Домашняя работа №1. Решение.

Задача 1 (20 баллов)

(а)

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i^n X_i Y_i}{\sum_i^n X_i^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i^n X_i(\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i)}{\sum_i^n X_i^2}\right)$$
$$= \frac{\sum_i^n \alpha X_i}{\sum_i^n X_i^2} + \frac{\sum_i^n \beta X_i^2}{\sum_i^n X_i^2} + \frac{\sum_i^n X_i \mathbb{E}(\varepsilon_i)}{\sum_i^n X_i^2} = \alpha \frac{\sum_i^n X_i}{\sum_i^n X_i^2} + \beta \overset{\alpha=0}{=\!=} \beta$$

Если $\sum_i^n X_i = 0 \iff$ признак X центрирован, то $\tilde{\beta}$ — несмещенная оценка для β.

(б)

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_i^n X_i(\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i)}{\sum_i^n X_i^2}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_i^n X_i \varepsilon_i}{\sum_i^n X_i^2}\right) = \frac{\sigma^2 \sum_i^n X_i^2}{(\sum_i^n X_i^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_i^n X_i^2}$$

(в)

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\sum_i^n X_i^2 \geqslant \sum_i^n (X_i - \bar{X})^2 \Longrightarrow \frac{1}{\sum_i^n X_i^2} \leq \frac{1}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2} \Longrightarrow \mathrm{Var}(\tilde{\beta}) \leqslant \mathrm{Var}(\hat{\beta})$$

(г) Смещение выше (по модулю) у оценки $\tilde{\beta}$, а дисперсия больше у оценки $\hat{\beta}$. То есть, у более простой модели больше смещение (она хуже подстраивается под данные), но меньше дисперсия/разброс (модель более устойчива к изменению выборки).

Задача 2 (20 баллов)

(а) Оценим регрессию $y^* = X^* \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + u$, **(1)**

здесь α — скаляр, β — $k \times 1$-вектор. Обозначим $\hat{\sigma}^2, \hat{\beta}, \widehat{Var}(\hat{\beta})$ — оценки в исходной регрессии.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = (X^* X^*)^{-1} X^{*\prime} y = \left(\begin{bmatrix} l' & l' \\ X' & -X' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & X \\ l & -X \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} l & X \\ l & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2X'X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2X'y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (X'X)^{-1} X'y \end{bmatrix}, \text{ т.е. } \tilde{\beta} = \hat{\beta}.$$

(б) $\widehat{Var}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix}\right) = \tilde{\sigma}^2 (X^{*\prime} X^*)^{-1} = \tilde{\sigma}^2 \begin{bmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2X'X \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & (X'X)^{-1} \end{bmatrix},$

т.е. $\widehat{Var}\tilde{\beta} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(X'X)^{-1}$.

Оценка дисперсии в (1) равна

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2n-k-1}e^{*\prime}e^* = \frac{1}{2n-k-1}\left(\begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l & X \\ l & -X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix}\right)'\left(\begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l & X \\ l & -X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n-k-1}\begin{bmatrix} y - X\hat{\beta} \\ -y + X\hat{\beta} \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} y - X\hat{\beta} \\ -y + X\hat{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2n-k-1}(2e'e) = \frac{2(n-k)\hat{\sigma}^2}{2n-k-1}.$$

Получаем

$$\widehat{Var}(\tilde{\beta}) = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{2(n-k)}{2n-k-1}\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \frac{(n-k)}{2n-k-1}\widehat{Var}(\hat{\beta}).$$

Поправочный коэффициент $\sqrt{\frac{n-k}{2n-k-1}}$.

Задача 3 (30 баллов)

Ассистент Никита выставляет оценку за очередную работу по дополнительным главам макроэкономики. У Никиты не выходит прочитать эту работу из-за неразборчивого почерка, поэтому вместо этого он оценивает четыре регрессии с разными наборами детерминант, принимая балл за работу в качестве зависимой переменной:

1. Hard и Easy
2. Respect
3. Respect и Delta
4. Easy и Respect

В качестве наблюдений выступают проверенные ранее работы. Обозначения для регрессоров следующие: Hard - количество слов, написанное при ответе на самый сложный вопрос, Easy - количество слов, написанное при ответе на самый легкий вопрос, Respect - их сумма, Delta - их разность. Сложность вопросов воспринимается Никитой всегда одинаково, независимо от конкретной работы. Кроме того, Никита всегда оценивает регрессии с константой, но не любит выводить оценки констант в таблице с результатами.

В качестве балла за работу с неразборчивым почерком Никита всегда выставляет минимальное из предсказанных значений в четырёх регрессиях, но не более 8 баллов.

а)

К сожалению, Никита случайно стёр некоторые числа из финальной таблицы с результатами оценки регрессий, но он уверен, что их все можно восстановить. Помогите Никите сделать это, либо объясните ему, что он не прав.

Таблица представлена ниже. В скобках указаны стандартные ошибки. На месте букв должны стоять числа.

Таблица 1: Результаты оценки регрессий

	(1)	(2)	(3)	(4)
Hard	0.03 (0.02)	-	-	-
Easy	0.04 (0.02)	-	-	$\boldsymbol{H}$ $(\boldsymbol{I})$
Respect	-	0.036 (0.01)	$\boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{K}$ $(\boldsymbol{L})$
Delta	-	-	$\boldsymbol{D}$ $(\boldsymbol{E})$	-
R^2	0.3	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{M}$
ESS	150	170	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{N}$

б)

Рассчитайте, какую оценку Никита поставит студенту с неразборчивым почерком, если этот студент написал ровно по 100 слов в каждом из вопросов работы, при этом оценка константы совпадает во всех регрессиях и равна 0,5.

Решение:

а)

Обозначим сумму квадратов остатков и коэффициент детерминации j-ой модели как ESS_j и R_j^2 соответственно. Тогда для R_1^2 имеет место формула для регрессии с константой:

$$R_1^2 = 1 - \frac{ESS_1}{TSS_1} = 1 - \frac{150}{TSS_1} \Rightarrow TSS_1 \approx 214.3$$

Поскольку во всех моделях (1)–(5) использована одна и та же зависимая переменная, то TSS_j совпадают для всех j и равны 214.3 $\Rightarrow$ можно вычислить:

$$R_2^2 = 1 - \frac{ESS_2}{TSS_2} = 1 - \frac{170}{214.3} \Rightarrow R_2^2 \approx 0.21 \Rightarrow \boxed{A = 0.21} \quad (2\ point)$$

Далее, как нетрудно заметить, $Hard + Easy = Respect$ и $Hard - Easy = Delta$, поэтому модели (1), (3) и (4) при оценивании с помощью МНК будут проектировать y на одно и то же линейное многообразие (в данном конкретном случае - линейную оболочку $Hard$ и $Easy$). Это означает, что для этих моделей неминуемо совпадут ESS и коэффициенты детерминации, поэтому:

$$\boxed{F = 0.3} \quad (2\ point) \quad \boxed{M = 0.3} \quad (2\ point)$$

$$\boxed{G = 150} \quad (2\ point) \quad \boxed{N = 150} \quad (2\ point)$$

Более того, из-за этого совпадут и предсказанные значения зависимой переменной, то есть три следующих вектора совпадают:

$$\widehat{y_{(1)}} = \widehat{y_{(3)}} = \widehat{y_{(4)}}$$

Теперь с учетом этого для моделей (1) и (3) можно составить следующее уравнение, которое выполняется покоординатно:

$$0.03 * Hard + 0.04 * Easy + 0.5 * Const = B * Respect + D * Delta + 0.5 * Const$$

$$0.03 * Hard + 0.04 * Easy = B * Hard + B * Easy + D * Hard - D * Easy$$

$$\begin{cases} B + D = 0.03 \\ B - D = 0.04 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 0.035} \quad (2\ point) \qquad \boxed{D = -0.005} \quad (2\ point)$$

Аналогично для моделей (1) и (4):

$$0.03 * Hard + 0.04 * Easy + 0.5 * Const = H * Easy + K * Respect + 0.5 * Const$$

$$0.03 * Hard + 0.04 * Easy = H * Easy + K * Easy + K * Hard$$

$$\begin{cases} K = 0.03 \\ H + K = 0.04 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H = 0.01} \quad (2\ point) \qquad \boxed{K = 0.03} \quad (2\ point)$$

Как известно, вложенные модели, отличающиеся только одним регрессором, можно сравнить как с помощью F-теста, так и с помощью t-теста, причем соответствующие расчетные статистики связаны соотношением:

$$F_{obs} = t_{obs}^2$$

Можно заметить, что модели (2) и (3) вложенные: модель (2) является частным случаем модели (3). Тогда гипотезу H_0 : D $=$ 0 можно проверить двумя тестами:

$$F_{obs} = \frac{(R_3^2 - R_2^2)/1}{(1 - R_3^2)/(n-3)} = \frac{9n - 27}{70}$$

$$t_{obs} = \frac{D}{E} = \frac{-0.005}{E}$$

$$(\frac{-0.005}{E})^2 = \frac{9n - 27}{70}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \sqrt{\frac{7}{36000n - 108000}}} \quad (1\ point)$$

Заметим также, что восстановить E возможно лишь при условии, что ассистент Никита проверил уже как минимум 4 работы. $(1\ point)$

Аналогичным образом модели (4) и (2) вложенные, поэтому гипотезу H_0 : H $=$ 0 можно вновь проверить с помощью двух тестов:

$$F_{obs} = \frac{(R_4^2 - R_2^2)/1}{(1 - R_4^2)/(n-3)} = \frac{9n-27}{70}$$
$$t_{obs} = \frac{H}{I} = \frac{0.01}{I}$$

$$(\frac{0.01}{I})^2 = \frac{9n-27}{70}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{7}{30 * \sqrt{70n - 210}}} \quad (1\ point)$$

Восстановить I также возможно лишь при условии, что ассистент Никита проверил уже как минимум 4 работы. (1 *point*)

Далее, ковариационная матрица оценок в модели (1) имеет вид:

$$\widehat{Cov}(\widehat{\beta_{(1)}}) = \begin{pmatrix} \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(1)}}, \widehat{\beta_0^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(1)}}, \widehat{\beta_1^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(1)}}, \widehat{\beta_2^{(1)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(1)}}, \widehat{\beta_0^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(1)}}, \widehat{\beta_1^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(1)}}, \widehat{\beta_2^{(1)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(1)}}, \widehat{\beta_0^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(1)}}, \widehat{\beta_1^{(1)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(1)}}, \widehat{\beta_2^{(1)}}) \end{pmatrix}$$

Или, немного упростив с помощью замены:

$$\widehat{Cov(\widehat{\beta_{(1)}})} = \begin{pmatrix} z & \phi & \psi \\ \phi & 0.02^2 & \xi \\ \psi & \xi & 0.02^2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, исходя из найденного соотношения между B и D и того факта, что оценки константы для всех моделей равны, что:

$$\widehat{\beta_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \widehat{\beta_{(3)}}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\beta_{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} * \widehat{\beta_{(1)}}$$

$$\widehat{\beta_{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} * \widehat{\beta_{(1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{Cov(\widehat{\beta_{(3)}})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} * \widehat{Cov(\widehat{\beta_{(1)}})} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_1^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_2^{(3)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & C^2 & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(3)}}, \widehat{\beta_2^{(3)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(3)}}, \widehat{\beta_1^{(3)}}) & E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \phi & \psi \\ \phi & 0.02^2 & \xi \\ \psi & \xi & 0.02^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_1^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(3)}}, \widehat{\beta_2^{(3)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & C^2 & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(3)}}, \widehat{\beta_2^{(3)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(3)}}, \widehat{\beta_0^{(3)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(3)}}, \widehat{\beta_1^{(3)}}) & E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \frac{\phi+\psi}{2} & \frac{\phi-\psi}{2} \\ \frac{\phi+\psi}{2} & \frac{1}{5000} + \frac{\xi}{2} & 0 \\ \frac{\phi-\psi}{2} & 0 & \frac{1}{5000} - \frac{\xi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = \frac{1}{5000} - \frac{\xi}{2}$$

$$\frac{7}{36000n - 108000} = \frac{1}{5000} - \frac{\xi}{2}$$

$$\frac{\xi}{2} = \frac{1}{5000} - \frac{7}{36000n - 108000}$$

$$\Rightarrow \quad C^2 = \frac{1}{5000} + \frac{\xi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \sqrt{\frac{1}{2500} - \frac{7}{36000n - 108000}}} \quad (1\ point)$$

Заметим, что восстановить C аналогично возможно лишь при условии, что ассистент Никита проверил уже как минимум 4 работы. (1 *point*)

Аналогично, исходя из найденного соотношения между K и H и того факта, что оценки константы для всех моделей равны:

$$\widehat{\beta_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \widehat{\beta_{(4)}}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\beta_{(4)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \widehat{\beta_{(1)}}$$

$$\widehat{\beta_{(4)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \widehat{\beta_{(1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{Cov(\widehat{\beta_{(4)}})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \widehat{Cov(\widehat{\beta_{(1)}})} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_1^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_2^{(4)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & I^2 & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(4)}}, \widehat{\beta_2^{(4)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(4)}}, \widehat{\beta_1^{(4)}}) & L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \phi & \psi \\ \phi & 0.02^2 & \xi \\ \psi & \xi & 0.02^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_1^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_0^{(4)}}, \widehat{\beta_2^{(4)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & I^2 & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_1^{(4)}}, \widehat{\beta_2^{(4)}}) \\ \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(4)}}, \widehat{\beta_0^{(4)}}) & \widehat{Cov}(\widehat{\beta_2^{(4)}}, \widehat{\beta_1^{(4)}}) & L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \psi - \phi & \phi \\ \psi - \phi & 2 * 0.02^2 - 2\xi & \xi - 0.02^2 \\ \phi & \xi - 0.02^2 & 0.02^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = 0.02} \quad \color{blue}{(2\ point)}$$

b)

$$\widehat{y^{(1)}} = 0.5 + 0.03 * 100 + 0.04 * 100 = 7.5$$
$$\widehat{y^{(2)}} = 0.5 + 0.036 * 200 = 7.7$$
$$\widehat{y^{(3)}} = 0.5 + 0.035 * 200 - 0.005 * 0 = 7.5$$
$$\widehat{y^{(4)}} = 0.5 + 0.01 * 100 + 0.03 * 200 = 7.5$$
$$min(\widehat{y^{(1)}}, \widehat{y^{(2)}}, \widehat{y^{(3)}}, \widehat{y^{(4)}}) = 7.5$$
$$7.5 < 8$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{mark = 7.5} \quad \color{blue}{(4\ point)}$$

Задача 4 (10 баллов)

Пусть $X_{n,s}$ – новая матрица экзогенных переменных, а $y_{n,s}$ – новый вектор зависимой переменной.

Запишем их в блочном виде

$$X_{n,s} = \begin{pmatrix} X_n \\ x_s' \end{pmatrix}, y_{n,s} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_s \end{pmatrix}$$

Тогда МНК-оценка коэффициентов примет вид

$$\hat{b_{n,s}} = (X_{n,s}' X_{n,s})^{-1} X_{n,s}' y_{n,s}$$

Распишем первый множитель, используя блочные формулы

$$(X_{n,s}' X_{n,s})^{-1} = \left(\begin{pmatrix} X_n' & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ x_s' \end{pmatrix} \right)^{-1} = (X_n' X_n + x_s x_s')^{-1}$$

Так как $X_n' X_n$ симметрична и обратима, воспользуемся данной в задаче формулой

$$\begin{aligned}
&(X_n' X_n + x_s x_s')^{-1} = (X_n' X_n)^{-1} - C (X_n' X_n)^{-1} x_s x_s' (X_n' X_n)^{-1}, \\
&\text{где } C = \left[(1 + x_s' (X_n' X_n)^{-1} x_s \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Заметим, что C – скаляр, а также что $C^{-1} - 1 = x_s' (X_n' X_n)^{-1} x_s$

Вернемся ко второму множителю МНК-оценки

$$X_{n,s}' y_{n,s} = \begin{pmatrix} X_n' & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_s \end{pmatrix} = X_n' y_n + x_s y_s$$

Перемножим их и раскроем скобки

$$\begin{aligned}
\hat{b_{n,s}} = \left[(X_n' X_n)^{-1} - C (X_n' X_n)^{-1} x_s x_s' (X_n' X_n)^{-1} \right] \left[X_n' y_n + x_s y_s \right] = \\
= \hat{b_n} - C (X_n' X_n)^{-1} x_s x_s' (X_n' X_n)^{-1} X_n' y_n + \\
+ (X_n' X_n)^{-1} x_s y_s - C (X_n' X_n)^{-1} x_s x_s' (X_n' X_n)^{-1} x_s y_s
\end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим последнее слагаемое (без учета знака)

$$C (X_n' X_n)^{-1} x_s x_s' (X_n' X_n)^{-1} x_s y_s = C (X_n' X_n)^{-1} x_s (C^{-1} - 1) y_s = (1 - C)(X_n' X_n)^{-1} x_s y_s$$

Тогда

$$\hat{b_{n,s}} = \hat{b_n} + C\left[(X_n'X_n)^{-1}x_s y_s - (X_n'X_n)^{-1}x_s x_s'(X_n'X_n)^{-1}X_n'y_n +\right] =$$
$$= \hat{b_n} + C(X_n'X_n)^{-1}x_s\left[y_s - x_s'(X_n'X_n)^{-1}X_n'y_n\right] = \hat{b_n} + C(X_n'X_n)^{-1}x_s\left[y_s - x_s'\hat{b_n}\right]$$

Подставляя C, получаем то, что требовалось показать.