

Семинар 1.

1. Аня и Настя утверждают, что лектор опоздал на 10 минут. Таня считает, что лектор опоздал на 3 минуты. С помощью МНК оцените, на сколько опоздал лектор.
2. Предположим, что данные порождены моделью  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющей условиям классической линейной регрессии. Обозначим  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  – оценки метода наименьших квадратов для истинной модели. Оценка  $\tilde{\beta}_1$  получена по методу наименьших квадратов при дополнительном (вообще говоря, неверном) предположении, что  $\beta_0 = 0$ .
  - (a) Найдите МНК-оценку  $\tilde{\beta}_1$ . При каких условиях она является несмещенной оценкой параметра  $\beta_1$ ?
  - (b) Найдите дисперсию оценки  $\tilde{\beta}_1$ , сравните ее с дисперсией оценки  $\hat{\beta}_1$ .
  - (c) Обсудите, какую из двух оценок лучше использовать.
3. Модель, порождающая данные, имеет вид  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ . Ошибки независимы, и их дисперсии имеют вид  $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ . Регрессоры детерминированы. Для оценки дисперсии  $\sigma^2$  используется формула  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ . Является ли  $s^2$  несмещенной оценкой  $\sigma^2$ ? Если оценка смещена то что можно сказать о знаке смещения?
4. Рассмотрим оценку вида  $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$  для вектора коэффициентов регрессионного уравнения  $y = X\beta + \varepsilon$ , удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите  $E(\tilde{\beta})$  и  $Var(\tilde{\beta})$ .
5. Пусть регрессионная модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ , задана в матричном виде при помощи уравнения  $y = X\beta + \varepsilon$ , где  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}'$ . Известно, что  $E(\varepsilon) = 0$  и  $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$ . Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- (a) Укажите число наблюдений.

- (b) Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
- (c) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
- (d) Рассчитайте  $TSS$ ,  $RSS$  и  $ESS$ .
- (e) Чему равен  $e_4$ , МНК-остаток регрессии, соответствующий 3-ому наблюдению?
- (f) Чему равен  $R^2$  в модели?
- (g) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра  $\sigma^2$  регрессионной модели.
- (h) Рассчитайте  $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ , оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов  $\hat{\beta}$ .
- (i) Найдите  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)$ , несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента  $\hat{\beta}_1$ .
- (j) Найдите  $\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ , несмещенную оценку ковариации МНК-коэффициентов  $\hat{\beta}_1$  и  $\hat{\beta}_2$ .
- (k) Найдите  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$ .
- (l) Найдите  $\widehat{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ , оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов  $\hat{\beta}_1$  и  $\hat{\beta}_2$ .
- (m) Найдите  $\hat{\sigma}(\beta_1)$ , стандартную ошибку МНК-коэффициента  $\hat{\beta}_1$ .