Семинар 3.

1. Рассмотрим следующую регрессионную модель, в которой $2n$ наблюдений разбиты на две равные группы по n наблюдений в каждой:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0;\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\ t \neq s$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_1^2,\ t = 1, ..., n;\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_2^2,\ t = n+1, ..., 2n.$$

Введём естественное разбиение матриц на блоки:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\ \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

(а) Выведите следующие формулы для GLS–оценок:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right),$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

(б) Опишите процедуру получение FGLS–оценок для данной модели.

Решение.
(а) Пусть Ω — матрица ковариаций вектора ошибок ε. Тогда

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_n & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_n \end{bmatrix}, \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}. \end{bmatrix}$$

Тогда оценка $\hat{\beta}_{GLS}$ имеет вид:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X \right)^{-1} X'\Omega^{-1}y =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} X_1' X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_1' X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right).$$

Ковариационная матрица для $\hat{\beta}_{GLS}$ имеет вид:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(X'\Omega^{-1}X \right)^{-1} = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

(b) Оценка FGLS имеет вид:

$$\hat{\beta}_{FGLS} = \left(X'\hat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1} X'\hat{\Omega}^{-1}y,$$

где $\hat{\Omega}$ — состоятельная оценка матрицы Ω.

Таким образом, в нашей задаче необходимо найти состоятельные оценки для σ_1^2 и σ_2^2.

Оценим регрессию $y = X\beta + \varepsilon$ по первым n наблюдениям и по оставшимся n наблюдениям. Обозначим через

$$e_1 = y_1 - X_1\hat{\beta}_1 = y_1 - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1,$$

$$e_2 = y_2 - X_2\hat{\beta}_2 = y_2 - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y_2$$

векторы остатков. Так как в каждом из двух случаев выполнены условия классической регрессионной модели (в том числе, условие гомоскедастичности ошибок), то оценки дисперсий ошибок

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{e_i'e_i}{n-k},\ i = 1, 2,$$

являются состоятельными.

Поэтому оценка доступного обобщенного метода наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1'X_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\hat{\sigma}_2^2}\right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\hat{\sigma}_2^2}\right).$$

2. Рассмотрим модель

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t, t = 1, ..., n.,$$

где $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \alpha x_t^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ и $\sum_{t=1}^n x_t^2 = n$.

(a) Покажите, что МНК–оценка $\hat{\beta}$ параметра β является несмещенной, но неэффективной.

(b) Покажите, что стандартная оценка дисперсии $\hat{\beta}$ смещена вниз по отношению истинной дисперсии $\hat{\beta}$.

Решение:

а) МНК-оценка параметра β равна:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t y_t}{\sum_{t=1}^n x_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t y_t}{n}.$$

Так как $\mathrm{E}\left(y_t\right) = \beta x_t,\ \mathrm{V}\left(y_t\right) = \mathrm{V}\left(\varepsilon_t\right) = a x_t^2, t = 1, \ldots, n$, а y_t и y_s некоррелированы при $t \neq s$, то $\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$ (оценка несмещенная) и

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{a\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n^2}.$$

Применяя обобщенный метод наименьших квадратов, получаем оценку

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_t}{x_t}$$

для которой $\mathrm{E}\left(\beta_{\mathrm{GLS}}\right) = \beta$ и $\mathrm{V}\left(\beta_{\mathrm{GLS}}\right) = a/n$. Из неравенства Коши–Буняковского следует, что $\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 \leqslant n\sum_{t=1}^{n} x_t^4$, т. е. $\sum_{t=1}^{n} x_t^4 \geqslant n$. Поэтому (как и следовало ожидать) $\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \geqslant \mathrm{V}\left(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)$, т. е. оценка $\widehat{\beta}$ неэффективна. б) Как известно, стандартной оценкой дисперсии $\widehat{\beta}$ является величина

$$s_{\widehat{\beta}}^2 = \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} = \frac{\widehat{\sigma}^2}{n}, \quad \text{где} \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-1}.$$

(Здесь $e_t = y_t - \widehat{\beta}x_t, t = 1, \ldots, n-$ остатки регрессии). Имеем

$$\mathrm{ESS} = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} e_t\left(y_t - \widehat{\beta}x_t\right) = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \widehat{\beta}x_t\right)y_t = \sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t y_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

Заметим, что

$$\mathrm{E}\left(y_t^2\right) = \beta^2 x_t^2 + a x_t^2 \quad \text{и} \quad \mathrm{E}\left(y_t y_s\right) = \beta^2 x_t x_s \quad \text{при} \quad t \neq s.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{ESS}) &= \left(\beta^2 + a\right)n - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t^4\left(\beta^2 + a\right) + \sum_{t\neq s}\beta^2 x_t^2 x_s^2}{n} \\
&= \left(\beta^2 + a\right)n - \frac{\beta^2\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^4 + \sum_{t\neq s} x_t^2 x_s^2\right) + a\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n} \\
&= \left(\beta^2 + a\right)n - \frac{\beta^2\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2 + a\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n} \\
&= a\left(n - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\widehat{\sigma}^2\right) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{ESS})}{n-1} = \frac{a}{n-1}\left(n - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n}\right) \text{ и} \\
&\mathrm{E}\left(s_{\hat{\beta}}^2\right) = \frac{a}{n(n-1)}\left(n - \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t^4}{n}\right).
\end{aligned}$$

Как было отмечено в п. а), $\sum_{t=1}^n x_t^4 \geqslant n$, поэтому

$$\mathrm{E}\left(s^2_{\widehat{\beta}}\right) \leqslant \frac{a}{n(n-1)}(n-1) = \frac{a}{n}, \quad \text{а } \mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{a\sum_{t=1}^n x_t^4}{n^2} \geqslant \frac{a}{n},$$

т. е. оценка $s^2_{\widehat{\beta}}$ смещена вниз.

3. Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели

$$y_t = \beta_1 + \varepsilon_t,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0,\ \mathbb{E}(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon/x_t,\ x_t > 0$$

в классе линейных несмещённых оценок. Рассчитайте дисперсию этой оценки и сравните её с дисперсией МНК–оценки.

Решение:
Известно , что

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{n}\left(y_1 + \ldots + y_n\right).$$

Из условия следует, что $\mathrm{E}\left(y_t\right) = \beta, \mathrm{V}\left(y_t\right) = \sigma^2 x_t$ и $\mathrm{Cov}\left(y_t, y_s\right) = 0$, при $t \neq s$. Поэтому

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$$

(т. е. оценка $\widehat{\beta}$ несмещенная) и

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{t=1}^n x_t.$$

Обобщенный метод наименьших квадратов позволяет получить эффективные оценки при гетероскедастичных случайных ошибках. В данном случае ОМНК сводится к взвешенному методу наименьших квадратов с весами $1/\sqrt{x_t}$:

$$\frac{y_t}{\sqrt{x_t}} = \beta\frac{1}{\sqrt{x_t}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_t}}.$$

Здесь ошибки $u_t = \varepsilon_t/\sqrt{x_t}$ уже удовлетворяют условию гомоскедастичности: $\mathrm{V}\left(u_t\right) = \sigma^2$. Применяя к этому уравнению МНК, получаем:

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{y_t}{x_t}\right) / \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{x_t}\right),$$

$$\mathrm{V}\left(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right) = \left(\sum_{t=1}^n \frac{\sigma^2 x_t}{x_t^2}\right) / \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{x_t}\right)^2 = \sigma^2 / \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{x_t}\right).$$

Неравенство $\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \geqslant \mathrm{V}\left(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)$ эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t}\right) \geqslant n^2,$$

которое, в свою очередь, вытекает непосредственно из неравенства КошиБуняковского.

4. Дана стандартная модель парной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n.$$

(а) Чему равна МНК–оценка коэффициента β_2 при ограничении $\beta_1 = 0$.

(б) Чему равна дисперсия оценки в пункте (а)? Покажите, что она меньше, чем $\sigma^2 / \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ — дисперсия МНК–оценки β_2 в регрессии без ограничения. Противоречит ли это теореме Гаусса–Маркова?

Решение:

(а) GDP (истинный процесс): $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n.$
Модель, которую оцениваем: $y_i = \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n.$
Найдем МНК–оценку для нашей модели:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Как известно, при пропуске существенных переменных (в нашем случае пропущена константа) МНК–оценки смещены. Убедимся в этом:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i) x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) =$$

$$= \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \beta_2 \neq \beta_2.$$

Таким образом, МНК–оценка действительно смещённая.

(б) Вычислим дисперсию данной оценки:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathrm{Var}(\varepsilon_i) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Сравним данную дисперсию с дисперсией МНК–оценки параметра β_2 для истинной модели (обозначим эту оценку как β_2^{true} которая, как нам известно, имеет вид:

$$\mathrm{Var}(\beta_2^{true}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Сравним знаменатели:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n(\bar{x})^2 = n(\bar{x})^2 \geq 0.$$

Следовательно, МНК–оценка в модели с пропущенной константой имеет меньшую дисперсию. Однако это не противоречит теореме Гаусса–Маркова. Согласно теореме Гаусса–Маркова МНК–оценка β_2^{true} в истинной модели действительно имеет минимальную дисперсию, однако, в классе линейных по y и несмещённых оценок, но МНК–оценка β_2 в модели с пропущенной константой является смещённой.

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.