

## Семинар 5.

## Множественная регрессия.

## Стандартизированные данные. Тестирование гипотез.

1. Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к  $y_i^* = (y_i - \bar{y})/\hat{\sigma}_y$  и  $x_i^* = (x_i - \bar{x})/\hat{\sigma}_x$ . Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta'_1 + \beta'_2 x_i^* + \varepsilon'_i$$

и

$$y_i^* = \beta''_2 x_i^* + \varepsilon''_i$$

В решении можно считать  $\hat{\sigma}_x$  и  $\hat{\sigma}_y$  известными.

- Найдите  $\hat{\beta}'_1$ .
- Как связаны между собой  $\hat{\beta}_2$ ,  $\hat{\beta}'_2$  и  $\hat{\beta}''_2$ ?
- Как связаны между собой  $e_i$ ,  $e'_i$  и  $e''_i$ ?
- Как связаны между собой  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2)$ ,  $\widehat{Var}(\hat{\beta}'_2)$  и  $\widehat{Var}(\hat{\beta}''_2)$ ?
- Как выглядит матрица  $\widehat{Var}(\hat{\beta}')$ ?
- Как связаны между собой  $t$ -статистики  $t_{\hat{\beta}_2}$ ,  $t_{\hat{\beta}'_2}$  и  $t_{\hat{\beta}''_2}$ ?
- Как связаны между собой  $R^2$ ,  $R^{2'}$  и  $R^{2''}$ ?
- В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.

Умножение блочных матриц. Если размеры блоков допускают операцию умножения, то:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right].$$

Формула Фробениуса (блочное обращение).

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ \hline -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array} \right],$$

где  $A$  — невырожденная квадратная матрица размерности  $n \times n$ ,  $D$  — квадратная матрица размерности  $k \times k$ ,  $H = D - CA^{-1}B$ .

2. Рассмотрим модель множественной регрессии:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i.$$

Мы хотим проверить гипотезу следующего вида:

$$H_0 : \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \dots = \beta_k = 0.$$

Покажите, что для проверки гипотезы  $H_0$  может быть использована статистика

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

3. Рассмотрим модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i$ . При оценке модели по 24 наблюдениям оказалось, что  $RSS = 15$ ,  $\sum (y_i - \bar{y} - x_{i2} + \bar{x}_2)^2 = 20$ . На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \\ \beta_4 = 0 \end{cases}.$$