Спецкурс Арифметика III:
Римановы поверхности и алгебраические кривые

Содержание

1 О курсе

Осенний семестр, 15–16 недель

Курс состоит из двух частей. В первой части (лекции 1–10) излагается теория римановых поверхностей с уклоном в приложения для современной теории чисел. Развивается необходимый для доказательства теоремы Римана–Роха аппарат, сама теорема Римана-Роха доказывается используя двойственность Серра. Общие результаты сопровождаются примерами для случаев римановой сферы, комплексного тора (эллиптической кривой), а также римановых поверхностей, возникающих при изучении пространств модулярных форм (модулярных кривых). В частности затрагиваются вопросы компактификации модулярных кривых, а также оценка размерности пространств модулярных форм для конгруэнц-подгрупп (эти вопросы поднимались в конце курса Арифметика II: Решётки и формы).

Вторая часть (лекции 11–15) посвящена общему случаю алгебраических функциональных полей (над алгебраически замкнутым полем). Теорема Римана–Роха доказывается в более общем случае. Вводится понятие дзета-функции алгебраической кривой. Рассматривается идея доказательства теоремы Хассе–Вейля об оценке числа точек алгебраической кривой над конечным полем.

По сути курс является введением в алгебраическую и арифметическую геометрию (по крайней мере в случай плоских алгебраических кривых). Изложение через римановы поверхности и случай над полем $\mathbb{C}$ позволяет развить аналитическую и геометрическую интуицию стоящую за понятиями дифференциалов, дивизоров, линейных пространств и теоремой Римана-Роха, и используя эту интуицию перейти к более общему случаю алгебраических функциональных полей.

2 Содержание лекций и примеры задач

2.1 Римановы поверхности: определения и примеры

Аннотация: Повторение определений и необходимых фактов из топологии: топологические пространства, связность, хаусдорфовость, род, число Эйлера. Определения комплексных карт, атласов, структуры двумерного многообразия и римановой поверхности. Примеры: комплексная плоскость, риманова сфера, комплексный тор, афинные кривые, проективная прямая, проективная плоскость, проективные кривые.

Источники: [Mir], глава I.

Примеры задач:

1. Пусть X — топологическое пространство, $\phi : U \to V$ — комплексная карта на X, $\psi : V \to W$ — взаимно-однозначное голоморфное отображение на подмножествах $\mathbb{C}$. Докажите, что $\psi \circ \phi : U \to W$ также является комплексной картой на X и что $\psi \circ \phi$ совместима с любой картой на X, с которой совместима ϕ.
2. Докажите, что определенная в лекции эквивалентность комплексных атласов действительно является отношением эквивалентности.
3. Проверьте, что отображение $\mathbb{P}^1 \to S^2$ проективной прямой над $\mathbb{C}$ в сферу единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$, заданное
$$[z : w] \mapsto (2\,\mathrm{Re}(w\overline{z}), 2\,\mathrm{Im}(w\overline{z}), |w|^2 - |z|^2)/|w|^2 + |z|^2,$$
является гомеоморфизмом. (Поэтому проективная прямая является компактной римановой поверхностью рода 0).
4. Докажите, что группа сложения точек комплексного тора X является делимой, то есть, что $\forall p \in X\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists q \in X : n \cdot q = p$.
5. Пусть многочлен от двух переменных имеет вид $f(z, w) = w^2 - h(z)$.
   - Докажите, что $f(z, w)$ является неприводимым $\Leftrightarrow$ $h(z)$ не является точным квадратом.
   - Докажите, что $f(z, w)$ является невырожденным $\Leftrightarrow$ все корни $h(z)$ различны.

6. Пусть $f(z,w)$ — многочленом второй степени. Афинная кривая X заданная $f(z,w)=0$ называется афинной коникой.
   - Докажите, что если $f(z,w)$ — вырожденный, то $f(z,w)$ раскладывается в произведение двух линейных множителей. Что в этом случае можно сказать про X?
   - Приведите примеры гладких афинных коник.
7. Пусть $F(x,y,z)$ — однородный многочлен степени d. Докажите, что F невырожденный $\Leftrightarrow$ в каждой афинной карте F задаёт гладкую афинную кривую.
8. Докажите, что любые две проективные прямые в $\mathbb{P}^2$ пересекаются в единственной точке.

2.2 Функции на римановых поверхностях

Аннотация: Голоморфные и мероморыне функции, ряды Лорана, порядки нулей и полюсов. Повторение необходимых результатов из комплексного анализа от одной переменной. Кольцо голоморфных функций и поле мероморфных функций. Мероморфные функции на римановой сфере, равенство числа нулей и полюсов с учетом кратностей. Мероморфные функции на торе, проективной прямой и гладкой алгебраической кривой (приложение теоремы Гильберта о нулях).

Источники: [Mir] §II.1–II.2.

Примеры задач:

1. Пусть f — комплексно-значная функция определенная на римановой сфере $\mathbb{C}_\infty$ в окрестности ∞. Докажите, что f голоморфна в $\infty \Leftrightarrow f(1/z)$ голоморфна в 0.
2. Пусть $p(z,w), q(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ — однородные многочлены одинаковой степени, $q(z_0,w_0) \neq 0$. Покажите, что $f([z:w]) = p(z,w)/q(z,w)$ — корректно определенная на $\mathbb{P}^1$ функция голоморфная функция в окрестности $[z_0:w_0]$.
3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — проективная кривая заданная невырожденным многочленом $F(x,y,z)=0$, $F(x,y,z), G(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ — однородные многочлены одинаковой степени, причем H не равен тождественно нулю на X. Покажите, что $G(x,y,z)/H(x,y,z)$ — мероморфная функция на X.
4. Пусть U — окрестность точки $p \in X$ $f,g \in \mathcal{M}(U)$. Докажите следующие свойства порядка ν_p:
   - $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$;
   - $\nu_p(1/f) = -\nu_p(f)$, $\nu_p(f/g) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$;
   - $\nu_p(f \pm g) \geqslant \min(\nu_p(f), \nu_p(g))$.
5. Докажите, что ряд определяющий тета-функцию $\theta_\tau(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$ сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$.
6. Докажите, что z_0 — нуль $\theta_\tau(z) \Leftrightarrow \forall m,n \in \mathbb{Z}$ точка $z_0 + m + n\tau$ является нулём $\theta_\tau(z)$.
7. Докажите, что $(1/2)+(\tau/2)+m+n\tau, m,n \in \mathbb{Z}$ — единственные нули θ_τ, причём эти нули простые.
8. Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}/L$ — комплексный тор, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, и пусть заданы два набора $\{p_i\}_{i=1}^d, \{q_i\}_{i=1}^d \subset X$. Покажите, что существуют два набора $\{x_i\}_{i=1}^d, \{y_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{C}$: $\pi(x_i) = p_i, \pi(y_i) = q_i$, $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ $\Leftrightarrow \sum_i p_i = \sum_i q_i$, где последнее суммирование выполняется в групповом законе тора.

2.3 Теорема Гильберта о нулях

Аннотация: Повторение определений и необходимых фактов из алгебры: идеалы, модули, кольца главных идеалов, максимальный идеал, радикальный идеал. Идеал множества точек кривой. Неприводимые компоненты алгебраических множеств. Лемма Зарисского, теорема Гильберта о базисе, теорема Гильберта о нулях.

Источники: [Fult] глава 1; [Mir] §III.5.

Примеры задач:

1. Пусть k — произвольное поле. Докажите, что алгебраические подмножества $\mathbb{A}^1(k)$ исчерпываются конечными подмножествами и самим $\mathbb{A}^1(k)$.
2. Пусть k — произвольное поле. Докажите следующие свойства алгебраических множеств в $\mathbb{A}^n(k)$ и их идеалов:
    - $X \subset Y \Rightarrow I(X) \supset I(Y)$;
    - $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $I(\emptyset) = k[x_1, \dots x_n]$, $I(\mathbb{A}^n(k)) = (0)$ (при не конечном k);
    - $I(V(S)) \supset S$, $V(I(X)) \supset X$, где $S \subset k[x_1, \dots x_n]$, $X \subset \mathbb{A}^n(k)$;
    - $V(I(V(S))) = V(S)$, $I(V(I(X))) = I(X)$, где S и X как выше;
    - $\forall X \subset \mathbb{A}^n(k)$ $I(X)$ — радикальный идеал;
    - $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$, где $V, W \subset \mathbb{A}^n(k)$ — алгебраические.
    - $V(I) = V(\sqrt{I})$, $\sqrt{I} \subset I(V(I))$, где I — идеал в $k[x_1, \dots x_n]$.
3. Докажите, что $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ является максимальным идеалом в $k[x_1, \dots x_n]$.
4. Докажите, что $I = (x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$ — радикальный идеал, но при этом I не является идеалом никакого множества $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$.
5. Докажите, что $V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ неприводимо и $I(V(y - x^2)) = (y - x^2)$.
6. Разложите $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3)$ $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ на неприводимые компоненты.

2.4 Отображения римановых поверхностей

Аннотация: Голоморфные отображения римановых поверхностей, индуцирование гомоморфизмов колец голоморфных и полей мероморфных функций. Изоморфизм римановой сферы и проективной прямой. Мероморфные функции как голоморфные отображения на риманову сферу. Теорема о локальной нормальная форме, кратность отображения. Степень отображения. Теорема о сумме порядков мероморфных функций. Формула Гурвица. Точки ветвления для афинных и проективных кривых. Мероморфные функции на торе как отношения тета-функций. Изоморфизмы комплексных торов

Источники: [Mir] §§II.3–II.4, §III.1

Примеры задач:

1. Докажите следующие свойства голоморфных отображений:
    - Если $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ — голоморфные отображения, то $G \circ F : X \to Z$ — голоморфное отображение;
    - Если $F : X \to Y$ — голоморфное отображение, g — голоморфная функция, определенная на открытом подмножестве $W \subset Y$, то $g \circ F$ — голоморфная функция, определенная на $F^{-1}(W)$;
    - Если $F : X \to Y$ — голоморфное отображение, g — мероморфная функция,

определенная на открытом подмножестве $W \subset Y$, то $g \circ F$ — мероморфная функция, определенная на $F^{-1}(W)$.
2. Покажите, что при изоморфизме между комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и римановой сферой $\mathbb{C}_\infty$ точки $[z:1]$ соответствуют конечным точкам $z \in \mathbb{C}$, а точка $[1:0]$ соответствует ∞.
3. Пусть $f(z,w), g(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ — ненулевые, однородные многочлены одинаковой степени, не имеющие общих множителей. Докажите, что отображение $F : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 : [z:w] \mapsto [f(z,w) : g(z,w)]$ корректно определено и голоморфно. Что можно сказать про случай, когда f и g имеют общие множители?
4. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, докажите следующие свойства:
   - $F_A : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 : [z:w] \mapsto [az+b : cz+d]$ — автоморфизм $\mathbb{P}^1$, $F_{AB} = F_A \circ F_B$;
   - При отождествлении $\mathbb{P}^1$ с $\mathbb{C}_\infty$ отображение F_A соответствует преобразованию $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$.
5. Пусть X — компактная риманова поверхность, f — мероморфная непостоянная функция на X. Докажите что f имеет хотя бы один нуль и хотя бы один полюс.
6. Обозначим через $L = L(\omega_1, \omega_2) \subset \mathbb{C}$ решётку на комплексной плоскости с базисом $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$. Докажите следующие свойства:
   - Пусть $L \subseteq L'$, докажите, что естественная проекция $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ голоморфно, и что голоморфное отображение $\mathbb{C}/L' \to \mathbb{C}/L$ существует $\Leftrightarrow$ $L = L'$;
   - Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Покажите, что αL — также решётка, и что отображение $\phi : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/(\alpha L) : z + L \mapsto \alpha z + \alpha L$ — корректно определенное биголоморфное отображение.
   - Покажите, что всякий тор $\mathbb{C}/L$ изоморфен тору вида $\mathbb{C}/L(1,\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$.
7. Пусть f — непостоянная мероморфная функция на торе $X = \mathbb{C}/L$. Докажите, что $\sum_p \nu_p(f) = 0$.
8. Пусть $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ — два непостоянных голоморфных отображения, f — мероморфная функция на Y, $p \in X$. Докажите, что $e_p(F \circ G) = e_p(F) e_p(G)$, $\nu_p(f \circ F) = e_p(F) \nu_{F(p)}(f)$.
9. Докажите, что всякая прямая в $\mathbb{P}^2$ невырождена и изоморфна $\mathbb{P}_1$.
10. Докажите, что в $\mathbb{P}^2$ всякая гладка кривая второго порядка (коника) изоморфна кривой вида $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. (В частности в $\mathbb{P}^2$ все гладкие коники изоморфны между собой).

2.5 Группы, действующие на римановых поверхностях

Аннотация: Действие группы, орбита, стабилизатор. Фактор-пространство как риманова поверхность, степень отображения факторизации. Теорема Гурвица о действии конечной группы. Действие полной модулярной группы и её конгруэнц подгрупп Γ на верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$. Структура римановой поверхности на $Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$. Эллиптические и параболические точки. Компактификация $Y(\Gamma)$ в $X(\Gamma)$, род $X(\Gamma)$.

Источники: [Mir] §III.3; [DS] §2.3.1.

Примеры задач:

1. Пусть G — конечная группа действующая на множестве X, $p \in X$. Докажите, что $|G \cdot p||G_p| = |G|$.

2. Пусть K — ядро действия G на X. Докажите, что K — нормальная подгруппа G, и что ядро действия G/K на X тривиально, а орбиты совпадают с орбитами действия G.
3. Пусть G — конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ порядка n. Покажите что $G = \{e^{2\pi i/k} : 0 \leqslant k \leqslant n\}$.
4. Покажите, что группа действий на римановой сферы $\mathbb{C}_\infty$ порожденная двумя элементами $z \mapsto e^{2\pi i/r}$ и $z \mapsto 1/z$ есть диэдральная группа порядка $2r$. Докажите также, что действие этой группы голоморфно и эффективно. Определите точки ветвления и их индексы ветвления.
5. Докажите, что кривая определенная уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ (кривая Клейна) является гладкой проективной кривой. Покажите, что на этой кривой достигается граница теоремы Гурвица.
6. Пусть $\pi : \mathbb{H} \to Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma : z \mapsto \Gamma z$ — естественная проекция. Докажите, что для открытых множеств $U_1, U_2 \subset \mathbb{H}$ справедливо $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
7. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Докажите, что существуют окрестности U_1 и U_2 точек z_1 и z_2 обладающие следующим свойством: $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ \gamma(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(z_1) = z_2$.

2.6 Дифференциальные формы и дивизоры

Аннотация: Голоморфные и мероморфные дифференциальные формы на римановых поверхностях. Интегрирование дифференциальных форм. Вычеты, теорема о сумме вычетов. Дивизоры функций, степень дивизора, главные дивизоры. Дивизоры дифференциальных форм, канонические дивизор. Степень канонического дивизора на компактной римановой поверхности. Линейная эквивалентность дивизоров. Свойства дивизоров на римановой сфере и торе. Теорема Абеля для тора. Понятие степени гладкой проективной кривой, теорема Безу.

Источники: [Mir] глава IV, §§V.1–V.2.

Примеры задач:

1. Пусть на римановой сфере $X = \mathbb{C}_\infty$ заданы две карты с локальными координатами z и $w = 1/z$ и пусть $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Докажите, что если $\omega = f(z)dz$ (в локальной координате z), то f — рациональная функция от z. Докажите также, что $\Omega^1(X) = \{0\}$. Какие точки являются нулями и полюсами форм $dz, dz/z$.
2. Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}/L$ — тор, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция. Покажите, что для формы dz в каждой карте X локальная формула корректно определена и задаёт голоморфную 1-форму на X, и что эта форма не имеет нулей.
3. Пусть X — гладкая плоская афинная кривая заданная уравнением $f(u, v) = 0$. Покажите, что du, dv — корректно определенные голоморфные 1-формы на X, также как и $p(u, v)du$, $p(u, v)dv$ для любого $p(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$. Покажите что если $r(u, v)$ — рациональная функция, то $r(u, v)du$, $r(u, v)dv$ — корректно определенные мероморфные 1-формы.
4. Пусть X — риманова поверхность определенная уравнением $y^2 = h(x)$, где $h \in \mathbb{C}[x]$, $\deg h = 2g+1, 2g+2$ (то есть X — гиперэллиптическая кривая, поверхность рода g). Покажите, что dx/y — голоморфная 1-форма при $g \geqslant 1$. Покажите также, что если $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(p) \leqslant g - 1$, то $p(x)dx/y$ — голоморфная 1-

форма.
5. Пусть X — гиперэллиптическая кривая $y^2 = x^5 - x$, тогда $x, y \in \mathcal{M}(X)$. Определите $\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y)$.
6. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — тор. Покажите, что форма dz — корректно определённая голоморфная 1-форма всюду отличная от нуля. Что в этом случае можно сказать о главных и канонических дивизорах?
7. Пусть X — плоская проективная кривая $y^2 z = x^3 - xz^2$. Определите дивизоры пересечений X с прямыми $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. Докажите следующие свойства дивизоров на римановой сфере $X = \mathbb{C}_\infty$
   - $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \deg(D_1) = \deg(D_2)$;
   - Если $\deg(D) \geqslant 0$, то $D \sim D_0$, $D_0 \geqslant 0$.

2.7 Пространства функций дивизоров и линейные системы

Аннотация: Линейное пространство мероморфных функций $L(D)$ и полная линейная система $|D|$. Базовые свойства линейных пространств и линейных систем. Линейное пространство мероморфных форм $L^{(1)}(D)$, изоморфизм между простнствами L и $L^{(1)}$. Линейные пространства $L(D)$ для случаев римановой сферы и тора. Оценка размерности $L(D)$. Голоморфные отображения римановых поверхностей в проективные пространства. Базовые точки линейных систем. Обратные образы (пуллбэки) дивизоров и форм. Гиперплоскостные дивизоры.

Источники: [Mir] §§V.3–V.4.

Примеры задач:

1. Пусть X — компактна, D — дивизор на X, $\deg D = 0$. Докажите, что если $D \sim 0$, то $\dim L(D) = 1$, и что если $D \not\sim 0$, то $L(D) = \{0\}$.
2. Пусть X — компактна рода g, $\mathcal{M}(X) \neq \mathbb{C}$, докажите, что если $\deg D < 2 - 2g$, то $L^{(1)}(D) = 0$.
3. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — тор, $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, $p_0 = \pi(0)$. Докажите следующие свойства:
   - Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $h \in L(np_0)$. Тогда $\operatorname{Res}_{p_0}(h\,dz) = 0$.
   - Пусть z — локальная координата в окрестности p_0, $h(z) = \sum_{i=-n}^{\infty} c_i z^i$ — разложение в ряд Лорана функции $h \in L(np_0)$. Тогда если $\forall i \leqslant 0$ $c_i = 0$, то h тождественно равна 0.
   - Пусть $f \in L(2p_0)$, тогда $\forall x \in X$ $f(x) = f(-x)$.
   - $\exists! f \in L(2p_0)$ такая что разложение в ряд Лорана имеет вид: $f(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$.
   - Пусть $g \in L(3p_0)$, тогда $\forall x \in X$ $g(x) = -g(-x)$.
   - $\exists! g \in L(3p_0)$ такая что разложение в ряд Лорана имеет вид: $g(z) = z^{-3} + b_1 z + b_1 z^3 + \dots$.
   - $\exists A, B \in \mathbb{C} : g^2 = f^3 + Af + B$, где $f \in L(2p_0), g \in L(3p_0)$ определены как выше. При этом многочлен $w^3 + Aw + B$ не имеет кратных корней.
4. Докажите, что $\forall f, g \in \mathcal{M}(X)$ $\exists$ дивизор D: $f, g \in L(D)$
5. Пусть X — компакнтая, и пусть $D > 0$ — дивизор такой, что $\dim L(D) = 1 + \deg(D)$. Докажите, что $\exists p \in X$: $\dim L(p) = 2$, и что X изоморфна римановой сфере $\mathbb{C}_\infty$.
6. Докажите, что на римановой сфере полная линейная система дивизор неотри-

цательной степени не содержит базовых точек.

7. Докажите, что на комплексном торе полная линейная система дивизора степени $\geqslant 2$ не содержит базовых точек.
8. Пусть X — кривая в $\mathbb{P}^3$ определенная уравнениями $xw = yz$, $xz = y^2$, $yw = z^2$ (скрученная кубика). Используя степень гиперплоскостного дивизора $\mathrm{div}(x)$ докажите, что степень кривой X равна 3. Определите также $\mathrm{div}(y)$.

2.8 Алгебраические кривые, слабая аппроксимация

Аннотация: Понятие алгебраической кривой. Примеры римановых поверхностей являющихся алгебраическими кривыми. Функции с заданными порядками в точке и функции с заданными отрезками рядов Лорана. Теорема о слабой аппроксимации. Конечная порождённость поля рациональных функций алгебраической кривой. Степень поля функций и степень кривой.

Источники: [Mir], §VI.1.

Примеры задач:

1. Докажите, что следующие римановы поверхности являются алгебраическими кривыми:
   - риманова сфера $\mathbb{C}_\infty$;
   - комплексный тор $\mathbb{C}/L$;
   - гиперэллиптическая кривая;
   - гладкая проективная кривая.
2. Пусть X — алгебраическая кривая. Используя компактность X докажите, что в $\mathcal{M}(X)$ существует конечное число глобальных мероморфных функций отделяющих точки и касательные.
3. Пусть X — компактная риманова поверхность. Докажите, что если $\forall p_1, \dots, p_n \in X$ $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ $\exists f \in \mathcal{M}(X) : \nu_{p_i}(f) = m_i$, то X — алгебраическая кривая.
4. Пусть G — конечная группа, действующая эффективно на алгебраической кривой X.
   - Покажите, что можно задать действие G на $\mathcal{M}(X)$.
   - Докажите, что $\mathcal{M}(X/G) = \mathcal{M}(X)^G$.
   - Докажите, что X/G является алгебраической кривой.
5. Докажите следующие утверждения:
   - $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ порождается локальной координатой z.
   - $\mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ порождается отношениями тета-функций.
   - Если X — гиперэллиптическая кривая $y^2 = h(x)$, то $\mathcal{M}(X)$ порождается x и y.
   - Если X — гладкая проективная кривая, то $\mathcal{M}(X)$ — поле рациональных функций.

2.9 Сильная аппроксимация, теорема Римана–Роха

Аннотация: Дивизоры отрезков рядов Лорана. Задача Миттаг–Леффлера. Пространство $H^1(D)$. Теорема Римана–Роха, двойственность Серра. Замечание про три определения рода. Замечание про язык аделей.

Источники: [Mir] §§VI.2–VI.3

Примеры задач:

1. Пусть f — мероморфная функция, D — дивизор. Докажите, что определенный в лекции оператор умножения $\mu_f^D : \mathcal{T}[D](X) \to \mathcal{T}[D-\operatorname{div}(f)](X)$ является изоморфизмом с обратным отображением $\mu_{1/f}^{D-\operatorname{div}(f)}$.
2. Пусть D — дивизор, f, g — глобальные мероморфные функции на X, $\alpha_D : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{T}[D](X)$ — отображение, определенное в лекции. Докажите, что $\mu_f^D(\alpha_D(g)) = \alpha_{D-\operatorname{div}(f)}(fg)$.
3. Докажите, что $D_1 \leqslant D_2 \Rightarrow \alpha_{D_2} = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1}$
4. Пусть $X = \mathbb{C}_\infty$ — риманова сфера. Докажите, что $H^1(0) = 0$ явным образом используя прообраз α_0.
5. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — комплексный тор, p — тождественный элемент группового закона на X, z — локальная координата в окрестности p, $Z = z^{-1} \cdot p \in \mathcal{T}[0](X)$. Докажите, что Z не лежит в прообразе α_0 (то есть $H^1(0) \neq 0$)
6. Пусть $f \in \mathcal{M}(X)$, $\omega \in L^{(1)}(-D)$. Докажите, что $f\omega \in L^{(1)}(-D-\operatorname{div}(f))$, и что $\operatorname{Res}_\omega \circ \mu_f^D = \operatorname{Res}_{f\omega}$ в $\mathcal{T}[D+\operatorname{div}(f)](X)$.
7. Докажите, что если D — положительный дивизор, $\deg D \geqslant g+1$, то в $L(D)$ существует по крайней мере одна непостоянная функция.
8. Пусть X — алгебраическая кривая, K — канонический дивизор, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что $H^1(K+D) = 0$.
9. Докажите, что если $g \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то $\dim L(mK) = (g-1)(2m-1)$.

2.10 Некоторые приложения теоремы Римана–Роха

Аннотация: Первые приложения теоремы Римана Роха: всякая алгебраическая кривая является проективной, кривые рода 0 изоморфны римановой сфере, кривые рода 1 изоморфны комплексным торам, кривые рода 2 изоморфны гиперэллиптическим кривым. Теорема Клиффорда. Существование мероморфных 1-форм. Автоморфные формы и мероморфные 1-формы на модулярной кривой, размерность пространств модулярных форм конгруэнц подгрупп (обзорно).

Источники: [Mir] §VII.1 ; [DS] глава 3.

Примеры задач:

1. Пусть X — алгебраическая кривая, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что $\dim L(D) = 1 + \deg D \Leftrightarrow g(X) = 0$.
2. Пусть X — алгебраическая кривая рода $g(X) = g \geqslant 2$, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что если $\deg D \leqslant 2g-3$, то $\dim L(D) \leqslant g$.
3. Пусть X — компактная Риманова поверхность, D_1, D_2 — дивизоры. Докажите, что $\dim L(D_1) + \dim L(D_2) \leqslant \dim L(\min(D_1, D_2)) + \dim L(\max(D_1, D_2))$.
4. Пусть X — алгебраическая кривая рода $g(X) = g$, K — канонический дивизор, D — дивизор такой, что $\dim L(D) \geqslant 1$ и $\dim L(K-D) \geqslant 1$. Докажите, что $\dim L(D) + \dim L(K-D) \leqslant 1 + g$.
5. Пусть X — алгебраическая кривая $g(X) \geqslant 1$, K — канонический дивизор, D — дивизор, такой что пространства $L(D)$, $L(K-D)$ ненулевые и $2\dim L(D) \leqslant \deg D + 2$. Докажите, что тогда D — либо главный, либо канонический.
6. Покажите, что разложение в ряд Лорана модулярного инварианта имеет вид: $j(z) = 1/q + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$, $q = e^{2\pi i z}$.
7. Докажите, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ если $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$, $f \neq 0$, то $\mathcal{A}_k(\Gamma) = \mathcal{M}(X(\Gamma)) \cdot f$.

8. Докажите, что $\mathcal{S}_2(\Gamma) \cong \Omega^1(X(\Gamma))$.

2.11 Нормирования функциональных полей, слабая аппроксимация

Аннотация: TBD
Источники: [Stich]; [Степ]
Примеры задач:
1. TBD

2.12 Дивизоры, линейные пространства, теорема Римана

Аннотация: TBD
Источники: [Stich]; [Степ]
Примеры задач:
1. TBD

2.13 Теорема Римана–Роха, сильная аппроксимация

Аннотация: TBD
Источники: [Stich]; [Степ]
Примеры задач:
1. TBD

2.14 Дзета функция алгебраической кривой

Аннотация: TBD
Источники: [Степ]; [Stich]
Примеры задач:
1. TBD

2.15 Теорема Хассе–Вейля

Аннотация: TBD
Источники: [Степ]; [Stich]
Примеры задач:
1. TBD

Список литературы

[Mir] R. Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces, AMS, 1995.

[Stich] H. Stichtenoth, Algebraic Function Fields and Codes, 2nd edition, 2009.

[Степ] С. А. Степанов, Арифметика алгебраических кривых, Наука, 1991.

[Fult] W. Fulton, Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry, 3rd edition, 2008.

[DS] F. Diamond, J. Shurman, A First Course in Modular Forms, Springer, 2005.