

Семинар 21.

1. Рассмотрим уравнение авторегрессии первого порядка:

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

- (a) Запишите условие, при котором AR(1) уравнение будет иметь стационарное решение вида $MA(\infty)$ относительно процесса белого шума ε_t .
- (b) Выпишите функцию правдоподобия для нахождения ММП оценок.
- (c) Постройте теоретическую ACF.
- (d) Постройте теоретическую PACF.

2. Рассмотрим уравнение $ARMA(2, 1)$:

$$y_t = 0.5y_{t-1} - 0.06y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \quad \sigma_\varepsilon^3 = 4.$$

- (a) Проверьте, существует ли решение данного уравнения вида $MA(\infty)$ относительно белого шума ε_t ?
- (b) Является ли уравнение обратимым?
- (c) Что гарантирует выполнение требования обратимости MA-части в ARMA-уравнении?

3. (Задание в R). Набор данных *us_change* содержит ежеквартальные данные о процентных изменениях (темпах роста) реальных расходов на личное потребление и реального личного располагаемого дохода для США с 1 квартала 1970 по 2 квартал 2019 года.

- (a) Оцените регрессию потребления на доходы.
- (b) Протестируйте наличие автокорреляции 1-го порядка в остатках с помощью теста Дарбина-Уотсона.
- (c) Протестируйте наличие автокорреляции 3-го порядка в остатках с помощью теста Бройша-Годфри.

4. Рассмотрим следующие процессы:

- процесс белого шума

$$wn_t = u_t, \quad u_t \sim N(10; 4);$$

- процесс независимых наблюдений

$$iid_t = \mu + u_t, \quad \mu = 0, \quad u_t \sim N(0; 16);$$

- процесс случайного блуждания с дрейфом

$$rw_t = \mu + rw_{t-1} + u_t, \mu = 10, u_t \sim N(0; 1).$$

- Сгенерируйте траекторию длиной 100 наблюдений для каждого из представленных выше процессов.
- Постройте графики сгенерированных в предыдущем пункте траекторий.

5. Рассмотрим $MA(1)$ и $MA(2)$ процессы:

$$x_t = u_t + 0.9u_{t-1},$$

$$y_t = u_t - 0.6 * u_{t-1} + 0.8 * u_{t-2},$$

где $u_t \sim WN(0; 4)$.

- Сгенерируйте траектории данных процессов длиной 50 наблюдений.
- Постройте график ряда, а также графики выборочных ACF и $PACF$.
- Повторите предыдущие пункты для 500 наблюдений.

6. Рассмотрим $AR(1)$ и $AR(2)$ процессы:

$$x_t = 4 + 0.5 * x_{t-1} + u_t, u_t \sim WN(0; 4),$$

$$y_t = 0.5 * y_{t-1} + 0.06 * y_{t-2} + v_t, v_t \sim WN(0; 1).$$

- Сгенерируйте траектории данных процессов длиной 50 наблюдений.
- Постройте график ряда, а также графики выборочных ACF и $PACF$.
- Повторите предыдущие пункты для 500 наблюдений.

7. Рассмотрим $ARMA(1, 1)$ и $ARMA(2, 1)$ процессы:

$$x_t = 1 + 0.7 * x_{t-1} + u_t - 0.2 * u_{t-1}, u_t \sim WN(0; 4),$$

$$y_t = 0.4 * y_{t-1} - 0.03 * y_{t-2} + u_t - 0.7u_{t-1}, u_t \sim WN(0; 1).$$

- Сгенерируйте траектории данных процессов длиной 50 наблюдений.
- Постройте график ряда, а также графики выборочных ACF и $PACF$.
- Повторите предыдущие пункты для 500 наблюдений.