

Семинар 6.

1. Была оценена функция Кобба-Дугласа с учетом человеческого капитала H (K – физический капитал, L – труд)

$$\widehat{\ln(Q)} = 1.4 + 0.46 \ln L + 0.27 \ln H + 0.23 \ln K,$$

$$ESS = 170.4, RSS = 80.3, n = 21.$$

- (a) Чему равен коэффициент детерминации R^2 ?
- (b) Проверьте регрессию на значимость "в целом" на уровне значимости 1%.
2. Имеется всего два наблюдения, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. С помощью критериев AIC и BIC сравните две модели. Модель А: $y_i \sim (0; 1)$ и независимы, модель Б: $y_i \sim (\mu; 1)$ и независимы.
3. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)'$. Известно, что $E(\varepsilon) = 0$ и $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- (a) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.

Решение:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ_ε^2 регрессионной модели.

Решение:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{2}{5-3} = 1.$$

- (с) Рассчитайте $\widehat{Var}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.

Решение:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Постройте 95%-ый доверительный интервал для следующей функции от неизвестных параметров $\beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_3$.
- (e) Спрогнозируйте значение переменной y , если известно, что $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.
- (f) Приведите формулу для математического ожидания прогноза из предыдущего пункта.