

Семинар 3.

1. Рассмотрим следующую регрессионную модель, в которой $2n$ наблюдений разбиты на две равные группы по n наблюдений в каждой:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0; \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t \neq s$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_1^2, t = 1, \dots, n; \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_2^2, t = n + 1, \dots, 2n.$$

Введём естественное разбиение матриц на блоки:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Выведите следующие формулы для GLS-оценок:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1' X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2' X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1' y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2' y_2}{\sigma_2^2} \right),$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(\frac{X_1' X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2' X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

- (б) Опишите процедуру получения FGLS-оценок для данной модели.

2. Рассмотрим модель

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n,$$

где $E(\varepsilon_i) = 0, E(\varepsilon_i^2) = \alpha x_i^2, E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

- (a) Покажите, что МНК-оценка $\hat{\beta}$ параметра β является несмещенной, но неэффективной.
- (b) Покажите, что стандартная оценка дисперсии $\hat{\beta}$ смещена вниз по отношению к истинной дисперсии $\hat{\beta}$.

3. Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели

$$y_i = \beta_1 + \varepsilon_i,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 / x_i, x_i > 0$$

в классе линейных несмещённых оценок. Рассчитайте дисперсию этой оценки и сравните её с дисперсией МНК-оценки.

4. Дана стандартная модель парной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- (а) Чему равна МНК-оценка коэффициента β_2 при ограничении $\beta_1 = 0$.
- (б) Чему равна дисперсия оценки в пункте (а)? Покажите, что она меньше, чем $\sigma^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ — дисперсия МНК-оценки β_2 в регрессии без ограничения. Противоречит ли это теореме Гаусса–Маркова?

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.