Семинар 4.
Множественная регрессия.

1. Рассмотрим классическую линейную модель $y = X\beta + \varepsilon$ с предпосылками Гаусса — Маркова: $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для всех случайных векторов (y, $\hat{\beta}$, $\hat{y}$, ε, e, $\bar{y}\vec{i}$) найдите все возможные условные математические ожидания и ковариационные матрицы. $\mathbb{E}(\cdot)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\cdot)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\cdot,\cdot)$.

   Решение:

   Для начала вычислим вектора математических ожиданий:

   (a) $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}(X\beta + \varepsilon) = X\beta + \mathbb{E}(\varepsilon) = X\beta$.

   (b) $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}((X^TX)^{-1}X^Ty) = \mathbb{E}((X^TX)^{-1}X^T(X\beta+\varepsilon)) = \beta+(X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}(\varepsilon) = \beta$.

   (c) $\mathbb{E}(\hat{y}) = \mathbb{E}(X\hat{\beta}) = X\mathbb{E}(\hat{\beta}) = X\beta$.

   (d) $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$.

   (e) $\mathbb{E}(e) = \mathbb{E}(M\varepsilon) = M\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$.

   (f) $\mathbb{E}(\bar{y}\vec{i}) = \mathbb{E}(\pi y) = \pi X\beta$

   Теперь рассчитаем для части указанных векторов ковариационные матрицы:

   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X\beta + \varepsilon) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$
   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\beta}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}((X^TX)^{-1}X^Ty) = \mathbb{V}\mathrm{ar}((X^TX)^{-1}X^T(X\beta+\varepsilon)) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\beta+(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon) = \mathbb{V}\mathrm{ar}((X^TX)^{-1}X^T\varepsilon) = (X^TX)^{-1}X^T\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)X(X^TX)^{-1} = \sigma^2(X^TX)^{-1}$
   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{y}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Py) = P\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(y)P^T = P\sigma^2 I_n P^T = \sigma^2 PP^T = \sigma^2 P = \sigma^2 X(X^TX)^{-1}X^T$
   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I$
   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(e) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(M\varepsilon) = M\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon)M^T = M\sigma^2 M = \sigma^2 M = \sigma^2(I - X(X^TX)^{-1}X^T)$
   - $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{y}\vec{i}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\pi y) = \pi\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(y)\pi^T = \sigma^2\pi = \sigma^2(\vec{i}(\vec{i}^T\vec{i})^{-1}\vec{i}^T$

   - $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\hat{\beta}, y) = \mathbb{C}\mathrm{ov}((X^TX)^{-1}X^Ty, y) = (X^TX)^{-1}X^T\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(y) = \sigma^2(X^TX)^{-1}X^T$
   - $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y, \hat{y}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(y, Py) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(y)P^T = \sigma^2 X(X^TX)^{-1}X^T$
   - $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y, \varepsilon) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X\beta + \varepsilon, \varepsilon) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\varepsilon, \varepsilon) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$

2. Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, где

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}.$$

Случайные ошибки ε_i независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

Для удобства расчётов даны матрицы: $X^T X$, $(X^T X)^{-1}$ и $X^T y$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad X^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Определите n и k.

(b) Вычислите МНК оценку вектора β.

(c) Найдите $\hat{\sigma}^2$, $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$.

(d) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\beta_1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$;

(e) Найдите $\mathbb{C}\text{ov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{C}\text{ov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$;

(f) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(\beta_2 - \beta_3)$, $\mathbb{C}\text{orr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{C}\text{orr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;

Решение:

(a) Число наблюдений $n = 5$. Число регрессоров, включая свободный член равно $k = 3$.

(b) МНК-оценка вектора β равна $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$. Тогда

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

(c) Несмещенная оценка дисперсии случайной ошибки равна $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{RSS}{5-3}$. Вычислим RSS. Знаем, что $RSS = y^T(I - X(X^T X)^{-1} X^T)y = 1$.

Тогда $\hat{\sigma}^2 = 1/2$.

Так как по построению оценка $\hat{\sigma}^2$ несмещённая, то $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2 \mid X) = \sigma^2$.

(d)

$$\mathbb{V}\text{ar}(\varepsilon_1) = \sigma^2$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(\beta_1) = 0,$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}_{(1,1)} = 0.5\sigma^2$$

$$\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1}_{(1,1)} = 0.5\hat{\sigma}^2 = 0.5\frac{1}{5-3} = 0.25$$

Так как оценки МНК являются несмещёнными, то $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$, значит:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) - \beta_1^2 = \mathbb{E}(\hat{\beta}_1) - (\mathbb{E}(\hat{\beta}_1))^2 = \widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat{\beta}_1) = 0.25$$

(e)

$$\mathbb{C}\text{ov}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}_{(2,3)} = \sigma^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\widehat{\mathbb{C}\text{ov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = \widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta)_{(2,3)} = \hat\sigma^2 (X^T X)^{-1}_{(2,3)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(\hat\beta_2 - \hat\beta_3) = \mathbb{V}\text{ar}(\hat\beta_2) + \mathbb{V}\text{ar}(\hat\beta_3) - 2\,\mathbb{C}\text{ov}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) =$$

$$= \sigma^2((X'X)^{-1}_{(2,2)} + (X'X)^{-1}_{(3,3)} - 2(X'X)^{-1}_{(2,3)} = \sigma^2(1 + 1.5 - 2 \cdot (-0.5)) = 3.5\sigma^2$$

$$\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta_2 - \hat\beta_3) = \widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta_2) + \widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta_3) + 2\,\widehat{\mathbb{C}\text{ov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) =$$

$$= \hat\sigma^2((X'X)^{-1}_{(2,2)} + (X'X)^{-1}_{(3,3)} + 2(X'X)^{-1}_{(2,3)}) = \frac{1}{2} \cdot 3.5 = 1.75$$

(f)

$$\mathbb{V}\text{ar}(\beta_2 - \beta_3) = 0$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = \frac{\mathbb{C}\text{ov}(\hat\beta_2, \hat\beta_3)}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(\hat\beta_2)\,\mathbb{V}\text{ar}(\hat\beta_3)}} = \frac{-0.5}{\sqrt{1 \cdot 1.5}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\widehat{\mathbb{C}\text{orr}}(\beta_2, \beta_3) = \frac{\widehat{\mathbb{C}\text{ov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3)}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta_2)\,\widehat{\mathbb{V}\text{ar}}(\hat\beta_3)}} = \frac{-0.5}{\sqrt{1 \cdot 1.5}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

3. Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (y_i - \bar y)/\hat\sigma_y$ и $x_i^* = (x_i - \bar x)/\hat\sigma_x$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + \varepsilon_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + \varepsilon_i''$$

В решении можно считать $\hat\sigma_x$ и $\hat\sigma_y$ известными.

(a) Найдите $\hat\beta_1'$.

Решение:

$\hat\beta_1' = \bar y^* - \hat\beta_2' \bar x^* = 0$, так как $\bar y^* = \bar x^* = 0$.

(b) Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_2'$ и $\hat{\beta}_2''$?

Решение:

$$\hat{\beta}_2' = \frac{\widehat{Cov}(y_i^*, x_i^*)}{\widehat{Var}(x_i^*)} = \frac{\widehat{Cov}((y_i-\bar{y})/\hat{\sigma}_y^2, (x_i-\bar{x})/\hat{\sigma}_x^2)}{\widehat{Var}((x_i-\bar{x})/\sigma_x)} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{\sigma}_y}\frac{\widehat{Cov}((y_i, x_i)}{\widehat{Var}(x_i)} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{\sigma}_y}\hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_2'' = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^* x_i^*}{\sum_{i=1}^n {x_i^*}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})/\hat{\sigma}_x (y_i-\bar{y})/\hat{\sigma}_y}{\sum_{i=1}^n ((x_i-\bar{x})/\hat{\sigma}_x)^2} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{\sigma}_y}\hat{\beta}_2.$$