Семинар 1.
Вводное занятие.

1. Проверочная работа №1 (время выполнения — 30 минут).

2. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:

   (a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) = 0$;

   (b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})a_i$;

   (c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})b_i$;

   (d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$;

   (e) $\sum_{i=1}^{n} a_i = n\bar{a}$;

   (f) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - n\bar{a}^2$;

   (g) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$;

   (h) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = (n\bar{a})^2$;

   (i) $\sum_{i=1}^{n} \bar{a} = n\bar{a}$;

   (j) $\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{a} = n\bar{a}^2$;

   (k) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})b_i = 0$.

3. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ — произвольный вектор. Упростите выражения:

   (a) $n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i$

   (b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\overline{x}$

   (c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\overline{x}$

   (d) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n\overline{x}^2$

   Ответы:

   (a) 0

   (b) 0

   (c) 0

   (d) $\sum(x_i^2)$

4. Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Оцените вес каждого слитка методом наименьших квадратов.

Решение:

Обозначив вес первого слитка за β_1, вес второго слитка за β_2, а показания весов за y_i, получим, что

$$Y_1 = \beta_1 + \varepsilon_1,\ y_2 = \beta_2 + \varepsilon_2,\ y_3 = \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_3$$

Тогда

$$(300 - \hat{\beta}_1)^2 + (200 - \hat{\beta}_2)^2 + (400 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)^2 \to \min_{\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{800}{3},\ \hat{\beta}_2 = \frac{500}{3}$$

5. При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

   (a) $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$;

   (b) $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$;

   (c) $y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$;

   (d) $y_i = \theta x_i + (1 - \theta) z_i + \varepsilon_i$.

   Решение:

   Рассмотрим подробное решение пункта (a). Остальные пункты попробуйте решить самостоятельно.

   (a) $\hat{\theta} = \sum Y_i(1 + X_i) / \sum (1 + X_i)^2$

   Стандартная процедура МНК:

$$RSS = \sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} X_i\right)^2 \to \min_{\hat{\theta}}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\theta}} = 2 \sum \left(Y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} X_i\right)(-1 - X_i)$$

$$\sum \left(Y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} X_i\right)(-1 - X_i) = 0$$

$$\sum Y_i(-1 - X_i) + \hat{\theta} \sum (-1 - X_i)^2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum Y_i(1 + X_i)}{\sum (1 + X_i)^2}$$

   (b) $\hat{\theta} = \sum \left((Y_i - 1) X_i\right) / \sum X_i^2$

   (c) $\hat{\theta} = \sum (Y_i / X_i) / \sum (1 / X^2)$

   (d) $\hat{\theta} = \sum \left((Y_i - Z_i)(X_i - Z_i)\right) / \sum \left(X_i - Z_i\right)^2$

6. Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

(a) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?

(b) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?

Решение:
Рассмотрим регрессию суммы $(y_i + z_i)$ на саму себя. Естественно, в ней

$$\widehat{y_i + z_i} = 0 + 1 \cdot (y_i + z_i).$$

Отсюда получаем, что $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$.

7. Как связаны МНК оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $z_i = 2y_i$?

Решение:
Исходя из условия, нужно оценить методом МНК коэффициенты двух следующих моделей:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$
$$y_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} x_i + \frac{1}{2} \upsilon_i$$

Заметим, что на минимизацию суммы квадратов остатков коэффициент 1/2 не влияет, следовательно:

$$\hat{\gamma} = 2\hat{\alpha},\ \hat{\delta} = 2\hat{\beta}.$$