Семинар 1.

Модель множественной регрессии.

1. Предположим, что модель
$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$
удовлетворяет условиям классической регрессии. Рассматривается следующая оценка коэффициента β:
$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}}.$$
   (a) Является ли оценка $\tilde{\beta}$ несмещенной? Является ли она линейной по y?

   (b) Вычислите дисперсию оценки $\tilde{\beta}$.

   (c) Проверьте теорему Гаусса–Маркова, сравнив полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ с дисперсией МНК–оценки параметра β.

2. Модель, порождающая данные, имеет вид $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., n$. Ошибки независимы, и их дисперсии имеют вид $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Регрессоры детерминированы. Для оценки дисперсии σ^2 используется формула $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$. Является ли s^2 несмещенной оценкой σ^2? Если оценка смещена то что можно сказать о знаке смещения?

3. Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $E(\tilde{\beta})$ и $Var(\tilde{\beta})$.

4. (Математическое ожидание квадратичной формы) Пусть y — случайный вектор-столбец размерности $n \times 1$, A — детерминированная матрица размерности $n \times n$. Покажите, что справедливо следующее:
$$\mathbb{E}(y'Ay) = \mathrm{tr}(A\mathrm{Var}(y)) + \mathbb{E}(y')A\mathbb{E}(y).$$

5. Используя матрицы $\mathrm{P} = X(X'X)^{-1}X'$ и $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$,

   (a) запишите TSS, RSS и ESS в матричной форме;

   (b) вычислите $\mathbb{E}$(TSS), $\mathbb{E}$(ESS).

   Примечание: $\vec{1}$ — вектор размерности $n \times 1$, состоящий из единиц.

Список использованных источников

1. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики: Учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дело, 2007. — 368 с.