Семинар 2.

1. Рассмотрим модель парной регрессии

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Получите выражения для:

(a) $Var(\hat{\beta}_1)$, $Var(\hat{\beta}_2)$;

(b) $cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

Решили на семинаре.

2. Рассмотрим модель парной регрессии

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Найдите МНК-оценку для дисперсии σ^2 случайной составляющей.

Решили на семинаре.

3. Пусть $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 Y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 X_i^2 = 3, \sum_{i=1}^5 X_i Y_i = 12, \sum_{i=1}^5 Y_i = 15, \sum_{i=1}^5 X_i = 3$.

(a) Найдите $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $Corr(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

(b) Найдите TSS, ESS, RSS, R^2, $\hat{\sigma}^2$.

Решение:

- $$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y}\sum x_i}{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2} = 2.5$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} = 1.5$$

- $$Corr(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1) \cdot (\hat{\beta}_2)}} = \ldots = \frac{-\sum x_i}{\sqrt{n \sum x_i^2}} = \frac{-3}{\sqrt{5 \cdot 3}}$$

- $$TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - 2\bar{y}\sum y_i + n\bar{y}^2 = 10$$

- $$ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i)^2 - 2\bar{y}\sum(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i) + n\hat{y}^2 =$$
$$= n \cdot \hat{\beta}_1^2 + 2 \cdot \hat{\beta}_1 \cdot \hat{\beta}_2 \sum x_i + \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2 - 2\bar{y}\left(n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum x_i\right) + n\bar{y}^2 = 7.5$$

- $$RSS = TSS - ESS = 2.5$$

- $$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 0.75$$

- $$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-2} = \frac{5}{6}$$

4. Все предпосылки классической линейной модели выполнены, $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$. Рассмотрим альтернативную оценку коэффициента β_2,
$$\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum Z_i(Y_i - \bar{Y})}{\sum Z_i(X_i - \bar{X})}.$$
   (a) Является ли оценка несмещённой?
   (b) Любые ли Z_i можно брать?
   (c) Найдите $Var(\hat{\beta}_{2,IV})$.

   Решение:

   (a) Да, является.
$$\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum(z_i\beta_2(x_i - \bar{x}) + z_i(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}))}{\sum z_i(x_i - \bar{x})} = \beta_2 + \frac{1}{\sum z_i(x_i - \bar{x})} \cdot \sum z_i(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$
$$E\hat{\beta}_{2,IV} = \beta_2$$
   (b) Любые кроме констант, иначе знаменатель оценки будет равен нулю.
   (c) Мы воспользуемся следующим свойством:
$$\sum z_i(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \sum(z_i - \bar{z})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \sum(z_i - \bar{z})\varepsilon_i$$
$$Var\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum(z_i - \bar{z})^2}{(\sum(z_i - \bar{z})x_i)^2} \cdot \sigma^2$$