Семинар 22.

Рассмотрим применение тестов W (тест Вальда), LR (тест отношения правдоподобия) и LM (тест множителей Лагранжа) для тестирования гипотез о параметрах модели.

Пусть требуется протестировать систему ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0: \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \dots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i-ое ограничение на вектор параметров θ, $i = 1, \dots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^T} = \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial\theta^T \\ \partial g_2/\partial\theta^T \\ \vdots \\ \partial g_r/\partial\theta^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial\theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g^T}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^T}{\partial\theta} & \frac{\partial g_2^T}{\partial\theta} & \dots & \frac{\partial g_r^T}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_k} \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \ell}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ell}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial\ell}{\partial\theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\ell}{\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta\partial\theta^T}\right) = -E\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_k} \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$ — информационная матрица Фишера

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat\theta_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat\theta_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик:

$LR := -2(\ell(\hat\theta_R) - \ell(\hat\theta_{UR})) \overset{as.}{\sim} \chi^2_r$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g^T(\hat\theta_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial\theta^T}(\hat\theta_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat\theta_{UR}) \cdot \frac{\partial g^T}{\partial\theta}(\hat\theta_{UR})\right]^{-1} g(\hat\theta_{UR}) \overset{as.}{\sim} \chi^2_r$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial\ell}{\partial\theta}(\hat\theta_R)\right]^T \cdot I^{-1}(\hat\theta_R) \cdot \left[\frac{\partial\ell}{\partial\theta}(\hat\theta_R)\right] \overset{as.}{\sim} \chi^2_r$ — статистика множителей Лагранжа

1. Рассмотрим модель бинарного выбора $P(y_t = 1) = F(\alpha + \beta d_t)$, где d – фиктивная переменная (принимающая значения 0 и 1). Ниже представлены результаты 100 наблюдений:

	$y = 0$	$y = 1$
$d = 0$	20	32
$d = 1$	36	12

   (a) Оцените параметры α, β, используя logit-модель.

   (b) Проверьте гипотезу $H_0 : \beta = 0$ с помощью LR, W и LM тестов.

2. Методом максимального правдоподобия оценили logit–модель

$$\hat{y}_i^* = 2 + 3x_i - 5z_i.$$

   (a) Оцените вероятность того, что $y = 1$ для $x = 15$, $z = 9$.

   (b) Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y = 1$ для $x = 15$, $z = 9$.

   (c) Рассчитайте отношение шансов для переменной x.

   (d) При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $z = 9$ будет максимальным?