Семинар 11.

Гетероскедастичность.

1. Рассмотрим модель регрессии

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon) = \Omega.$$

   (а) Проверьте несмещённость оценки

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y.$$

   (б) Проверьте равенство

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

2. Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели

$$y_i = \beta_1 + \varepsilon_i,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0,\ \mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2/x_i,\ x_i > 0$$

в классе линейных несмещённых оценок. Рассчитайте дисперсию этой оценки и сравните её с дисперсией МНК–оценки.

3. Рассмотрим следующую регрессионную модель, в которой $2n$ наблюдений разбиты на две равные группы о n наблюдений в каждой:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0;\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\ t \neq s$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_1^2,\ t = 1, ..., n;\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_2^2,\ t = n+1, ..., 2n.$$

Введём естественное разбиение матриц на блоки:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

   (а) Пусть $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}$ — МНК–оценки вектора коэффициентов β по первой группе наблюдений, по второй группе наблюдений и по всем $2n$ наблюдениям соответственно. Покажите, что $\hat{\beta}$ есть "взвешенное среднее"оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, то есть $\hat{\beta} = L_1\hat{\beta}_1 + L_2\hat{\beta}_2$, где L_1 и L_2 — $k \times k$ матрицы такие, что $L_1 + L_2 = I_k$.

(б) Выведите следующие формулы для ОМНК–оценок:

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2}\right)^{-1} \left(\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2}\right),$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2}\right)^{-1}.$$

(в) Покажите, что $\hat{\beta}_{GLS}$ также является "взвешенным средним" оценок $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ в том смысле, что существуют $k \times k$ матрицы Λ_1 и Λ_2 такие, что $\hat{\beta}_{GLS} = \Lambda_1\hat{\beta}_1 + \Lambda_2\hat{\beta}_2$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = I_k$.

(г) Опишите процедуру получение FGLS–оценок для данной модели.

4. (Универсиада по эконометрике, МГУ, 2016 год). Имеется временной ряд:

$$y_i = \theta \cdot i + \varepsilon_i + \varepsilon_0,\ i = 1, ..., n,$$

где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 0, 1, ..., n$.

(а) Вычислите дисперсию МНК–оценки параметра θ.

(б) Будет ли эта оценка эффективной?

(в) Предложите метод для получения эффективной оценки θ.

(г) Пусть $n = 4$ и известно, что $y_1 = -1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 6$, $y_4 = 8$. Вычислите эффективную оценку $\hat{\theta}$.