Листок 10
Тема 10 (2.6). Дзета функция Артина

Упражнения и задачи

1. Докажите, что $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = q^n + q^{n-1} + \dots + 1$.

2. Докажите, что для $f = -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ дзета-функция имеет вид $Z_f(u) = (1-u)^{-1}(1-qu)^{-2}(1-q^2u)^{-1}$, если -1 — квадрат в $\mathbb{F}_q$, и $Z_f(u) = (1-u)^{-1}(1-qu)^{-1}(1+qu)^{-1}(1-q^2u)^{-1}$ в противном случае.

3. Докажите, что проективная n-мерная гиперплоскость в $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (т.е. гиперповерхность, заданная однородным многочленом степени 1) имеет столько же точек сколько $n-1$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$.

4. Пусть $f(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q[x_0, x_1, x_2]$ — однорлный многочлен $\deg f = n$. $h =\in \mathbb{F}_q[x_0, x_1, x_2]$ — линейная форма, такая что не каждый её нуль является нулём f. Докажите, что в $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ у f и h может быть не более n общих нулей (т.е. плоская проективная кривая пересекается с проективной прямой в не более чем n точках).

5. Пусть $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ — множество $n \times n$ матриц с элементами из поля $\mathbb{F}_q$ и определителем равным 1. Покажите, что $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ можно рассматривать как гиперповерхность в $\mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{F}_q)$ и что число её точек равно $(q-1)^{-1}(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$.

6. Пусть $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — операторы формальных производных на $\mathbb{F}_q[x_0, \dots, x_n]$ (например, для $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ по определению $\frac{\partial}{\partial x}f = a_0x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ и пусть $f \in \mathbb{F}_q[x_0, \dots, x_n]$ — однородный многочлен $\deg f = m$. Докажите, что:
   - $\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = mf$;
   - если $(m, p) = 1$ ($p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q$) и для $a = (a_0, \dots, a_n)$ при всех i выполняется $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = 0$, то $f(a) = 0$. (Такая точка a называется особой точкой гиперповерхности $f = 0$).

7. Пусть $q = p^n$, $(m, p) = 1$. Докажите, что гиперповерхность $a_0x_0^m + \dots + a_nx_n^m = 0$ не имеет особых точек в $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

8. Пусть $q = p^n$, $p \neq 2$. Рассмотрим кривую $ax^2 + bxy + cy^22 = 1$, $a, b, c \in \mathbb{F}_q$. Докажите, что если $d = b^2 - 4ac$ не является квадратом в $\mathbb{F}_q$, то не существует бесконечно удаленных точек на кривой в $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$, а если d — квадрат, то существует одна или две бесконечно удаленные точки, в зависимости от обращения d в ноль. При этом если $d = 0$, то бесконечно удаленная точка является особой точкой заданной кривой.

9. Выпишите дзета-функцию кривой $x_0x_1 - x_2x_3 = 0$ над $\mathbb{F}_p$.

10. Выпишите дзета-функцию для $f = a_0x_0^2 + \dots + a_nx_n^2$ над $\mathbb{F}_q$ при $\operatorname{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$.

11. Покажите, что на кривой $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ лежит девять точек. Выпишите дзета-функцию этой кривой.

12. Выпишите дзета-функцию кривой $y^2 = x^3 + x^2$ над $\mathbb{F}_p$.

13. Пусть $q \equiv 1\,(3)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$. Покажите, что дзетв-функция кривой $y^2 = x^3 + \alpha$ над $\mathbb{F}_q$ имеет вид $Z(u) = (1 + au + qu^2)(1-u)^{-1}(1-qu)^{-1}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$.

14. Пусть C_1 — кривая над $\mathbb{F}_p$ заданная $y^2 = x^3 - Dx$, $D \neq 0$. Покажите, что подстановка $x = \frac{1}{2}(u + v^2)$, $y = \frac{1}{2}v(u + v^2)$ переводит C_1 в кривую C_2 заданную уравнением $u^2 - v^4 = 4D$. Докажите, что для любого расширения $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ для числа точек справедливо $|C_1(\mathbb{F}_q)| > |C_2(\mathbb{F}_q)|$.

SageMath

- Исследуйте основные функции SageMath связанные с количеством точек на кривых над конечными полями:
  - Для эллиптических и гиперэллиптических кривых: `cardinality()`.

Темы для самостоятельного изучения

- L-функции Артина. Суперэллиптическое уравнение. [Степ], §§I.3–I.4.