

Семинар 22.

Рассмотрим применение тестов W (тест Вальда), LR (тест отношения правдоподобия) и LM (тест множителей Лагранжа) для тестирования гипотез о параметрах модели.

Пусть требуется протестировать систему ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0 : \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \dots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i -ое ограничение на вектор параметров θ , $i = 1, \dots, r$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta^T} &= \begin{pmatrix} \partial g_1 / \partial \theta^T \\ \partial g_2 / \partial \theta^T \\ \vdots \\ \partial g_r / \partial \theta^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial g^T}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^T}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2^T}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial g_r^T}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_k} \end{pmatrix} \\ I(\theta) &= -E \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta^T} \right) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \end{pmatrix} \text{ — информационная матрица Фишера} \end{aligned}$$

шера

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat{\theta}_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat{\theta}_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик:

$LR := -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell(\hat{\theta}_{UR})) \stackrel{as.}{\sim} \chi_r^2$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g^T(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta^T}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g^T}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR}) \right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) \stackrel{as.}{\sim} \chi_r^2$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) \right]^T \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) \right] \stackrel{as.}{\sim} \chi_r^2$ — статистика множителей Лагранжа

1. Рассмотрим модель бинарного выбора $P(y_i = 1) = F(\beta_1 + \beta_2 d_i)$, где d — фиктивная переменная (принимая значения 0 и 1). Ниже представлены результаты 100 наблюдений:

	$y = 0$	$y = 1$
$d = 0$	20	32
$d = 1$	36	12

- (a) Оцените параметры β_1, β_2 , используя logit-модель.
- (b) Проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ с помощью LR, W и LM тестов.
2. Методом максимального правдоподобия оценили logit-модель

$$\hat{y}_i^* = 2 + 3x_i - 5z_i.$$

- (a) Оцените вероятность того, что $y = 1$ для $x = 15, z = 9$.
- (b) Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y = 1$ для $x = 15, z = 9$.
- (c) Рассчитайте отношение шансов для переменной x .
- (d) При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $z = 9$ будет максимальным?