Семинар 26.

1. Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

   (a) Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?

   (b) Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без расчета коэффициентов?

   (c) Проверьте гипотезу о том, что правильность пчёл не оказывает влияние на правильность мёда с помощью тестов LR, LM и W.

   (d) Держась в небе за воздушный шарик, Винни-Пух неожиданно понял, что перед ним неправильные пчёлы. Помогите ему оценить вероятность того, что они делают неправильный мёд.

Вспомним ММП!

Пусть требуется протестировать систему (нелинейных) ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0: \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \dots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i-ое ограничение на вектор параметров θ, $i = 1, \dots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial \theta' \\ \partial g_2/\partial \theta' \\ \vdots \\ \partial g_r/\partial \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1'}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2'}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial g_r'}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'}\right) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \end{pmatrix}$ — информационная матрица Фишера

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat{\theta}_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat{\theta}_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик.

$LR := -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell(\hat{\theta}_{UR})) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика множителей Лагранжа

2. Методом максимального правдоподобия оценили логит-модель

$$\hat{y}_i^* = 2 + 3x_i - 5z_i.$$

   (a) Оцените вероятность того, что $y_i = 1$ для $\bar{x} = 15$, $\bar{z} = 3.5$.

   (b) Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y_i = 1$ для $\bar{x} = 15$, $\bar{z} = 3.5$.

   (c) Рассчитайте отношение шансов.

   (d) При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $\bar{z} = 3.5$ будет максимальным?

3. Пусть набор данных состоит из n наблюдений y и x, причем $n = n_1 + n_2 + n_3$. Для первых n_1 наблюдений $y = 1$ и $x = 1$. Для следующих n_2 наблюдений $y = 0$ и $x = 1$. Для последних n_3 наблюдений $y = 0$ и $x = 0$. Докажите, что как для logit-, так и для probit-модели уравнение правдоподобия не имеет решения.