

## Семинар 4.

## Множественная регрессия.

1. Рассмотрим классическую линейную модель  $y = X\beta + \varepsilon$  с предположениями Гаусса — Маркова:  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$  и  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$ . Для всех случайных векторов  $(y, \hat{\beta}, \hat{y}, \varepsilon, \hat{\varepsilon}, \bar{y})$  найдите все возможные условные математические ожидания и ковариационные матрицы.  $\mathbb{E}(\cdot)$ ,  $\text{Var}(\cdot)$ ,  $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ .
2. Рассмотрим модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ , где

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}.$$

Случайные ошибки  $\varepsilon_i$  независимы и нормально распределены с  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$  и  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$ .

Для удобства расчётов даны матрицы:  $X^T X$ ,  $(X^T X)^{-1}$  и  $X^T y$ :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad X^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Определите  $n$  и  $k$ .
- (b) Вычислите МНК оценку вектора  $\beta$ .
- (c) Найдите  $\hat{\sigma}^2$ ,  $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$ .
- (d) Найдите  $\text{Var}(u_1)$ ,  $\text{Var}(\beta_1)$ ,  $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ ,  $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 | X)$ ,  $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$ ;
- (e) Найдите  $\text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ ,  $\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ ,  $\text{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$ ,  $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$ ;
- (f) Найдите  $\text{Var}(\beta_2 - \beta_3)$ ,  $\text{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ ,  $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ ;

3. Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к  $y_i^* = (y_i - \bar{Y})/\hat{\sigma}_y$  и  $x_i^* = (x_i - \bar{x})/\hat{\sigma}_x$ . Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + \varepsilon_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + \varepsilon_i''$$

В решении можно считать  $\hat{\sigma}_x$  и  $\hat{\sigma}_y$  известными.

- (a) Найдите  $\hat{\beta}'_1$ .
- (b) Как связаны между собой  $\hat{\beta}_2$ ,  $\hat{\beta}'_2$  и  $\hat{\beta}''_2$ ?
- (c) Как связаны между собой  $e_i$ ,  $e'_i$  и  $e''_i$ ?
- (d) Как связаны между собой  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_2)$ ,  $\widehat{Var}(\hat{\beta}'_2)$  и  $\widehat{Var}(\hat{\beta}''_2)$ ?
- (e) Как выглядит матрица  $\widehat{Var}(\hat{\beta}')$ ?
- (f) Как связаны между собой  $R^2$ ,  $R^{2'}$  и  $R^{2''}$ ?
- (g) В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.