Семинар 18. Метод максимального правдоподобия.

Многомерное нормальное распределение.

Случайный вектор $x = (X_1, \ldots, X_n)'$ называется невырожденным нормальным (гауссовским) случайньм вектором, если плотность его распределения задается равенством

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)'\Sigma^{-1}(x-m)\right), \quad x \in R^n$$

где $m \in R^n$ — (произвольный) вектор, Σ — симметричная, положительно определенная матрица (т.е. $\Sigma = \Sigma'$ и $\Sigma > 0$). В случае $n = 1$ получаем нормальную случайную величину. Вектор m и матрица Σ являются параметрами распределения, и обычно используется обозначение $X \sim N(m, \Sigma)$. Нормальный вектор ε, у которого $m = 0$, а $\Sigma = I$ (единичная матрица), называется стандартным нормальным вектором. Если матрица Σ вырождена (но неотрицательно определена), то можно определить вырожденное нормальное распределение.

N1) Если $x \sim N(m, \Sigma)$, то $\mathrm{E}(x) = m, \ \mathrm{V}(x) = \Sigma$.

N2) Любой подвектор нормального вектора также является нормальным вектором.

N3) Пусть x и y — два независимых нормальных вектора. Тогда объединенный вектор $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ также является нормальньм.

N4) Если $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ — нормальный вектор и его компоненты x и y некоррелированы, то они независимы.

N5) Пусть $B : R^n \to R^k$ — линейное преобразование пространства R^n в R^k, B — его матрица и l — произвольный вектор в R^k. Тогда если $x \sim N(m, \Sigma)$, то случайный вектор $y = B\boldsymbol{x} + l$ является нормальным с параметрами $Bm + l$ и $B\Sigma B'$. (Преобразование пространства R^n в R^k вида $y = B\boldsymbol{x} + l$, являющееся композицией линейного преобразования B и параллельного переноса на вектор l, называется аффинным преобразованием.) В частности,

а) линейная комбинация компонент гауссовского вектора есть гауссовская случайная величина;

б) ортогональное линейное преобразование стандартного нормального вектора есть стандартный нормальный вектор.

N6) Пусть ε — стандартный n-мерный нормальный вектор и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\varepsilon + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\varepsilon + b$, где $\boldsymbol{A} : R^n \to R^p, \boldsymbol{B} : R^n \to R^q$— некоторые линейные преобразования и $a \in R^p, b \in R^q$ — произвольные (неслучайные) векторы. Тогда $\mathrm{Cov}(x, y) = AB'$, в частности, векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ независимы тогда и только тогда, когда, $\boldsymbol{AB}' = 0$. Пусть M — идемпотентная $n \times n$ матрица, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = r$, а ε — стандартный n-мерный гауссовский вектор. Как известно, матрицу M можно представить в виде $M = O'\Lambda O$, гдс O — ортогональная матрица, а $\boldsymbol{\Lambda}$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены единицы и нули, причем число единиц равло рангу M. Рассмотрим случайную величину $\chi^2 = \varepsilon' M \varepsilon$. Имеем

$$\chi^2 = \varepsilon' M \varepsilon = \varepsilon' O' \Lambda O \varepsilon = (O\varepsilon)' \Lambda O \varepsilon = s' \Lambda s,$$

где в силу N5) вектор s является стандартным гауссовским вектором. Отсюда следует, что χ^2 представляет сумму квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин в количестве, равном рангу матрицы M. Таким образом,

N7) Случайная величина $\chi^2 = \varepsilon' M \varepsilon$ имеет распределение $\chi^2(r)$, где $r = rank(M)$. Аналогичным образом устанавливается следующий результат.

N8) Пусть $x \sim N(m, \Sigma)$ и $n \times n$ матрица Σ невырождена. Тогда случайная величипа $(x - m)' \Sigma^{-1} (x - m)$ имеет распределение $\chi^2(n)$.

1. Представим стандартную линейную модель в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

где $y_i, \varepsilon_i - n_i \times 1$ векторы, $X_i - n_i \times k$ матрицы, $\beta - k \times 1$ вектор, векторы ε_i имеют нормальное распределение $N\left(0, \sigma^2 I_{n_i}\right)$ и независимы. Вектор y_3 представляет собой пропущенные наблюдения зависимой переменной, а матрица X_2 — пропущенные наблюдения независимых переменных. Вычислите следующие оценки вектора β и сравните их свойства:

(a) МНК–оценка только по полным наблюдениям y_1, X_1;

(b) МНК–оценка при замене матрицы X_2 на нулевую и исключении наблюдений y_3, X_3;

(c) МНК–оценка по всей модели при замене y_3, X_2 на соответственно нулевой вектор и нулевую матрицу;

(d) оценка максимального правдоподобия, предполагая y_3, X_2 неизвестными параметрами наряду с β.

(a) Исследуйте оценки на несмещённость.

(b) Сравните дисперсии полученных оценок.

2. Известно, что в модели множественной регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ имеется гетероскедастичность, причем

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_1^2, i = 1, ..., n_1,$$

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_2^2, i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2, (n = n_1 + n_2),$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, i \neq j.$$

   (a) В предположении нормальности вектора ошибок постройте тест отношения правдоподобия (LR–тест) для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

   (b) Теперь предположим, что для этой же модели матрица ковариаций Ω имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \boldsymbol{I}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 I_{n_r} \end{bmatrix}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

   (групповая гетероскедастичность). Как выглядит LR–тест (тест отношения правдоподобия) для проверки гипотезы $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_r^2$?

3. Дана линейная модель $y = X\beta + u, u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$. Покажите, что

$$LM = n(RSS_R - RSS_{UR})/RSS_R, LR = n \ln(RSS_R/RSS_{UR})$$

и

$$W = n(RSS_R - RSS_{UR})/RSS_{UR}.$$

Покажите, что выполняются неравенства

$$LM \leq LR \leq W.$$

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.