

Семинар 4.

1. Рассмотрим уравнение регрессии:

$$y_i = \beta + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.$$

Пусть ошибки регрессии удовлетворяют следующим условиям:

$$E(\varepsilon_i) = 0, cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j, Var(\varepsilon_i) = \sigma^2, x_i > 0.$$

- (a) Найдите оценку метода наименьших квадратов $\hat{\beta}$ и ее дисперсию.
- (b) Предложите несмещенную оценку, обладающую меньшей дисперсией, чем оценка метода наименьших квадратов. Получите дисперсии этой оценки и сравните ее с дисперсией оценки метода наименьших квадратов. Интерпретируйте результаты.
2. Рассмотрим следующую регрессионную модель, в которой $2n$ наблюдений разбиты на две равные группы по n наблюдений в каждой:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$E(\varepsilon) = 0, cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j,$$

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma_1^2, i = 1, \dots, n, Var(\varepsilon_i) = \sigma_2^2, i = n + 1, \dots, 2n.$$

Введем естественное разбиение матриц на блоки:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

(Здесь $y_1, y_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 - n \times 1$ векторы, $X_1, X_2 - n \times k$ матрицы).

- (a) Пусть $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}$ – оценки метода наименьших квадратов вектора коэффициентов β по первой группе наблюдений, по второй группе наблюдений и по всем $2n$ наблюдениям соответственно. Покажите, что $\hat{\beta}$ есть "взвешенное среднее" оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, в том смысле, что $\hat{\beta} = L_1\hat{\beta}_1 + L_2\hat{\beta}_2$, где L_1 и $L_2 - k \times k$ матрицы такие, что $L_1 + L_2 = I_k$.
- (b) Выведите следующие формулы для оценки обобщенного метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right),$$

$$V(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

- (с) Покажите, что $\hat{\beta}_{GLS}$ также является "взвешенным средним" оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, в том смысле, что существуют $k \times k$ матрицы Λ_1 и Λ_2 такие, что $\hat{\beta}_{GLS} = \Lambda_1 \hat{\beta}_1 + \Lambda_2 \hat{\beta}_2$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = I_k$.

3. Рассмотрим модель из предыдущей задачи. Опишите процедуру доступного обобщенного метода наименьших квадратов в применении к этой модели.
4. Рассмотрим модель

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.,$$

где $E(\varepsilon_i) = 0$, $E(\varepsilon_i^2) = \alpha x_i^2$, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

- (а) Покажите, что МНК-оценка $\hat{\beta}$ параметра β является несмещенной, но неэффективной.
- (б) Покажите, что стандартная оценка дисперсии $\hat{\beta}$ смещена вниз по отношению истинной дисперсии $\hat{\beta}$.

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.