

## Семинар 3.

## Модель множественной регрессии.

## Матрицы: начало.

1. (Математическое ожидание квадратичной формы) Пусть  $y$  — случайный вектор-столбец размерности  $n \times 1$ ,  $A$  — детерминированная матрица размерности  $n \times n$ . Покажите, что справедливо следующее:

$$\mathbb{E}(y' Ay) = \text{tr}(A \text{Var}(y)) + \mathbb{E}(y') A \mathbb{E}(y).$$

2. Используя матрицы  $P = X(X'X)^{-1}X'$  и  $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$

- (a) запишите TSS, RSS и ESS в матричной форме;
- (b) вычислите  $\mathbb{E}(\text{TSS})$ ,  $\mathbb{E}(\text{ESS})$ .

Примечание:  $\vec{1}$  — вектор размерности  $n \times 1$ , состоящий из единиц.

3. Что происходит с TSS, RSS, ESS,  $R^2$  при добавлении нового наблюдения? Если величина может изменяться только в одну сторону, то докажите это. Если возможны и рост, и падение, то приведите пример.
4. Рассмотрим классическую линейную модель регрессии

$$y = X\beta + \varepsilon.$$

Найдите:

- (a)  $\text{Cov}(e, \hat{\beta})$ ;
- (b)  $\text{Cov}(e, y)$ ;
- (c)  $\text{Cov}(e, \hat{y})$ .

## Домашнее задание.

1. Рассчитайте  $\mathbb{E}(\text{RSS})$ .
2. Посчитайте  $\text{Cov}(\hat{\beta}, y)$ ,  $\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{y})$ .