Семинар 31.

1. Модель со случайным эффектом описывается следующим уравнением

$$y_{it} = \mu + x'_{it}\beta + u_i + \varepsilon_{it},\ (1)$$

где μ – это константа, а u_i – инвариантный во времени случайный эффект для каждой экономической единицы.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

- ошибки ε_{it} некоррелированы между собой, $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $V(\varepsilon_{it}) = \sigma^2_\varepsilon$;
- ошибки ε_{it} некоррелированы с регрессорами x_{js} при всех i, j, s;
- ошибки u_i некоррелированы, $E(u_i) = 0$, $V(u_i) = \sigma^2_u$;
- ошибки u_i некоррелированы с регрессорами x_{jt} при всех i, j, t;
- ошибки u_i и ε_{jt} некоррелированы при всех i, j, s.

Обозначим $w_{it} = u_i + \varepsilon_{it}$ и запишем модель в матричном виде:

$$y = \mu + i_{nT} + X\beta + w,$$

где i_{nT} – единичный вектор размерности $nT \times 1$.

Обозначим

$$\Sigma = E(w_i w'_i) = \sigma^2_u i_T i'_T + \sigma^2_\varepsilon I_T.$$

Тогда для объединенных наблюдений ковариационная матрица ошибок может быть записана как

$$\Omega = E(ww') = I_n \otimes \Sigma.$$

Покажите, что

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2_\varepsilon}\Big[I_T - \frac{\sigma^2_u}{\sigma^2_\varepsilon + T\sigma^2_u} i_T i'_T\Big]$$

или

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2_\varepsilon}\Big[\Big(I_T - \frac{1}{T} i_T i'_T\Big) + \theta^2 \frac{1}{T} i_T i'_T\Big],$$

где

$$\theta^2 = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon + T\sigma^2_u}.$$

2. Если P – такая матрица, что $P'P = \Sigma^{-1}$, то умножая обе части уравнения (1) на матрицу $P \otimes \Sigma^{-1}$ и применияя к преобразованному уравнению обычный МНК,

можно получить оценки обобщенного метода наименьших квадратов, то есть оценки $\hat{\beta}_{RE}$. Покажите, что в качестве матрицы P следует выбрать матрицу в следующем виде:

$$P = \frac{1}{\sigma_\varepsilon}\Big(I_T - \frac{1-\theta}{T} i_T i_T'\Big).$$

3. Преобразованная модель из предыдущей задачи в скалярном виде выглядит следующим образом (показать дома):

$$y_{it} - (1-\theta)\bar{y}_i = (1-\theta)\mu + (x_{it} - (1-\theta)\bar{x}_i)'\beta + \eta_{it}, i = 1, ..., n, t = 1, ..., T,$$

где η_{it} – гомоскедастичная ошибка. Используя данное представление, покажите, что

$$\hat{\beta}_{RE} = W_1\hat{\beta}_B + W_2\hat{\beta}_W = W_1\hat{\beta}_B + W_2\hat{\beta}_{FE},$$

где W_1 и W_2 – весовые матрицы, такие, что $W_1 + W_2 = I_k$, k – размерность вектора β.