OPTIMISATION CONVEXE
DM # 2

Souhaib ATTAIKI

Exercice 1 (LP Duality) :

1) le lagrangien du problème (P) est le suivant :

$$L_1(x,\lambda,\nu) = c^T x - \lambda^T x + \nu^T(Ax-b) \quad , \lambda \geq 0$$
$$= (c + A^T\nu - \lambda)^T x - \nu^T b$$

L_1 est une fonction affine par rapport à x, donc son infimum est égal à $-\infty$ sauf si le coeff directeur est nul, d'où

$$g_1(\lambda,\nu) = \begin{cases} -b^T\nu & \text{si } A^T\nu + c - \lambda = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

, donc le problème dual est $\max_{\lambda,\nu,\ \lambda\geq 0} g_P(\lambda,\nu)$ qui est équivalent à $\max_{\nu} -b^T\nu$ s.c $A^T\nu + c \geq 0$

Car on veut maximiser g et on a $\lambda \geq 0$ et $\lambda = A^T\nu + c$ si $g \neq -\infty$ (transformation vu en cours)

2) Le lagrangien du problème (D) est : $\quad$ ($\max f = \min -f$)

$$L_2(y,\lambda) = -b^T y + \lambda'^T(A^T y - c) \quad , \lambda' \geq 0$$
$$= (-b + A\lambda')^T y - \lambda'^T c$$

L_2 est une fonction affine de y, alors comme avant, on a

$$g_2(\lambda') = \begin{cases} -c^T\lambda' & \text{si } A\lambda' - b = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

donc le problème dual est
$$\begin{cases} \max_{\lambda'} -c^T\lambda' \\ A\lambda' - b = 0 \\ \lambda' \geq 0 \end{cases}$$

3) Le Lagrangien du problème (self dual) est :

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\nu) = c^T x - b^T y - \lambda_1^T x + \lambda_2^T (A^T y - c) + \nu^T (Ax - b) \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{(A^T \nu + c - \lambda_1)^T x - \nu^T b}_{L_1} + \underbrace{(A\lambda_2 - b)^T y - \lambda_2^T c}_{L_2}$$

$$= L_1(x, \lambda_1, \nu) + L_2(y, \lambda_2)$$

donc $\inf_{x,y} L = \inf_{x,y} (L_1 + L_2) = \inf_x L_1 + \inf_y L_2 \quad (*)$

et donc, comme avant, puisque L_1 (resp L_2) est affine en fonction de x (resp y)

on a $\quad g^* = \inf_{x,y} L = \begin{cases} -\nu^T b - \lambda_2^T c & \text{si } A^T\nu + c - \lambda_1 = 0 \text{ et } A\lambda_2 - b = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

et le problème dual s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} & \max \ g^*(\lambda_1, \lambda_2, \nu) \\ \text{sc} & \lambda_1 \geq 0 \\ & \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

donc en transformant les conditions qui rendent g^* fini en des contraintes explicites,

on trouve le problème dual suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\lambda_2, \nu} & -(b^T \nu + c^T \lambda_2) \\ \text{s.c} & A\lambda_2 = b \\ & \lambda_2 \geq 0 \\ & A^T \nu + c \geq 0 \end{array} \right. \qquad (SD^*)$$

qui est équivalent à

$$\begin{array}{ll} \min_{\nu, \lambda_2} & b^T \nu + c^T \lambda_2 \\ \text{s.c} & A\lambda_2 = b \\ & \lambda_2 \geq 0 \\ & A^T \nu + c \geq 0 \end{array}$$

on pose $\lambda_2 = x$ et $y = -\nu$, on trouve $\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & c^T x - b^T y \\ \text{s.c} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & A^T y \leq c \end{array} \right.$

d'où le résultat.

4) le programme linéaire (SD) est faisable et bornée, donc :

$$x^* = \underset{x}{\arg\min}\ (C^Tx - b^Ty) \quad \text{s.c}\ \ Ax=b,\ x\geq 0,\ A^Ty\leq c \quad = \underset{x}{\arg\min}\ C^Tx \quad \text{s.c}\ \ Ax=b,\ x\geq 0$$

$\left(\text{Car } \underset{x}{\arg\min}\ f(x)+g(y) = \underset{x}{\arg\min}\ f(x)\right)$

donc x^* est obtenu en résolvant le problème (P)

de même on montre que y^* est obtenu en résolvant le problème (D)

∴ on note p^* (resp d^*) les valeur optimal du problème (SD) (resp (SD^*))

→ soit x, y des points faisables du problème (SD)

on a alors $Ax = b$ donc $b^Ty = x^TA^Ty$ ①

et puisque $x\geq 0$, on a $x^TA^Ty \leq C^Tx$ ②

donc d'après ① et ② on a $C^Tx - b^Ty \geq 0$ donc $\min\limits_{x,y} C^Tx - b^Ty \geq 0$

donc $p^* \geq 0$.

→ soit ν, λ des points faisable de (SD^*), alors comme avant, on montre que

$-(b^T\nu + C^T\lambda) \leq 0$ donc $\max\limits_{\lambda,\nu} -(b^T\nu + C^T\lambda) \leq 0$ d'où $d^* \leq 0$

et par dualité forte, on a $p^* = d^*$ donc $p^* \leq 0$ et $p^* \geq 0$

d'où $p^* = 0$

Exercice 2:

1) on a $f^*(y) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \left(y^Tx - \sum_i |x_i|\right)$. Soit $y\in\mathbb{R}^d$

Supposons que $\exists k$ tq $y_k > 1$. alors pour $x_k = t$, $x_i = 0$ $\forall i\neq k$,

on a $y^Tx - \sum|x_i| = y_kt - t = t(y_k - 1) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc y doit

être $y\leq 1$. et pour $y\leq 1$, on a

$$y^Tx - \sum|x_i| = \sum y_ix_i - |x_i| \leq \sum(y_i - 1)|x_i| \leq 0$$

avec égalité pour $x = 0$, d'où

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2) on a (RLS) est équivalent à
$$\min \|z\|_2^2 + \|y\|_1$$
$$\text{sc} \quad x = y$$
$$Ax - b = z$$

le Lagrangien s'ecrit alors sous la forme :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \nu_1, \nu_2) = \|z\|_2^2 + \|y\|_1 + \nu_1^T(x-y) + \nu_2^T(Ax-b-z)$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\|z\|_2^2 - \nu_2^T z}_{L_1(z)} + \underbrace{-(\nu_1^T y - \|y\|_1)}_{L_2(y)} + \underbrace{(A^T\nu_2 + \nu_1)^T x - \nu_2^T b}_{L_3(x)}$$

minimiser $\mathcal{L}$ par rapport à x, y, z revient à minimiser chacune des fonctions L_i

* $g_3(\nu_1, \nu_2) = \inf_x L_3 = \begin{cases} -b^T\nu_2 & \text{si } A^T\nu_2 + \nu_1 = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$ (démonstration similaire à l'exercice 1)

* et on a $\inf_y \|y\|_1 - \nu_1^T y = -\sup_y \nu_1^T y - \|y\|_1$

donc d'après la question précédente $g_2(\nu_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\nu_1\|_\infty \leq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

* et on a $L_1(z)$ est une fonction strictement convexe par rapport à z car c'est la somme d'une fonction linéaire et une norme, et après dérivation, on troue que

$$g_1(\nu_2) = -\frac{\|\nu_2\|_2^2}{4}$$

d'ou $g(\nu_1, \nu_2) = \inf_{x,y,z} \mathcal{L} = \begin{cases} -b^T\nu_2 - \dfrac{\|\nu_2\|_2^2}{4} & \text{si } \|\nu_1\|_\infty \leq 1 \text{ et } A^T\nu_2 + \nu_1 = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

le problème dual est : $\begin{cases} \max\limits_{\nu} & -b^T\nu - \dfrac{\|A^T\nu\|_2^2}{4} \\ \text{s.c} & \|A^T\nu\|_\infty \leq 1 \end{cases}$

Exercice 3:

(à une constante multiplicatif près)

1) on a $\min_x f(x) \equiv \min_x \frac{1}{\tau} f(x)$, donc (Sep 1) est equivalent à

$$\begin{cases} \min_{z,w} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} z_i + \frac{1}{2}\|w\|_2^2 \\ \text{s.c} \quad z_i = \mathcal{L}(w, x_i, y_i), \ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (*)$$

or si $\underbrace{z_i = \mathcal{L}(w, x_i, y_i)}_{A_i}$ alors $\underbrace{z_i \geq 0 \text{ et } z_i \geq 1 - y_i(w^T x)}_{B_i}$

et reciproquement si $z_i \geq 0$ et $z_i > 1 - y_i(w^T x_i)$ alors $z_i \geq \mathcal{L}(w, x_i, y_i) \geq 0$

et puisque on veut minimiser z_i alors les contraintes A_i et B_i sont équivalentes pour le problème $(*)$, donc (Sep 1) et (sep 2) sont équivalent au sens où résoudre le deuxième permet de résoudre le premier, et la valeur est trouvé à une constante multiplicative connu.

2) le lagrangien du problème est le suivant:

$$L(x, w, \lambda, \pi) = \frac{1}{n\tau} \sum z_i + \frac{1}{2}\|w\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - y_i(w^T x) - z_i) - \pi^T z$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_i \lambda_i y_i w^T x_i}_{L_1(w)} + \underbrace{\sum_i z_i \left(\frac{1}{n\tau} - \pi_i - \lambda_i\right) + \sum \lambda_i}_{L_2(z)}$$

alors exactement, comme à l'exercice précédent, on a

$$g(\lambda, \pi) = \inf_{w, z} L = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \frac{\|\sum_i \lambda_i y_i x_i\|^2}{2} & \text{si } \pi_i = -\lambda_i + \frac{1}{n\tau}, \ \forall i = 1, \dots, n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

donc le problème dual est le suivant:

$$\begin{cases} \max_{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \frac{\|\sum_i \lambda_i y_i x_i\|^2}{2} \\ \text{s.c} \quad \lambda \geq 0 \\ \qquad \frac{1}{n\tau} \geq \lambda_i, \ \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$