OPTIMISATION CONVEXE
DM #1

Souhaib ATTAIKI

Exercice 2.12.

a) Slab est une intersection de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \beta\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n \mid -a^T x \leq -\alpha\}$ qui sont des demi-espaces, donc slab est convex (polyhedron)

b) le rectangle est une intersection finie de slab de paramètres α_i et β_i, donc il est convexe

c) Le wedge est une intersection de deux demi-espaces $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq b_1\}$ et $\{x \mid a_2^T x \leq b_2\}$ donc il est convexe.

d) Soit $y \in S$. on a

$$\|x - x_0\| \leq \|y - x\| \iff \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2x^T x_0 \leq \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2x^T y$$

$$\iff x^T (y - x_0) \leq \frac{\|y\|^2 - \|x_0\|^2}{2}$$

donc $\forall y \in S$, $A_y = \{x \mid \|x - x_0\| \leq \|x - y\|\} = \{x \mid ax \leq b\}$ est un demi espace

donc $\{x \mid \|x - x_0\| \leq \|x - y\|, \forall y \in S\} = \bigcap_{y \in S} A_y$, donc il est convexe

e) non convexe. Contre exemple en $\mathbb{R}$ pour $S = \{-1, 1\}$, $T = \{0\}$

on a $\{x \mid \text{dist}(x, S) \leq \text{dist}(x, T)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq \frac{1}{2}\}$ qui est non convexe

f) Ensemble convexe, parce que : soit x_1, x_2 tel que $x_1 + S_2 \subseteq S_1$ et $x_2 + S_2 \subseteq S_1$ et $\alpha \in [0,1]$

Soit $y \in S_2$. on a $x_1 + y \in S_1$ et $x_2 + y \in S_1$, et puisque S_1 est convexe, donc

$\alpha(x_1 + y) + (1 - \alpha)(x_2 + y) \in S_2$ donc $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + y \in S_1$, $\forall y$

donc $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 + S_2 \subset S_1$, d'où le résultat.

g) si $\theta = 1$, alors l'ensemble est un demi espace (voir question d.) donc il est convexe.

si $\theta \neq 1$. on a

$$\|x - a\| \leq \theta \|x - b\| \iff \|x\|^2 + \|a\|^2 - 2x^T a \leq \theta^2 (\|x\|^2 + \|b\|^2 - 2x^T b)$$

$$\iff (1 - \theta^2)\|x\|^2 - 2x^T(a - \theta^2 b) \leq -\|a\|^2 + \theta^2 \|b\|^2$$

$$\iff \|x\|^2 - 2x^T \frac{(a - \theta^2 b)}{1 - \theta^2} + \frac{(a - \theta^2 b)^T (a - \theta^2 b)}{(1 - \theta^2)^2} \leq \frac{\theta^2 \|b\|^2 - \|a\|^2}{1 - \theta^2} + \frac{(a - \theta^2 b)^T (a - \theta^2 b)}{(1 - \theta^2)^2}$$

$$\iff \|x - x_0\|^2 \leq R^2$$

c'est une norm ball, donc l'ensemble est convexe.

Exercice 3.27

a) $f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} f_i$ avec $f_i(x) = \| A_i x - b_i \|$. les f_i sont convexe parce qu'elles sont des composition de la fonction norm qui convexe avec une fonction affine de x. donc f est convexe.

b) $f(x) = \sum_{i=1}^{r} |x|_{[i]} = \max \{ x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \}$

$= \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}$, maximum d'un ensemble fini de fonctions convexes, donc f est convexe

Exercice 3.32

a) soit $\alpha \in [0, 1]$, f et g sont positives et convexes, alors

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq (\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y))(\alpha g(x) + (1-\alpha) g(y))$

$= \alpha f(x)g(x) + (1-\alpha) f(y) g(y) + \underbrace{\alpha(1-\alpha)(f(x) - f(y))(g(y) - g(x))}_{\beta}$

$\leq \alpha (fg)(x) + (1-\alpha)(fg)(y)$

et puisque f et g ont la même monotonie, donc $\beta \leq 0$

d'ou la convexité.

b) de même que la question précédente, la concavité et la positivité nous donne $(fg)(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha (fg)(x) + (1-\alpha)(fg)(y) + \beta$ et puisque f a la monotonie contraire de g, donc $\beta \geq 0$ d'ou la concavité

c) on a $\frac{1}{g}$ positive, croissante, et convexe (résultat connu), d'ou d'aprés la question a $f \times \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ est convexe.

Exercice 3.36

a) la fonction conjuguée de f est $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(y^T x - \max_{1\leq i\leq n} x_i \right)$

si $\exists k$ tq $y_k < 0$, donc si on prend $x_i = 0$ $i \neq k$ et $x_k = -t$

on a donc $y^T x - \max x_i = -t y_k \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $y \notin \text{dom} f^*$ donc y doit être $y \geq 0$

supposons maintenant que $\sum y_i > 1$, donc si on prend $x_i = t > 0$, $\forall i$

alors $y^T x - \max x_i = t\sum y_i - t = t(\sum y_i - 1) \longrightarrow +\infty$ donc $y \notin \text{dom} f^*$

de même si $\sum y_i < 1$, on prend $x_i = -t$ et on montre que $y \notin \text{dom} f^*$

si $\sum y_i = 1$, on a $y^T x = \sum y_i x_i \leq \sum y_i \max_i x_i = \max_i x_i \sum y_i = \max_i x_i$

donc $y^T x - \max_i x_i \leq 0$ avec égalité pour $x = 0$, donc :

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n y_i = 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} \right)$

+ si $\exists k$ tq $y_k < 0$, alors pour $x_i = 0$ $i \neq k$ et $x_k = -t$, on a

$y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} = -y_k t \to +\infty$ donc y doit être positive

+ si $\exists k$ tq $y_k > 1$, alors pour $x_i = 0$ $i \neq k$ et $x_k = t$, on a

$y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} = +y_k t - t = t(y_k - 1) \longrightarrow +\infty$ donc $y \in \text{dom} f^*$

+ si $0 \leq y \leq 1$ et $\sum y_i \neq r$, alors on prenant $x_i = t$, on a

$y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} = t\sum y_i - rt = t(\sum y_i - r)$ n'est pas borné

donc $y \notin \text{dom} f^*$

+ si $0 \leq y \leq 1$ et $\sum y_i = r$, alors on a

$y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} = \sum_{i=1}^r y_{i'} x_{[i]} + \sum_{i=r+1}^n y_{i'} x_{[i]} - \sum_{i=1}^r x_{[i]}$ (avec i' l'indice qui correspond a $[i]$ de x)

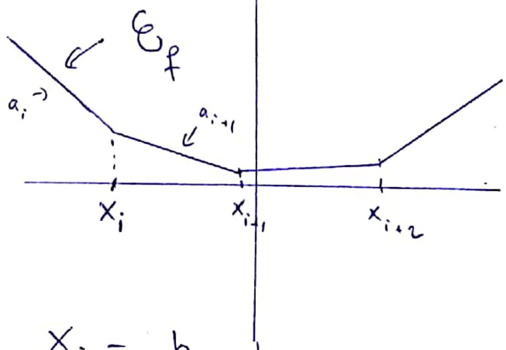
$= \sum_{i=1}^r (y_{i'} - 1) x_{[i]} + \sum_{i=r+1}^n y_{i'} x_{[i]} \leq x_{[r]} \left(\sum_{i=1}^r (y_i - 1) + \sum_{i=r+1}^n y_i \right) = 0$

donc $y^T x - \sum_{i=1}^r x_{[i]} \leq 0$ avec egalite pour $x = 0$

donc $f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } \sum y_i = r \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

c) $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(yx - \max_{1\leq i\leq n} (a_i x + b_i)\right) (*)$

$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \max_{1\leq i\leq n} \left((y-a_i)x + b_i\right)$



$x_i = \dfrac{b_i - b_{i+1}}{a_{i+1} - a_i}$

si $y < a_1$, alors pour $x = -t$, on a $yx - f(x)$ n'est pas bornée, de même pour $y > a_m$, on prend $x = t$

d'où $a_1 \leq y \leq a_m$

pour $a_i \leq y \leq a_{i+1}$, le sup de l'expression $(*)$ est obtenu au point x_i

donc $\forall i \in [\![1, m-1]\!]$ si $a_i \leq y \leq a_{i+1}$ $\quad f^*(y) = (y-a_i) \times \dfrac{b_i - b_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} + b_i$

et $f^*(y) = +\infty$ si $y < a_1$ ou $y > a_m$.

d) $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^{++}} \underbrace{(yx - x^p)}_{g(x)}$. $p > 1$, donc $-x^p$ est concave, donc $yx - x^p$ l'est aussi. si $y \leq 0$ donc $yx - x^p \leq 0$ et $yx - x^p \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $f^*(y) = 0$

si $y > 0$, on a $g'(x) = y - p x^{p-1}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^* = \left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$

et on a $g''(x) = -p(p-1)x^{p-2}$ donc $g''(x^*) \leq 0$

d'où $g(x) \leq g(x^*)$ et le maximum est atteint à x^*

d'où $f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \end{cases}$. pour $p < 0$, suite après à la fin

e) $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_{++}} \left(yx + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

⊕ si $\exists k$ tq $y_k \geq 0$, alors pour $x_i = 1$ $i \neq k$ et $x_k = t$, on a

$yx + (\prod x_i)^{1/n} = \sum_{i\neq k} y_i + y_k t + t^{1/m} \longrightarrow +\infty$ donc $y < 0$

⊕ si $y < 0$ et $(\prod(-y_i))^{1/n} < \frac{1}{n}$ donc $\left(\prod\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{1/n} > n$, on prend $x_i = -\dfrac{t}{y_i}$

$yx + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} = -nt + t\left(\prod\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{1/n} = t\left[\left(\prod\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{1/n} - n\right] \longrightarrow +\infty$

donc $y \notin \operatorname{dom} f^*$

* si $y < 0$ et $(\prod(-y_i))^{1/n} \geq \frac{1}{n}$, alors sachant que $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \geq (\prod x_i)^{1/n}$, alors

$\dfrac{-y^T x}{n} \geq (\prod -y_i x_i)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}(\prod x_i)^{\frac{1}{n}}$, donc $y^T x + (\prod x_i)^{\frac{1}{n}} \leq 0$ avec egalité qd $x \to 0$

donc $f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \text{ et } (\pi - y_i)^{1/n} \geq \frac{1}{n} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

f) $f^*(y,u)$ $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \left(y^T x + ut + \log(t^2 - x^T x) \right)$

si $\|y\| \geq -u$, on prend $x = t' y$, $t = \|x\| + 1 \geq \|x\| = t'\|y\| \geq -t'u$

donc $y^T x + tu \geq t' y^T y - t'u^2 = t'(\|y\|^2 - u^2) \geq 0$

et $t^2 - x^T x = 1 + 2t'\|y\| \geq 1$ et $\log(t^2 - x^T x) \geq 0$

donc $y^T x + ut + \log(t^2 - x^T x)$ n'est pas borné.

Supposons maintenant que $\|y\| \leq -u$ $\overset{u>0}{?}$, donc en dérivant $y^T x + ut + \log(t^2 - x^T x)$ par rapport x et t on trouve

$\partial_x : \quad y - \frac{2x}{t^2 - x^T x}$. et $\partial_t : \quad u + \frac{2t}{t^2 - x^T x}$

$\partial_t = 0 \iff ut^2 - u x^T x + 2t = 0 \qquad \Delta = 4 + 4u^2 x^T x > 0$

$t = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + u^2 x^T x}}{2u} = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2 x^T x}}{u}$ (*)

$\partial_t = 0 \iff t^2 - x^T x = \frac{-2t}{u}$

$\partial_x = 0 \iff x = -\frac{yt}{u} \rightarrow x^T x = +\frac{t^2}{u^2}\|y\|^2$

on remplace dans (*) $u^2 t^2 + 1 + 2tu = 1 + t^2\|y\|^2$

(*) $\iff t^2(u^2 - \|y\|^2) + 2tu = 0 \quad \rightarrow \boxed{t = \frac{-2u}{u^2 - \|y\|^2}}$

et $x = \frac{2y}{u^2 - \|y\|^2}$

d'où $f^*(y) = \begin{cases} -2 + \log 4 - \log(\|y\|^2 - u^2) & \text{si } \|y\| < -u \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

d) pour $p < 0$, on a si $y > 0$ $yx - x^p$ n'est pas bornée car $yx - x^p \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

• si $y < 0$ de même on montre $f^*(y) = (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$.