Семинар 3.
Модель множественной регрессии.
Матрицы: начало.

1. (еще немного о парной регрессии) Покажите, что для модели парной регрессии с константой $R^2 = \widehat{\text{Corr}}^2(y, \hat{y})$.

2. (Математическое ожидание квадратичной формы) Пусть y — случайный вектор-столбец размерности $n \times 1$, A — детерминированная матрица размерности $n \times n$. Покажите, что справедливо следующее:

$$\mathbb{E}(y'Ay) = \text{tr}(A\text{Var}(y)) + \mathbb{E}(y')A\mathbb{E}(y).$$

3. Используя матрицы $\text{P} = X(X'X)^{-1}X'$ и $\pi = \vec{i}(\vec{i}'\vec{i})^{-1}\vec{i}'$

   (a) запишите TSS, RSS и ESS в матричной форме;

   (b) вычислите $\mathbb{E}(\text{TSS})$, $\mathbb{E}(\text{ESS})$.

   Примечание: $\vec{i}$ — вектор размерности $n \times 1$, состоящий из единиц.

4. Рассмотрим классическую линейную модель регрессии

$$y = X\beta + \varepsilon.$$

   Найдите:

   (a) $\text{Cov}(\hat{\beta}, y)$;

   (b) $\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{y})$;

   (c) $\text{Cov}(e, y)$;

   (d) $\text{Cov}(e, \hat{y})$.

5. Что происходит с TSS, RSS, ESS, R^2 при добавлении нового наблюдения? Если величина может изменяться только в одну сторону, то докажите это. Если возможны и рост, и падение, то приведите пример.