Семинар 3.

1. Дана стандартная модель парной регрессии

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n.$$

(а) Чему равна МНК–оценка коэффициента β_2 при ограничении $\beta_1 = 0$.

(б) Чему равна дисперсия оценки в пункте (а)? Покажите, что она меньше, чем $\sigma^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ — дисперсия МНК–оценки β_2 в регрессии без ограничения. Противоречит ли это теореме Гаусса–Маркова?

Решение:

(а) GDP (истинный процесс): $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n$.
Модель, которую оцениваем: $y_i = \beta_2 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., n$.
Найдем МНК–оценку для нашей модели:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Как известно, при пропуске существенных переменных (в нашем случае пропущена константа) МНК–оценки смещены. Убедимся в этом:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i) x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) =$$

$$= \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \beta_2 \neq \beta_2.$$

Таким образом, МНК–оценка действительно смещённая.

(б) Вычислим дисперсию данной оценки:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathrm{Var}(\varepsilon_i) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Сравним данную дисперсию с дисперсией МНК–оценки параметра β_2 для истинной модели (обозначим эту оценку как β_2^{true} которая, как нам известно, имеет вид:

$$\mathrm{Var}(\beta_2^{true}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Сравним знаменатели:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n(\bar{x})^2 = n(\bar{x})^2 \geq 0.$$

Следовательно, МНК–оценка в модели с пропущенной константой имеет меньшую дисперсию. Однако это не противоречит теореме Гаусса–Маркова. Согласно теореме Гаусса–Маркова МНК–оценка β_2^{true} в истинной модели действительно имеет минимальную дисперсию, однако, в классе линейных по y и несмещённых оценок, но МНК–оценка β_2 в модели с пропущенной константой является смещённой.

(a) Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели

$$y_t = \beta_1 + \varepsilon_t,$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0,\ \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 / x_t,\ x_t > 0$$

в классе линейных несмещённых оценок. Рассчитайте дисперсию этой оценки и сравните её с дисперсией МНК–оценки.

Решение:

Известно , что

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{n}\left(y_1 + \ldots + y_n\right).$$

Из условия следует, что $\mathrm{E}\left(y_t\right) = \beta, \mathrm{V}\left(y_t\right) = \sigma^2 x_t$ и $\mathrm{Cov}\left(y_t, y_s\right) = 0$, при $t \neq s$. Поэтому

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$$

(т. е. оценка $\widehat{\beta}$ несмещенная) и

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^{n} x_t.$$

Обобщенный метод наименьших квадратов позволяет получить эффективные оценки при гетероскедастичных случайных ошибках. В данном случае ОМНК сводится к взвешенному методу наименьших квадратов с весами $1/\sqrt{x_t}$:

$$\frac{y_t}{\sqrt{x_t}} = \beta \frac{1}{\sqrt{x_t}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_t}}.$$

Здесь ошибки $u_t = \varepsilon_t / \sqrt{x_t}$ уже удовлетворяют условию гомоскедастичности: $\mathrm{V}(u_t) = \sigma^2$. Применяя к этому уравнению МНК, получаем:

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}} = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{y_t}{x_t}\right) \Big/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t}\right),$$

$$\mathrm{V}\left(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right) = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma^2 x_t}{x_t^2}\right) \Big/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t}\right)^2 = \sigma^2 \Big/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t}\right).$$

Неравенство $\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \geqslant \mathrm{V}\left(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)$ эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t}\right) \geqslant n^2,$$

которое, в свою очередь, вытекает непосредственно из неравенства Коши–Буняковского.

Список используемой литературы.

Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. (2007). Эконометрика. Начальный курс : учебник для вузов.