

## Семинар 6.

### Блочные матрицы и безусловное прогнозирование.

**Сложение блочных матриц.** Две матрицы, разбитые на блоки одинаковым образом, можно складывать:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A+E & B+F \\ \hline C+G & D+H \end{array} \right].$$

**Умножение блочных матриц.** Если размеры блоков допускают операцию умножения, то:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array} \right].$$

**Транспонирование блочных матриц.** Пусть матрица

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Тогда

$$M' = \left[ \begin{array}{c|c} A' & C' \\ \hline B' & D' \end{array} \right].$$

**Формула Фробениуса (блочное обращение).**

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ \hline -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array} \right],$$

где  $A$  — невырожденная квадратная матрица размерности  $n \times n$ ,  $D$  — квадратная матрица размерности  $k \times k$ ,  $H = D - CA^{-1}B$ .

**Домашнее задание:** используя метод Гаусса, докажите формулу Фробениуса.

**Задание 1.** Для блочной матрицы

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right]$$

найдите обратную матрицу с помощью метода Гаусса. Проверьте полученный результат с помощью формулы Фробениуса.

*Предположения:*  $\det A_{n \times n} \neq 0$ ;  $\det D_{k \times k} \neq 0$ .

**Задание 2.** Вместо того чтобы оценивать параметры  $\beta_1, \beta_2$  в модели

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

( $X_1, X_2$  —  $n \times k_1, n \times k_2$  матрицы соответственно,  $\beta_1, \beta_2$  — векторы размерности  $k_1, k_2$  соответственно), строятся МНК-оценки этих параметров исходя из модели

$$y = X_1^*\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon^*,$$

где  $X_1^*$  — матрица остатков, полученных в результате регрессии каждого столбца матрицы  $X_1$  на  $X_2$ .

- (a) Покажите, что полученная таким образом оценка вектора  $\beta_2$  совпадает с оценкой, полученной в результате регрессии  $y$  только на  $X_2$ .
- (b) Найдите смещение оценки вектора  $\beta_2$ .

**Задание 3.**

- (a) Рассмотрим модель множественной регрессии:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i.$$

Что произойдет с МНК-оценками коэффициентов модели, если добавить константу  $c_1$  к каждому наблюдению признака  $X_2$  и другую константу  $c_2$  к каждому наблюдению признака  $X_3$ ?

- (b) Что произойдет с МНК-оценками коэффициентов множественной регрессии, если умножить зависимую переменную  $y$  на константу  $c$ ? А если на константу умножить какой-нибудь регрессор?

**Задание 4.** Проверьте формулу (из лекции)

$$\mathbb{E}(\tilde{y}_0 - y_0)^2 = \sigma^2 \left( 1 + x_0' (X'X)^{-1} x_0 \right)$$

для среднеквадратической ошибки прогноза.

Здесь  $\tilde{y}_0$  — прогнозное значение зависимой переменной для нового наблюдения,  $y_0$  — истинное значение зависимой переменной для нового наблюдения,  $x_0$  —  $k \times 1$  вектор-столбец объясняющих переменных для нового наблюдения.

**Задание 5.** Докажите равенство

$$\mathbb{E}(\tilde{y}_0 - y_0)^2 = \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

для среднеквадратической ошибки прогноза в случае парной регрессии с константой.

**Задача 6.** Для модели парной регрессии  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , известно, что

$$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 8, \sum_{i=1}^{10} X_i = 40, \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 26, \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 200, \sum_{i=1}^{10} Y_i X_i = 20.$$

Для некоторого наблюдения дано  $X_0 = 10$ . Предполагая, что данное наблюдение удовлетворяет исходной модели,

- (a) вычислите наилучший линейный несмещенный прогноз величины  $y_0$ ;
- (b) оцените стандартную ошибку прогноза.