

Семинар 2.

Модель парной регрессии. МНК-оценивание.

1. Пусть $x_i = X_i - \bar{X}$ — центрированное значение X_i . Обозначим $k_i = \frac{x_i}{\sum_j x_j^2}$. Покажите, что k_i удовлетворяют следующим условиям:

- (a) $\sum k_i = 0$;
- (b) $\sum k_i x_i = \sum k_i X_i = 1$;
- (c) $\sum k_i^2 = 1 / \sum x_i^2$;
- (d) $\sum k_i y_i = \sum k_i Y_i$.

2. Рассмотрим модель парной регрессии без константы

$$Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i.$$

Найдите:

- (a) МНК-оценку для β_1 ;
 - (b) $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$.
3. Рассмотрим модель парной регрессии с константой

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Получите выражения для:

- (a) $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$;
 - (b) $\text{Var}(\hat{\beta}_2)$;
 - (c) $\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
4. Рассмотрим модель парной регрессии с константой:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Покажите, что $\widehat{\bar{Y}} = \bar{Y}$. Будет ли данное тождество верным для парной модели без константы?

5. Рассмотрим модель парной регрессии

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Предложите несмещённую оценку для дисперсии σ^2 случайной ошибки ε .

6. Для модели парной регрессии покажите, что равенство $TSS = ESS + RSS$ выполняется, только если в модель включена константа.