Семинар 2.

Модель множественной регрессии.

Тестирование гипотез.

1. Рассмотрим классическую линейную модель регрессии

$$y = X\beta + \varepsilon.$$

Найдите:

(a) $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, y)$;

(b) $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \hat{y})$;

(c) $\mathrm{Cov}(e, y)$;

(d) $\mathrm{Cov}(e, \hat{y})$;

(e) $\mathrm{Cov}(e, \bar{y})$

2. Рассмотрим нормальную классическую линейную модель множественной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$ с неслучайными регрессорами. Дополнительно известно, что на самом деле $\beta_2 = ... = \beta_k = 0$.

(a) Найдите $\mathbb{E}(R^2)$.

(b) Найдите $\mathbb{E}(R^2_{adj.})$.

3. Ниже представлены результаты МНК–оценивания двух регрессий, часть из которых не сохранилась. Утерянные оценки коэффициентов регрессий заменены символами.

$$\text{Модель 1: } \hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \underset{(2)}{\hat{\beta}_2} x_i$$

$$\text{Модель 2: } \hat{y}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 x_i + \underset{(2)}{10} w_i, R^2 = 0.8$$

Оценивание проводилось по 103 наблюдениям. В скобках под оценками коэффициентов указаны их стандартные ошибки. Восстановите значение оценки коэффициента $\hat{\beta}_2$ первой регрессии?

4. Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$. При оценке модели по 24 наблюдениям оказалось, что $RSS = 15$, $\sum(y_i - \bar{Y} - x_{i3} + \bar{x_3})^2 = 20$. На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \\ \beta_4 = 0 \end{cases}.$$

5. Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, где

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}.$$

Случайные ошибки ε_i независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

Для удобства расчётов даны матрицы: $X^T X$, $(X^T X)^{-1}$ и $X^T y$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad X^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Определите n и k.

(b) Вычислите МНК оценку вектора β.

(c) Найдите $\hat{\sigma}^2$, $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$.

(d) Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\varepsilon_1)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\beta_1)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$;

(e) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{ov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$;

(f) Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\beta_2 - \beta_3)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{orr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;