

Семинар 7.

Фиктивные переменные. Тест Чоу.

Задача 1. (Универсиада по эконометрике, МГУ, 2018 год). В некоторой отрасли заработная плата работника следующим образом зависит от его опыта работы и пола:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + \beta_4 X_i D_i + \varepsilon_i,$$

где W_i — заработная плата i -го работника в рублях в месяц, X_i — стаж i -го работника в годах, D_i — бинарная переменная, равная единице для женщин и нулю для мужчин, ε_i — случайные ошибки. Предполагается, что все предпосылки классической линейной модели множественной регрессии выполнены.

Оценка параметров модели при помощи МНК на основе данных о десяти тысячах наблюдений позволила получить следующие результаты:

$$\widehat{\ln W_i} = 10 + 60X_i - 3X_i^2 - 12X_i D_i.$$

Оценка ковариационной матрицы вектора оценок коэффициентов имеет вид:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 51 & -20 & 2 & 0 \\ -20 & 9 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

- Опираясь на полученные оценки параметров, изобразите на одном рисунке графики логарифмов заработной платы типичного работника и типичной работницы в зависимости от их стажа. Интерпретируйте полученный результат.
- Аналитик Афанасий предполагает, что женщины в данной отрасли достигают максимума своей производительности при стаже, равном 10 годам. Соответственно и их заработная плата максимальна именно в этот момент. Сформулируйте (в терминах коэффициентов модели) гипотезу, которая соответствует предположению Афанасия, и проверьте её при уровне значимости 5%.
- Аналитик Евгения утверждает, следующее: «Если обозначить X_M^* — стаж работы, при котором зарплата мужчины максимальна, а X_W^* — стаж, при котором зарплата женщины максимальна, то окажется, что $X_M^* = X_W^* + 1$. То есть женщины достигают пика своей зарплаты на год раньше мужчин». Сформулируйте (в терминах коэффициентов модели) гипотезу, которая соответствует утверждению Евгении, и проверьте её на уровне значимости 5%.

Задача 2. На основе квартальных данных с 2003 по 2021 год было оценено следующее уравнение регрессии, описывающее зависимость цены на товар P от нескольких факторов:

$$\hat{P}_i = 3.5 + 0.4X_i + 1.1W_i,$$

$$ESS = 70.4, RSS = 40.5.$$

Когда в уравнение были добавлены фиктивные переменные, соответствующие первым трем кварталам года Q_1, Q_2, Q_3 , оцениваемая модель приобрела вид

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 W_i + \beta_4 Q_{1i} + \beta_5 Q_{2i} + \beta_6 Q_{3i} + \varepsilon_i.$$

При этом ESS выросла до 86.4. Сформулируйте и проверьте гипотезу о наличии сезонности (на уровне значимости 5%).

Задача 3. Всего имеется 100 наблюдений. Для первых 50 наблюдений

$$X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}, X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2000 \end{pmatrix}', y'y = 2100.$$

По последним 50 наблюдениям:

$$X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}, X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2200 \end{pmatrix}', y'y = 2500.$$

По первым 50 наблюдениям оценивается модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, по последним 50 наблюдениям оценивается модель $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 x_i + \varepsilon_i$. Предположим, что во всех 100 наблюдениях ε_i независимы и нормальны $N(0; \sigma^2)$. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0: \beta = \gamma$.

Задача 4. Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето) и $FALL$ (осень):

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \ln P + \hat{\beta}_3 SPRING + \hat{\beta}_4 SUMMER + \hat{\beta}_5 FALL,$$

$$R^2 = 0.24, n = 24.$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы о том, что $\beta_3 = 0$ и $\beta_4 = \beta_5$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Пусть для регрессии с ограничениями был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.13$. Протестируйте нулевую гипотезу на уровне значимости 5%.

Задача 5. Рассмотрим следующую регрессионную модель зависимости логарифма заработной платы $\ln(W)$ от уровня образования Edu , опыта работы Exp , Exp^2 и уровня образования родителей $Fedu$ и $Medu$:

$$\widehat{\ln}(W_i) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Edu_i + \hat{\beta}_3 Exp_i + \hat{\beta}_4 Exp_i^2 + \hat{\beta}_5 Fedu_i + \hat{\beta}_6 Medu_i.$$

Модель регрессии была отдельно оценена по выборкам из 35 мужчин и 23 женщин, и были получены остаточные суммы квадратов $RSS_1 = 34.4$ и $RSS_2 = 23.4$, соответственно. Остаточная сумма квадратов в регрессии, оцененной по объединенной выборке, равна 70.3. Протестируйте на 5% уровне значимости гипотезу об отсутствии дискриминации в оплате труда между мужчинами и женщинами.

Задача 6 (компьютерный практикум). В файле *Chow_2.xls* содержатся данные об экономике Баккардии в период с 1 квартала 2015 года по 4 квартал 2022 года. Показатели выражены в миллиардах баккардийских крон 2015 года.

- а) Оцените следующую модель регрессии:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 D2_t + \beta_4 D3_t + \beta_5 D4_t + \varepsilon_t,$$

где C_t — конечное потребление в момент времени t , Y_t — конечное потребление в момент времени t , Y_t — располагаемый доход в момент времени t , Dj_t — дамми переменная на квартал ($j = 2, 3, 4$).

Проинтерпретируйте полученные результаты.

- б) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о наличии сезонности. Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезы.
- с) Оцените модель в следующем виде:

$$C_t = \beta_1 Y_t + \beta_2 D1_t + \beta_3 D2_t + \beta_4 D3_t + \beta_5 D4_t + \varepsilon_t.$$

Сравните полученные результаты с предыдущим пунктом.

- д) Попробуйте улучшить модель, включив в нее переменные взаимодействия:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 D2_t + \beta_4 D3_t + \beta_5 D4_t + \beta_6 (Y * D2) + \beta_7 (Y * D3) + \beta_8 (Y * D4) + \varepsilon_t.$$

Проинтерпретируйте полученные результаты.

Список источников

1. Универсиада по эконометрике — 2018. <https://new.universiade-ecm.com>.