Семинар 6.
Тестирование гипотез. Теорема Фриша-Во-Ловелла.

Сложение блочных матриц. Две матрицы, разбитые на блоки одинаковым образом, можно складывать:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A+E & B+F \\ \hline C+G & D+H \end{array}\right].$$

Умножение блочных матриц. Если размеры блоков допускают операцию умножения, то:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right].$$

Транспонирование блочных матриц. Пусть матрица

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right].$$

Тогда

$$M^T = \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right].$$

Формула Фробениуса (блочное обращение).

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ \hline -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array}\right],$$

где A — невырожденная квадратная матрица размерности $n \times n$, D — квадратная матрица размерности $k \times k$, $H = D - CA^{-1}B$.

1. Рассмотрим модель множественной регрессии:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i.$$

Мы хотим проверить гипотезу следующего вида:

$$H_0 : \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \ldots = \beta_k = 0.$$

Покажите, что для проверки гипотезы H_0 может быть использована статстистика

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F(q,n-k).$$

2. Множественную регрессию с любым количеством регрессоров можно разбить на несколько шагов со вспомогательными регрессиями с меньшим числом регрессоров.

   Вместо непосредственного включения переменной x в качестве регрессора в модель можно сначала «очистить» от переменной x зависимую переменную y и остальные регрессоры, а затем оценить регрессию для «очищенных» переменных. Эту идею последовательных регрессий формализует теорема Фриша — Во — Ловелла.

   Теорема Фриша — Во — Ловелла (англ. Frisch–Waugh–Lovell theorem, FWL theorem)

   Рассмотрим два алгоритма.

   Алгоритм A: оцениваем регрессию y на полный набор регрессоров X_1 и X_2 с помощью МНК:
   $$\hat{y}_A = X_1\hat{\beta}_1^A + X_2\hat{\beta}_2^A.$$

   Алгоритм B:

   B1. Оцениваем регрессию y на часть регрессоров X_1 с помощью МНК:
   $$\hat{y}_B = X_1\hat{\beta}_1^B.$$

   B2. Оцениваем регрессию каждого столбца из матрицы X_2 с помощью МНК:
   $$\hat{X}_2^B = X_1\hat{\beta}_1^B.$$

   Уточним, что здесь $\hat{\beta}_1^B$ — это не вектор, а целая матрица, в которой содержатся оценки регрессии каждого столбца из матрицы X_2 на все регрессоры из матрицы X_1.

   B3. Определяем «очищенные» переменные как остатки регрессий первых двух шагов,
   $$y^* = y - \hat{y}_B, \quad X_2^* = X_2 - \hat{X}_2^B.$$

   B4. Оцениваем регрессию для «очищенных переменных»
   $$\hat{y}^* = X_2^*\hat{\beta}_2^B.$$

   Алгоритмы A и B дают одинаковые оценки коэффициентов $\hat{\beta}_2^A = \hat{\beta}_2^B$ и финальные векторы остатков $e_A = y - \hat{y}_A = y^* - \hat{y}^* = e_B^*$.

   Докажите теорему.

3. Вместо того чтобы оценивать параметры β_1, β_2 в модели
   $$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

(X_1, X_2 — $n \times k_1, n \times k_2$ матрицы соответственно, β_1, β_2 — векторы размерности k_1, k_2 соответственно), строятся МНК оценки этих параметров исходя из модели

$$y = X_1^* \beta_1^* + X_2 \beta_2^* + \varepsilon^*,$$

где X_1^* — матрица остатков, полученных в результате регрессии каждого столбца матрицы X_1 на X_2.

(a) Покажите, что полученная таким образом оценка вектора β_2 совпадает с оценкой, полученной в результате регрессии y только на X_2.

(b) Найдите смещение оценки вектора β_2.

(c) Покажите, что оценки вектора параметров β_1 в обеих моделях совпадут.