UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências da Administração e Socioeconômicas
Departamento de Ciências Econômicas

Disciplina: Métodos Quantitativos em Economia I
Docente: Paulo Victor da Fonseca
Contato: paulo.fonseca@udesc.br
Página da disciplina: Métodos Quantitativos I
Data de entrega: 05/05/2025

Discente: ____________________

1. Encontre e classifique os pontos críticos (máximo local, mínimo local, ou nenhum desses casos) de cada uma das funções a seguir.

   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$.

   (b) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 6x + 2y$.

   (c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

   (d) $f(x, y) = e^{2x} - 2x + 2y^2 + 3$.

   (e) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

   (f) $f(x, y, z) = xz + x^2 - y + yz + y^2 + 3z^2$.

2. Uma firma é um produtor em um mercado perfeitamente competitivo e vende dois bens G_1 e G_2 a \$1000 e \$800, respectivamente. O custo total de produção destes bens é dado por:

$$CT = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2,$$

   onde Q_1 e Q_2 denotam o nível de produção de G_1 e G_2, respectivamente.

   Encontre o lucro máximo e os valores de Q_1 e Q_2 aos quais este lucro é atingido. Mostre que este ponto é, de fato, um ponto de máximo.

3. Uma firma tem a possibilidade de cobrar preços distintos de seu produto no mercado doméstico e externo. As equações de demanda correspondentes são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 300 - P_1 \\ Q_2 &= 400 - 2P_2. \end{aligned}$$

   A função custo total é dada por:

$$CT = 5000 + 100Q,$$

   onde $Q = Q_1 + Q_2$.

   Determine os preços que esta firma deve cobrar para maximizar seus lucros com discriminação de preços e calcule o valor deste lucro. Mostre que este ponto é, de fato, um ponto de máximo.

4. Considere uma firma monopolista que produz dois tipos de bens, denotados por X e Y. Sejam as quantidades produzidas dos dois tipos de bens denotadas por x e y e os preços cobrados por estes bens iguais a, respectivamente, p_x e p_y. Considere, ainda, que as funções de demanda inversa para estes bens dadas por:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{10}(54 - 3x - y), \\ p_y &= \frac{1}{5}(48 - x - 2y). \end{aligned}$$

Suponha que a função custo total da firma monopolista seja dada por:

$$C(x, y) = 8 + 1,5x + 1,8y.$$

Pede-se:

(a) A função lucro da firma monopolista.

(b) A quantidade ótima produzida de cada um dos bens que maximiza a função lucro da firma monopolista.

(c) Mostre que o ponto ótimo do item anterior é, de fato, um ponto de máximo.

(d) Determine se a função lucro é uma função côncava, convexa ou nenhum dos casos.

5. Considere uma forma quadrática em três variáveis $q(u_1, u_2, u_3)$. Essa forma quadrática pode ser expressa como um produto de três matrizes da seguinte forma:

$$q(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv u'Du.$$

Determine se as formas quadráticas a seguir são positiva ou negativa definidas ou semi-definidas:

(a) $q = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

(b) $q = -x_1^2 - 2x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

6. Como um consultor financeiro do *The Journal of Important Stuff*, você deve determinar quantas páginas desta revista devem ser alocadas para assuntos relevantes a respeito de tópicos econômicos (E) e quantas páginas devem ser alocadas para outros assuntos não tão relevantes (U) de forma a maximizar as vendas do periódico.

Considerando que o objetivo do periódico é maximizar vendas e que a função de vendas deste periódico é dada por:

$$S(U, E) = 100U + 310E - \frac{1}{2}U^2 - 2E^2 - UE.$$

Pede-se:

(a) Encontre a quantidade ótima de páginas que deve ser alocada para temas econômicos relevantes (E) e outros temas "irrelevantes" (U).

(b) Mostre que o resultado obtido no item anterior é, de fato, um ponto de máximo.

(c) Calcule o nível máximo de vendas deste periódico.

(d) Determine se a função de vendas do periódico é uma função côncava, convexa ou nenhum dos casos.

7. Considere as funções abaixo e classifique se são funções côncavas, convexas, estritamente côncavas, estritamente convexas ou nenhuma delas. Além disso, encontre seus pontos extremos e determine sua natureza.

   (a) $z = (x + y)^2$.

   (b) $z = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 - 3$.

   (c) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$, onde $x > 0$ e $y > 0$.

   (d) $z = \log x - exp(y) - x^2$.

8. Considere os conjuntos a seguir e determine se o conjunto é convexo ou não (a resolução pode ser feita pela definição de conjunto convexo ou argumentando pelo gráfico dos conjuntos).

   (a) $\{(x, y)|y \geq 2x - x^2; x > 0, y > 0\}$.

   (b) $\{(x, y)|y \leq \ln(x)\}$.

   (c) $\{(x, y)|y = -e^x\}$.

   (d) $\{(x, y)|y \geq -e^x\}$.