

Семинар 14.

1. Рассмотрим линейную регрессию вида:

$$Y = X\beta + \varepsilon.$$

- а) Пусть зависимая переменная y измерена с ошибкой. Проанализируйте, как это отразится на свойствах оценок параметров β .
- б) Пусть регрессоры измерены с ошибкой. Проанализируйте, как это отразится на свойствах оценок параметров β .

Решение:

- а) Предположим, что истинной является модель

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

но вектор y измеряется с ошибкой, т.е. наблюдается вектор $y^* = y + u$, где u — ошибки, имеющие нулевое математическое ожидание и не зависящие от ε и X . Тогда нетрудно понять, что построение МНК-оценок на основании y^* эквивалентно регрессии

$$y^* = X\beta + (\varepsilon + u),$$

откуда видно, что оценка параметра β будет несмещенной и состоятельной, так как $E(\varepsilon + u) = 0$ и $\text{Cov}(X, \varepsilon + u) = 0$. Наличие же ошибки приводит лишь к увеличению дисперсии регрессии:

$$V(\varepsilon + u) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2.$$

- б) Ситуация радикальным образом меняется в худшую сторону, когда есть ошибки в измерении регрессоров. Пусть, как и раньше, истинной является модель

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

но наблюдается матрица $X^* = X + V$, где матрица ошибок V имеет нулевое математическое ожидание и не зависит от ε . Тогда реально будет осуществляться регрессия

$$y = X^*\beta + (\varepsilon - V\beta) = X^*\beta + \varepsilon^*,$$

в которой регрессоры и ошибки уже являются коррелированными: $E(X^{*'}\varepsilon^*) = E[(X' + V')(\varepsilon - V\beta)] = -E(V'V)\beta$. Это означает, что в общем случае МНК-оценки будут смещенными и несостоятельными. Степень смещения определя-

ется как истинным значением параметра, так и матрицей ковариаций ошибок. Здесь можно применять метод инструментальных переменных.

Понятно, что можно рассматривать общий случай, когда есть ошибки в измерениях независимых и зависимых переменных. Ясно, что, как и в предыдущем случае, применение метода наименьших квадратов будет приводить к смещенным и несостоятельным оценкам.

2. Рассмотрим модель парной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.$$

Пусть выполнены все предпосылки модели со стохастическими регрессорами. Докажите, что МНК-оценка параметра β_2 состоятельна.

Решение данной задачи представлено в конспекте Семинара 15 сразу для случая множественной регрессии.

3. Рассмотрим модель парной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.$$

Пусть выполнены все предпосылки модели со стохастическими регрессорами. Докажите, что МНК-оценка параметра β_2 асимптотически нормально распределена.

Решение данной задачи представлено в конспекте Семинара 15 сразу для случая множественной регрессии.

4. Предложите оценку для асимптотической дисперсии МНК-оценки параметра β_2 и докажите ее состоятельность.

Такой оценкой являются робастные стандартные ошибки в форме Уайта (см. лекцию про гетероскедастичность).

Список использованных источников

1. Картаев Ф.С. Введение в эконометрику : Учебник / Ф.С. Картаев — Москва : МГУ, 2019. — 472 с. — ISBN 978-5-906932-22-8.