

Семинар 4.

Множественная регрессия.

1. Рассмотрим классическую линейную модель $y = X\beta + \varepsilon$ с предположениями Гаусса — Маркова: $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для всех случайных векторов $(y, \hat{\beta}, \hat{y}, \varepsilon, \hat{\varepsilon}, \bar{y})$ найдите все возможные условные математические ожидания и ковариационные матрицы. $\mathbb{E}(\cdot)$, $\text{Var}(\cdot)$, $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$.
2. Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, где

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}.$$

Случайные ошибки ε_i независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

Для удобства расчётов даны матрицы: $X^T X$, $(X^T X)^{-1}$ и $X^T y$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad X^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Определите n и k .
- (b) Вычислите МНК оценку вектора β .
- (c) Найдите $\hat{\sigma}^2$, $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$.
- (d) Найдите $\text{Var}(\varepsilon_1)$, $\text{Var}(\beta_1)$, $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$;
- (e) Найдите $\text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\text{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$;
- (f) Найдите $\text{Var}(\beta_2 - \beta_3)$, $\text{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;

3. Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (y_i - \bar{y})/\hat{\sigma}_y$ и $x_i^* = (x_i - \bar{x})/\hat{\sigma}_x$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta'_1 + \beta'_2 x_i^* + \varepsilon'_i$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + \varepsilon_i''$$

В решении можно считать $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$ известными.

- (a) Найдите $\hat{\beta}'_1$.
- (b) Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}'_2$ и $\hat{\beta}''_2$?
- (c) Как связаны между собой e_i , e'_i и e''_i ?
- (d) Как связаны между собой $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2)$, $\widehat{Var}(\hat{\beta}'_2)$ и $\widehat{Var}(\hat{\beta}''_2)$?
- (e) Как выглядит матрица $\widehat{Var}(\hat{\beta}')$?
- (f) Как связаны между собой R^2 , $R^{2'}$ и $R^{2''}$?
- (g) В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.