

Семинар 2.

Модель парной регрессии. МНК-оценивание.

1. Обозначим $k_i = \frac{x_i}{\sum_j x_j^2}$. Покажите, что k_i удовлетворяют следующим условиям:

- (a) $\sum k_i = 0$;
- (b) $\sum k_i x_i = \sum k_i X_i = 1$;
- (c) $\sum k_i^2 = 1 / \sum x_i^2$;
- (d) $\sum k_i y_i = \sum k_i Y_i$.

2. Рассмотрим модель парной регрессии без константы

$$Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i.$$

Найдите:

- (a) МНК-оценку для β_1 ;
- (b) $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$.

3. Рассмотрим модель парной регрессии с константой

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i.$$

Получите выражения для:

- (a) $\text{Var}(\hat{\beta}_0), \text{Var}(\hat{\beta}_1)$;
- (b) $\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$.

4. Рассмотрим модель парной регрессии

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i.$$

Найдите оценку для дисперсии σ^2 случайной ошибки ε .

5. (Домашнее задание). Пусть $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \dots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 Y_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^5 X_i^2 = 3$, $\sum_{i=1}^5 X_i Y_i = 12$, $\sum_{i=1}^5 Y_i = 15$, $\sum_{i=1}^5 X_i = 3$.

- (a) Найдите $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \text{Corr}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$.
- (b) Найдите $TSS, ESS, RSS, R^2, \hat{\sigma}^2$.