Семинар 20.

Системы одновременных регрессионных уравнений.

Альтернативный подход к выводу рангового и порядкового условий идентификации уравнения системы

Структурная форма системы уравнений имеет вид

$$By_t + \Gamma x_t = \varepsilon_t,$$

где y_t — вектор эндогенных переменных размерности $m \times 1$, x_t — вектор экзогенных переменных размерности $k \times 1$, B — матрица коэффициентов при эндогенных факторах размерности $m \times m$, Γ — матрица размерности $m \times k$.

Приведённая форма имеет вид

$$y_t = \Pi x_t + u_t,$$

где матрица $\Pi = -B^{-1}\Gamma$ имеет размерности $m \times k$ и новый случайный вектор ошибок равен $u_t = B^{-1}\varepsilon_t$.

Условие $\Pi = -B^{-1}\Gamma$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \Pi & -I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^T \\ \Gamma^T \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \Pi & -I_k \end{pmatrix} \cdot A = 0,$$

где матрица $A = (B \ \Gamma)^T$ имеет размерность $(m + k) \times m$.

Для определённости, озаботимся идентификацией первого уравнения, то есть первого столбца A. Помимо условия $\begin{pmatrix} \Pi & I_k \end{pmatrix} \cdot \mathrm{col}_1 A = 0$ на первый столбец также действует набор ограничений $\Phi_1 \mathrm{col}_1 A = 0$. Матрица Φ_1 имеет размерность $r_1 \times (m + k)$, где r_1 — число линейно независимых ограничений, накладываемых на коэффициента первого уравнения.

Полная система условий на первый столбец $\mathrm{co}l_1 A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Pi & I_k \\ \Phi_1 & \end{pmatrix} \cdot \mathrm{col}_1 A = 0.$$

Эта система всегда имеет нулевое решение, но это — не то, что нам нужно.

Если мы нашли одно ненулевое решение $\mathrm{col}_1 A$, то и, домножив его на произвольную константу $t \neq 0$, мы получим ещё одно ненулевое решение $t\mathrm{col}_1 A$.

Мы хотим, чтобы размерность множества всех решений этой системы равнялась 1: в этом случае добавление одного нормировочного условия будет гарантировать единственность решения.

Следовательно, на практике требуемое условие имеет вид:

$$\text{rank}\begin{pmatrix} \Pi & I_k \\ \Phi_1 & \end{pmatrix} = m + k - 1.$$

Заметим, что первый столбец A можно записать в виде $\text{col}_1 A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot e_1$.

$$\begin{pmatrix} \Pi & I_k \\ \Phi_1 & \end{pmatrix} \cdot A \cdot e_1 = 0$$

Вспомним, что $\begin{pmatrix} \Pi & I_k \end{pmatrix} \cdot A = 0$, следовательно, можно упростить систему до

$$\Phi_1 A \cdot e_1 = 0.$$

Если у уравнения $\Phi_1 A s = 0$ есть решение $s \neq const \cdot e_1$, то и у уравнения $\begin{pmatrix} \Pi & I \\ \Phi_1 & \end{pmatrix} \cdot a = 0$ будет решений больше, чем требуемая размерность 1.

Значит, размерность множества решений $\Phi_1 A \cdot s = 0$ должна быть равна 1. Следовательно, $\text{rank}\Phi_1 A = m - 1$. Это и есть ранговое условие.

Теперь выведем порядковое условие. Матрицу A можно представить в виде блочной матрицы $[a_1 \ A_1]$, где a_1 — первый столбец матрицы размерности $(m + k) \times 1$, содержащий коэффициенты первого уравнения системы, а матрица A_1 — матрица размерности $(m + k) \times (m - 1)$.
Тогда

$$\text{rank}(\Phi_1 A) = \text{rank}(\Phi_1 \times [a_1 \ A_1]) = \text{rank}(\Phi_1 \times a_1 \ \Phi_1 \times A_1]) = \text{rank}(0 \ \Phi_1 \times A_1) = \text{rank}(\Phi_1 \times A_1).$$

С другой стороны, мы знаем, что для того, чтобы система имела решение, должно выполняться ранговое условие $\text{rank}(\Phi_1 A) = m - 1$. Следовательно, $\text{rank}(\Phi_1 \times A_1) = m - 1$. Но, с другой стороны, $\text{rank}(\Phi_1 \times A_1) = \min(r_1, m - 1)$. Следовательно, $r_1 \geq m - 1$. Это и есть порядковое условие.

Аналогично, можно сформулировать его для i-го уравнения системы:

$$r_i \geq m - 1, i = 1,...,m.$$

1. Рассмотрим проблему идентифицируемости каждого из уравнений следующей модели:

$$\begin{cases} P_t + \beta_{12}W_t + \gamma_{11}Q_t + \gamma_{13}P_{t-1} = \varepsilon_{1t}, \\ \beta_{21}P_t + W_t + \beta_{23}N_t + \gamma_{22}S_t + \gamma_{24}W_{t-1} = \varepsilon_{2t}, \\ \beta_{32}W_t + N_t + \gamma_{32}S_t + \gamma_{33}P_{t-1} + \gamma_{34}W_{t-1} = \varepsilon_{3t}, \end{cases}$$

где P_t, W_t, N_t — индекс цен, зарплата, профсоюзный взнос соответственно (эндогенные переменные), а Q_t, S_t — производительность труда и количество забастовок (экзогенные переменные). Как выглядят порядковое и ранговое условия, если известно, что:

(a) $\gamma_{11} = 0$,

(b) $\beta_{21} = \gamma_{22} = 0$,

(c) $\gamma_{33} = 0$.

Решение:
При исследовании идентифицируемости уравнений в системе одновременных уравнений при наличии исключающих ограничений (равенство нулю того или иного коэффициента) можно воспользоваться следующим практическим приемом, суть которого может быть продемонстрирована на данном примере.

В нашем случае мы имеем три эндогенные переменные — P_t, W_t, N_t, две экзогенные — Q_t, S_t и две лагированные эндогенные (предопределенные) — P_{t-1}, W_{t-1}. Представим исходную систему в виде следующей таблицы, в ячейках которой стоят коэффициенты при соответствующей переменной в соответствующем уравнении:

	P_t	W_t	N_t	Q_t	S_t	P_{t-1}	W_{t-1}
1-е уравнение	1	β_{12}	0	γ_{11}	0	γ_{13}	0
2-е уравнение	β_{21}	1	β_{23}	0	γ_{22}	0	γ_{24}
3-е уравнение	0	β_{32}	1	0	γ_{32}	γ_{33}	γ_{34}

Тогда выполнение порядкового условия эквивалентно тому, что в каждом уравнении число нулей не меньше числа уравнений минус 1 (в нашем случае — 2), так как порядковое условие имеет вид:

$$r_i \geq m - 1,$$

где r_i — число линейно независимых ограничений в i-ом уравнении, то есть число исключенных из i-го уравнения эндогенных и экзогенных (включая предпоределенные) переменных.

Отсюда следует, что для каждого уравнения порядковое условие выполнено даже без дополнительных ограничений а), б), в).

Проверка выполнения рангового условия для любого уравнения осуществляется так. Надо взять какой-либо нулевой коэффициент этого уравнения, выписать весь соответствующий столбец таблицы (исключая этот нулевой коэффициент), повторить эту операцию для всех нулевых коэффициентов уравнения и получить матрицу, число строк которой будет на единицу меньше числа уравнений, а число столбцов не меньше, чем число уравнений минус 1, в силу выполнения порядкового условия. Тогда выполнение рангового условия эквивалентно тому, что построенная матрица имеет полный ранг (т.е. число уравнений минус 1).

В нашем случае соответствующие матрицы таковы:

1-е уравнение —

$$\begin{bmatrix} \beta_{23} & \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ 1 & \gamma_{32} & \gamma_{34} \end{bmatrix},$$

2-е уравнение —

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix},$$

3-е уравнение —

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_{11} \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда получаем:

(а) если $\gamma_{11} = 0$, то первое уравнение идентифицируемо, а второе и третье — нет;

(б) если $\beta_{21} = \gamma_{22} = 0$, то первое и второе уравнения идентифицируемы, а третье — нет;

(в) если $\gamma_{33} = 0$, то первое и третье уравнения идентифицируемы, а второе — нет.

Указание: для поиска рангов матриц можно использовать метод окаймляющих миноров.

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.