

Контрольная работа №1.

21 октября 2024 г.

Фамилия _____

Имя _____

Группа _____

Задача 1. (50 баллов) В вашем распоряжении имеются следующие данные о 500 работников: *Earnings* — текущий часовой заработок в долларах США, *Educ* — продолжительность обучения (число полных лет обучения), *Exp* — логарифм общего стажа работы после окончания учебы, *Female* — пол респондента (0 для мужчин, 1 для женщин). Ваша цель состоит в том, чтобы выявить влияние опыта работы и образования на доход индивида. Ниже представлены результаты оценивания одной из моделей:

$$Earnings_i = \beta_1 + \beta_2 Exp_i + \beta_3 Educ_i + \beta_4 Educ_i * Female_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 500.$$

Ниже представлены результаты оценивания модели:

Source	SS	df	Number of obs = 500			
-----			F(3, 496) = C			
Model	11491.7022	B	Prob > F = 0.0000			
Residual	A	496	R-squared = 0.1587			
-----			Adj R-squared = 0.1536			
Total	72432.2959	499	Std. err. = 11.084			

earnings	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	

exp	D	.2020606	3.19	0.002	.2468566	1.040857
educ	2.064043	.2176461	9.48	0.000	1.636421	G
educfemale	-.2936041	E	F	0.000	-.4284154	-.1587927
_const	-13.57186	3.926005	-3.46	0.001	-21.28551	-5.858209

Примечание: Model SS — ESS, Residual SS — RSS, Total SS — TSS, df — степени свободы. Матрица $(X'X)^{-1}$ имеет следующий вид:

		_const	exp	educ	educfemale
_const		.1254518	-.0047231	-.0064464	.000251
exp		-.0047231	.0003323	.0001698	5.87e-07
educ		-.0064464	.0001698	.0003855	-.0000375
educfemale		.000251	5.87e-07	-.0000375	.0000383

- (а) (21 балл) Заполните пропуски (А-Г) в таблице. Заполнять можно в любом порядке. Обоснуйте ответ. При расчетах используйте значения из таблицы, округленные до тысячных.
- (б) (3 балла) Дайте содержательную интерпретацию коэффициента при переменной Exp .
- (в) (3 балла) Дайте содержательную интерпретацию коэффициента при переменной $Educ * Female$.
- (г) (10 баллов) На уровне значимости 1% проверьте гипотезу $H_0 : 3\beta_2 - \beta_3 = 1$. Запишите основную и альтернативную гипотезы, статистику и ее распределение при справедливости основной гипотезы.
- (д) (10 баллов) Постройте 95% доверительный интервал для $3\beta_2 - \beta_3$.
- (е) (3 балла) По оцененной модели постройте точечный прогноз для часового заработка для мужчины с общим стажем равным 10 годам и продолжительностью обучения 12 лет.

Задание 2. (20 баллов) На ежеквартальных данных со второго квартала 1990 г. по третий квартал 2001 г. были оценены две регрессии. Они имеют следующий вид:

$$\hat{Y}_i = 40 + 0.3X_{i2} + 0.8X_{i3} - 1.8X_{i4}, \quad R_1^2 = 0.82 \quad (1)$$

$$\hat{Y}_i = 60 + 0.5X_{i2} + 0.6X_{i3}, \quad R_2^2 = 0.75 \quad (2)$$

Здесь X_2, X_3, X_4 — некоторые объясняющие показатели.

- (а) (15 баллов) Для модели (1) проверьте на 5%-ом уровне значимости гипотезу $H_0 : \beta_4 = -1$ (здесь β_4 — коэффициент при факторе X_4).
- (б) (5 баллов) Опишите, как бы вы проверяли наличие структурного сдвига (изменение в коэффициентах модели) в модели (1) после 1 квартала 2000 года. Запишите модель, основную и альтернативную гипотезы, статистику теста и ее распределение при справедливости основной гипотезы.

Задание 3. (30 баллов) Рассмотрим модель множественной регрессии:

$$y = X\beta + \varepsilon. \quad (1)$$

Предполагается, что все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены.

- (а) Пусть регрессоры X разбиты на 2 группы: $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$. Обозначим через P_1, P_2 и P матрицы операторов ортогонального проектирования на подпространства, порожденные регрессорами X_1, X_2 и X , соответственно. Через M_1, M_2 и M обозначим матрицы операторов ортогонального проектирования на ортогональные дополнения к подпространствам,

порожденным регрессорами X_1 , X_2 и X , соответственно. Докажите следующую теорему:

В регрессиях

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \quad \text{и} \quad M_1y = M_1X_2\beta_2 + v$$

совпадают:

- 1) (15 баллов) МНК-оценки вектора β_2 ;
- 2) (5 баллов) остатки регрессий.

Здесь u и v — $n \times 1$ векторы случайных ошибок, удовлетворяющие предпосылкам теоремы Гаусса–Маркова.

- (б) (10 баллов) Обозначим через z вектор размерности $n \times 1$, у которого компонента номер t равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Пусть P_X , P_z и P — матрицы операторов ортогонального проектирования на подпространства, порожденные регрессорами X , z и $\{X, z\}$, соответственно, а матрицы M_X , M_z и M есть операторы проектирования на соответствующие ортогональные дополнения.

Покажите, что оценка $\tilde{\beta}$ вектора β в модели (1), полученная по $n - 1$ наблюдениям (наблюдение номер t удалено из исходных данных), совпадает с оценкой вектора β в модели (2), полученной по всему набору из n наблюдений:

$$y = X\beta + \alpha z + \eta, \quad (2)$$

где η — $n \times 1$ вектор случайных ошибок модели, удовлетворяющий предпосылкам теоремы Гаусса–Маркова.