Семинар 4.

1. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}'$. Известно, что $E(\varepsilon) = 0$ и $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

(a) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.

(b) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.

(c) Рассчитайте $\widehat{Var}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\widehat{\beta}$.

(d) Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость переменной x_2 в уравнении регрессии.

(e) Протестируйте на значимость переменную x_2 в уравнении регрессии на уровне значимости 10%:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики.

   ii. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

   iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

   iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

   v. Сделайте статистический вывод о значимости переменной x_2.

(f) Найдите P-значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного P-значения сделайте вывод о значимости переменной x_2.

(g) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_2 \neq 1$:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики.

ii. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

v. Сделайте статистический вывод.

(h) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_2 > 1$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики.

ii. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

v. Сделайте статистический вывод.

(i) Постройте 90%-ый доверительный интервал для оценки коэфициента β_2.

2. Используя матрицы $M = X(X'X)^{-1}X'$ и $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$, запишите TSS, RSS и ESS в матричной форме.

3. Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i.$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (y_i - \bar{y})/\hat{\sigma}_y$ и $x_i^* = (x_i - \bar{x})/\hat{\sigma}_x$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + \varepsilon_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + \varepsilon_i''.$$

В решении можно считать $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$ известными.

(a) Найдите $\hat{\beta}_1'$.

(b) Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_2'$ и $\hat{\beta}_2''$?

(c) Как связаны между собой e_i, e_i' и e_i''?

(d) Как связаны между собой $\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2\right)$, $\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2'\right)$ и $\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2''\right)$?

(e) Как выглядит матрица $\widehat{Var}\left(\hat{\beta}'\right)$?

(f) Как связаны между собой t-статистики $t_{\hat{\beta}_2}$, $t_{\hat{\beta}_2'}$ и $t_{\hat{\beta}_2''}$?

(g) Как связаны между собой R^2, $R^{2\prime}$ и $R^{2\prime\prime}$?

(h) В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.

Домашнее задание.

(a) Найдите $E(TSS)$, $E(ESS)$. Надо быть морально готовым к тому, что они выйдут громоздкие.

(b) Рассмотрим классическую линейную модель. Являются ли векторы e и $\hat{y}$ перпендикулярными? Найдите $Cov(e, \hat{y})$.