Линейная алгебра

Задание №1

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислим $A^T C$

$$A^T C=\begin{pmatrix} 2\cdot6+3\cdot4+(-1)\cdot8 & 2\cdot(-3)+3\cdot(-5)+(-1)(1) & 2\cdot9+3\cdot2+(-1)\cdot5 \\ -4\cdot6+5\cdot4+0 & -4\cdot(-3)+5\cdot(-5)+0 & -4\cdot9+5\cdot2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix}$$

Вычислим $2A^T B^T$

$$2A^T B^T=2\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot2-1\cdot7 & 2\cdot3+3\cdot(-4) & 2\cdot5+3\cdot2-1 \\ -4\cdot1+5\cdot2 & -4\cdot(-3)+5\cdot(-4) & -4\cdot5+5\cdot2 \end{pmatrix}$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ 6 & -8 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix}$$

Вычислим D

$$D=A^T C-2A^T B^T=\begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Задание №2,№3,№4

(2)

$x: \quad 3x + 2 = 8$
$\qquad x = 2$

$y: \quad 3y - 12 = 6$
$\qquad y = 6$

$z: \quad 12 + 2z = 4$
$\qquad z = -4$

$v: \quad v = 10$

(3) $p = 9 \qquad q = 15$

(4) $a_1 = (2, -5)^T \quad a_2 = (-1, 3)^T$

$x = (1, -4)^T$

Базис $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. проверяем на линейно-независимость

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а) $[x]_B = B^{-1}[x]$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

б) $[y] = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = (2, -5) + (-1, 3) = (1, -2)$

Мат. Анализ

Задание №1

Мат. анализ

① $f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$

Найдем частные производные

$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_2 - 3$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2 - 2$

Решим сис-му ур-й:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_2 - 3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$2x_2 = 2 + 2x_1$

$x_2 = 1 + x_1$

Подставим в 1-ое ур-е:

$3x_1^2 - 2(1+x_1) - 3 = 3x_1^2 - 2x_1 - 5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac = -2^2 - 4\cdot 3 \cdot(-5) = 64$

$x_{1_2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6}$

$x_1 = 5/3$ или $x_1 = -1$

при $x_1 = 5/3$, $x_2 = 8/3$

при $x_1 = -1$, $x_2 = 0$

Для матрицы Гессе вычислим вторые частные производные и организуем эти значения в матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание №2

② Проверим, что ф-ция $f = \ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$ удовл-т условию:

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Подставим в ур-е

$$\cancel{x_1} \cdot \left(\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x_1}} \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} \right) + \cancel{x_2} \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x_2}}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}}{2(\cancel{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}})} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Задание №3

③ $f(x, y, z) = (x + y + z,\ xyz)^T$

$v = (1, 2, 3)^T$

1) $$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x} & \frac{\partial f_1}{y} & \frac{\partial f_1}{z} \\ \frac{\partial f_2}{x} & \frac{\partial f_2}{y} & \frac{\partial f_2}{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

2) в точке $v = (1, 2, 3)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание №4

(4) $f(x) = \frac{1}{3}\|x\|_2^3, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

1. Найдем $df(x)$

$df(x) = \frac{1}{3}\|x\|_2^3$

$\|x\|_2^3 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}^3 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)^{\frac{3}{2}}$

$= \langle x, x\rangle^{\frac{3}{2}}$

$df(x) = \frac{1}{3} d(\langle x, x\rangle^{3/2}) = \frac{1}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{2} \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot d\langle x, x\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle x, x\rangle^{1/2} \cdot (\langle dx, x\rangle + \langle x, dx\rangle = \frac{1}{\cancel{2}}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot$

$\cdot \cancel{2}\langle x, dx\rangle = \|x\|_2 \langle x, dx\rangle$

2. Найдем $\nabla f(x)$:

$df(x) = \langle \|x\|_2 x, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = \|x\|_2 x$

3. Найдем $d^2 f(x)$

$d^2 f(x) = d(\|x_2\| \langle x, dx_1\rangle) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot$

$\cdot \langle x, dx_1\rangle + \|x_2\| \langle dx_2, dx_1\rangle + \langle x, dx_1 + dx_2\rangle =$

$= 1/2 \langle x, x\rangle^{-1/2} \cdot \cancel{2}\langle x, dx_1\rangle \cdot \langle x_1, dx_2\rangle + \|x\|_2 \langle dx_2, dx$

$= \|x\|_2^{-1} \langle x, dx_1\rangle \langle x, dx_2\rangle + \|x\|_2 \langle dx_2, dx_1\rangle$

4. Найдем $\nabla^2 f(x)$

$d^2 f(x) = \|x\|_2^{-1} \langle dx_1, x\rangle \langle x, dx_2\rangle + \|x\|_2 \langle dx_1, dx_2\rangle =$

$= \langle (\|x\|_2^{-1} x x^T + \|x\|_2 I_n) dx_1, dx_2\rangle$

$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \|x\|_2^{-1} x x^T + \|x\|_2 I_n$ при $x > 0$

Задание №5

(5) $f(x) = \|x\|_2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

1. Найдем $df(x)$

$$df(x) = d(\|x\|_2) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}} \langle dx, x\rangle \langle x, dx\rangle =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}\langle x, dx\rangle = \|x\|_2^{-1}\langle x, dx\rangle$$

2. Найдем $\nabla f(x)$

$$df(x) = \langle \|x\|_2^{-1} x, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = \|x\|_2^{-1} x$$

Задание №6

(6) $f(x) = \|Ax\|_2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. Найдем $df(x)$

$$df(x) = d(\langle Ax, Ax\rangle^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\langle Ax, Ax\rangle^{-\frac{1}{2}} \langle dAx, Ax\rangle +$$

$$+ \langle Ax, dAx\rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, Ax\rangle^{-1/2}\, 2\langle Ax, dAx\rangle =$$

$$= \|Ax\|_2^{-1}\langle A^T Ax, dx\rangle$$

2. Найдем $\nabla f(x)$

$$df(x) = \langle \|Ax\|_2^{-1} A^T Ax, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = \|Ax\|_2^{-1} A^T Ax$$

Задание №7

7. $f(x) = -e^{-x^T x},\ x \in \mathbb{R}^n$

1. Найдем $df(x)$

$$df(x) = d(-e^{-x^T x}) = e^{-x^T x} \cdot d\langle -x, x\rangle =$$

$$= e^{-x^T x} \cdot 2\langle x, dx\rangle$$

2. Найдем $\nabla f(x)$

$$df(x) = -e^{-x^T x}\, 2\langle x, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = -e^{-x^T x}\, 2x$$