

Семинар 1.

Вводное занятие.

1. Проверочная работа №1 (время выполнения — 30 минут).
2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:
 - (a) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$;
 - (b) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$;
 - (c) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$;
 - (d) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;
 - (e) $\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}$;
 - (f) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - n\bar{a}^2$;
 - (g) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (\sum_{i=1}^n a_i)^2$;
 - (h) $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n\bar{a})^2$;
 - (i) $\sum_{i=1}^n \bar{a} = n\bar{a}$;
 - (j) $\sum_{i=1}^n a_i \bar{a} = n\bar{a}^2$;
 - (k) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i = 0$.
3. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — произвольный вектор. Упростите выражения:
 - (a) $n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i$
 - (b) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\bar{x}$
 - (c) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2$
4. Есть двести наблюдений. Вовочка оценил модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ по первой сотне наблюдений. Петечка оценил модель $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x_i$ по второй сотне наблюдений. Машенька оценила модель $\hat{y}_i = \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 x_i$ по всем наблюдениям.
 - (a) Возможно ли, что $\beta_2 > 0$, $\hat{\gamma}_2 > 0$, но $\hat{\phi}_2 < 0$?
 - (b) Возможно ли, что $\beta_1 > 0$, $\hat{\gamma}_1 > 0$, но $\hat{\phi}_1 < 0$?
 - (c) Возможно ли одновременное выполнение всех упомянутых условий?
5. Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$. Параметры моделей были оценены с помощью МНК.
 - (a) Как связаны между собой оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?
 - (b) Как связаны между собой оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?
6. Как связаны МНК оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \varepsilon_i$, если $z_i = 2y_i$?