Семинар 18.

1. Докажите теорему о LATE.

   Решение:

   См. учебник J.D. Angrist (2008). Mostly Harmless Econometrics: An Empiricistís Companion., стр. 112–115.

2. Докажите, что оценка $LATE$ может быть получена в результате оценивания регрессии на бинарную эндогенную переменную воздействия D с помощью двухшагового МНК. В качестве инструментальной переменной рассматривается экзогенная бинарная переменная Z (в примере с повестками D — служба в армии, а Z — это факт получения повестки).

   Решение:

   Рассмотрим регрессию

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + \varepsilon_i,$$

в которой коэффициент при бинарной переменной D_i оценивается при помощи 2МНК с бинарной переменной Z_i в качестве инструмента.

Наблюдения можно представить в виде таблицы:

	$D_i = 0$	$D_i = 1$
$Z_i = 0$	Число наблюдений $= a$ Сумма соответствующих значений зависимой переменной $\sum_a Y_i$	Число наблюдений $= b$ Сумма соответствующих значений зависимой переменной $\sum_b Y_i$
$Z_i = 0$	Число наблюдений $= c$ Сумма соответствующих значений зависимой переменной $\sum_c Y_i$	Число наблюдений $= d$ Сумма соответствующих значений зависимой переменной $\sum_d Y_i$

Посчитаем следующие выражения:

$$\overline{ZY} - \bar{Z} \cdot \bar{Y} = \frac{\sum_c Y_i + \sum_d Y_i}{a+b+c+d} - \frac{(c+d)\left(\sum_a Y_i + \sum_b Y_i + \sum_c Y_i + \sum_d Y_i\right)}{(a+b+c+d)^2} =$$

$$= \frac{(a+b)\left(\sum_c Y_i + \sum_d Y_i\right) - (c+d)\left(\sum_a Y_i + \sum_b Y_i\right)}{(a+b+c+d)^2};$$

$$\overline{DZ} - \bar{D} \cdot \bar{Z} = \frac{d}{a+b+c+d} - \frac{(c+d)(b+d)}{(a+b+c+d)^2} =$$

$$= \frac{ad+bd+cd+d^2}{(a+b+c+d)^2} - \frac{bc+cd+bd+d^2}{(a+b+c+d)^2} = \frac{ad-bc}{(a+b+c+d)^2}.$$

В этом случае оценка коэффициента при переменной равна:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\overline{ZY} - \bar{Z} \cdot \bar{Y}}{\overline{DZ} - \bar{D} \cdot \bar{Z}} = \frac{(a+b)\left(\sum_c Y_i + \sum_d Y_i\right) - (c+d)\left(\sum_a Y_i + \sum_b Y_i\right)}{ad - bc}$$

С другой стороны, оценка $LATE$ составляет:

$$\widehat{LATE} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0}{\bar{D}_1 - \bar{D}_0}$$

где $\bar{Y}_1$ — среднее значение зависимой переменной для индивидов, которые получили предписание; $\bar{Y}_0$ — среднее значение зависимой переменной для индивидов, которые не получили предписание; $\bar{D}_1$ — доля тех, кто подвергся воздействию, среди тех, кто получил предписание. В нашем примере это доля победителей лотереи, которые пошли служить; $\bar{D}_0$ — доля тех, кто подвергся воздействию, среди тех, кто не получил предписание;

$$\bar{D}_1 - \bar{D}_0 = \frac{d}{c+d} - \frac{b}{a+b} = \frac{ad - bc}{(a+b)(c+d)}$$

$$\overline{Y_1} - \bar{Y}_0 = \frac{\sum_c Y_i + \sum_d Y_i}{c+d} - \frac{\sum_a Y_i + \sum_b Y_i}{a+b} =$$

$$= \frac{(a+b)\left(\sum_c Y_i + \sum_d Y_i\right) - (c+d)\sum_a Y_i + \sum_b Y_i}{(a+b)(c+d)}$$

$$\widehat{LATE} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0}{\bar{D}_1 - \bar{D}_0} = \frac{(a+b)\left(\sum_c Y_i + \sum_d Y_i\right) - (c+d)\sum_a Y_i + \sum_b Y_i}{ad - bc} = \hat{\beta}_2.$$

Что и требовалось доказать.

Список использованных источников

(a) Картаев Ф.С. Введение в эконометрику : Учебник / Ф.С. Картаев — Москва : МГУ, 2019. — 472 с. — ISBN 978-5-906932-22-8.