Семинар 21.
Метод максимального правдоподобия.
Решение.
Тест отношения правдоподобий (LR-тест).

1. Известно, что в модели множественной регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ имеется гетероскедастичность, причем

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_1^2, t = 1, ..., n_1,$$

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_2^2, t = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2, (n = n_1 + n_2),$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, t \neq s.$$

   (a) В предположении нормальности вектора ошибок постройте тест отношения правдоподобия (LR–тест) для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

   Решение:

   Статистика теста отношения правдоподобия имеет вид

$$\text{LR} = -2\left(\ln L\left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\sigma}^2\right) - \ln L\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2\right)\right),$$

   где $\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}^2$ — оценки в задаче с ограничением ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$), а $\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2$ — оценки в задаче без ограничения.

   Найдем выражение для $\ln L\left(\widetilde{\beta}, \widetilde{\sigma}^2\right)$. Функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\ln L\left(\beta, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - x_t'\beta\right)^2.$$

   Обозначим $\widetilde{e} = y - X\widetilde{\beta}$ и $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{e}'\widetilde{e}/n$ вектор остатков и оценку максимального правдоподобия дисперсии ошибок в регрессии с ограничением. Получаем:

$$\begin{aligned}\ln L\left(\tilde{\beta}, \widetilde{\sigma}^2\right) &= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\tilde{\sigma}^2 - \frac{1}{2}\frac{\tilde{e}'\tilde{e}}{\tilde{\sigma}^2} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\tilde{\sigma}^2 - \frac{n\tilde{\sigma}^2}{2\tilde{\sigma}} \\ &= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\tilde{\sigma}^2 - \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

   В задаче без ограничения логарифмическая функция правдоподобия равна

$$\begin{aligned}\ln L\left(\beta, \sigma_1^2, \sigma_2^2\right) = &-\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n_1}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{n_2}{2}\ln\sigma_2^2 \\ &- \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{t=1}^{n_1}\left(y_t - x_t'\beta\right)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(y_t - x_t'\beta\right)^2.\end{aligned}$$

Дифференцируя логарифмическую функцию правдоподобия по σ_1^2 и σ_2^2, получаем:

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{t=1}^{n_1}(y_t - x_t'\beta)^2$$
$$\widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}(y_t - x_t'\beta)^2.$$

Значение логарифмической функции правдоподобия для задачи без ограничения в точке максимума равно

$$\begin{aligned}
\ln L\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2\right) &= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n_1}{2}\ln\widehat{\sigma}_1^2 - \frac{n_2}{2}\ln\widehat{\sigma}_2^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n_1}\frac{e_t^2}{\widehat{\sigma}_1^2} - \frac{1}{2}\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{e_t^2}{\widehat{\sigma}_2^2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n_1}{2}\ln\widehat{\sigma}_1^2 - \frac{n_2}{2}\ln\widehat{\sigma}_2^2 - \frac{n_1\widehat{\sigma}_1^2}{2\widehat{\sigma}_1^2} - \frac{n_2\widehat{\sigma}_2^2}{2\widehat{\sigma}_2^2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n_1}{2}\ln\widehat{\sigma}_1^2 - \frac{n_2}{2}\ln\widehat{\sigma}_2^2 - \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Здесь e_t — остатки в регрессии без ограничения. Оценки дисперсий равны, соответственно,

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{t=1}^{n_1}e_t^2 \quad \text{и} \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}e_t^2.$$

Отсюда вычисляем значение тестовой статистики:

$$\begin{aligned}
\mathrm{LR} &= -2\left(\ln L\left(\widetilde{\beta}, \tilde{\sigma}^2\right) - \ln L\left(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2\right)\right) \\
&= 2\frac{n}{2}\ln 2\pi + 2\frac{n}{2}\ln\widetilde{\sigma}^2 + 2\frac{n}{2} - 2\frac{n}{2}\ln 2\pi - 2\frac{n_1}{2}\ln\widehat{\sigma}_1^2 - 2\frac{n_2}{2}\ln\widehat{\sigma}_2^2 - 2\frac{n}{2} \\
&= n\ln\widetilde{\sigma}^2 - n_1\ln\widehat{\sigma}_1^2 - n_2\ln\widehat{\sigma}_2^2.
\end{aligned}$$

(b) Теперь предположим, что для этой же модели матрица ковариаций Ω имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 I_{n_r} \end{bmatrix}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

Как выглядит LR–тест (тест отношения правдоподобия) для проверки гипотезы $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_r^2$?

Решение:

По аналогии с предыдущим пунктом не сложно догадаться, что статистика будет иметь следующий вид:

$$\mathrm{LR} = n \ln \tilde{\sigma}^2 - n_1 \ln \widehat{\sigma}_1^2 + \cdots - n_r \ln \widehat{\sigma}_r^2.$$

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.