Некоторые приложения теоремы Римана-Роха

Конспект лекции
по спецкурсу А-III «Римановы поверхности»

лектор: Снурницын П. В.
конспект подготовила: Писаренкова Е. Д., 601 группа

осень 2025

Некоторые приложения теоремы Римана-Роха

Напомним прежде формулировку основного утверждения.

Теорема Римана-Роха

Пусть X — АК (алгебраическая кривая), т. е. компактная РП (риманова поверхность), которая разделяет точки и касательные. Для любого дивизора $D \in \operatorname{Div} X$ на этой римановой поверхности выполняется равенство

$$\dim L(D) = \deg D - g(X) + 1 + \dim L^{(1)}(-D).$$

Отметим, что

$$\dim L^{(1)}(-D) = \dim L(K - D) = \dim H^1(D), \tag{1}$$

где $K = (\omega)$ — канонический дивизор. Первое равенство в (1) возможно вследствие изоморфизма пространств, второе возникает при доказательстве теоремы Римана-Роха.

Классификация компактных РП (АК)

Величина $g(X)$ — род поверхности X ($g \geqslant 0$ и с точки зрения топологии означает, что всякая двумерная поверхность гомеоморфна сфере с некоторым количеством «ручек» равным g).

1. $g = 0$

Например, сфера — поверхность рода 0.

Лемма

Если поверхность X — компактна и $\exists\, p \in X$ такая, что $\dim L(p) > 1$, то X изоморфна сфере Римана $\mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. $\dim L(p) > 1$ означает, что найдется непостоянная функция $f \in L(p) \backslash \mathbb{C}$ (она же непостоянная мероморфная функция из $\mathcal{M}(X) \backslash \mathbb{C}$), со свойством, что точка p — единственный полюс. Но тогда соответствующее голоморфное отображение $F : X \to \mathbb{C}_\infty$, действующее по закону

$$\begin{aligned} &x \mapsto f(x), \quad x \text{ — не полюс},\\ &p \mapsto \infty, \end{aligned}$$

имеет единственный полюс простого порядка, т. е. кратность точки p равна 1, и p — единственный прообраз бесконечно удаленной точки, а значит

$\deg F = m_p(f) = 1$. Тогда по доказанному ранее отображение F задает изоморфизм римановой поверхности и сферы, т. е. $X \simeq \mathbb{C}_\infty$. □

Следствие

Если X — компактна и рода $g(X) \geqslant 1$, то для любой точки $p \in X$ пространство $L(p) = \mathbb{C}$.

Теорема

Если X — АК рода $g(X) = 0$, то $X \simeq \mathbb{C}_\infty$.

Доказательство. Пусть $p \in X$, $K = (\omega)$ — канонический дивизор степени $\deg K = 2g - 2 = -2$. Но тогда и $\deg(K - p) < 0$ (она будет -2, либо -3 в случае, когда точка p бесконечно удаленная). Отрицательная степень означает, что $\dim L(K - p) = 0$. В итоге по теореме Римана-Роха имеем

$$\dim L(p) = \deg p + 1 - g + \dim L(K - p) = 1 + 1 - 0 + 0 = 2.$$

То есть существуют непостоянные функции в пространстве $L(p)$ и по доказанной лемме выше $X \simeq \mathbb{C}_\infty$. □

2. $g = 1$

Теорема

Если X — АК рода $g(X) = 1$, то X изоморфна гладкой проективной кривой степени 3 и вкладывается в пространство $\mathbb{P}^2$.

Доказательство. Ранее было показано, что если существует дивизор D степени $degD \geqslant 2g + 1 = 3$, то он задает голоморфное вложение

$$\varphi_P : X \mapsto \mathbb{P}^2,$$

причем $deg\varphi_P(X) = 3$. Ранее мы доказали, что степень такого отображения совпадает со степенью кривой в обычном смысле. □

Таким образом, получаем, что компактные поверхности рода 1, обладающие свойством Римана-Роха суть гладкие проективные кривые степени 3, известные также как эллиптические кривые.

Теорема

Если X — АК рода $g(X) = 1$, то поверхность X изоморфна комплексному тору $\mathbb{C}/L$.

Доказательство. Доказательство проводится на основе теоремы Римана-Роха (см. [1]). □

3. $g = 2$.

В этом случае приведем только такой результат.

Теорема

Если X — АК рода $g(X) = 2$, то X — гиперэллиптическая кривая.

Когда мы ввели понятие РП, то приводили различные примеры от простых — сферы торов, до более сложных — показывали, что если есть уравнение в виде некоторого многочлена равного нулю, в частности, в виде однородного многочлена равного нулю на проективной плоскости, то это уравнение задает РП. Задать карты задача простая, а вот доказать связность уже сложнее. Используя некоторые «хитрости» связность возможно вывести из теоремы Римана-Роха.

Теорема

Гладкая проективная кривая X связна в комплексной топологии.

Доказательство. Допустим, что мы оперируем полем рациональных функций, то есть у нас есть множество $\mathcal{M}(X)$, которое разделяет точки и касательные поверхности X.

Пусть X не связно, то есть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 — непустые, непересекающиеся, замкнутые множества. Зафиксируем точку $p \in X_1$ и рассмотрим дивизор $D = (g+1)p$.

По теореме Римана-Роха $\dim L(D) \geqslant \deg D + 1 - g = 2$, но тогда существует непостоянная $f \in L(D) \subset \mathcal{M}(X)$, для которой p — единственный полюс. Но тогда f голоморфна на X_2, значит f постоянна на X_2, следовательно f постоянна на X. Получили противоречие. □

Теоремы Абеля и Якоби

Примеры

1. Пусть $X = \mathbb{C}_\infty$, дивизор $D \in \mathrm{PDiv}(X)$, т.е. $D = (f)$, тогда и только тогда, когда $\deg D = 0$.
2. Пусть $X = \mathbb{C}/L$, дивизор $D \in \mathrm{PDiv}(X)$ тогда и только тогда, когда $\deg D = 0$ и $A(D) = 0$, где A — отображение Абеля (-Якоби).
Отображение $A : \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\mathrm{L}) \mapsto \mathbb{C}/L$.

Перейдем к более общему утверждению.

Пусть X — АК рода $g(X) = g$ и $\Omega^1(X) \subset \mathcal{M}^{(1)}(x)$ — пространство мероморфных 1-форм. Отображение $A : X \mapsto \Omega^1(X)^*$, при этом $A(p)(\omega) = \int\limits_{\gamma_p} \omega$, где γ_p — путь из фиксированной начальной точки p_0 в точку p. (Однако в этом случае результат определен с точностью до интегралов по замкнутым путям, т. е. будет зависеть от выбранного пути, поэтому корректно определить отображение так $A:\ X \mapsto \mathrm{Jac}(X) = \Omega^1(X)^*/\Lambda$.)

Лемма

Отображение A не зависит от выбранной точки p_0.

Теорема Абеля

Пусть X — АК, дивизор $D = (f)$ тогда и только тогда, когда $\deg D = 0$ и образ D при отображении Абеля равен нулю, т. е. $A(D) = 0$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения можно увидеть в [1], глава $VIII$. □

Теорема Клиффорда

В примерах, которые мы рассмотрели ранее, дивизор D такой, что пространство $H^1(D) = 0$ (или же $L(K - D) = 0$). Однако в некоторых приложениях возникает потребность анализировать пространство Римана-Роха и для других дивизоров, у которых $H^1(D) \neq 0$.

Определение

Дивизор $D \in \mathrm{Div}\, X\ :\ H^1(D) \neq 0$ называется *специальным* (или $\dim L(D) \geqslant 1$, $\dim L(K - D) \geqslant 1$).

В литературе величину $\dim H^1(D) = i(D)$ называют *индекс специальности.*

Теорема Клиффорда

Если D — специальный дивизор, то
1) $\dim L(D) + \dim L(K - D) \leqslant g + 1$
2) $2 \dim L(D) \leqslant \deg D + 2$

Доказательство. Доказательство см. в [1]. □

Существование мероморфных 1-форм

Ранее мы решали задачу Миттаг-Леффлера о том, что существует мероморфная функция с заданными свойствами в заданных точках. Рассмотрим теперь вопрос о том, что будет для мероморфных 1-форм.

Теорема

Если X—АК и $p_1, \ldots, p_n \in X$. Есть n чисел $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ таких, что $\sum r_i = 0$. Тогда существует $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ такая, что p_i — единственные простые полюса (т. е. $\nu_{p_i}(\omega) = -1$) и $\operatorname{Res}_{p_i} \omega = r_i$.

Доказательство. Следует из теоремы Римана-Роха. □

Размерность пространств модулярных форм

Речь пойдет о приложении к модулярным формам, которые возникали на спецкурсе А-II «Решетки и формы».

Напомним некоторые сведения.

Рассмотрим

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Она действует на $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ дробно-линейными преобразованиями

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ тождественный. Элемент $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ действует тривиально. Тогда $SL_2(Z)/\{\pm I\} = \Gamma(1)$ — полная модулярная группа.

Рассмотрим несколько ее подгрупп.

◦ Главные конгруэнц подгруппы уровня n.

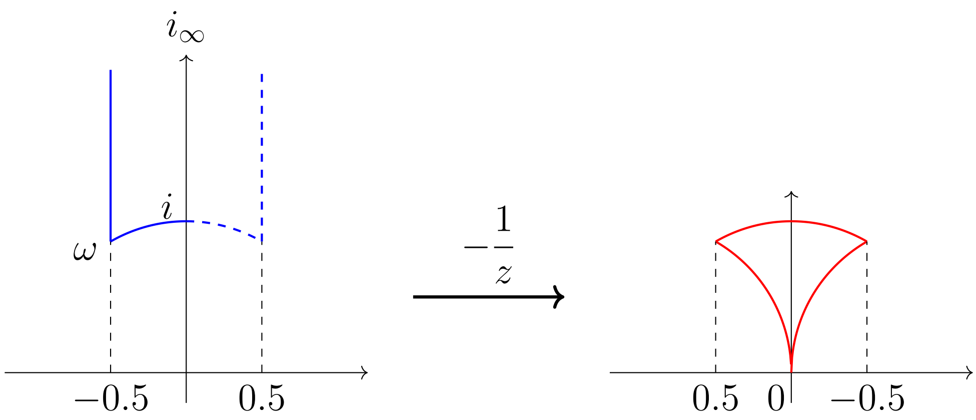
$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (mod\, n) \right\},$$

$$\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z}),$$

$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ называют конгруэнц подгруппой, если $\exists n : \Gamma(n) \subset \Gamma$.

◦ Для любой конгруэнц подгруппы $y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$ — РП. Она не компактна. $X(\Gamma) = \overline{\mathbb{H}}/\Gamma$, где $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ — компактификация.

◦ Фундаментальные области — множество представителей классов эквивалентности. $\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$.



i_∞ или 0 называется параболической точкой (casp). Точки i, ω называются эллиптическими точками.

∘ Γ — конгруэнц подгруппа, если $z : h_z = |\Gamma_z| > 1$, то z называется эллиптической точкой для Γ.

h_z называется периодом ($\Gamma(1)$, $h_i = 2$, $h_\omega = 3$).

∘ Γ — конгруэнц подгруппа, класс Γz, где $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, называется параболической точкой.

$$\forall z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \qquad \exists g \in SL_2(\mathbb{Z}) : \quad gz = i_\infty$$

$$h_z = |\Gamma_{i_\infty}/(g((\pm z)\Gamma)g^{-1})_{i_\infty}|$$

Рассмотрим отображение $q = \exp\left(2\pi i \dfrac{z}{n}\right)$.

∘ $X(\Gamma) = \overline{\mathbb{H}}/\Gamma$.

$$g = 1 + \frac{d}{12} + \frac{e_2}{3} + \frac{e_1}{4} + \frac{e_\infty}{2}$$

e_2, e_1 называются эллиптическими точками периода 2, 1. e_∞ называется параболической точкой.

$d = \deg F$, $F : \; X(\Gamma) \mapsto X(\Gamma(1)) : \; \Gamma z \mapsto \Gamma(1/z)$. А также $g(X(\Gamma(1))) = 0$.

∘ Мероморфная на плоскости $\mathbb{H}$ функция f называется слабо модулярной функцией веса $2k$, если для любого $g \in SL_2\mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{H}$, справедливо соотношение

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z).$$

$f|_{g,2k} = (cz+d)^{-2k} f(gz)$ — значение функции $f|_{g,2k} = f$ в точке z.

Список литературы

[1] Miranda R. Algebraic Curves and Riemann Surfaces, AMS, 1995. xxi+390 p.