Семинар 1.
Вводное занятие.

1. Проверочная работа №1 (время выполнения — 30 минут).

2. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:

   (a) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$;

   (b) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$;

   (c) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$;

   (d) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;

   (e) $\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}$;

   (f) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - n\bar{a}^2$;

   (g) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$;

   (h) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n\bar{a})^2$;

   (i) $\sum_{i=1}^n \bar{a} = n\bar{a}$;

   (j) $\sum_{i=1}^n a_i\bar{a} = n\bar{a}^2$;

   (k) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i = 0$.

   Решение:

   (a) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i - n \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

   (b) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i - \bar{a}\underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i.$$

   (c) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i - \bar{b}\underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i.$$

   (d) Неверно (следует из предыдущего пункта).

   (e) Верно:
   $$\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}.$$

(f) Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-2\bar{a}a_i+\bar{a}^2)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\bar{a}(\bar{a}n)+n\bar{a}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-n\bar{a}^2$$

(g) Неверно

(h) Неверно

(i) Верно

(j) Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{a}=\frac{n}{n}\bar{a}\sum_{i=1}^{n}a_i=n\bar{a}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=n\bar{a}^2$$

(k) Неверно (см. пункт (c)).

3. Пусть $x=(x_1,...,x_n)$ — произвольный вектор. Упростите выражения:

(a) $n\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}x_i$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\overline{x}$

(c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n\overline{x}^2$

Решение:

(a) $n\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}-n\overline{x}=0$

(b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\overline{x}=\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2=n\overline{x}^2-n\overline{x}^2=0.$

(c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)+n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2+n\overline{x}^2=\sum(x_i^2).$