

Семинар 1.

Вводное занятие.

1. Проверочная работа №1 (время выполнения — 30 минут).
2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:

- (a) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$;
- (b) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$;
- (c) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$;
- (d) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;
- (e) $\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}$;
- (f) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - n\bar{a}^2$;
- (g) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (\sum_{i=1}^n a_i)^2$;
- (h) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n\bar{a})^2$;
- (i) $\sum_{i=1}^n \bar{a} = n\bar{a}$;
- (j) $\sum_{i=1}^n a_i \bar{a} = n\bar{a}^2$;
- (k) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i = 0$.

3. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — произвольный вектор. Упростите выражения:

- (a) $n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i$
- (b) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\bar{x}$
- (c) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2$

4. Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Оцените вес каждого слитка методом наименьших квадратов.

5. При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

- (a) $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$;
- (b) $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$;
- (c) $y_i = \theta/x_i + \varepsilon_i$;
- (d) $y_i = \theta x_i + (1 - \theta)z_i + \varepsilon_i$.

Решение:

Рассмотрим подробное решение пункта (а). Остальные пункты попробуйте решить самостоятельно.

$$(a) \hat{\theta} = \sum Y_i(1 + X_i) / \sum (1 + X_i)^2$$

Стандартная процедура МНК:

$$RSS = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \theta - \theta X_i)^2 \rightarrow \min_{\theta}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \theta} = 2 \sum (Y_i - \theta - \theta X_i) (-1 - X_i)$$

$$\sum (Y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} X_i) (-1 - X_i) = 0$$

$$\sum Y_i(-1 - X_i) + \hat{\theta} \sum (-1 - X_i)^2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum Y_i(1 + X_i)}{\sum (1 + X_i)^2}$$

$$(b) \hat{\theta} = \sum ((Y_i - 1)X_i) / \sum X_i^2$$

$$(c) \hat{\theta} = \sum (Y_i/X_i) / \sum (1/X_i^2)$$

$$(d) \hat{\theta} = \sum ((Y_i - Z_i)(X_i - Z_i)) / \sum (X_i - Z_i)^2$$

6. Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

(а) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?

(б) Как связаны между собой МНК оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?

7. Как связаны МНК оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + v_i$, если $z_i = 2y_i$?