Семинар 19.
Системы регрессионных уравнений.

Произведение Кронекера

Пусть $\mathbf{A}$ — матрица размерности $m \times n, \mathbf{B}$ — матрица размерности $p \times q$, тогда произведение Кронекера есть блочная матрица размерности $mp \times nq$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

В развёрнутом виде

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Свойства произведения Кронекера

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — матрицы, k — скаляр. Тогда

- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$ (умножение Кронекера дистрибутивно относительно сложения по второму аргументу)
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ (умножение Кронекера дистрибутивно относительно сложения по первому аргументу)
- $(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$ (ассоциативность умножения Кронекера)
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$

1. Рассматривается модель, состоящая из внешне не связанных уравнений (Seemingly Unrelated Regression, SUR):

$$\begin{cases} y_{i1} = \beta_1 + \varepsilon_{i1}, \\ y_{i2} = \beta_2 x_i + \varepsilon_{i2}. \end{cases}$$

По 50 наблюдениям (по каждому уравнению) получены следующие результаты:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 100, \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 600, \sum_{i=1}^{50} x_i y_{i1} = 60, \sum_{i=1}^{50} x_i y_{i2} = 50, \sum_{i=1}^{50} y_{i1} = 150,$$

$$\sum_{i=1}^{50} y_{i1}^2 = 500, \sum_{i=1}^{50} y_{i1} y_{i2} = 150, \sum_{i=1}^{50} y_{i2} = 50, \sum_{i=1}^{50} y_{i2}^2 = 90.$$

(a) Напишите формулу для GLS–оценки параметров β_1, β_2.

(b) Найдите OLS–оценку этих параметров.

(c) Найдите SUR (FGLS)–оценку этих параметров и оцените матрицу ковариаций этой оценки.

2. Рассмотрим систему одновременных уравнений (Simultaneous Equations Model, SEM), записанную в структурной форме:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t}, \\ I_t = \gamma + \delta Y_t + \varepsilon_{2t}, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t. \end{cases}$$

Эндогенные переменные — C_t, I_t, Y_t, экзогенная переменная — G_t.

(a) Запишите эту модель в матричной форме и найдите её приведенную форму.

(b) Сколько ограничений накладывается на шесть коэффициентов приведённой формы модели и каковы эти ограничения?

(c) Покажите что при заданных значениях коэффициентов приведённой формы можно единственным образом получить значения коэффициентов α, β, γ и δ, то есть при заданной матрице Π уравнение $\mathrm{B}\Pi + \Gamma = 0$ имеет единственное решение относительно B и Γ.

Список используемой литературы

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.