Семинар 19.
Системы регрессионных уравнений.

Произведение Кронекера

Пусть $\mathbf{A}$ — матрица размерности $m \times n, \mathbf{B}$ — матрица размерности $p \times q$, тогда произведение Кронекера есть блочная матрица размерности $mp \times nq$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

В развёрнутом виде

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Свойства произведения Кронекера

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — матрицы, k — скаляр. Тогда

- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$ (умножение Кронекера дистрибутивно относительно сложения по второму аргументу)
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ (умножение Кронекера дистрибутивно относительно сложения по первому аргументу)
- $(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$ (ассоциативность умножения Кронекера)
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$

1. Рассматривается модель, состоящая из внешне не связанных уравнений (Seemingly Unrelated Regression, SUR):
$$\begin{cases} y_{i1} = \beta_1 + \varepsilon_{i1}, \\ y_{i2} = \beta_2 x_i + \varepsilon_{i2}. \end{cases}$$
По 50 наблюдениям (по каждому уравнению) получены следующие результаты:
$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 100, \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 600, \sum_{i=1}^{50} x_i y_{i1} = 60, \sum_{i=1}^{50} x_i y_{i2} = 50, \sum_{i=1}^{50} y_{i1} = 150,$$
$$\sum_{i=1}^{50} y_{i1}^2 = 500, \sum_{i=1}^{50} y_{i1} y_{i2} = 150, \sum_{i=1}^{50} y_{i2} = 50, \sum_{i=1}^{50} y_{i2}^2 = 90.$$
   (a) Напишите формулу для GLS–оценки параметров β_1, β_2.
   (b) Найдите OLS–оценку этих параметров.
   (c) Найдите SUR (FGLS)–оценку этих параметров и оцените матрицу ковариаций этой оценки.

Решение:

(a) Обозначим ковариационную матрицу вектора $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]'$ через
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$
Модель SUR можно записать в виде
$$y = X\beta + \epsilon,$$
где
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}, \quad E(\epsilon\epsilon') = \Omega = \Sigma \otimes I_n.$$
Оценка $\hat\beta_{\text{GLS}}$ равна:
$$\hat\beta_{\text{GLS}} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y.$$
Матрица Ω^{-1} равна:
$$\Omega^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes I_n = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \otimes I_n.$$

Матрица $X'\Omega^{-1}X$ равна:

$$X'\Omega^{-1}X = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_{22}n & -\sigma_{12}\sum x_i \\ -\sigma_{12}\sum x_i & \sigma_{22}\sum x_i^2 \end{bmatrix}.$$

Вектор $X'\Omega^{-1}y$ равен:

$$X'\Omega^{-1}y = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}\left[\frac{\sigma_{22}\sum y_{t1} - \sigma_{12}\sum y_{t2}}{-\sigma_{12}\sum x_t y_{t1} + \sigma_{11}\sum x_t y_{t2}}\right].$$

Матрица $(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$ равна:

$$(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \frac{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}n\sum x_t^2 - \sigma_{11}^2(\sum x_t)^2}\left[\frac{\sigma_{11}\sum x_t^2}{\sigma_{12}\sum x_t}\frac{\sigma_{12}\sum x_t}{\sigma_{22}n}\right].$$

Оценка $\hat{\beta}_{GLS}$ равна:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}n\sum x_t^2 - \sigma_{11}^2(\sum x_t)^2}\Big(\sigma_{11}\sigma_{22}\sum x_t^2\sum y_{t1} - \sigma_{11}\sigma_{12}\sum x_t^2\sum y_{t2} -$$
$$-\sigma_{12}^2\sum x_t\sum x_t y_{t1} + \sigma_{11}\sigma_{12}\sum x_t\sum x_t y_{t2}),$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}n\sum x_t^2 - \sigma_{11}^2(\sum x_t)^2}\Big(\sigma_{12}\sigma_{22}\sum x_t\sum y_{t1} - \sigma_{12}^2\sum x_t\sum y_{t2} -$$
$$-\sigma_{12}\sigma_{22}n\sum x_t y_{t1} + \sigma_{11}\sigma_{22}n\sum x_t y_{t2}).$$

(b) МНК-оценки параметров β_1 и β_2 получаются оцениванием двух уравнений отдельно. Поэтому

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n}\sum y_{t1} = \frac{150}{50} = 3, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_t y_{t2}}{\sum x_t^2} = \frac{50}{600} = 0.0833.$$

(c) Сначала оценим параметры матрицы Σ и оценим ковариационную матрицу оценки $\hat{\beta}_{OLS}$.

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{n}\sum e_{t1}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_{t1} - \frac{\sum y_{t1}}{n}\right)^2 = \frac{\sum y_{t1}^2}{n} - \frac{(\sum y_{t1})^2}{n^2}$$

$$= \frac{500}{50} - \frac{150^2}{50^2} = 1,$$

$$\hat{\sigma}_{22} = \frac{1}{n}\sum e_{t2}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_{t2} - \frac{\sum x_t y_{t2}}{\sum x_t^2}x_t\right)^2 = \frac{\sum y_{t2}^2}{n} - \frac{(\sum x_t y_{t2})^2}{n\sum x_t^2}$$

$$= \frac{50}{50} - \frac{(50)^2}{50 \cdot 600} = 0.917,$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{n}\sum e_{t1}e_{t2} = \frac{1}{n}\sum\left(y_{t1} - \frac{\sum y_{t1}}{n}\right)\left(y_{t2} - \frac{\sum x_t y_{t2}}{\sum x_t^2}x_t\right)$$

$$= \frac{\sum y_{t1}y_{t2}}{n} - \frac{\sum y_{t1}\sum y_{t2}}{n^2} - \frac{\sum x_t y_{t1}\sum x_t y_{t2}}{n\sum x_t^2} + \frac{\sum y_{t1}\sum x_t y_{t2}\sum x_t}{n^2\sum x_t^2}$$

$$= \frac{170}{50} - \frac{150 \cdot 50}{50^2} - \frac{200 \cdot 50}{50 \cdot 600} + \frac{150 \cdot 50 \cdot 100}{50^2 \cdot 600} = 0.567.$$

Ковариационная матрица оценки $\hat{\beta}_{OLS}$ равна:

$$V(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum x_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}n & \sigma_{12}\sum x_i \\ \sigma_{12}\sum x_i & \sigma_{22}\sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum x_i^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n\sum x_i^2}\begin{bmatrix} \sigma_{11}\sum x_i^2 & \sigma_{12}\sum x_i \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}n \end{bmatrix}$$

Подставим в эту формулу оценки $\hat{\sigma}_{ij}$ и получим:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{1 \cdot 600}{50 \cdot 600} = 0.02,$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_2) = \frac{0.917 \cdot 50}{50 \cdot 600} = 0.00153,$$

$$\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{0.567 \cdot 100}{50 \cdot 600} = 0.00189.$$

Подставив оценки $\hat{\sigma}_{ij}$ в формулу для оценки $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$, получим значения оценок $\hat{\beta}_{\text{FGLS}}$:

$$\hat{\beta}_1 = 2.549, \quad \hat{\beta}_2 = 0.135.$$

Ковариационная матрица оценки $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ равна

$$V(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) = (X\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

Подставив оценки $\hat{\sigma}_{ij}$ в формулу для $(X\Omega^{-1}X)^{-1}$, получаем:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_1) = 0.0147, \quad \hat{V}(\hat{\beta}_2) = 0.00112, \quad \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0.00139.$$

2. Рассмотрим систему одновременных уравнений (Simultaneous Equations Model, SEM), записанную в структурной форме:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t}, \\ I_t = \gamma + \delta Y_t + \varepsilon_{2t}, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t. \end{cases}$$

Эндогенные переменные — C_t, I_t, Y_t, экзогенная переменная — G_t.

(a) Запишите эту модель в матричной форме и найдите её приведенную форму.

(b) Сколько ограничений накладывается на шесть коэффициентов приведённой формы модели и каковы эти ограничения?

(c) Покажите что при заданных значениях коэффициентов приведённой формы можно единственным образом получить значения коэффициентов α, β, γ и δ, то есть при заданной матрице Π уравнение $\mathrm{B}\Pi + \Gamma = 0$ имеет единственное решение относительно B и Γ.

Решение:

(a) Введем обозначения:

$$z_t = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}, \quad w_t = \begin{bmatrix} 1 \\ C_t \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда модель может быть записана в матричной форме:

$$Bz_t + \Gamma w_t = \varepsilon_t,$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\delta \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -\gamma & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Приведенная форма записывается в виде:

$$z_t = -B^{-1}\Gamma w_t + B^{-1}\varepsilon_t = \Pi w_t + u_t,$$

где

$$B^{-1} = \frac{1}{1-\beta-\delta}\begin{bmatrix} 1-\delta & \beta & \beta \\ \delta & 1-\beta & \delta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \frac{1}{1-\beta-\delta}\begin{bmatrix} \alpha-\delta\alpha+\beta\gamma & \beta \\ \gamma-\beta\gamma+\alpha\delta & \delta \\ \alpha+\gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0^0 & \pi_1^1 \\ \pi_1^0 & \pi_2^1 \\ \pi_2^0 & \pi_3^1 \end{bmatrix}.$$

На шесть коэффициентов приведенной формы наложены два ограничения:

$$\begin{cases} \pi_Y^0 = \pi_C^0 + \pi_I^0, \\ \pi_Y^1 = \pi_C^1 + \pi_I^1 + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Покажем, что по заданным коэффициентам приведенной формы (элементам матрицы Π), удовлетворяющим ограничениям (**), можно единственным образом восстановить коэффициенты α, β, γ и δ, т.е. уравнение $B\Pi + \Gamma = 0$ всегда имеет единственное решение. В самом деле, из (**) получаем (если $\pi_Y^1 \neq 0$):

$$\begin{cases} \delta = \frac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}, & \beta = \frac{\pi_C^1}{\pi_Y^1}, \\ \alpha+\gamma = \frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}, \\ \alpha(1-\delta)+\gamma\beta = \frac{\pi_C^0}{\pi_Y^1}. \end{cases}$$

Подставив δ и β в последние два уравнения, получим систему относительно γ и α:

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = \frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}, \\ \alpha\left(1-\frac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}\right)+\gamma\frac{\pi_C^1}{\pi_Y^1} = \frac{\pi_C^0}{\pi_Y^1}. \end{cases}$$

Подставляя $\gamma = \frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1} - \alpha$ во второе уравнение, получаем:

$$\alpha\left(1-\frac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}\right)+\left(\frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}-\alpha\right)\frac{\pi_C^1}{\pi_Y^1} = \frac{\pi_C^0}{\pi_Y^1}.$$

Отсюда

$$\alpha(\pi_Y^1-\pi_I^1-\pi_C^1) = \pi_C^0 - \frac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}$$

или, в силу (**),

$$\alpha = \pi_C^0 - \frac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}, \quad \gamma = \frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1} - \pi_C^0 + \frac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}, \quad \delta = \frac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}, \quad \beta = \frac{\pi_C^1}{\pi_Y^1}.$$

Список используемой литературы

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.