Семинар 1.
Вводное занятие.

1. Проверочная работа №1 (время выполнения — 30 минут).

2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:

   (a) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$;

   (b) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$;

   (c) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$;

   (d) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;

   (e) $\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}$;

   (f) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - n\bar{a}^2$;

   (g) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$;

   (h) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n\bar{a})^2$;

   (i) $\sum_{i=1}^n \bar{a} = n\bar{a}$;

   (j) $\sum_{i=1}^n a_i\bar{a} = n\bar{a}^2$;

   (k) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i = 0$.

   Решение:

   (a) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i - n \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

   (b) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i - \bar{a}\underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i.$$

   (c) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i - \bar{b}\underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i.$$

   (d) Неверно (следует из предыдущего пункта).

   (e) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}.$$

(f) Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-2\bar{a}a_i+\bar{a}^2)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\bar{a}(\bar{a}n)+n\bar{a}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-n\bar{a}^2$$

(g) Неверно

(h) Неверно

(i) Верно

(j) Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{a}=\frac{n}{n}\bar{a}\sum_{i=1}^{n}a_i=n\bar{a}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=n\bar{a}^2$$

(k) Неверно (см. пункт (c)).

3. Пусть $x=(x_1,...,x_n)$ — произвольный вектор. Упростите выражения:

(a) $n\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}x_i$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\overline{x}$

(c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n\overline{x}^2$

Решение:

(a) $n\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}-n\overline{x}=0$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\overline{x}=\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2=n\overline{x}^2-n\overline{x}^2=0.$

(c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)+n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2+n\overline{x}^2=\sum(x_i^2).$

4. Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Оцените вес каждого слитка методом наименьших квадратов.

Решение:
Обозначив вес первого слитка за β_1, вес второго слитка за β_2, а показания весов за y_i, получим, что

$$y_1=\beta_1+\varepsilon_1,\ y_2=\beta_2+\varepsilon_2,\ y_3=\beta_1+\beta_2+\varepsilon_3$$

Тогда

$$(300-\hat{\beta}_1)^2+(200-\hat{\beta}_2)^2+(400-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2\to\min_{\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2}$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{800}{3},\ \hat{\beta}_2=\frac{500}{3}$$

5. При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

   (a) $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$;

   (b) $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$;

   (c) $y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$;

   (d) $y_i = \theta x_i + (1-\theta) z_i + \varepsilon_i$.

   Решение:
   Рассмотрим подробное решение пункта (a). Остальные пункты попробуйте решить самостоятельно.

   (a) $\hat{\theta} = \sum y_i(1+x_i)/\sum(1+x_i)^2$
   Стандартная процедура МНК:

$$RSS = \sum e_i^2 = \sum \left(y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} x_i\right)^2 \to \min_{\hat{\theta}}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\theta}} = 2 \sum \left(y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} z_i\right)(-1 - x_i)$$

$$\sum \left(y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} x_i\right)(-1 - x_i) = 0$$

$$\sum y_i(-1 - x_i) + \hat{\theta} \sum (-1 - x_i)^2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum y_i(1+x_i)}{\sum (1+x_i)^2}$$

   (b) $\hat{\theta} = \sum\left((y_i - 1)x_i\right)/\sum x_i^2$

   (c) $\hat{\theta} = \sum (y_i/x_i)/\sum(1/x^2)$

   (d) $\hat{\theta} = \sum\left((y_i - z_i)(x_i - z_i)\right)/\sum\left(x_i - z_i\right)^2$

6. Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

   (a) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?

   (b) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?

   Решение:
   Рассмотрим регрессию суммы $(y_i + z_i)$ на саму себя. Естественно, в ней

$$\widehat{y_i + z_i} = 0 + 1 \cdot (y_i + z_i).$$

   Отсюда получаем, что $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$.

7. Как связаны МНК оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $z_i = 2y_i$?

   Решение:
   Исходя из условия, нужно оценить методом МНК коэффициенты двух следующих моделей:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$
$$y_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} x_i + \frac{1}{2} \upsilon_i$$

   Заметим, что на минимизацию суммы квадратов остатков коэффициент 1/2 не влияет, следовательно:

$$\hat{\gamma} = 2\hat{\alpha},\ \hat{\delta} = 2\hat{\beta}.$$