Семинар 6.

Блочные матрицы и безусловное прогнозирование.

Сложение блочных матриц. Две матрицы, разбитые на блоки одинаковым образом, можно складывать:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A+E & B+F \\ \hline C+G & D+H \end{array}\right].$$

Умножение блочных матриц. Если размеры блоков допускают операцию умножения, то:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right].$$

Транспонирование блочных матриц. Пусть матрица

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right].$$

Тогда

$$M' = \left[\begin{array}{c|c} A' & C' \\ \hline B' & D' \end{array}\right].$$

Формула Фробениуса (блочное обращение).

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ \hline -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array}\right],$$

где A — невырожденная квадратная матрица размерности $n \times n$, D — квадратная матрица размерности $k \times k$, $H = D - CA^{-1}B$.

Задание 1. Для блочной матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$$

найдите обратную матрицу с помощью метода Гаусса. Проверьте полученный результат с помощью формулы Фробениуса.
Предположения: $\det A_{n\times n} \neq 0; \quad \det D_{k\times k} \neq 0.$

Задание 2. Вместо того чтобы оценивать параметры β_1, β_2 в модели

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

(X_1, X_2 — $n \times k_1, n \times k_2$ матрицы соответственно, β_1, β_2 — векторы размерности k_1, k_2 соответственно), строятся МНК–оценки этих параметров исходя из модели

$$y = X_1^* \beta_1 + X_2 \beta_2 + \varepsilon^*,$$

где X_1^* — матрица остатков, полученных в результате регрессии каждого столбца матрицы X_1 на X_2.

(a) Покажите, что полученная таким образом оценка вектора β_2 совпадает с оценкой, полученной в результате регрессии y только на X_2.

(b) Найдите смещение оценки вектора β_2.

Задание 3.

(a) Рассмотрим модель множественной регрессии:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i.$$

Что произойдет с МНК–оценками коэффициентов модели, если добавить константу c_1 к каждому наблюдению признака X_2 и другую константу c_2 к каждому наблюдению признака X_3?

(b) Что произойдет с МНК–оценками коэффициентов множественной регрессии, если умножить зависимую переменную y на константу c? А если на константу умножить какой-нибудь регрессор?

Задание 4. Проверьте формулу (из лекции)

$$\mathbb{E}\left(\tilde{y_0} - y_0\right)^2 = \sigma^2 \left(1 + x_0' \left(X'X\right)^{-1} x_0\right)$$

для среднеквадратической ошибки прогноза.
Здесь $\tilde{y_0}$ — прогнозное значение зависимой переменной для нового наблюдения, y_0 — истинное значение зависимой переменной для нового наблюдения, x_0 — $k \times 1$ вектор-столбец объясняющих переменных для нового наблюдения.

Задание 5. Докажите равенство

$$\mathbb{E}\left(\tilde{y_0} - y_0\right)^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2)}\right)$$

для среднеквадратической ошибки прогноза в случае парной регрессии с константой.

Задача 5. Для модели парной регрессии $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,...,10$, известно, что

$$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 8, \sum_{i=1}^{10} X_i = 40, \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 26, \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 200, \sum_{i=1}^{10} Y_i X_i = 20.$$

Для некоторого наблюдения дано $x_0 = 10$. Предполагая, что данное наблюдение удовлетворяет исходной модели,

(a) вычислите наилучший линейный несмещенный прогноз величины y_0;

(b) оцените стандартную ошибку прогноза.