

Семинар 4.

Модель множественной регрессии.

1. Вася оценил исходную модель:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (Y_i - \bar{Y})/\hat{\sigma}_Y$ и $x_i^* = (X_i - \bar{X})/\hat{\sigma}_X$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + \varepsilon_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + \varepsilon_i''$$

В решении можно считать $\hat{\sigma}_X$ и $\hat{\sigma}_Y$ известными.

- Найдите $\hat{\beta}_1'$.
- Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_2'$ и $\hat{\beta}_2''$?
- Как связаны между собой e_i , e_i' и e_i'' ?
- Как связаны между собой $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2)$, $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2')$ и $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2'')$?
- Как выглядит матрица $\widehat{Var}(\hat{\beta}')$?
- Как связаны между собой t -статистики $t_{\hat{\beta}_2}$, $t_{\hat{\beta}_2'}$ и $t_{\hat{\beta}_2''}$?
- Как связаны между собой R^2 , $R^{2'}$ и $R^{2''}$?
- В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.

2. Пусть регрессионная модель $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)'$. Известно, что $E(\varepsilon) = 0$ и $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- (a) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
- (b) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ_ε^2 регрессионной модели.
- (c) Рассчитайте $\widehat{Var}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
- (d) Рассчитайте TSS , RSS и ESS .
- (e) Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость переменной X_2 в уравнении регрессии.
- (f) Протестируйте на значимость переменную X_2 в уравнении регрессии на уровне значимости 10%:
 - i. Приведите формулу для тестовой статистики.
 - ii. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0 .
 - iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
 - iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
 - v. Сделайте статистический вывод о значимости переменной x_2 .
- (g) Найдите $p-value$, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (t_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного p -значения сделайте вывод о значимости переменной x_2 .
- (h) Постройте 90%-ый доверительный интервал для оценки коэффициента β_2 .