Пусть выполнены все предпосылки модели со стохастическими регрессорами.

Рассм. OLS-оценку:

$$\hat{\beta}^{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon + \beta$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \hat{\beta}^{OLS} = \beta + \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{X^T \varepsilon}{n}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{X^T X}{n}\right) = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1k} \\ \vdots \\ x_{n1} \dots x_{nk} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1k} \\ \vdots \\ x_{n1} \dots x_{nk} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \dots \\ \sum x_{i2}x_{i1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{pmatrix} = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \begin{pmatrix} \frac{\sum x_{i1}^2}{n} & \frac{\sum x_{i1}x_{i2}}{n} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\sum x_{ik}^2}{n} \end{pmatrix} \overset{(3.54)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \underset{>0,\ <\infty}{\mathbb{E}(x_{i1}^2)} & \dots & \underset{<\infty}{\mathbb{E}(x_{i1} x_{ik})} \\ \vdots & \ddots & \\ \underset{<\infty}{\mathbb{E}(x_{ik} x_{i1})} & & \underset{>0,\ <\infty}{\mathbb{E}(x_{ik}^2)} \end{pmatrix}$$ – невырожденная м-ца (обозначим через Q)

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \hat{\beta}^{OLS} = Q^{-1},$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{X^T \varepsilon}{n}\right) = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}\varepsilon_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}\varepsilon_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{= cov(x_{i1}, \varepsilon_i) = 0}{\mathbb{E}(x_{i1}\varepsilon_i)} \\ \vdots \\ \underset{=0}{\mathbb{E}(x_{ik}\varepsilon_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

если предполагаем экзогенность регрессоров.

$$\Rightarrow \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \hat{\beta}^{OLS} = \beta \Rightarrow \hat{\beta}^{OLS}$$ – сост. оценка.

Если есть эндогенные регрессоры, то

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}} \left(\frac{X^T \varepsilon}{n}\right) \neq 0 \Rightarrow \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \hat{\beta}^{OLS} \neq \beta \Rightarrow$$

$\hat{\beta}^{OLS}$ несостоятельна.

Положим, что $\hat{\beta}^{OLS} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} Q^{-1}\right)$

здесь предполагается гомоскедастичность ε_i

Рассмотрим

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^{OLS} - \beta\right).$$

$$\sqrt{n}\left(\cancel{\beta} + \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X^T \varepsilon}{n}\right) - \cancel{\beta}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X^T \varepsilon}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X^T \varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$$

1) $\operatorname{plim}_{n \to \infty} \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1} = Q^{-1}$

2) $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(X^T \varepsilon\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \overset{(*)}{?}\right)$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X^T \varepsilon\right) = \frac{1}{n} \underset{K\times K}{\operatorname{Var}} \left(\underbrace{X^T \varepsilon}_{K\times 1}\right)$$

Т.к. наблюдения iid, то можно посчитать ков. м-цу для одного наблюдения i:

(*) $$\underset{K\times K}{\operatorname{Var}}\left(\underbrace{x_i}_{K\times 1} \underset{1\times 1}{\varepsilon_i}\right) = \mathbb{E}\left(x_i \underbrace{\varepsilon_i \varepsilon_i^T}_{1\times 1} x_i^T\right) - \cancel{\mathbb{E}(x_i \varepsilon_i)}\,\mathbb{E}^T(x_i \varepsilon_i) =$$

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} \mathbb{E}\left(x_i x_i^T\right) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbb{E}\left(\underbrace{x_i x_i^T}_{K\times K}\right)$$

По ЗБЧ $\operatorname{plim}_{n \to \infty} \left(\frac{X^T X}{n}\right) = \mathbb{E}\left(x_i x_i^T\right) \Rightarrow \operatorname{Var}(x_i \varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 Q.$

Т.к. наблюдения независимы, то $\operatorname{Var}(X^T \varepsilon) =$
$$= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(x_i \varepsilon_i) = n \cdot \sigma_\varepsilon^2 \cdot Q. \Rightarrow \operatorname{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X^T \varepsilon\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma_\varepsilon^2 Q = \sigma_\varepsilon^2 Q$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} Q^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} X^T \varepsilon \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 Q)$$

Тогда $\sqrt{n}\,(\hat{\beta}^{ols} - \beta) \underset{\text{(т. ма Слуцкого)}}{\xrightarrow{d}} N\Big(0, \underbrace{Q^{-1} \sigma_\varepsilon^2 Q (Q^{-1})^T}_{\text{по св-ву дисперсии}}\Big)$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\beta}^{ols} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, Q^{-1}\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{ols} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} Q^{-1}\right).$$

Что делать, если всё же есть эндогенные переменные?

Нужен другой метод. Рассмотрим 2SLS:

Рассм. модель:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_s x_{is} + \beta_{s+1} x_{is+1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

Пусть $x_1, \ldots, x_s$ - экзогенные, т.е. $cov(x_{ij}, \varepsilon_i) = 0$ $\forall j = \overline{1,s}$,

а $x_{s+1}, \ldots, x_k$ - эндогенные, т.е. $cov(x_{ij}, \varepsilon_i) \neq 0$, $\forall j = \overline{s+1,k}$.

Алгоритм 2SLS:

<u>Шаг 1.</u> Строим регрессию каждой эндогенной переменной на все экзогенные + ≥ 1 инструментальные переменные. (матрица $\underset{n \times l}{Z}$), $l \geq k$.

Оценив с помощью OLS, получим:

$$\hat{X}_j = P_Z X_j = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T X_j.$$

Шаг 2: С помощью OLS оцениваем исходную регрессию, заменив м-цу X на $\hat{X}$, т.е.

$$y = \hat{X}\beta + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{OLS} \equiv \hat{\beta}^{2SLS} = (\hat{X}^T\hat{X})^{-1}(\hat{X}^T)y =$$

$$= (X^T P_Z X)^{-1} X^T P_Z y.$$

Если число инструментов l равно числу факторов k, то

$$\hat{\beta}^{2SLS} \equiv \hat{\beta}^{IV} = (Z^T X)^{-1} Z^T y.$$

Покажем, что IV-оценка состоятельна при эндогенных регрессорах:

$$\hat{\beta}^{IV} = (Z^T X)^{-1} Z^T y = (Z^T X)^{-1} Z^T (X\beta + \varepsilon) =$$

$$= \beta + (Z^T X)^{-1} Z^T \varepsilon$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta}^{IV} = \beta + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{Z^T X}{n}\right)^{-1} \underbrace{\left(\frac{Z^T\varepsilon}{n}\right)}_{= 0,\ \text{т.к. } cov(Z,\varepsilon)=0.}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta}^{IV} = \beta.$$

$\Rightarrow \hat{\beta}^{IV}$ - сост. оценка.

Покажем, что $\hat{\beta}^{IV} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n} Q_{zx}^{-1} Q_{zz} Q_{xz}^{-1}\right)$.

~~По ЦПТ~~: Рассмотрим:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^{IV}-\beta\right) = \sqrt{n}\left(\cancel{\beta}+\left(\frac{Z^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{Z^T \varepsilon}{n}\right)-\cancel{\beta}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{Z^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{Z^T \varepsilon}{n}\right) = \left(\frac{Z^T X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{Z^T \varepsilon}{\sqrt{n}}\right).$$

1) $$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\left(\frac{Z^T X}{n}\right) = \underbrace{Q_{zx}}_{k\times k} = \begin{pmatrix} E(z_{i1}\cdot x_{i1}) & & \\ & \ddots & \\ & & E(z_{ik}x_{ik}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\left(\frac{Z^T X}{n}\right)^{-1} = Q_{zx}^{-1}$$

2) $$\left(\frac{Z^T \varepsilon}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} z_i \varepsilon_i,$$ где z_i - вектор размерности $k\times 1$, содержащий значения для инстр. переменных i-го набл.)

По ЦПТ: $$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 Q_{zz}\right)$$

$$Var\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i\right) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot \underbrace{Var(\underbrace{z_i\varepsilon_i}_{k\times 1})}_{k\times k} = E\left(z_i \underset{1\times 1}{\varepsilon_i}\underset{1\times 1}{\varepsilon_i^T} z_i^T\right) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \underbrace{E(z_i z_i^T)}_{=Q_{zz}} = \sigma_\varepsilon^2 Q_{zz}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\hat{\beta}^{IV}-\beta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \underbrace{Q_{zx}^{-1}\sigma_\varepsilon^2 Q_{zz} Q_{zx}^{-1}}_{\text{симм.}}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{IV} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} Q_{zx}^{-1} Q_{zz} Q_{zx}^{-1}\right),$$ ч.т.д.

Если рассмотреть разность асимптотических ков. матриц:

$$\left(Asy.Var[\hat\beta^{IV}] - Asy.Var[\hat\beta^{OLS}]\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{(X^TZ)(Z^TZ)^{-1}(Z^TX)}{n}\right)^{-1} - \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{X^TX}{n}\right)^{-1}}^{=Q^{-1}} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left[n(X^TP_ZX)^{-1} - n(X^TX)^{-1}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left[n\left(X^T(I-M_Z)X\right)^{-1} - n(X^TX)^{-1}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left[n\,\underbrace{(X^TX - X^TM_ZX)^{-1} - n(X^TX)^{-1}}_{A}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left[n \cdot (\text{матрица неотр. опр. } A)\right]$$

Она будет неотр. опр. Докажем:

$$(X^TX - X^TM_ZX)^{-1} - (X^TX)^{-1}$$

Покажем, что $X^TX - X^TM_ZX - X^TX$ — отриц. опр-на:

$$X^TX - X^TM_ZX - X^TX = X^TM_ZX = -(X^TM_Z)^*(M_ZX) =$$

$= -(M_ZX)^TM_ZX$ — отриц. опр.

$\Rightarrow (X^TX - X^TM_ZX)^{-1} - (X^TX)^{-1}$ — неотриц. опр.

$\Rightarrow \hat\beta^{OLS}$ более эффективен, чем $\hat\beta^{IV}$.