

Семинар 11.
Гетероскедастичность.

1. Рассмотрим модель регрессии

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \text{Var}(\varepsilon) = \Omega.$$

(а) Проверьте несмешённость оценки

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\beta}_{GLS}] &= \mathbb{E}[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y] = \mathbb{E}[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})(X\beta + \varepsilon)] = \\ &= \beta + \mathbb{E}[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\varepsilon] = \beta.\end{aligned}$$

(б) Проверьте равенство

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

Решение.

Обозначим $\hat{\beta}_{GLS} = Ay$, где $A = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}Var(\hat{\beta}_{GLS}) &= Var(Ay) = AVar(y)A' = \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Var(X\beta + \varepsilon)\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Var(\varepsilon)\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}.\end{aligned}$$

2. Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели

$$y_i = \beta_1 + \varepsilon_i,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0, \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2/x_i, x_i > 0$$

в классе линейных несмешённых оценок. Рассчитайте дисперсию этой оценки и сравните её с дисперсией МНК-оценки. Решение. Для начала найдём МНК-

оценку и её дисперсию:

$$\hat{\beta}_1^{OLS} = \bar{y},$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1^{OLS}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(y_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Наиболее эффективной оценкой при гетероскедастичных ошибках будут оценки, полученные взвешенным методом наименьших квадратов. Наша цель — сделать одинаковыми дисперсию ошибки для всех наблюдений. Идея такая: стандартизуем ошибки ε_i , тогда дисперсия ошибки станет равной 1 для всех наблюдений. Чтобы добиться этого домножим обе части исходной модели на $\frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/x_i}}$:

$$\frac{y_i}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/x_i}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/x_i}} \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/x_i}}.$$

Запись выше эквивалентна следующей записи:

$$\frac{y_i \sqrt{x_i}}{\sigma_\varepsilon} = \frac{\sqrt{x_i}}{\sigma_\varepsilon} \beta_1 + \frac{\sqrt{x_i} \varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon}.$$

В новой модели ошибки $\frac{\sqrt{x_i} \varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon}$ имеют одинаковую дисперсию для всех наблюдений, равную единице, так как $\text{Var}\left(\frac{\sqrt{x_i} \varepsilon_i}{\sigma_\varepsilon}\right) = \frac{x_i}{\sigma_\varepsilon^2} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{x_i} = 1$.

Следовательно, в последней модели ошибки уже являются гомоскедастичными, поэтому можем использовать МНК для получения эффективных в классе линейных по y , несмещённых оценок. Стоит отметить, что теперь модель является моделью парной регрессии без константы. Вспомнив как выглядит оценка коэффициента наклона в модели парной регрессии без константы, получим следующий результат:

$$\hat{\beta}_1^{WLS} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i \sqrt{x_i} \sqrt{x_i}}{\sigma_\varepsilon}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sqrt{x_i}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Теперь рассчитаем дисперсию $\hat{\beta}_1^{WLS}$:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\hat{\beta}_1^{WLS}\right) &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var}(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var}(\varepsilon_i)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{x_i}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

Сравним дисперсии OLS и WLS оценок:

$$\frac{\text{Var}(\hat{\beta}_1^{OLS})}{\text{Var}(\hat{\beta}_1^{WLS})} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} / \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^n x_i}{n^2}.$$

К последнему равенству применим неравенство Коши–Буняковского, в результате чего получаем, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^n x_i \geq n^2,$$

то есть $\text{Var}(\hat{\beta}_1^{OLS}) \geq \text{Var}(\hat{\beta}_1^{WLS})$.

3. Рассмотрим следующую регрессионную модель, в которой $2n$ наблюдений разбиты на две равные группы о n наблюдений в каждой:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0; \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t \neq s$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_1^2, t = 1, \dots, n; \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_2^2, t = n+1, \dots, 2n.$$

Введём естественное разбиение матриц на блоки:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

- (а) Пусть $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}$ – МНК–оценки вектора коэффициентов β по первой группе наблюдений, по второй группе наблюдений и по всем $2n$ наблюдениям соответственно. Покажите, что $\hat{\beta}$ есть "взвешенное среднее" оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, то есть $\hat{\beta} = L_1\hat{\beta}_1 + L_2\hat{\beta}_2$, где L_1 и L_2 – $k \times k$ матрицы такие, что $L_1 + L_2 = I_k$. Решение. Вычислим МНК–оценки $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta}_1 = (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 y_1,$$

$$\hat{\beta}_2 = (X'_2 X_2)^{-1} X'_2 y_2,$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X' X)^{-1} X' y = \left(\begin{bmatrix} X'_1 & X'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} X'_1 & X'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \\ &= (X'_1 X_1 + X'_2 X_2)^{-1} (X'_1 y_1 + X'_2 y_2). \end{aligned}$$

Из формул для $\hat{\beta}_i$ получаем, что $X'_i y_i = X'_i X_i \hat{\beta}_i, i = 1, 2$. Подставляя в выражение для $\hat{\beta}$, получаем:

$$\hat{\beta} = (X'_1 X_1 + X'_2 X_2)^{-1} (X'_1 X_1 \hat{\beta}_1 + X'_2 X_2 \hat{\beta}_2) = L_1 \hat{\beta}_1 + L_2 \hat{\beta}_2,$$

где

$$L_1 = (X'_1 X_1 + X'_2 X_2)^{-1} X'_1 X_1,$$

$$L_2 = (X'_1 X_1 + X'_2 X_2)^{-1} X'_2 X_2.$$

Очевидно, что $L_1 + L_2 = I_k$.

(б) Выведите следующие формулы для ОМНК–оценок:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X'_1 y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 y_2}{\sigma_2^2} \right),$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

Решение. Пусть Ω – матрица ковариаций вектора ошибок ε . Тогда

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_n & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_n \end{bmatrix}, \quad \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} I_n \end{bmatrix}$$

Тогда оценка $\hat{\beta}_{GLS}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y = \\ &= \left(\begin{bmatrix} X'_1 X'_2 \\ X'_1 X'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} X'_1 X'_2 \\ X'_1 X'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X'_1 y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 y_2}{\sigma_2^2} \right). \end{aligned}$$

Ковариационная матрица для $\hat{\beta}_{GLS}$ имеет вид:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} = \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

(в) Покажите, что $\hat{\beta}_{GLS}$ также является "взвешенным средним" оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ в том смысле, что существуют $k \times k$ матрицы Λ_1 и Λ_2 такие, что $\hat{\beta}_{GLS} = \Lambda_1 \hat{\beta}_1 + \Lambda_2 \hat{\beta}_2$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = I_k$. Решение данного пункта аналогично решению пункта (а). Матрицы Λ_1 и Λ_2 имеют следующий вид:

$$\Lambda_1 = \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2},$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{X'_1 X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \frac{X'_2 X_2}{\sigma_2^2}.$$

Очевидно, что $\Lambda_1 + \Lambda_2 = I_k$.

(г) Опишите процедуру получения FGLS–оценок для данной модели. Решение.

Оценка FGLS имеет вид:

$$\hat{\beta}_{FGLS} = \left(X' \hat{\Omega}^{-1} X \right)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} y,$$

где $\hat{\Omega}$ – состоятельная оценка матрицы Ω .

Таким образом, в нашей задаче необходимо найти состоятельные оценки для σ_1^2 и σ_2^2 .

Оценим регрессию $y = X\beta + \varepsilon$ по первым n наблюдениям и по оставшимся n наблюдениям. Обозначим через

$$e_1 = y_1 - X_1 \hat{\beta}_1 = y_1 - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' y_1,$$

$$e_2 = y_2 - X_2 \hat{\beta}_2 = y_2 - X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' y_2$$

векторы остатков. Так как в каждом из двух случаев выполнены условия классической регрессионной модели (в том числе, условие гомоскедастичности ошибок), то оценки дисперсий ошибок

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{e_i' e_i}{n - k}, \quad i = 1, 2,$$

являются состоятельными.

Поэтому оценка доступного обобщенного метода наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1' X_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{X_2' X_2}{\hat{\sigma}_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{X_1' y_1}{\hat{\sigma}_1^2} + \frac{X_2' y_2}{\hat{\sigma}_2^2} \right).$$