Подборка задач №1.

Вопросы по лекции.

1. С помощью метода наименьших квадратов найдите оценку параметра модели парной регрессии без константы.

2. Докажите несмещённость оценки МНК в модели парной регрессии без константы.

3. С помощью метода наименьших квадратов найдите оценки параметров в модели парной регрессии с константой.

4. Докажите несмещённость оценок МНК в модели парной регресии с константой.

5. Сформулируйте условия теоремы Гаусса–Маркова для модели парной регрессии.

6. Сформулируйте теорему Гаусса–Маркова для модели парной регрессии.

Задачи.

Примечание: Регрессор x во всех задачах блоках предполагается детерминированным.

1. Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i / \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

имеет наименьшую дисперсию?

2. Рассмотрим модель $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ имеет наименьшую дисперсию?

3. Рассмотрим линейную модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, где ошибки ε_i нормальны $N(0; \sigma^2)$ и независимы.

   a) Верно ли, что y_i одинаково распределены?
   b) Верно ли, что $\bar{y}$ — это несмещённая оценка для $\mathbb{E}(y_i)$?
   c) Верно ли, что $\sum (y_i - \bar{y})^2 / (n-1)$ — несмещённая оценка для σ^2? Если да, то докажите, если нет, то определите величину смещения.

4. Мы предполагаем, что y_t растёт с линейным трендом, то есть

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t,$$

где t — момент времени. Все предпосылки теоремы Гаусса–Маркова выполнены. В качестве оценки $\hat{\beta}_2$ предлагается

$$\hat{\beta}_2 = (y_T - y_1)/(T - 1),$$

где T – общее количество наблюдений.

a) Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)$.

b) Совпадает ли оценка $\hat{\beta}_2$ с классической МНК-оценкой?

c) У какой оценки дисперсия выше: у $\hat{\beta}_2$ или классической МНК-оценки?

5. Зависимая переменная в регрессии $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ разбивается на две компоненты:

$$y_i = y_{1i} + y_{2i}.$$

Рассмотрим две регрессии для компонент:

$$y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{1i},$$

$$y_{2i} = \alpha_2 + \beta_2 x_i + \varepsilon_{2i}.$$

Докажите следующие соотношения для МНК-оценок параметров трех регрессий:

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2, \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2.$$

6. Проведены две регрессии:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{и} \quad y_i = \alpha' + \beta' x_i^* + \varepsilon_i', \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x_i^* = x_i - \overline{x}$.

a) По известным МНК-оценкам $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ параметров α, β в первой регрессии найдите МНК-оценки $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$ параметров α', β' во второй регрессии.

b) Найдите $\operatorname{Cov}(\hat{\alpha}', \hat{\beta}')$.

7. Рассмотрим модель парной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$. Пусть $z_i = x_i^2$. Рассмотрим следующую оценку параметра β_2:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})x_i}.$$

a) Покажите, что оценка $\tilde{\beta}_2$ несмещенная.

b) Найдите дисперсию оценки $\tilde{\beta}_2$.

c) Не повторяя доказательство теоремы Гаусса–Маркова, непосредственно проверьте, что $\text{Var}(\tilde{\beta}_2) \geq \text{Var}(\hat{\beta}_2^{OLS})$.

8. Модель регрессии была оценена с помощью МНК: $\hat{y}_i = 3 - 2x_i$. Выборочная дисперсия x равна 9, выборочная дисперсия y равна 40. Найдите R^2 и выборочные корреляции $\widehat{\text{Corr}}(x, y)$, $\widehat{\text{Corr}}(y, \hat{y})$.

9. Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ с неслучайными x_i, $i = 1, ..., n$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещёнными:

a) $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;

b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;

c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \cdots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;

d) $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$.

10. Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ с неслучайными x_i, $i = 1, ..., n$. Найдите $\text{Var}(\hat{\beta})$:

a) $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;

b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;

c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;

d) $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$.

11. Рассмотрим модель парной регрессии с константой:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., n.$$

Предполагается, что ошибки $\{\varepsilon_i\}$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. При заданных предпосылках оценка МНК $\hat{\beta}_2$ для параметра β_2 является несмещённой. Рассмотрим альтернативные оценки параметра β_2:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) y_i}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) x_i}, \ \beta_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) y_i}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) v_i},$$

где $v_i = \sqrt{x_i}, \bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v_i$.

(a) Является ли оценка $\tilde{\beta}_2$ несмещённой оценкой параметра β_2?

(b) Является ли оценка β_2^* несмещённой оценкой параметра β_2?

(c) Обсудите, как бы вы выбирали между оценками $\hat{\beta}_2$, $\tilde{\beta}_2$ и β_2^*?

Список использованных источников

1. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики: Учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дело, 2007. — 368 с.