

Семинар 3.

1. Рассмотрим регрессию $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2}$. Запишем все исходные данные в матрицу X и вектор y :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- (a) Выпишите явно матрицы X' , $X'y$, $X'X$.
- (b) Выпишите условия первого порядка для оценок $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ по методу наименьших квадратов.
- (c) Запишите эти же условия в виде линейной системы

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 \cdot \dots + \hat{\beta}_2 \cdot \dots = \dots \\ \hat{\beta}_1 \cdot \dots + \hat{\beta}_2 \cdot \dots = \dots \end{cases}$$

- (d) Как упростится система из предыдущего пункта для регрессии $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{i2}$?
- (e) Запишите систему условий первого порядка с помощью матрицы X и вектора y .
2. Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $E(\tilde{\beta})$ и $Var(\tilde{\beta})$.
3. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}'$. Известно, что $E(\varepsilon) = 0$ и $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- (a) Укажите число наблюдений.

- (b) Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
 - (c) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
 - (d) Рассчитайте TSS , RSS и ESS .
 - (e) Чему равен e_4 , МНК-остаток регрессии, соответствующий 3-ому наблюдению?
 - (f) Чему равен R^2 в модели?
 - (g) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.
 - (h) Рассчитайте $\widehat{Var}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
 - (i) Найдите $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)$, несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
 - (j) Найдите $\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, несмещенную оценку ковариации МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
 - (k) Найдите $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$.
 - (l) Найдите $\widehat{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
 - (m) Найдите $\hat{\sigma}(\beta_1)$, стандартную ошибку МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
4. В файле dataflats.xlsx хранятся данные о стоимости квартир в Москве (тыс.долл.). Оцените модель регрессии для стоимости одного квадратного метра жилья, используя различные наборы объясняющих переменных. Проинтерпретируйте полученные оценки коэффициентов в моделях. Сравните модели с точки зрения коэффициентов детерминации.