

Scopo dell'esperienza: Lo scopo dell'esperienza è analizzare l'evento GW150914 per determinare le masse degli oggetti tramite match filtering

1. Apparato sperimentale

La rivelazione delle onde gravitazionali avviene attraverso l'uso di interferometri laser. Un interferometro è composto da un fascio laser infrarosso che viene diviso da un beam splitter in due direzioni ortogonali. I fasci divisi entrano in due cavità di Fabry-Perot (FP) composte da un primo specchio semiriflettente e un secondo totalmente riflettente posto a distanza tale da mantenere la cavità in risonanza. Quando i due fasci tornano indietro sul beam splitter creano interferenza distruttiva ma una piccola variazione della lunghezza delle cavità causata dal passaggio di un'onda gravitazionale produce un segnale luminoso che viene rivelato da un fotodiodo. Il passaggio di un'onda gravitazionale induce uno *strain* h sul rivelatore all'incirca uguale al rapporto tra la variazione di lunghezza dei bracci indotta dall'onda e la lunghezza dei bracci dell'interferometro $h = \frac{\Delta l}{l}$. Un valore tipico dello *strain* è $h = 10^{-21}$ ed è lo strain indotto da una sorgente di buchi neri in coalescenza. Le cavità di FP sono necessarie ad aumentare la lunghezza effettiva dei bracci, inoltre aumentano le differenze di fase di un fattore di alcune centinaia rispetto al caso di bracci semplici. Sono presenti inoltre due ulteriori specchi, uno di power recycling tra sorgente e beam splitter per rimettere nel sistema parte della potenza nell'interferometro e uno specchio di signal recycling per ridurre lo shot noise, rumore dominante sulle alte frequenze.

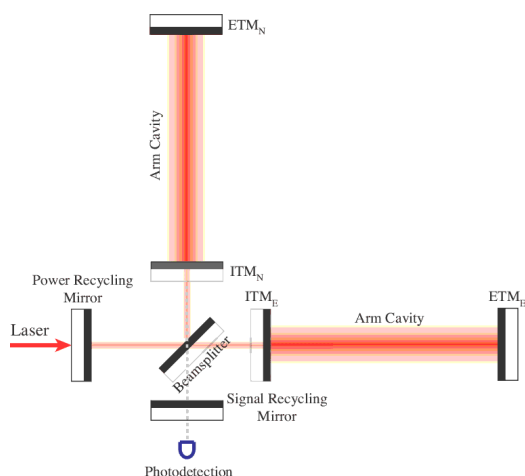


Figura 1: Interferometro

2. Matched Filtering

Il matched filtering è una tecnica per estrarre un segnale noto da un fondo di rumore.

Consideriamo un segnale $s(t) = n(t) + h(t)$ dove $h(t)$ è il segnale gravitazionale (che assumiamo conoscere a prescindere) e $n(t)$ è un rumore stazionario gaussiano a media nulla.

Sia H_0 l'ipotesi nulla (segnale non presente) e H_1 l'ipotesi di presenza del segnale gravitazionale.

Usando il teorema di Bayes e le relazione di completezza otteniamo un odd ratio di $O(H_1|s) = O(H_1)\lambda(H_1|s)$ dove $\lambda = \frac{p(s|H_1)}{p(s|H_0)}$ è la likelihood ratio e $O(A) = P(A)/P(\neg A)$ è l'odd ratio

Si noti che tutta la dipendenza dei dati è nella likelihood ratio mentre $O(H_1)$ è una quantità stabilita a priori.

Poiché il rumore è gaussiano le densità di probabilità che compongono la likelihood ratio sono

$$p(s|H_0) \propto e^{-(s,s)/2}$$

$$p(s|H_1) \propto e^{-(s-h,s-h)/2}$$

dove $(s, h) = 4 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df$, con S_n PSD del segnale, è chiamato prodotto interno tra s ed h .

Quindi la likelihood ratio diventa

$$\lambda(H_1|s) = e^{(s,h)} e^{-(h,h)/2}$$

Tutta la dipendenza dai dati sta in $e^{(s,h)/2}$ e poiché l'esponenziale è monotono per massimizzare la likelihood ratio basta massimizzare il prodotto interno (s,h) dove h è un template appositamente scelto.

Infine si prende in considerazione come parametro statistico il rapporto segnale rumore definito come $\rho = x/\sigma$ dove x è il prodotto interno e σ la deviazione standard del prodotto interno

3. Analisi Dati

I dati sono stati scaricati usando la funzione `fetch_open_data` di `gwpy` e salvati su disco e sono composti dalla serie temporale (strain in funzione del tempo) e dai segmenti di data quality che contengono gli intervalli temporali in cui il segnale è valido. I dati selezionati hanno le seguenti caratteristiche:

evento	GW150914
t_0 (istante in cui è stato rivelato il segnale)	1126259462.4 GPS
rivelatori	L1,H1
sample rate	4kHz
durata	1h

Nell'intervallo temporale scelto il segnale è sempre valido quindi da qui in poi non ci preoccuperemo più dei segmenti di data quality

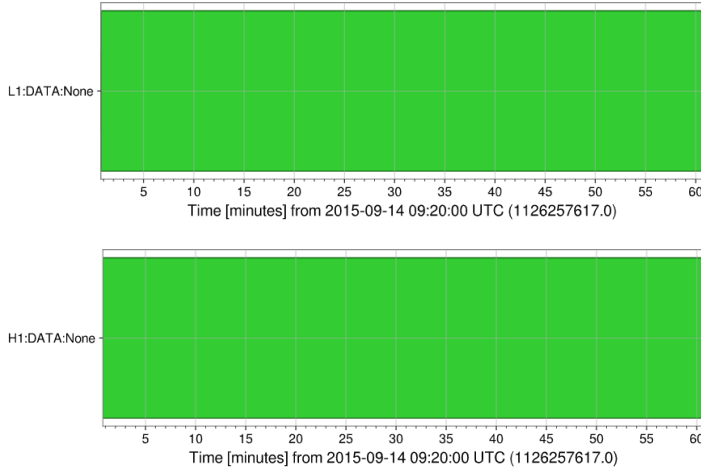


Figura 2: Data quality flag

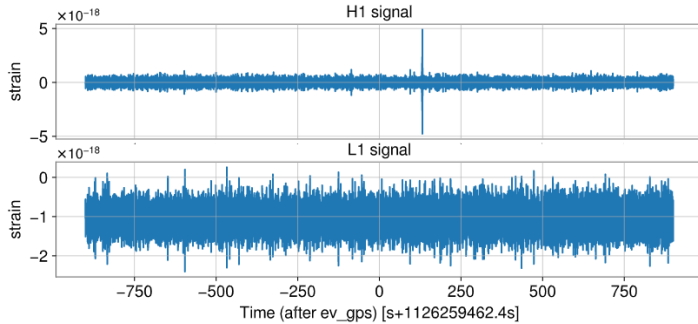


Figura 3: Serie temporale

3.1. Glitch

Osservando il segnale H1 in figura 3 si può osservare un picco nel segnale a $t - t_0 \simeq 150s$. Questo picco non è il segnale causato dall'onda gravitazionale ma un glitch ovvero un rumore transiente molto intenso

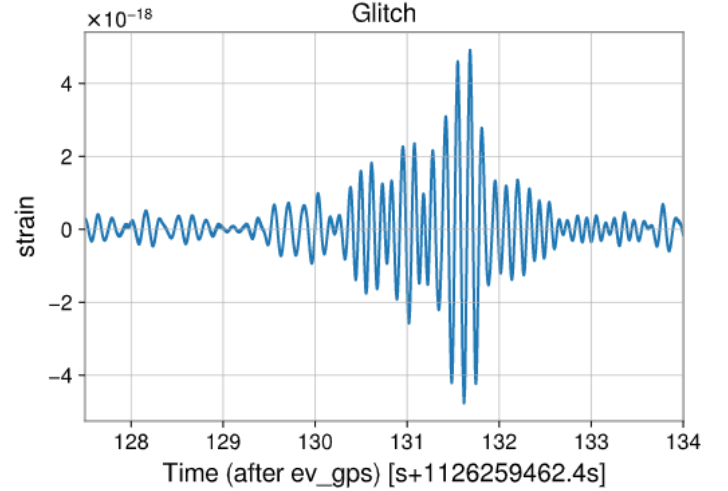


Figura 4: Glitch presente nel segnale di Hanford

Facendo la Q-Trasformata si può osservare che è un rumore di bassa frequenza.

Confrontandolo con le varie classi di glitch presenti nel sito di GravitySpy sembrerebbe essere causato da scattering luminoso, infatti questo spettro corrisponde sia nella forma che nel range di frequenze a questa classe di glitch composta da rumore a frequenze inferiori dei 30 Hz

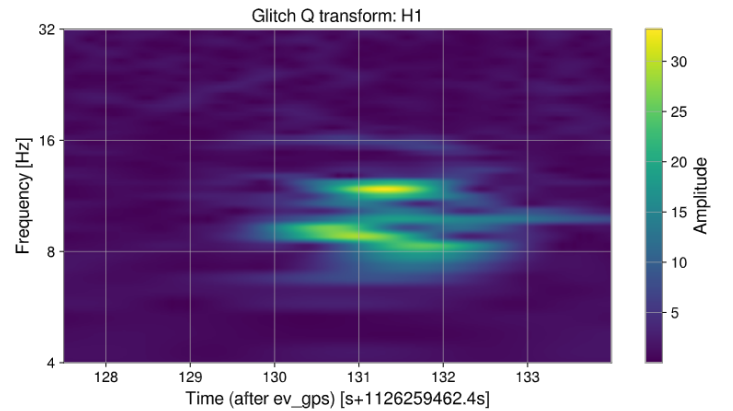


Figura 5: Spettro del glitch presente nel segnale H1

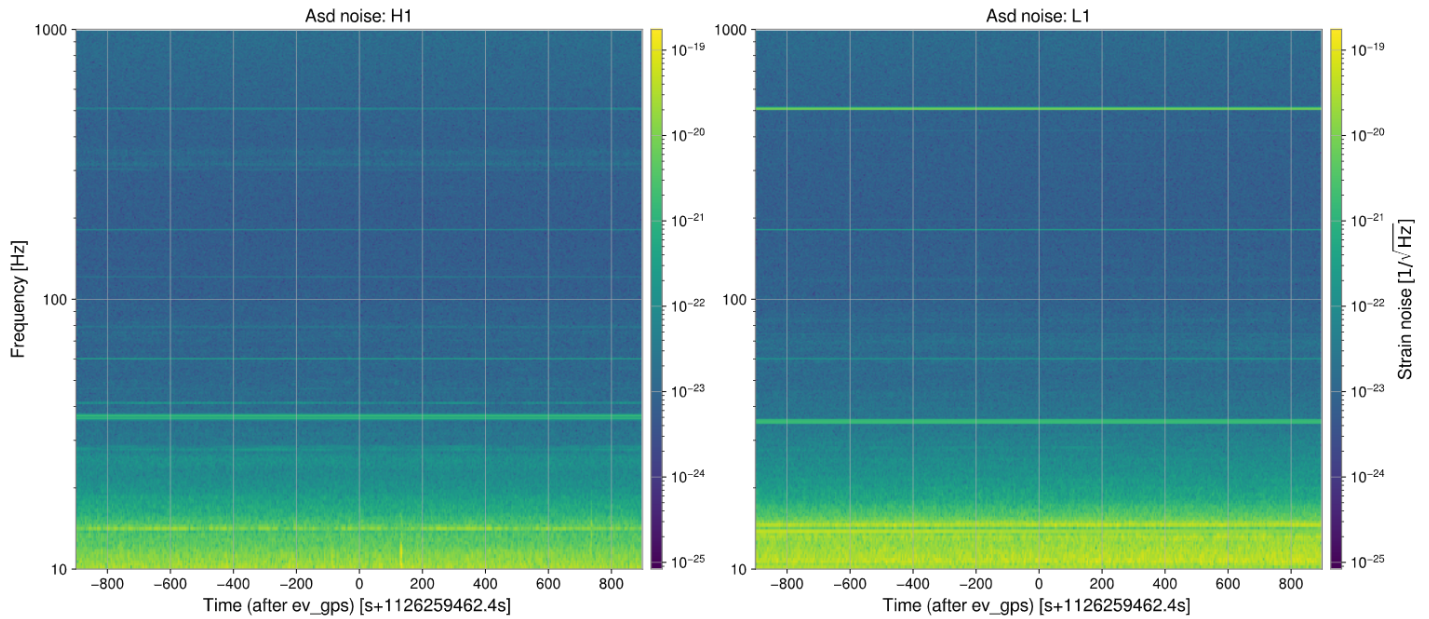


Figura 7: Amplitude spectral density in funzione del tempo

3.2. Analisi del rumore

La Amplitude Spectral Density (ASD) è la radice della trasformata di Fourier del segnale ed è utile per analizzare il rumore nelle sue varie componenti in frequenza.

E' possibile osservare come la ASD varia nel tempo. In questo caso si è fatta la radice della FFT su finestre lunghe 4 secondi e sovrapposte di 2 secondi. Poichè la FFT introduce sempre degli effetti di bordo i segnali nelle finestre sono stati convoluti con il kernel di Hann (in figura 6) in modo tale da diminuire gli effetti di bordo.

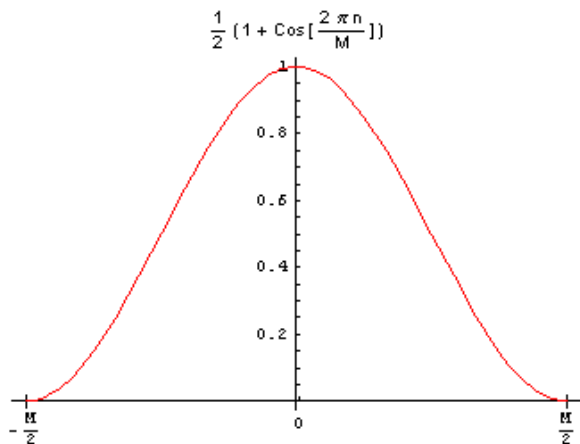


Figura 6: Finestra Hann

Guardando lo spettrogramma (figura 7) è possibile notare delle frequenze dominanti nel rumore. In particolare la riga a 60Hz è causata dall'alimentazione elettrica che in USA è di 60Hz.

Inoltre anche qui è possibile osservare un picco a bas-

sa frequenza nei dati di Hanford causati dal glitch. Mediando su tutte le finestre si ottiene la ASD ed è indice della sensibilità del rivelatore alle varie frequenze. Il metodo che è stato descritto per ottenere la ASD è chiamato metodo di Welch

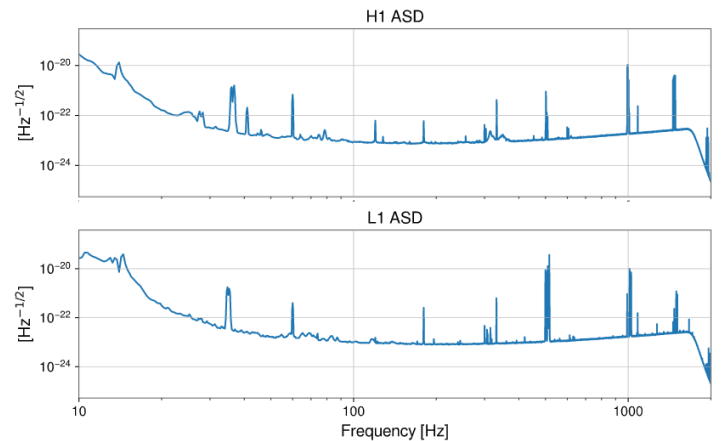


Figura 8: Amplitude spectral density mediato sul tempo

3.2.1. Stazionarietà dell'ASD

Per valutare la stazionarietà del rumore si è operato in 2 modi.

Come prima cosa si è fatta una media mobile sullo spettrogramma tramite una convoluzione con una matrice $n \times m$ composta da soli $1/(n \times m)$ tale da coprire un'area dello spettrogramma pari a $10Hz \times 10s$. Dopodichè si è calcolata la derivata discreta dell' asd (figura 9).

Un altro modo è quello di calcolare la deviazione standard dell'ASD per ogni frequenza.

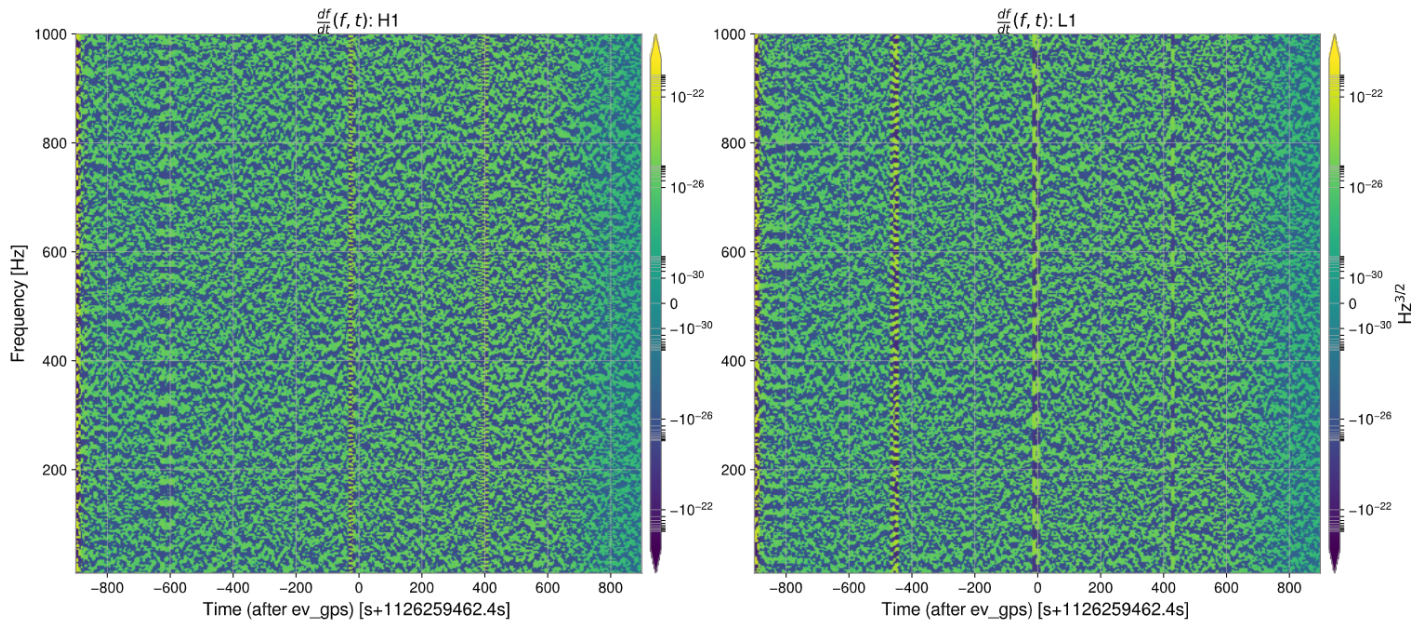


Figura 9: Derivata temporale sulla media mobile dell'ASD

La deviazione standard può essere confrontata con l'ASD facendo il rapporto tra le due curve, questo è indice della variazione relativa dell'ASD.

Si può notare come grossomodo la ASD oscilli intorno al suo valore centrale con un valore in media del 40% del segnale stesso ma sono presenti dei picchi in cui l'errore relativo crolla.

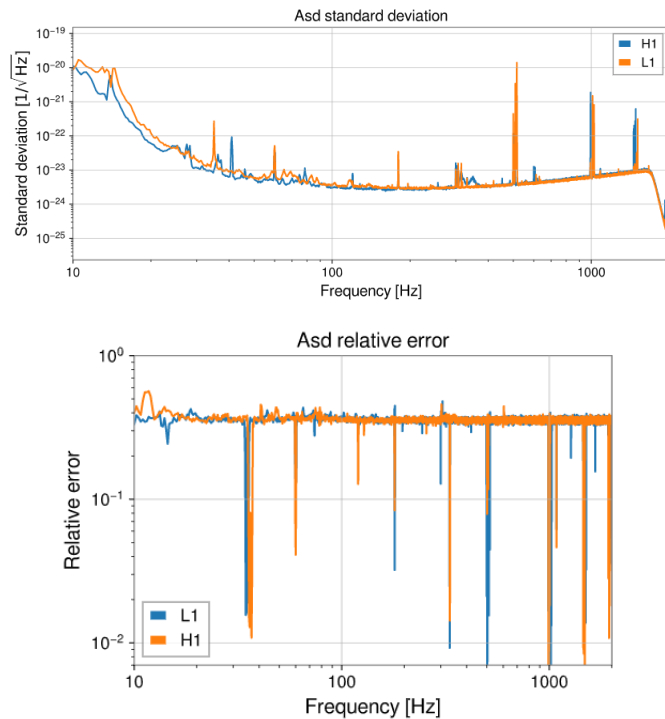


Figura 10: Deviazione standard dell'ASD (sopra). Errore relativo dell'ASD (sotto)

3.3. Analisi temporale

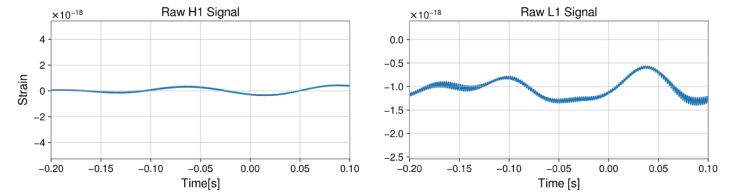


Figura 12: Segnale non filtrato

Per poter osservare il segnale si devono applicare dei filtri. Per capire quali sono le frequenze rilevanti nel segnale facciamo la Q trasformata in un intervallo temporale di 0.3s intorno l'evento.

Come si può osservare in figura 11 le frequenze rilevanti sono comprese tra i 50 e i 300Hz quindi si è scelto di applicare un filtro passabanda da 50-300Hz e un filtro notch a 60Hz per eliminare la componente di rumore data dall'alimentazione elettrica.

In questo modo il segnale diventa visibile.

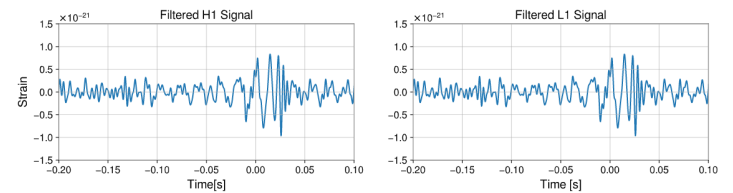


Figura 13: Segnale filtrato

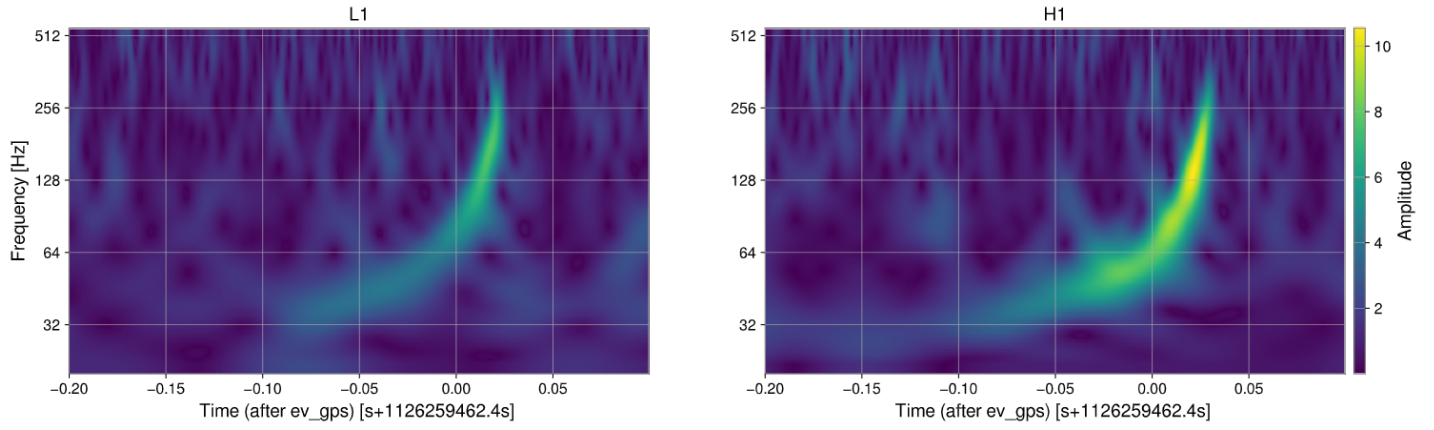


Figura 11: Q Trasformata del segnale

4. Template matching

Ora si vuole confrontare i segnali con i modelli simulati per vari valori di masse.

Il matched filtering è costruito sotto l'ipotesi di rumore gaussiano stazionario a media nulla quindi per prima cosa si è fatto un istogramma di tutto il segnale per verificare questa ipotesi.

Sull'istogramma si è fittata una Gaussiana considerando errori poissoniani sui conteggi.

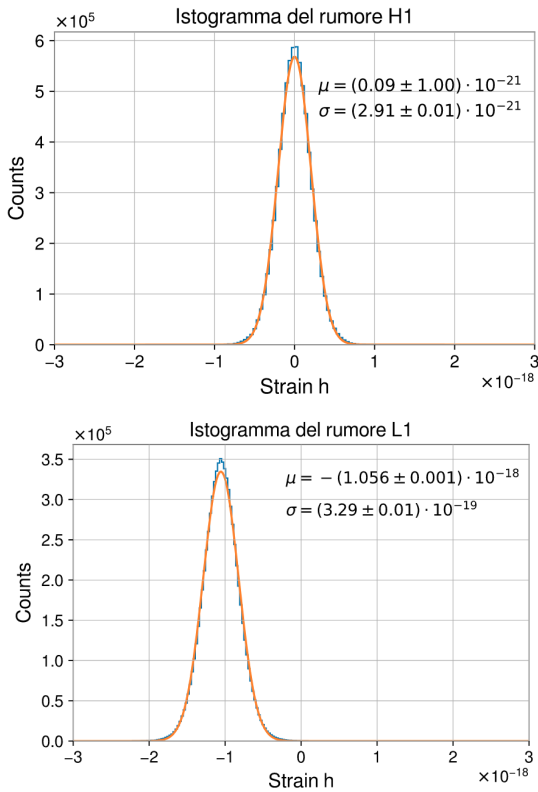


Figura 14: Istogrammi dello strain. Su H1 si è esclusa la parte di segnale contenente il glitch per comodità

Si può osservare (in figura 14) che effettivamente il rumore è gaussiano ma L1 presenta un offset sulla media di $\simeq -1 \cdot 10^{-18}$.

Dopo aver selezionato una finestra di 30 secondi intorno l'evento i segnali sono stati ricampionati a un sample rate di 2048Hz e vi è stato applicato un filtro passa alto a 15Hz.

Anche la PSD (costruita sempre tramite il metodo di Welch) è stata ricampionata tramite interpolazione in modo che la risoluzione in frequenza sia la stessa del segnale. Inoltre, tramite la funzione `inverse_spectrum_truncation` di `pycbc`, è stato possibile eliminare le frequenze minori di 15Hz sull'inverso della PSD.

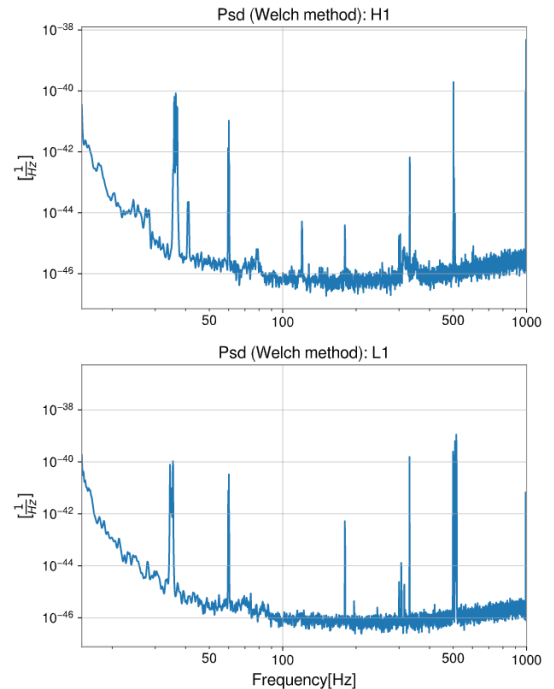


Figura 15: PSD filtrate

E' stata costruita una griglia di 40×40 elementi, da 25 a 45 masse solari. Per ogni coppia di masse è stata generato un template tramite l'approssimante SEOBNRv4_opt trascurando gli spin.

E' stato necessario creare template diversi per i dati di Hanford e Livingston, per Hanford si sono creati template con frequenza minima di 10Hz mentre per Livingston di 15Hz. Non si è capito il motivo ma impostando lo stesso valore per entrambi porta il template a differire sensibilmente da uno dei due segnali. Poichè le m_1 ed m_2 sono intercambiabili tutti i calcoli sono stati fatti solo per $m_2 \leq m_1$ e il resto della griglia è stata copiata in modo simmetrico. Per ogni coppia di masse è stato calcolato il rapporto segnale rumore tramite la funzione di match filtering. Di questo sono stati scartati 5 secondi a entrambi gli estremi per eliminare gli effetti di bordo causati dal match filtering ed è stato preso il massimo del modulo.

Il massimo del rapporto segnale rumore trovato è di 19.6 per H1 e 13.7 per L1 e i valori delle masse che lo massimizzano sono rispettivamente

	H1 (SNR 19.6)	L1 (SNR 13.7)
m_1	$38.8 \pm 0.5 m_\odot$	$35.8 \pm 0.5 m_\odot$
m_2	$33.2 \pm 0.5 m_\odot$	$35.3 \pm 0.5 m_\odot$

Gli errori sono dati dalla spaziatura della griglia quindi non hanno alcun significato statistico.

Per sovrapporre il template che massimizza il SNR ai dati questi sono stati sbiancati passando al dominio delle frequenze, dividendo per la ASD e tornando al dominio temporale. Inoltre è stato nuovamente applicato un filtro passabanda tra i 30 e i 500Hz. Il template invece è stato semplicemente riscalato con la psd del segnale e allineato a quest'ultimo.

5. Conclusioni

I template che massimizzano il rapporto segnale rumore fittano il segnale come ci aspettava (figura 18) e il rapporto segnale rumore dei rivelatori combinati, quindi sommati in quadratura, è di 23.9

Le masse di riferimento per l'evento in questione sono $m_1 = 29 \pm 4$ ed $m_2 = 36^{+5}_{-4}$ che sono in accordo con le stime fatte, tenendo conto, però, del fatto che gli errori che si sono posti sono fortemente sottostimati.

Inoltre la differenza temporale dei due picchi nel SNR è di $6.8 \pm 0.5 ms$. Poichè la distanza tra i due rivelatori è di 3002km è possibile stimare l'angolo con cui il fronte d'onda è arrivato rispetto alla congiungente dei rivelatori.

$$\alpha = \arccos(c\Delta t/3002km) \simeq 47.2 \pm 3.9^\circ$$

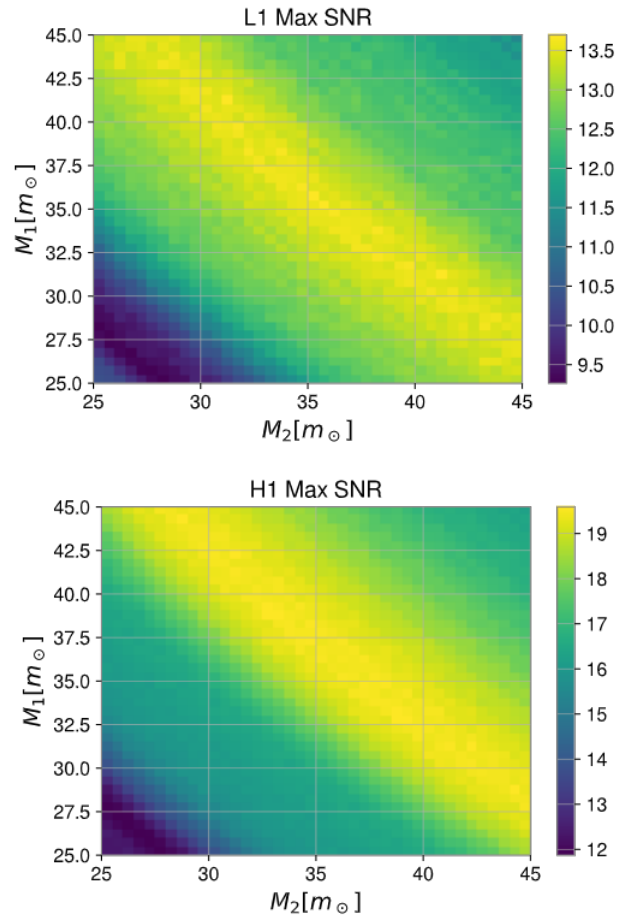
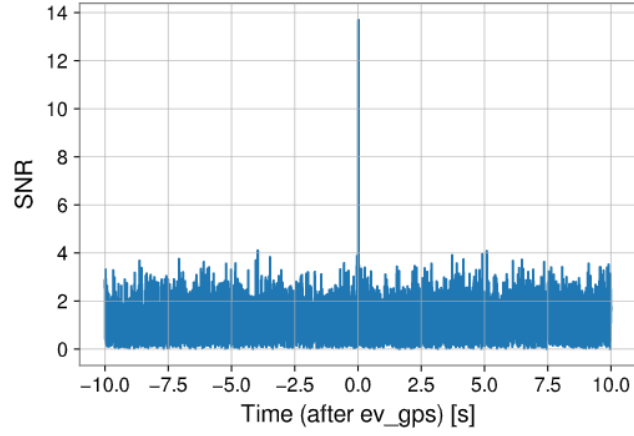


Figura 16: Massimo del rapporto segnale rumore in funzione di m_1 ed m_2

Best SNR match for L1: $m_1:35.8 \pm 0.5 m_\odot, m_2:35.3 \pm 0.5 m_\odot$



Best SNR match for H1: $m_1:38.8 \pm 0.5 m_\odot, m_2:33.2 \pm 0.5 m_\odot$

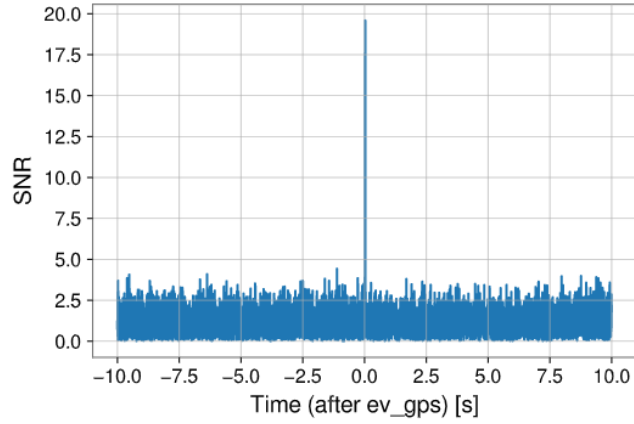


Figura 17: Rapporto segnale rumore massimo

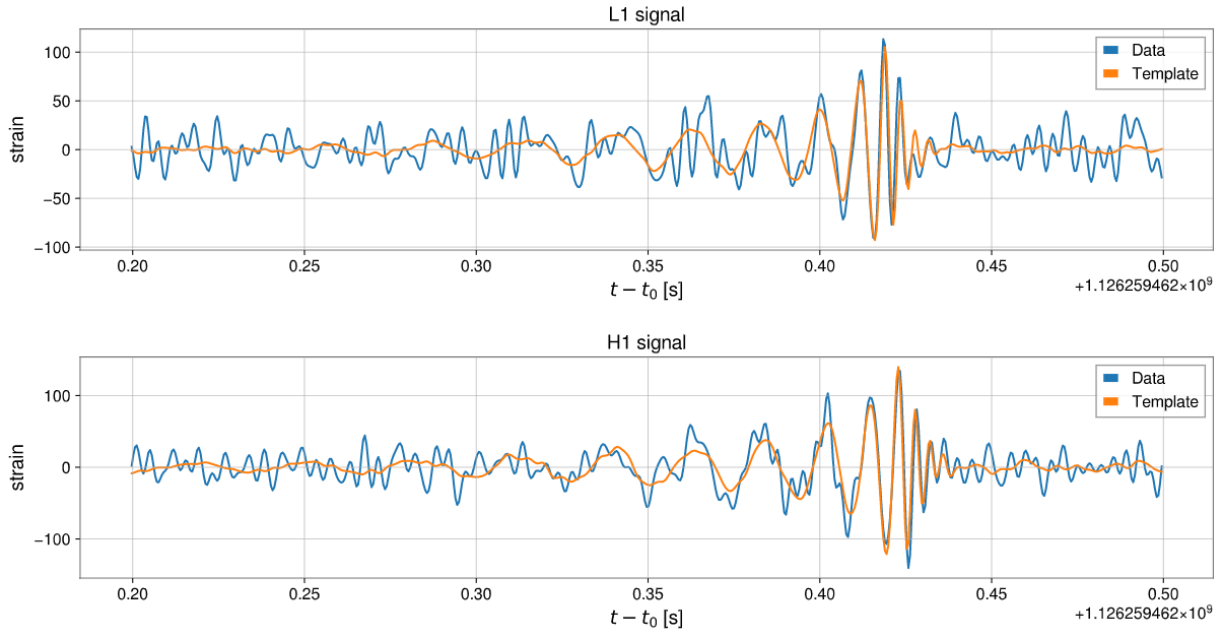


Figura 18: Template sovrapposto al segnale