

Семинар 1.

Модель множественной регрессии.

1. Предположим, что модель

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

удовлетворяет условиям классической регрессии. Рассматривается следующая оценка коэффициента β :

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \bar{Y}}{X_i - \bar{X}}.$$

- (а) Является ли оценка $\tilde{\beta}$ несмещенной? Является ли она линейной по y ?
- (б) Вычислите дисперсию оценки $\tilde{\beta}$.
- (с) Проверьте теорему Гаусса–Маркова, сравнив полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ дисперсией МНК–оценки $\sigma^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
2. Модель, порождающая данные, имеет вид $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$. Ошибки независимы, и их дисперсии имеют вид $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Регрессоры детерминированы. Для оценки дисперсии σ^2 используется формула $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$. Является ли s^2 несмещенной оценкой σ^2 ? Если оценка смещена то что можно сказать о знаке смещения?
3. Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $E(\tilde{\beta})$ и $Var(\tilde{\beta})$.
4. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}'$. Известно, что $E(\varepsilon) = 0$ и $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- (а) Укажите число наблюдений.

- (b) Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
- (c) Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
- (d) Рассчитайте TSS , RSS и ESS .
- (e) Чему равен e_4 , МНК-остаток регрессии, соответствующий 4-ому наблюдению?
- (f) Чему равен R^2 в модели?
- (g) Рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.
- (h) Рассчитайте $\widehat{Var}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
- (i) Найдите $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)$, несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
- (j) Найдите $\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, несмещенную оценку ковариации МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
- (k) Найдите $\widehat{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$.
- (l) Найдите $\widehat{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
- (m) Найдите $\hat{\sigma}(\beta_1)$, стандартную ошибку МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.

Список использованных источников

1. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики: Учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дело, 2007. — 368 с.