

Подборка задач №3.

Нормированный коэффициент детерминации. Тестирование гипотез.

Фиктивные переменные. Тест Чоу.

Во всех задачах предполагается, что предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, а ошибки имеют нормальное распределение.

1. (а) Выведите распределение случайной величины $(n - k) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$.
(с) Являются ли случайные величины $\hat{\beta}$ и $\hat{\sigma}^2$ независимыми? Обоснуйте свой ответ.
2. Сформулируйте без доказательства теорему Фриша-Во-Ловелла (теорема и доказательство будут на 6-ом семинаре).
3. Докажите, что при добавлении в модель регрессора скорректированный коэффициент детерминации R_{adj}^2 увеличивается тогда и только тогда, когда t -статистика оценки коэффициента при этом регрессоре по модулю превосходит единицу.
4. (задача на доказательство) Рассмотрим модель множественной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.$$

Нас интересует проверка гипотезы о незначимости одного из факторов, к примеру, x_k . Тогда $H_0 : \beta_k = 0$. Как известно, для проверки этой гипотезы могут быть использованы t - и F -тесты. Докажите, что в этом случае $t^2(n - k) = F(1, n - k)$.

5. Бюджетное обследование пяти случайно выбранных семей дало следующие результаты (в тыс. руб.):

Семья	Накопления, S	Доход, Y	Имущество, W
1	3.0	40	60
2	6.0	55	36
3	5.0	45	36
4	3.5	30	15
5	1.5	30	90

С помощью МНК оценивается следующая модель регрессии:

$$S_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 W_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 5.$$

- (a) На 5% уровне значимости с помощью t -теста протестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = -4\beta_3$ (эффект дохода противоположен эффекту богатства в фиксированной пропорции).
- (b) На 5% уровне значимости с помощью F -теста протестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = -4\beta_3$ (эффект дохода противоположен эффекту богатства в фиксированной пропорции). В этом пункте вам нужно использовать матричную формулу для F -статистики с использованием матрицы-ограничений H .
6. Оценивание модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ методом наименьших квадратов по 26 наблюдениям дало следующие результаты:

$$y_i = 2 + \underset{(1.9)}{3.5} x_{i2} - \underset{(-2.2)}{0.7} x_{i3} + \underset{(1.5)}{2.0} x_{i4} + e_i, \quad R^2 = 0.882$$

(в скобках даны значения t -статистик).

Оценивание той же модели при ограничении $\beta_2 = \beta_4$ дало следующие результаты:

$$y_i = 1.5 + \underset{(2.7)}{3.0}(x_{i2} + x_{i4}) - \underset{(-2.4)}{0.6} x_{i3} + u_i, \quad R^2 = 0.876.$$

- (a) Проверьте значимость вектора $\beta^T = (\beta_2, \beta_3, \beta_4)$ в регрессии без ограничений.
- (б) Проверьте ограничение $\beta_2 = \beta_4$.
7. По данным для 15 фирм ($n = 15$) была оценена производственная функция Кобба-Дугласа:

$$\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \ln L_i + \beta_3 \ln K_i + \varepsilon_i,$$

где Q — выпуск, L — трудозатраты, K — капиталовложения. Полученные оценки:

$$\ln Q_i = \underset{(4.48)}{0.5} + \underset{(0.7)}{0.76} \ln L_i + \underset{(0.138)}{0.19} \ln K_i.$$

Матрица обратная к матрице регрессоров имеет вид:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 121573 & -19186 & 3718 \\ -19186 & 3030 & -589 \\ 3718 & -589 & 116 \end{pmatrix}$$

- (a) Напишите формулу для несмещённой оценки ковариации $\text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ и вычислите её по имеющимся данным, если это возможно.
- (b) Проверьте $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ при помощи t -статистики. Укажите формулу для статистики, а также число степеней свободы.

(с) Постройте 95% доверительный интервал для величины $\beta_2 + \beta_3$.

8. Рассмотрим регрессию

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 d_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где d — некоторая фиктивная переменная. Пусть \bar{y}_0 — среднее значение переменной y по n_0 наблюдениям, для которых $d = 0$, и \bar{y}_1 — среднее значение переменной y по n_1 наблюдениям, для которых $d = 1$ ($n_0 + n_1 = n$). Найдите $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$, $\text{Var}(\hat{\beta}_2)$.

9. На основе квартальных данных с 1971 по 1976 г. с помощью метода наименьших квадратов получено следующее уравнение:

$$y_i = 1.12 - 0.0098x_{i1} - 5.62x_{i2} + 0.044x_{i3}$$

(2.14)
(0.0034)
(3.42)
(0.009)

где в скобках указаны стандартные ошибки, $ESS = 110.32$, $RSS = 21.43$.

- (а) Проверьте значимость каждого из коэффициентов.
- (б) Найдите коэффициент детерминации.
- (с) Протестируйте значимость регрессии в целом.
- (д) Когда в уравнение были добавлены три фиктивные переменные, соответствующие трем первым кварталам года, величина ESS выросла до 118.20. Проверьте гипотезу о наличии сезонности, сформулировав необходимые предположения о виде этой сезонности.
- (е) Для той же исходной модели были раздельно проведены две регрессии на основе данных: 1-й квартал 1971 г. — 1-й квартал 1975 г. и 2-й квартал 1975 г. — 4-й квартал 1976 г. соответственно и получены следующие значения сумм квадратов остатков:

$$RSS_1 = 12.25, \quad RSS_2 = 2.32.$$

Проверьте гипотезу о том, что между 1-м и 2-м кварталами 1975 г. произошло структурное изменение.

10. Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето), $FALL$ (осень):

$$\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln P_i + \beta_3 \cdot SPRING_i + \beta_4 \cdot SUMMER_i + \beta_5 \cdot FALL_i + \varepsilon_i.$$

Данная функция спроса была оценена с помощью МНК по 20 наблюдениям. Известно, что $R^2 = 0.37$.

- (а) Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = \beta_5$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе.
- (б) Пусть для регрессии с ограничениями (restricted model) был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.23$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.
11. Для города и для деревни рассматриваются две модели парной регрессии. Двадцать наблюдений для города дали следующие результаты:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}, X^T y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, y^T y = 30,$$

а десять наблюдений для деревни –

$$X^T X = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}, X^T y = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix}, y^T y = 24$$

На 5%-ом уровне значимости проверьте гипотезу о том, что эти две модели совпадают.

Список использованных источников

1. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики: Учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дело, 2007. — 368 с.