Programação Linear

Paulo Victor da Fonseca

Sumário

Introdução

- Programação Linear (LP): problemas de otimização condicionados nos quais o objetivo é maximizar ou minimizar uma função linear sujeito a um conjunto de restrições de igualdade e/ou desigualdade lineares

- Em princípio qualquer problema LP pode ser resolvido numericamente, desde que uma solução exista: método simplex fornece um algoritmo numérico eficiente que encontra o conjunto solução em um número finito de passos

- Não discutiremos método simplex, discutiremos a teoria básica de problemas LP ao invés de detalhes do método simplex

- A partir de desenvolvimentos nos anos 80, o método simplex deixou de ser o estado da arte para solucionar grandes problemas LP numericamente

Abordagem gráfica

- Um problema LP geral em apenas duas variáveis envolve maximizar ou minimizar uma função objetivo linear:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

  sujeito a m restrições de desigualdade lineares:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ &\ddots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq b_m \end{aligned}$$

- Normalmente impomos, também, restrições de não-negatividade:

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Abordagem gráfica

- Problema de produção (Bertsimas & Tsitsiklis, 1997): uma fábrica produz dois produtos - Produto 1 e Produto 2
- A produção de cada bem requer tanto matéria-prima quanto mão-de-obra
- A venda de cada produto gera uma receita

	Produto 1	**Produto 2**
Material	2	5
Trabalho	4	2
Receita	3	4

- 30 unidades de material e 20 unidades de trabalho estão disponíveis
- Objetivo é construir um plano de produção que maximize receita

Aborgadem gráfica

- Formulação do problema:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Aborgadem gráfica

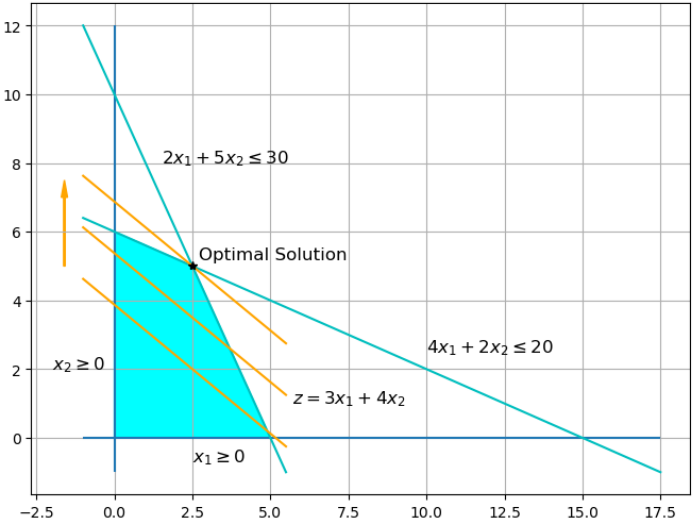


Figura Solução gráfica do problema de produção

Abordagem gráfica

- Nomenclatura
- Solução viável: um vetor x que satisfaz todas as restrições
- Conjunto factível: o conjunto de todas as soluções viáveis
- Solução ótima: uma solução viável x que maximiza ou minimiza a função objetivo
- Valor ótimo: o valor da função objetivo na solução ótima
- Se o conjunto factível é vazio, dizemos que o problema LP é não-factível

Abordagem gráfica

- Na Figura, a região azul é o conjunto factível no qual todas as restrições são satisfeitas
- As linhas paralelas laranjas são as curvas de nível da função objetivo (iso-receitas)
- O objetivo da firma é encontrar as linhas laranjas paralelas ao limite superior do conjunto factível
- A intersecção do conjunto factível e a linha laranja mais alta delimita o conjunto factível
- Neste caso, o conjunto factível é o ponto $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

Exemplo 2

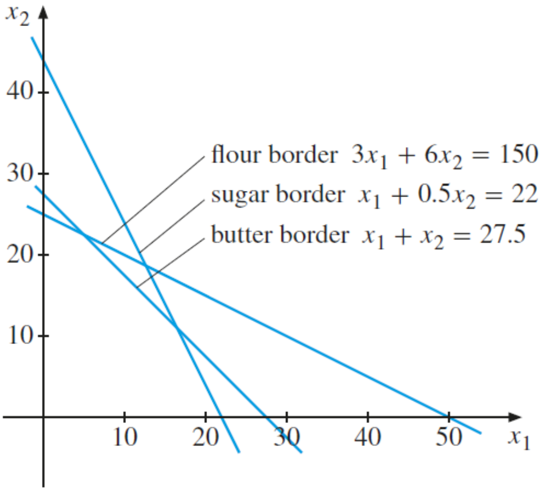
- Um padeiro tem 150 kg de farinha, 22kg de açúcar e 27,5kg de manteiga com os quais prepara 2 tipos de bolo
- Suponha que a produção de 1 dúzia de bolos do tipo A requer 3kg de farinha, 1kg de açúcar e 1kg de manteiga
- Suponha que a produção de 1 dúzia de bolos do tipo B requer 6kg de farinha, 1/2 kg de açúcar e 1kg de manteiga
- A receita de venda de 1 dúzia de bolos do tipo A é de 20 e a receita de venda de 1 dúzia de bolos do tipo B é de 30
- Quantas dúzias de bolos do tipo A (x_1) e quantas dúzias de bolos do tipo B (x_2) o padeiro deve produzir para maximizar sua receita?

Exemplo 2

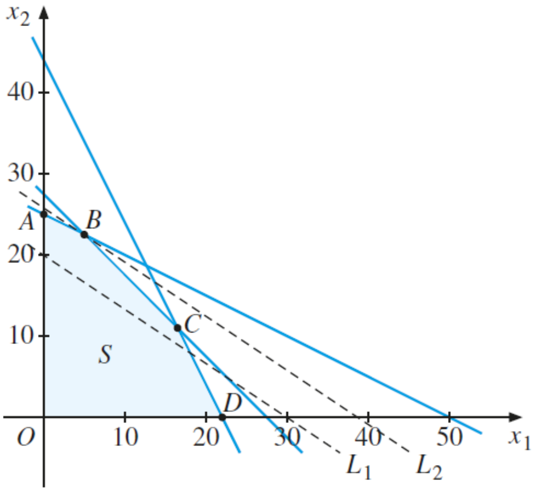
- Formulação do problema:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 150 \\
& x_1 + 0,5x_2 \leq 22 \\
& x_1 + x_2 \leq 27,5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 2



x_2
40
30
20
10
10
20
30
40
50
x_1
flour border $3x_1 + 6x_2 = 150$
sugar border $x_1 + 0.5x_2 = 22$
butter border $x_1 + x_2 = 27.5$



x_2
40
30
20
10
A
B
C
D
S
O
10
20
30
40
50
x_1
L_1
L_2

Exemplo 3

- Uma firma produz dois bens, A e B
- A firma possui 2 fábricas que, conjuntamente, produzem os 2 bens nas seguintes quantidades (por hora):

	Fábrica 1	**Fábrica 2**
Bem A	10	20
Bem B	25	25

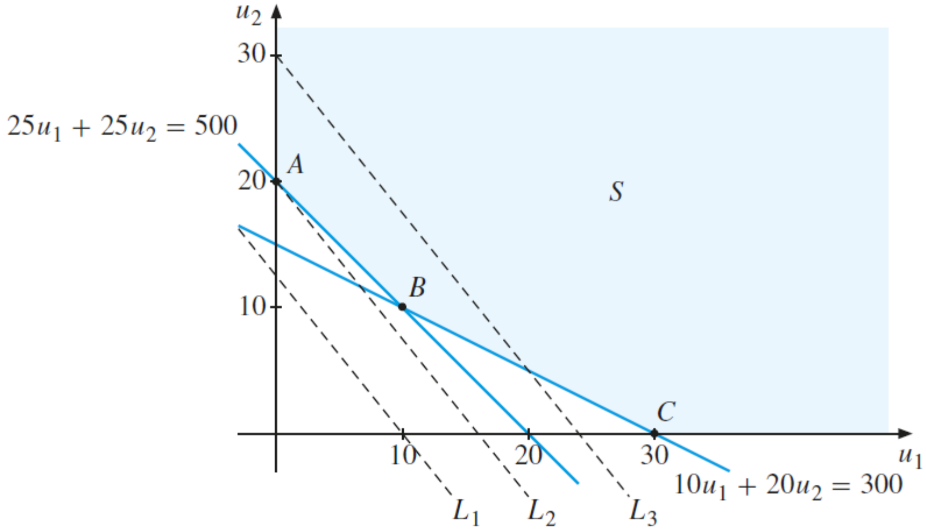
- A firma recebe uma encomenda de 300 unidades do Bem A e 500 unidades do Bem B
- Os custos de operação das fábricas são de 10000 e 8000 por hora, respectivamente

Exemplo 3

- Formulação do problema:

$$
\begin{aligned}
\min_{u_1, u_2} \quad & z = 10000u_1 + 8000u_2 \\
\text{s.a.} \quad & 10u_1 + 20u_2 \geq 300 \\
& 25u_1 + 25u_2 \geq 500 \\
& u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 3



- Abordagem gráfica funciona bem quando temos apenas duas variáveis de decisão
- O método pode ser estendido para 3 variáveis de decisão: o conjunto factível, neste caso, é um poliedro convexo no espaço tridimensional e as superfícies de nível da função objetivo são planos no espaço tridimensional
- Não é fácil visualizar a solução nestes casos
- Para mais que três variáveis de decisão, não temos abordagens gráficas disponíveis
- No entanto, podemos usar teoria da dualidade para resolver problemas LP graficamente quando ou o número de incógnitas ou o número de restrições é menor ou igual a 3

Problema LP generalizado

- Objetivo é maximizar ou minimizar a função objetivo:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = c' x \tag{1}$$

sujeito a m restrições lineares de desigualdade:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \tag{2}$$

usualmente impomos restrições de não-negatividade:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0 \tag{3}$$

Problema LP generalizado

- O conjunto de soluções viáveis, neste caso, é um poliedro convexo no ortante não-negativo do espaço *n*-dimensional
- Para o caso tridimensional temos o seguinte exemplo:

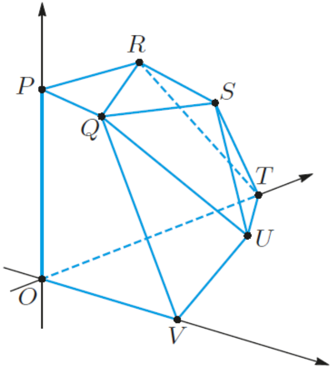


Figura Um poliedro convexo no ortante não-negativo do espaço tridimensional

Problema LP generalizado

- Os pontos O, P, Q, R, S, T, U, V são pontos extremos
- Os segmentos de reta OP, OT, OV, etc. são arestas
- As porções planas da fronteira que são triângulos ou quadriláteros são faces
- Estes objetos também estão presentes em qualquer poliedro convexo do espaço n-dimensional
- Se n e m são grandes, o número de pontos extremos pode ser gigantesco, mas o método simplex pode resolver este tipo de problemas

Problema dual

- O que acontece com a solução ótima se a disponibilidaed de recursos é alterada?
- Para problemas de programação linear, as respostas a questões deste tipo estão relacionadas à teoria da dualidade de LP
- Considere, novamente, o problema do padeiro [NA LOUSA]

Problema dual

- Considere o problema LP geral:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.a.} \quad & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

- O problema dual associado é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & b_1u_1 + \cdots + b_mu_m \\ \text{s.a.} \quad & a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1 \\ & \qquad \vdots \\ & a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m \geq c_n \\ & u_1 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Problema dual

- Em formulação matricial, o problema primal é dado por:

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{6}$$

- Em formulação matricial, o problema dual é dado por:

$$\min \mathbf{b}'\mathbf{u} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}'\mathbf{u} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \tag{7}$$

- Ou, de forma mais conveniente:

$$\min \mathbf{u}'\mathbf{b} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{u}'\mathbf{A} \geq \mathbf{c}', \quad \mathbf{u}' \geq \mathbf{0} \tag{8}$$

Teorema da dualidade

Teorema (1)

Se $(x_1, \ldots, x_n)$ *é uma solução viável para o problema primal e* $(u_1, \ldots, u_m)$ *é uma solução viável para o problema dual, então:*

$$b_1u_1 + \cdots + b_mu_m \geq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \tag{9}$$

De forma que a função objetivo no problema dual sempre tem um valor pelo menos tão grande quanto do problema primal.

Teorema da dualidade

Teorema (2)

Suponha que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *e* $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ *são soluções viáveis para o problema primal e dual, respectivamente, e que:*

$$b_1 u_1^* + \cdots + b_m u_m^* = c_1 x_1^* + \cdots + c_n x_n^* \tag{10}$$

Então $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *é uma solução do problema primal e* $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ *uma solução para o problema dual.*

Teorema da dualidade

Teorema (Teorema da Dualidade)

Suponha que o problema primal possui uma solução ótima finita. Então, o problema dual também possui uma solução ótima finita e os valores correspondentes das funções objetivo são iguais.

Se o problema primal não possui um ótimo limitado, então, o problema dual não possui solução viável.

De forma simétrica, se o problema primal não possui solução viável, então, o problema dual não possui um ótimo limitado.

Bibliografia

- CHIANG, A.C.; WAINWRIGHT, K. Matemática para economistas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006
- DE LA FUENTE, Á. Mathematical methods and models for economists. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000
- NICHOLSON, W.; SNYDER C. Teoria microeconômica: Princípios básicos e aplicações. Cengage Learning Brasil, 2019. Disponível em: app.minhabiblioteca.com.br/books/9788522127030/
- SIMON, C.P.; BLUME, L. Matemática para economistas. Porto Alegre: Bookman, 2004
- SYDSÆTER, K.; HAMMOND, P.J.; STRØM, A.; CARVAJAL, A. Essential mathematics for economic analysis. 5th.ed. Harlow, UK: Pearson Education Limited, 2016