1. $\begin{pmatrix} \underset{n\times n}{A} & \underset{n\times k}{B} & | & I_n & 0 \\ 0 & \underset{k\times k}{D} & | & 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot \underset{n\times n}{(A^{-1})} \\ \\ \end{matrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B & | & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & | & 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot D^{-1} \end{matrix} \xrightarrow{(2)}$

$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B & | & A^{-1} & 0 \\ 0 & I_k & | & 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-A^{-1}B) \end{matrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} I_n & 0 & | & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_k & | & 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$

То же самое получается по ф-ле Фробениуса.

2. (1) $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$ ← истинная модель

X_1 – $n\times k_1$ матрица

X_2 – $n\times k_2$ матрица

(2) $y = X_1^*\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon^*$ — модель, которую оцениваем

а) Для модели (2) запишем:

$X = [X_1^* \; X_2]$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

Тогда модель (2) можно записать:

$y = X\cdot\beta + \varepsilon^*$. Для неё оценка МНК равна:

$\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y$.

$\hat\beta = \left([X_1^* \; X_2]'[X_1^* \; X_2]\right)^{-1}[X_1^* \; X_2]'y =$

$= \left(\begin{bmatrix} X_1^{*\prime} \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1^* \; X_2]\right)^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{*\prime} \\ X_2' \end{bmatrix} y = \begin{pmatrix} X_1^{*\prime}X_1^* & X_1^{*\prime}X_2 \\ X_2'X_1^* & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{*\prime} \\ X_2' \end{bmatrix} y.$

$X_2'X_1^* = X_1^{*\prime}X_2 = 0$, т.к. остатки ортогональны факторам, содержащимся в матрице X_2.

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} X_1^{*\prime} X_1^* & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{*\prime} \\ X_2' \end{bmatrix} y =$$

$$= \begin{pmatrix} (X_1^{*\prime}X_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & (X_2'X_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{*\prime} \\ X_2' \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} (X_1^{*\prime}X_1^*)^{-1} X_1^{*\prime} y \\ (X_2'X_2)^{-1} X_2' y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1} X_2' y.$$

То же самое, что оценка регрессии

$$y = X_2 \beta_2 + \tilde{\varepsilon} \xrightarrow{OLS} \hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1} X_2' y.$$

б) $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \mathbb{E}[(X_2'X_2)^{-1}X_2'y] = \{ \underset{\text{истинная модель!}}{y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon} \} =$

$$= \mathbb{E}[(X_2'X_2)^{-1}X_2'(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon)] =$$

$$= (X_2'X_2)^{-1}X_2'(X_1\beta_1) + \underbrace{(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_2}_{I}\beta_2 + (X_2'X_2)^{-1}X_2'\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon)}_{0} =$$

$$= \beta_2 + \underbrace{(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\beta_1}_{bias} \neq \beta_2$$

$\Rightarrow$ оценка $\hat{\beta}_2$ – смещенная.

bias $= 0$, когда $\underline{X_2'X_1 = 0}$.

③ а) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & x_{n3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12}+c_1 & x_{13}+c_2 \\ 1 & x_{22}+c_1 & x_{23}+c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n2}+c_1 & x_{n3}+c_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{X} = X + C$, где $\underset{n\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

<u>Иначе</u>: $\tilde{X} = X \cdot \underset{3\times 3}{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'y = ((XA)'(XA))^{-1}(XA)'y =$$

$$= (A'(X'X)A)^{-1}(XA)'y = A^{-1}(X'X)^{-1}\underbrace{(A')^{-1}A'}X'y = A^{-1}\underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} =$$

$$= A^{-1}\cdot\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 - c_1\hat{\beta}_2 - c_1\hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

б) $y_i = \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$

1) $y = X\beta + \varepsilon$

Пусть $\tilde{y} = cy$.

$\tilde{y} = cy = X\beta + \varepsilon$

$$\tilde{y} = X\beta + \varepsilon \Rightarrow \tilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'\tilde{y} = (X'X)^{-1}X'cy =$$

$$= c\underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = c\hat{\beta}.$$

2) $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} cx_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ cx_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cx_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$

$$\underset{n\times k}{\tilde{X}} = \underset{n\times k}{X} \cdot \underset{k\times k}{A}, \quad \text{где} \quad \underset{k\times k}{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'y = \left((XA)'(XA)\right)^{-1}(XA)'y =$$

$$= \left(A'(X'X)A\right)^{-1}A'X'y = A^{-1}(X'X)^{-1}\underbrace{(A')^{-1}A'}_{I}X'y =$$

$$= A^{-1}(X'X)^{-1}X'y = A^{-1}\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1/c & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \quad 1 \end{pmatrix}\hat{\beta} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hat{\beta}_1}{c} \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}.$$