatrix}$$

où  $c_E$  sont les contraintes d'égalités,  $c_I$  sont les contraintes d'inégalités et  $\lambda_I$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalités.

On utilise les conditions de KKT qui nous disent :  $F(z^*) = 0$  tant que les contraintes sont différentiables en  $z^*$  et que  $\nabla F(z^*)$  soit inversible. On a :

$$\begin{aligned} F(z_k) &= F(z^*) + \nabla F(z^*)(z_k - z^*) + o(\|z_k - z^*\|_\infty) \\ &= \nabla F(z^*)(z_k - z^*) + o(\|z_k - z^*\|_\infty) \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|F(z_k)\|_\infty \leq \|\nabla F(z^*)\| \|z_k - z^*\|_\infty$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \nabla F(z^*)(z_k - z^*) &= \nabla F(z^*)(z_k - z^*) \\ \iff z_k - z^* &= \nabla F(z^*)^{-1} \nabla F(z^*)(z_k - z^*) \\ \iff z_k - z^* &= \nabla F(z^*)^{-1} (F(z_k) - o(\|z_k - z^*\|_\infty)) \end{aligned}$$

car  $\nabla F(z^*)(z_k - z^*) = F(z_k) - o(\|z_k - z^*\|_\infty)$ .

Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|z_k - z^*\|_\infty \leq \|\nabla F(z^*)^{-1}\| \|F(z_k)\|_\infty$$

Donc on a l'encadrement suivant :

$$K_1 \|z_k - z^*\|_\infty \leq \|F(z_k)\|_\infty \leq K_2 \|z_k - z^*\|_\infty \text{ avec } K_1 = \frac{1}{\|\nabla F(z^*)^{-1}\|} \text{ et } K_2 = \|\nabla F(z^*)\|$$

Par cette encadrement, nous pouvons dire que  $F(z_k)$  est équivalent à  $z_k - z^*$ . La vitesse de convergence de  $F(z_k)$  est déterminée par

$$\frac{\|F(z_{k+1})\|_\infty}{\|F(z_k)\|_\infty}$$

## 5.2

Comme  $M_k \succ 0$ , le problème quadratique osculateur a au plus une solution mais il peut avoir des contraintes linéaires incompatibles qui nous bloque pour calculer une solution.

## 5.3

On exige que la matrice  $M_k$  soit définie positive ce qui en contradiction avec le hessien du Lagrangien qui n'est pas définie positive. Cette exigence abaisse l'approximation du hessien du Lagrangien.

## 5.4

### Premier point

L'idéal pour approximer au mieux le hessien du Lagrangien, on devrait prendre :

$$\begin{aligned} \nabla_x \ell(x_k, \lambda_{k+1}) &\approx \nabla_x \ell(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) + \nabla_{xx}^2 \ell(x_{k+1}, \lambda_{k+1})(x_k - x_{k+1}) \\ \iff \gamma_k^\ell &\approx \nabla_{xx}^2 \ell(x_{k+1}, \lambda_{k+1})(x_{k+1} - x_k) \\ \iff \gamma_k^\ell &\approx M_{k+1} \delta_k \end{aligned}$$

Pour avoir l'expression de  $M_{k+1} \delta_k$  on reprend l'équation (5.2) de l'énoncé que nous multiplions par  $\delta_k$ , on obtient :

$$\begin{aligned} M_{k+1} \delta_k &= M_k \delta_k - \frac{M_k \delta_k \delta_k^T M_k \delta_k}{\delta_k^T M_k \delta_k} + \frac{\gamma_k \gamma_k^T \delta_k}{\gamma_k^T \delta_k} \\ &= M_k \delta_k - M_k \delta_k + \gamma_k \\ &= \gamma_k \end{aligned}$$

C'est pour cela que idéalement  $\gamma_k$  pris devrait être  $\gamma_k^\ell$ .

### Deuxième point

Supposons que  $\gamma_k^T \delta_k > 0$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , étudions la définie positivité de  $M_{k+1}$ , toujours en partant de l'équation (5.2) de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \alpha^T M_{k+1} \alpha &= \alpha^T M_k \alpha - \frac{\alpha^T M_k \delta_k \delta_k^T M_k \alpha}{\delta_k^T M_k \delta_k} + \frac{\alpha^T \gamma_k \gamma_k^T \alpha}{\gamma_k^T \delta_k} \\ &= \alpha^T M_k \alpha - \frac{(\delta_k^T M_k \alpha)^2}{\delta_k^T M_k \delta_k} + \frac{(\gamma_k^T \alpha)^2}{\gamma_k^T \delta_k} \end{aligned}$$

On a par Cauchy-Schwarz :

$$(\delta_k^T M_k \alpha)^2 = (\delta_k^T M_k^{1/2} M_k^{1/2} \alpha)^2 = \|\delta_k^T M_k^{1/2} M_k^{1/2} \alpha\|_2^2 \leq \|\delta_k^T M_k^{1/2}\|_2^2 \|M_k^{1/2} \alpha\|_2^2 = (\delta_k^T M_k \delta_k)(\alpha^T M_k \alpha)$$

Et donc on a :

$$\begin{aligned}
\alpha^T M_{k+1} \alpha &= \alpha^T M_k \alpha - \frac{\alpha^T M_k \delta_k \delta_k^T M_k \alpha}{\delta_k^T M_k \delta_k} + \frac{\alpha^T \gamma_k \gamma_k^T \alpha}{\gamma_k^T \delta_k} \\
&\geq \alpha^T M_k \alpha - \frac{(\delta_k^T M_k \delta_k)(\alpha^T M_k \alpha)}{\delta_k^T M_k \delta_k} + \frac{(\gamma_k^T \alpha)^2}{\gamma_k^T \delta_k} \\
&\geq \alpha^T M_k \alpha - \alpha^T M_k \alpha + \frac{(\gamma_k^T \alpha)^2}{\gamma_k^T \delta_k} \\
&\geq \frac{(\gamma_k^T \alpha)^2}{\gamma_k^T \delta_k} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

De plus, pour que  $\alpha^T M_{k+1} \alpha = 0$ , il faut que  $\frac{\alpha^T M_k \delta_k \delta_k^T M_k \alpha}{\delta_k^T M_k \delta_k} \geq 0$  et que  $\frac{(\gamma_k^T \alpha)^2}{\gamma_k^T \delta_k} = 0$ . La première équation nous donne la condition suivante sur  $\alpha$  : il faut que  $\alpha$  soit colinéaire à  $\delta_k$ . La deuxième équation nous donne la condition suivante :  $\alpha$  doit être orthogonal à  $\gamma_k$ . Comme on a supposé au début que  $\gamma_k^T \delta_k > 0$ , il n'y a qu'un seul  $\alpha$  qui vérifie ces deux conditions, c'est  $\alpha = 0$ . Donc  $M_{k+1}$  est définie positive si  $\gamma_k^T \delta_k > 0$ .

### Troisième point

Dans ce point, on suppose que  $\gamma_k = \gamma_k^\ell$ . D'après le premier point, on a :

$$\gamma_k \approx H_k \delta_k$$

Ainsi, on a :

$$\gamma_k^T \delta_k \approx \delta_k^T H_k^T \delta_k$$

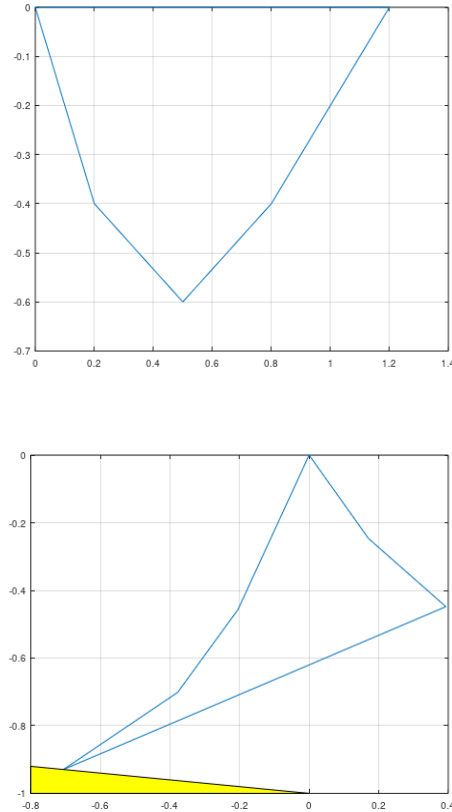
Comme  $H_k$  n'est pas nécessairement définie positive, cela ne garantit pas la définie positivité de  $M_{k+1}$ .



## 7 Cas tests

### 7.1 Cas test 5.a

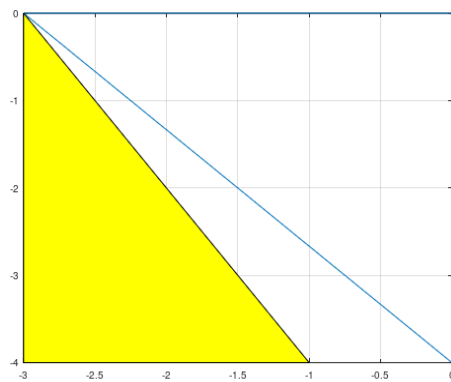
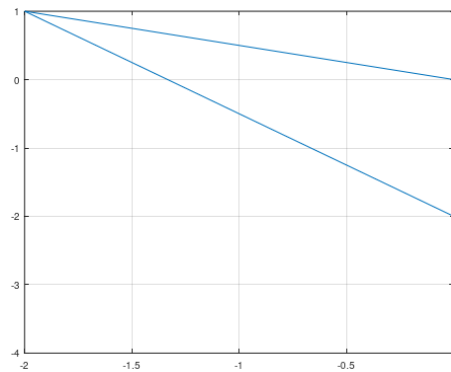
Dans ce cas test, nous avons qu'une seule contrainte d'inégalité qui se traduit par un plancher de pente  $-0.1$ .



Nous pouvons observer que la chaîne finale possède un noeud sur le plancher mais sinon toute la chaîne se trouve au dessus de ce plancher.

### 7.2 Cas test 5.b

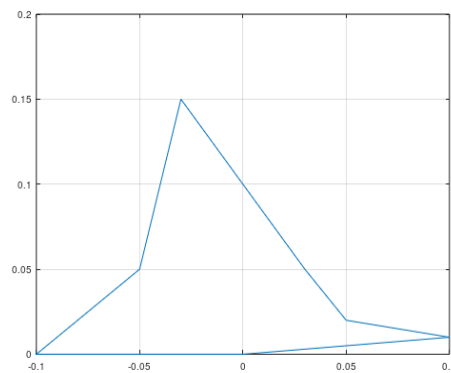
Dans ce cas test, nous avons deux contraintes d'inégalité qui se traduisent par un plancher au sol avec un pente de  $-2$  et un mur sur le côté droit de la chaîne initiale. Après plusieurs itération nous obtenons la chaîne finale suivante :

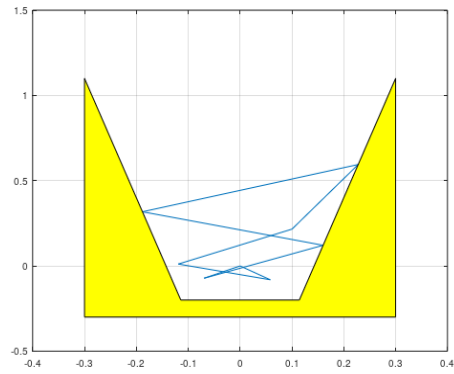


Nous pouvons observer que cette chaîne est bien au dessus du sol et du côté gauche du mur.

### 7.3 Cas test 5.c

Voici le chaîne dans un seau (figure 1) et le point initial (figure 2):





## 7.4 Cas test 5.d

Voici une configuration avec plancher originale et la position d'équilibre de la chaine, avec figure 1 initialisation et figure 2 point final:

