

ДЗ-01

Сдать 27.01.2023 до 23:59

на почту [islabolitskiy@hse.ru](mailto:islabolitskiy@hse.ru) с темой письма «метрика\_фамилия\_дз...».

Например, «метрика\_петров\_дз1

### Задача 1

Случайная величина  $X$  имеет биномиальное распределение  $B(n, p)$ , где  $p$  — случайная величина, равномерно распределенная  $p \sim U(0, 1)$ . Найдите математическое ожидание  $E(X)$  и дисперсию  $V(X)$ .

### Задача 2

Пусть вы хотите оценить (МНК) регрессию  $y = X\beta + \varepsilon$  ( $k$  регрессоров), константа не включена в матрицу регрессоров  $X$ . Однако эконометрический пакет, которым вы располагаете, автоматически добавляет константу к регрессорам.

Обозначим  $y^* = \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix}$ ,  $X^* = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 1 & -X \end{bmatrix}$ , где  $1 - (n \times 1)$  вектор состоящий из единиц.

- (а) Покажите, что регрессия  $y^*$  на  $X^*$  дает желаемый результат.  
(б) Покажите, что полученные в (а) оценки стандартных ошибок оценок коэффициентов должны быть скорректированы на некоторый множитель и укажите его.

### Задача 3

Модель порождающая данные имеет вид  $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ . Ошибки одинаково распределены, независимы и их дисперсия равна  $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ . Пусть  $e_t$  — остатки регрессии, оцененной методом МНК. Найдите ковариацию  $Cov(e_t, e_{t-1})$ . Равна ли она 0 в предположениях условия задачи?

### Задача 4

Случайные величины  $(X, Y)$  имеют совместное распределение приведенное в таблице

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Y = 0$	0	0	0	1/6	1/6	0
$Y = 1$	1/6	1/6	1/6	0	0	1/6

- (а) Найдите  $h(X)$ , наилучший прогноз  $Y$  при известном  $X$ .  
(б) Найдите  $g(X)$ , наилучший линейный прогноз  $Y$  при известном  $X$ .  
(с) Сравните среднеквадратичные ошибки прогноза  $E(Y - h(X))^2$  и  $E(Y - g(X))^2$ .

### Задача 5

Пусть есть стандартная модель множественной регрессии  $y = X\beta + \varepsilon$ ,  $k$  — число коэффициентов,  $n$  — число наблюдений. Найдите формулу для оценки вектора  $\beta$ , которая получается минимизацией функции

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \beta)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2 \text{ при заданном } \lambda.$$

### Задача 6

Имеется стандартная линейная модель  $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ . ( $x_t$  — не случайные,  $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ ). Пусть

$$\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n. \text{ Рассмотрим оценку } \tilde{\beta} = \frac{\sum \lambda_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum \lambda_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

- (а) Является ли эта оценка несмещенной?  
(б) Что вы можете сказать о точности этой оценки, по сравнению с оценкой наименьших квадратов?