Демонстрационный вариант проверочной работы №1

1. Найдите длины векторов $a = (1, 2, 3)$ и $b = (1, 0, -1)$ и косинус угла между ними.

2. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

3. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

4. Для матрицы

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы.

   (b) Найдите обратную матрицу, A^{-1}, ее собственные векторы и собственные числа.

   (c) Представьте матрицу A в виде $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица.

   (d) Представьте A^{2012} в виде произведения трёх матриц.

5. Вася и Петя независимо друг от друга решают тест по теории вероятностей. В тесте всего два вопроса. На каждый вопрос два варианта ответа. Петя знает решение каждого вопроса с вероятностью 0,7. Если Петя не знает решения, то он отвечает равновероятно наугад. Вася знает решение каждого вопроса с вероятностью 0,5. Если Вася не знает решения, то он отвечает равновероятно наугад.

   (a) Какова вероятность того, что Петя правильно ответил на оба вопроса?

   (b) Какова вероятность того, что Петя правильно ответил на оба вопроса, если его ответы совпали с Васиными?

   (c) Чему равно математическое ожидание числа Петиных верных ответов?

   (d) Чему равно математическое ожидание числа Петиных верных ответов, если его ответы совпали с Васиными?

6. Для случайных величин X и Y заданы следующие значения: $E(X) = 1$, $E(Y) = 4$, $E(XY) = 8$, $Var(X) = Var(Y) = 9$. Для случайных величин $U = X + Y$ и $V = X - Y$ вычислите:

   (a) $E(U)$, $Var(U)$, $E(V)$, $Var(V)$, $Cov(U, V)$.

   (b) Можно ли утверждать, что случайные величины U и V независимы?

7. Вася ведёт блог. Обозначим X_i — количество слов в i–ой записи. После первого года он по своим записям обнаружил, что $\bar{X}_{200} = 95$ и выборочное стандартное отклонение равно 282 слова. На уровне значимости $\alpha = 0.10$ проверьте гипотезу о том, что $\mu = 100$ против альтернативной гипотезы $\mu \neq 100$. Найдите также точное P-значение.