

Studio del Timing della Pulsar PSR J0633+1746 (Geminga)

Piero Viscone

Scopo dell'esperienza: Determinare i parametri di timing della Pulsar PSR J0633+1746 (Geminga) dalle osservazioni gamma del FermiLAT e stimare i parametri fisici caratteristici tramite il modello di dipolo.

1. Apparato strumentale: Fermi LAT

Il Fermi LAT è un rivelatore di fotoni gamma nel range 20 MeV - 300 GeV che sfrutta come meccanismo di rivelazione la produzione di coppie $e^+ e^-$.

Il rivelatore è composto da:

- Rivestimento di piastre scintillatrici: fungono da anticoincidenza per rigettare tutti i segnali causati dall'ingresso di particelle cariche
- Tracker: un insieme di strip al silicio distanziate di $200 \mu m$ ricostruiscono le tracce della coppia prodotta dal fotone la cui traccia sarà successivamente ricostruita.
- Calorimetro: utile alla costruzione dello spettro

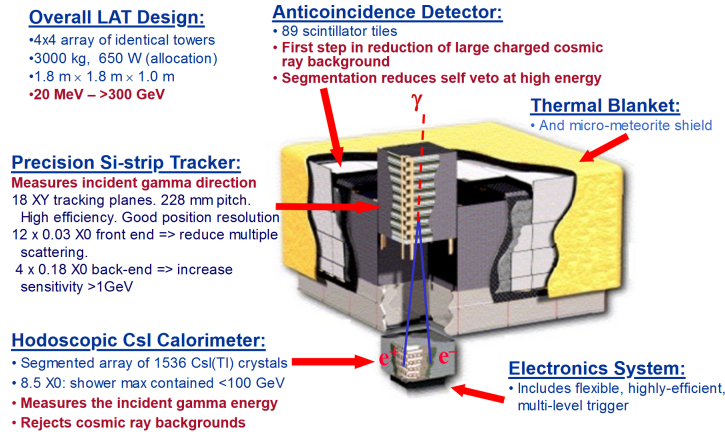


Figura 1: FermiLAT in sezione

Questo strumento si è rivelato fondamentale nello studio della fisica dei gamma grazie alle sue caratteristiche

- PSF 0.6° a 1GeV: Il miglioramento nella psf ha consentito di distinguere più facilmente la posizione delle sorgenti
- FOV 2.4 sr: Ha permesso di coprire grandi porzioni di cielo in breve tempo senza dover occuparsi del puntamento.
- $A_{eff} \simeq 8000 cm^2$ a 1-100GeV: Ha consentito di aumentare sensibilmente la statistica

2. Cenni teorici

2.1. Modello di dipolo

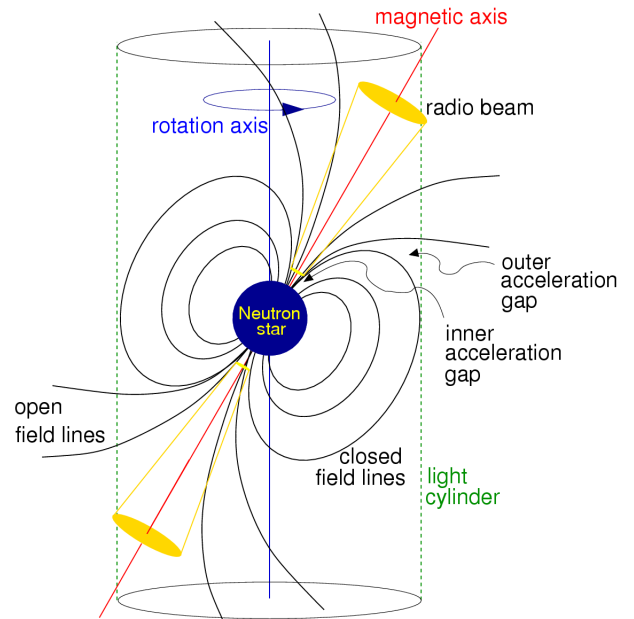


Figura 2: Struttura della magnetosfera di una pulsar

Possiamo modellizzare una pulsar come una sfera uniformemente magnetizzata in rotazione con un angolo α rispetto all'asse magnetico.

L'emissione dominante di tale oggetto è l'emissione di dipolo magnetico

$$P = \frac{2(\ddot{m} \sin \alpha)^2}{3c^3}$$

La potenza emessa in radiazione causa una perdita di energia rotazionale

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{I\Omega^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{2\pi^2 I}{P^2} = -\frac{4\pi^2 I \dot{P}}{P^3}$$

dove il momento di inerzia I caratteristico di una pulsar è di $I = 10^{45} g \cdot cm^2$ e il raggio caratteristico è

$$R = 10km$$

Dato B campo magnetico sulla superficie della pulsar e R il suo raggio, il momento di dipolo di una sfera rotante uniformemente magnetizzata è $|m| = BR^3$, quindi si ha

$$P = \frac{2(BR^3 \sin \alpha)^2 \Omega^4}{3c^3} = \frac{2(BR^3 \sin \alpha)^2}{3c^3} \left(\frac{2\pi}{P} \right)^4$$

Eguagliando questa quantità alla derivata temporale dell'energia rotazionale si ottiene che il campo magnetico è

$$B > 3.2 \cdot 10^{19} \sqrt{P\dot{P}}$$

Un' altra quantità caratteristica che possiamo associare a una pulsar è l'età caratteristica. Dall'equazione per il campo magnetico possiamo osservare che il prodotto $P\dot{P}$ è costante nel tempo (poichè lo è il campo magnetico).

$$\int_{P_0}^P P dP = \int_0^\tau P\dot{P} dt = P\dot{P}\tau$$

$$\frac{P^2 - P_0^2}{2} = P\dot{P}\tau$$

Assumendo che al tempo corrente valga $P \gg P_0$, dove P_0 è il periodo della pulsar alla nascita, si ha che l'età caratteristica è

$$\tau = \frac{P}{2\dot{P}}$$

Questa grandezza è puramente indicativa in quanto il modello di dipolo è un' approssimazione valida solo su scale temporali brevi mentre l'evoluzione delle grandezze caratteristiche di una pulsar può essere soggetta a fenomeni fortemente non lineari.

2.2. Costruzione del fasogramma

Lo strumento rivela, in media, un fotone ogni centinaio di rotazioni della pulsar quindi ricostruire la fase non è immediato.

Quello che si fa è ricostruire la fase come parte frazionaria del numero di rotazioni sviluppata in serie di Taylor in funzione del tempo

$$N = f(t - t_0) + \frac{1}{2}\dot{f}(t - t_0)^2 + O(t^3) \quad [\star]$$

Per trovare i valori f ed \dot{f} si esegue un test di periodicità ovvero si crea una griglia di valori per f ed

\dot{f} , si calcola l'insieme delle fasi di ogni fotone rivelato per ciascuna coppia di valori e infine si calcola lo Z-Test:

$$Z_n^2 = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \cos k\phi_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sin k\phi_j \right)^2$$

dove N è il numero totale di fotoni rivelati e n è il numero di armoniche.

Lo Z_n^2 , per $n \rightarrow \infty$, si distribuisce come un χ_{2n}^2 ed è indice della periodicità dei conteggi data la coppia di valori f ed \dot{f} che va a costruire la fase.

Quindi si va a eseguire uno scan in frequenza su f ed \dot{f} calcolando lo Z test per ogni coppia di valori e si va a considerare la coppia di valori che massimizza lo Z test. In questo modo, fissato un t_0 e associata una fase ad ogni fotone è possibile costruire il fasogramma

2.2.1. Z Test

Dato l'insieme dei tempi di arrivo dei fotoni t_i e l'insieme delle fasi associate $0 < \theta < 2\pi$, per verificare la presenza di un segnale periodico si va a testare l'ipotesi nulla, ovvero che non vi siano segnali periodici.

In assenza di segnali periodici la PDF delle fasi associate ai fotoni sarebbe uniforme $1/2\pi$ mentre nel caso di segnali periodici la PDF sarà del tipo

$$f(\theta) = pf_s(\theta) + (1 - p)\frac{1}{2\pi}$$

dove f_s è la parte di funzione che differisce dalla distribuzione uniforme.

Per testare l'ipotesi nulla si va a calcolare la distanza \mathcal{L}^2 tra le due funzioni

$$\psi(f) = \int_0^{2\pi} (f(\theta) - 1/2\pi)^2 d\theta$$

La PDF $f(\theta)$ però non è nota quindi si usa uno stimatore f_k , in questo modo la funzione $\psi(f_k)$ si distribuisce come un χ^2 con k-1 gradi di libertà (in realtà si distribuisce come un χ^2 di una distribuzione uniforme che però per alti gradi di libertà tende all'usuale χ^2 definito come somma di quadrati di gaussiane.) In questo caso si sceglie come stimatore della PDF delle fasi associate ai fotoni la serie di Fourier discreta reale delle fasi.

In questo modo otteniamo Z_n^2 come scritto sopra.

3. Analisi dati

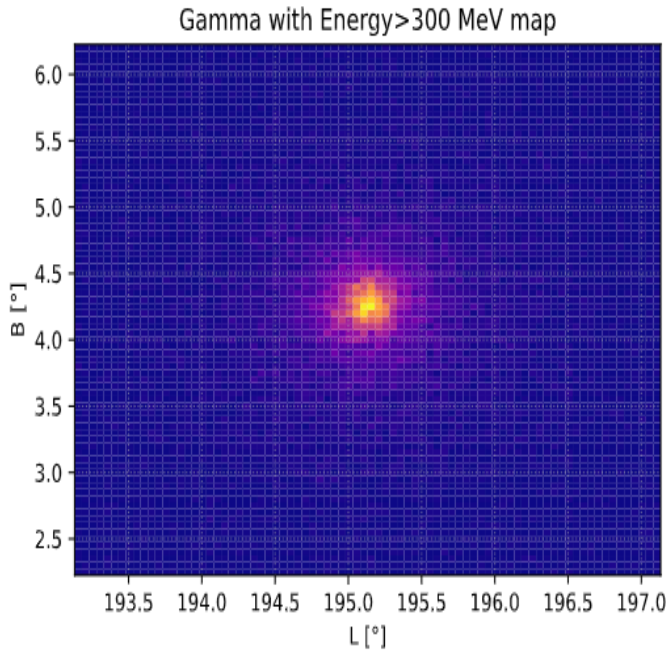
I dati analizzati sono due file FITS, uno contenente i conteggi dei fotoni, uno contenente i dati riguardanti il satellite, e sono stati scaricati dal portale della NASA FSSC con le seguenti caratteristiche

Nome oggetto	Geminga
Range	100MeV-500GeV
Raggio di selezione	4°
Date	54770-54860 MJD

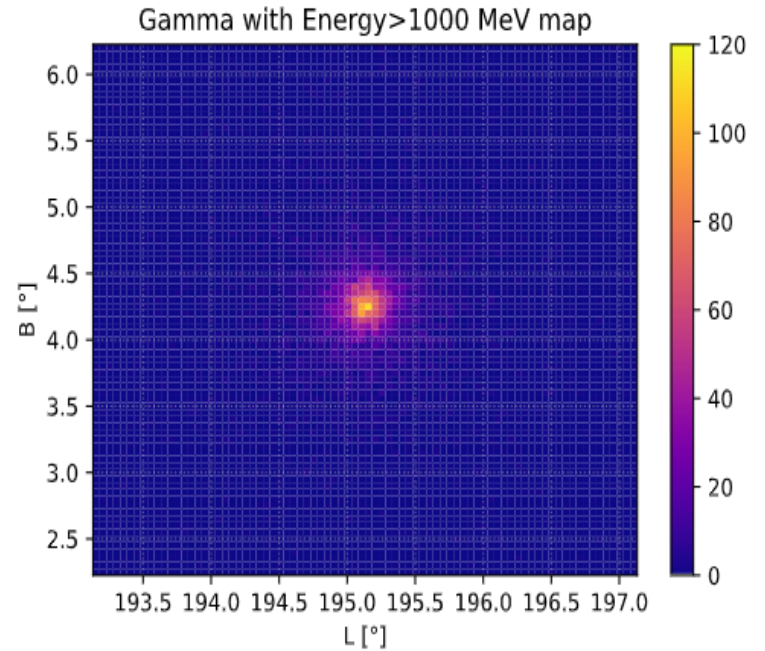
successivamente è stata fatta un'ulteriore selezione con i fermitools gtselect e gtime per ottenere infine un file FITS contenente sia i Good Time Intervals (GTI), ovvero gli intervalli temporali in cui i dati sono validi, sia i dati riguardanti i conteggi (Energia, tempo e coordinate) filtrati in modo tale che siano entro 3° dalla sorgente e fissando a 90° il massimo per l'angolo zenitale apparente per escludere i fotoni provenienti dall'albedo terrestre. Successivamente i fotoni sono state effettuate le correzioni baricentriche tramite il fermitool gtbary.

3.1. Count map e Spettro

Si può osservare la mappa dei conteggi a diverse energie con una heatmap.



(a)



(b)

Figura 3: Heatmap dei conteggi dei fotoni in funzione delle coordinate galattiche

Si nota che ad alte energie i fotoni sono meno dispersi, questo è dovuto al fatto che ad alte energie la PSF diminuisce in quanto all'aumentare dell'energia diminuisce l'errore dato dallo scattering multiplo.

Per visualizzare meglio come varia il conteggio dei fotoni in funzione dell'energia possiamo osservare direttamente lo spettro che è stato fittato con un esponenziale decrescente solo per avere un'idea qualitativa del suo andamento.

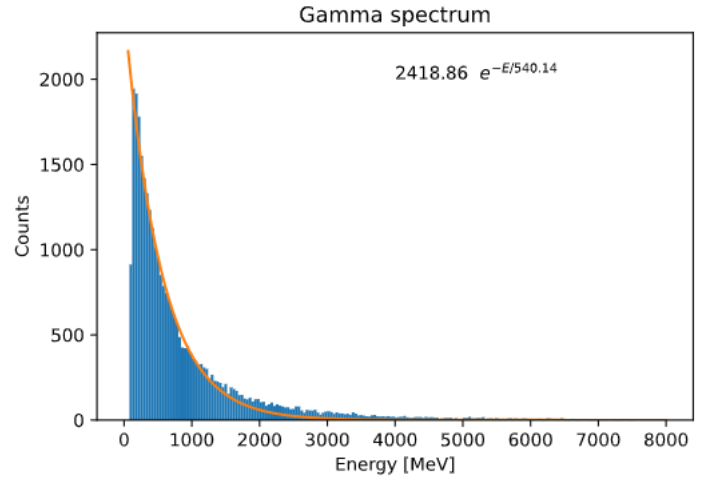


Figura 4: Spettro dei fotoni fittato con un esponenziale decrescente

L'andamento dello spettro non è perfettamente

esponenziale ma approssimativamente decade con un' energia caratteristica di 540MeV

4. Ricerca della periodicità

Per effettuare lo scan della periodicità sono stati creati due array equispaziati $f_0 \pm \Delta f_0$ composto da n_0 elementi e $f_1 \pm \Delta f_1$ composto da n_1 elementi. Questi array sono stati usati per creare, per ogni coppia di frequenze, un array delle fasi associate ad ogni fotone calcolando la fase come la parte frazionaria della serie di Taylor mostrata nell'equazione *. Infine per ogni coppia di frequenze si è calcolato lo ztest con n_{harm} armoniche.

Inizialmente si sono fissati i valori iniziali di $f_0 = 4.2175 Hz$, $f_1 = -1.95250 \cdot 10^{-13} Hz^2$. Sono state effettuate diverse run per approssimazioni successive riducendo ogni volta l'intervallo in esame.

Alla fine i parametri usati sono

f_0	4.2175668 Hz
Δf_0	$10^{-6} Hz$
n_0	1000
f_1	$1.96 \cdot 10^{-13} Hz^2$
Δf_1	$3 \cdot 10^{-14} Hz^2$
n_1	100
n_{harm}	10

4.1. Aspetti computazionali

La creazione degli array e il calcolo dello Ztest su una griglia 1000×100 è un'operazione esosa dal punto di vista computazionale.

Per ridurre i tempi di calcolo inizialmente si è deciso di scrivere la parte di codice riguardante il calcolo in fortran creando un modulo python tramite il wrapper F2PY.

I tempi di calcolo in questo modo sono significativamente minori (ordine di qualche minuto) ma purtroppo i risultati sono inconsistenti probabilmente a casua di errori aritmetici dovuti alla presenza di numeri molto piccoli nonostante si sia fissata la precisione di ogni variabile a 8 byte (si è provato anche con 16 ottenendo solo errori dal wrapper)

Si è quindi deciso di scrivere codice python cercando di usare il meno possibile cicli. Alla fine si è riuscito a implementare tutto tramite metodi numpy ad eccezione del loop sotto forma di list comprehension sulla coppia di frequenze per la creazione della griglia. Sarebbe stato possibile evitare anche questo tramite una matrice a 4 indici ma per evitare errori nella scelta dell'indice sul quale eseguire le

somme si è preferito evitare.

4.2. Fasogrammi

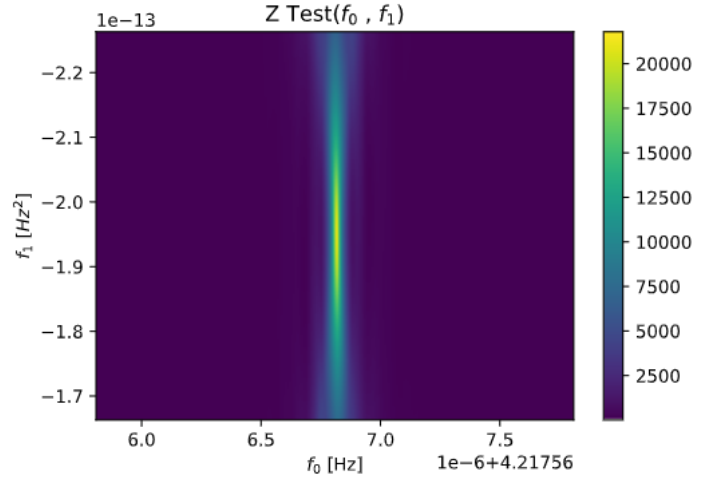


Figura 5: Valore dello ZTest per ogni coppia di frequenze f_0, f_1

Il massimo dello Z-Test trovato è di $2.1 \cdot 10^4$

4.2.1. Distribuzione dello Z_{10}^2

Poichè lo Z_n^2 , considerando in prima approssimazione $n \rightarrow \infty$ (anche se $n=10$ nel nostro caso), si distribuisce come un χ_{2n}^2 si trova $\chi^2 \simeq \frac{2.1 \cdot 10^4}{20ndof}$. Il p-value, ovvero la probabilità che non ci sia periodicità, risulta un numero talmente piccolo da essere difficile da calcolare, quindi possiamo affermare con certezza che nei dati vi è periodicità alle frequenze che massimizzano lo Z-Test.

Per verificare che Z_n^2 si distribuisce come un χ_{2n}^2 si è fatto un istogramma dei valori dello Z-Test per valori di frequenza lontani dalla frequenza di rotazione della pulsar in modo tale da essere in condizione di non periodicità.

Si può notare (figura 6) come più ci si avvicini alla frequenza di rotazione della pulsar più lo Z-Test tende a deviare dal χ^2 assumendo valori più alti. Nella condizione in cui si è più lontani dalla periodicità (in questo caso per $f_0 < 4.2175659 Hz$) si nota che la distribuzione dello Z-Test è qualitativamente simile al χ_{20}^2 nonostante la bassa statistica (4600 entries) ed $n=10$ (condizione $n \rightarrow \infty$ non rispettata).

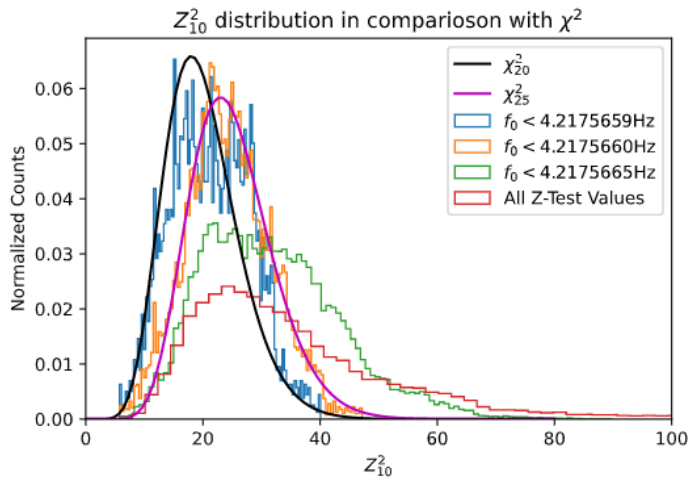


Figura 6: Istogramma dello Z-test comparato con distribuzione χ^2 . Si sono considerati valori dello ztest calcolati sotto 3 diversi valori di frequenza e i conteggi sono stati normalizzati

4.2.2. Parametri di timing

I valori di f_0 e f_1 associati al valore massimo dello Z-Test sono

$$f_0 = 4.217566816 \pm 1 \cdot 10^{-9} \text{ Hz}$$

$$f_1 = (-1.948 \pm 0.003) \cdot 10^{-13} \text{ Hz}^2$$

Gli errori associati alle frequenze sono stati stimati semplicemente prendendo la metà del binnaggio quindi gli errori sono privi di significato statistico. Per attribuire agli errori un significato statistico si è provato a fare un fit con una gaussiana multivariata a 2 variabili indipendenti sulla griglia dello ztest ma i valori di bestfit variano sensibilmente al variare dei valori iniziali e gli errori sono diversi ordini di grandezza minori rispetto al binnaggio, quindi fortemente sottostimati.

Provando con una gaussiana a variabili dipendenti la dipendenza dai parametri iniziali diventa ancora più forte.

Per verificare che i valori trovati siano sensati si è effettuato un plot della fase nel tempo.

Il fatto che si vedano due linee verticali evidenzia la periodicità dei conteggi nel tempo.

Una volta trovati f_0 e f_1 e calcolate le fasi è stato possibile creare i fasogrammi (figura 8) introducendo un offset di 0.35 sulla fase per renderli più leggibili.

La struttura dei picchi è simile a quella presente nel paper di riferimento.

I picchi sono stati fittati con 2 gaussiane al fine di

stimare la distanza tra i picchi e il loro rapporto in ampiezza. Nel fare questo fit sui conteggi sono stati applicati errori poissoniani. La distanza tra i picchi è 0.4969 ± 0.0001

Il rapporto in ampiezza tra i picchi è 1.76 ± 0.14

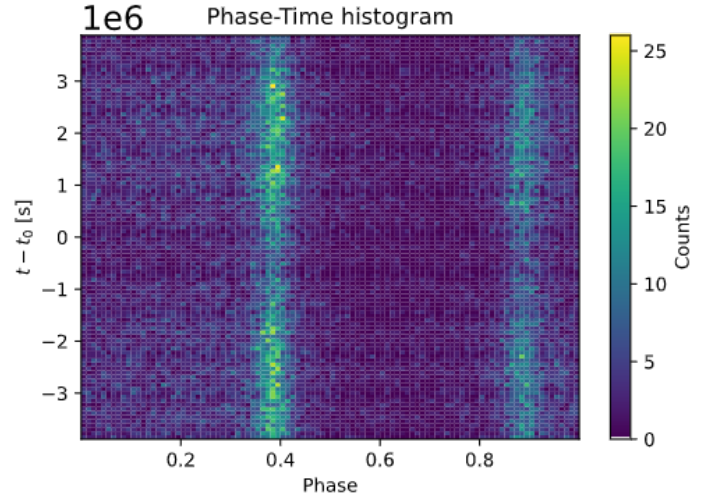


Figura 7: Istogramma Fase-Tempo dei conteggi.

E' possibile notare che all'aumentare dell'energia i picchi risultano sempre più stretti.

5. Conclusioni

Avendo determinato il periodo di rotazione della pulsar e la sua derivata è possibile fare una stima di tutti i suoi parametri fisici tramite il modello di dipolo, i risultati sono mostrati in figura 9.

Va ricordato che anche gli errori su questi parametri non hanno significato statistico e sono stati stimati semplicemente propagando gli errori dati dal binnaggio delle frequenze sulle funzioni del modello di dipolo.

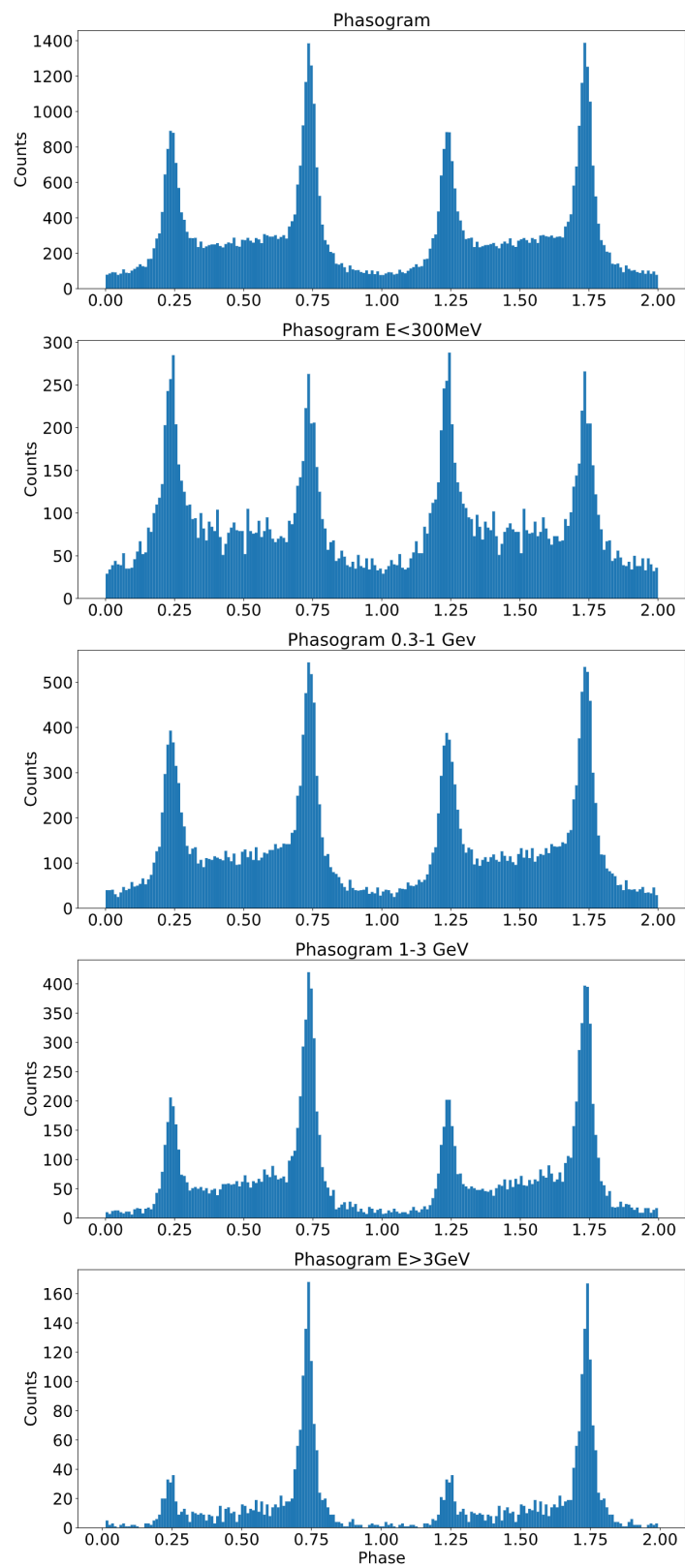


Figura 8: Fasogrammi a diversi range di energia

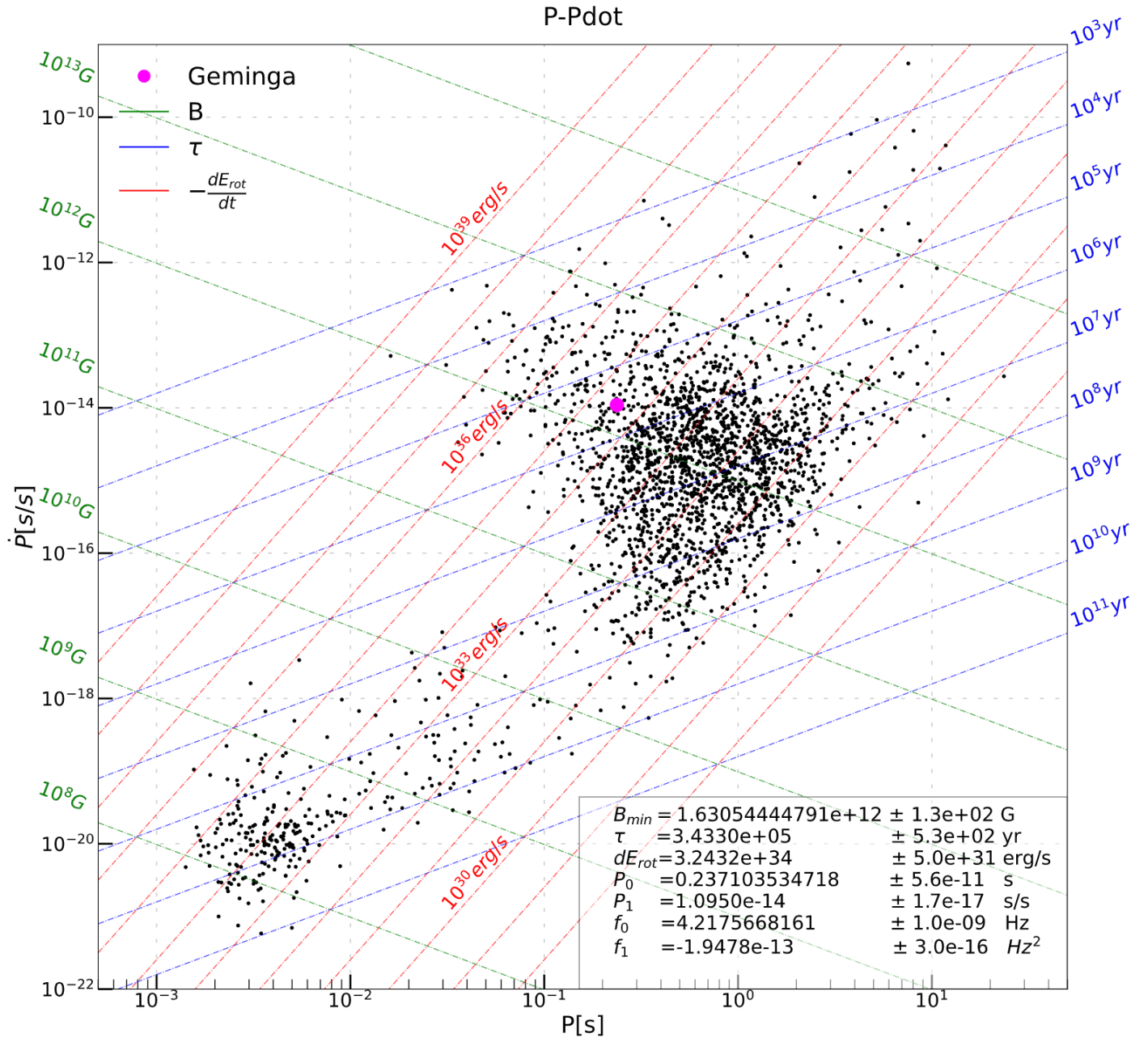


Figura 9: Plot PPdot di tutte le pulsar contenute nel catalogo ATNF.