Лекция 1

Павел Владимирович Снурницын

15 декабря 2025 г.

1 Введение

Курс «Арифметика-III: Римановы поверхности и алгебраические кривые» является продолжением следующих двух курсов:

1. «Арифметика-I: Основы алгебраической теории чисел». Курс представляет собой введение в теорию чисел, начиная от делимости, сравнений, квадратичных вычетов и заканчивая полями алгебраических чисел и полями p-аддических чисел;

2. «Арифметика II: Решётки и формы». В рамках курса рассматривались рациональные евклидовы решетки и квадратичные и модулярные формы.

Несмотря на то, что данный курс является продолжением этой серии, большая часть материала не связана с содержанием предыдущих курсов.

Чтобы создать общую картину курса и мотивировать слушателей, предложим несколько утверждений и определений.

Для начала рассмотрим **решетку** $L \subset \mathbb{C}$, то есть множество

$$L = \{z = n\omega_1 + m\omega_2 \colon n, m \in \mathbb{Z}, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\}.$$

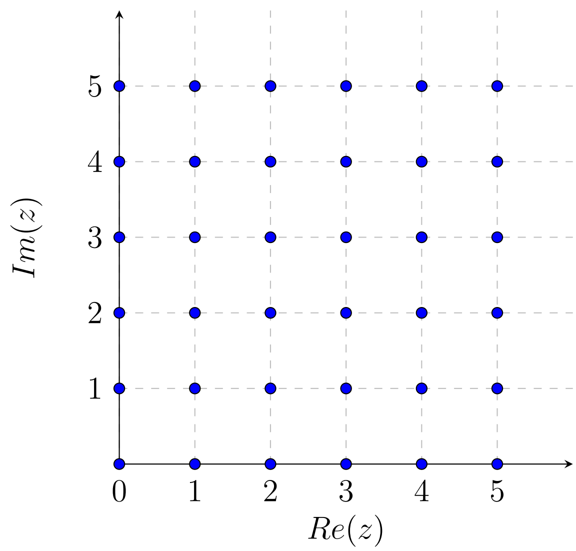

Рис. 1: Решетка для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = i$

Фактор-пространство по этой решетке $\mathbb{C}/L$ определяется так называемым **фундаментальным параллелепипедом** $P = \{z = x + iy \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, так как любое комплексное число $z \in \mathbb{C}$ представимо в виде суммы: $z = \omega + p$, где $\omega \in L$, а $p \in P$.

Теперь «склеим» противолежащие стороны нашего фундаментального параллелепипеда. «Склеив» первую пару сторон, увидим полый круговой цилиндр. Окружности на концах полого цилиндра будут второй парой противолежащих сторон. «Склеив» вторую пару, получим **тор**:

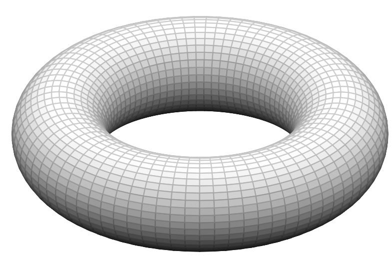

Рис. 2: Тор, полученный из фундаментального параллелепипеда

Забегая вперед, полученная нами поверхность имеет **топологический род 1**.

Теперь рассмотрим следующую группу целочисленных невырожденных матриц:

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \colon ad - bc = 1; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Эта группа действует в верхней комплексной полуплоскости:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon Im(z) > 0.\}$$

Опишем её действие:

$$\gamma \cdot z = \gamma z = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \left(\begin{smallmatrix} az+b \\ cz+d \end{smallmatrix}\right).$$

Модулярной функцией называется функция, обладающая «хорошими» свойствами симметрии относительно данного действия, например

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z),$$

где k – некоторое целое число.

Рассмотрим разбиение $\mathbb{H}$ на фактор-множества при действии Γ:

$$\mathbb{H}/\Gamma \sim D.$$

Множество D называется **фундаментальной областью**. Она задает поверхность, имеющую **топологический род 0**. Примечательно, что если рассмотреть подгруппу Γ, то есть некоторую группу Γ', то задаваемая ей поверхность будет иметь **топологический род** $g \geq 0$. Род g имеет важную роль в исследовании модулярных функций.

Далее рассмотрим конечное поле $\mathbb{F}_q$ из $q = p^n$ элементов, где p – простое число. Пусть $f(x, y) \in \mathbb{F}_q[x, y]$ – многочлен от двух переменных с коэффициентами из этого поля. Данный многочлен задает некоторую кривую. Обозначим через N_m число точек на этой кривой, то есть множество решений уравнения

$$f(x, y) = 0,$$

принадлежащих **проективному пространству** $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ (формально определим позднее). Для N_m верна теорема:

Теорема 1 (Хассе-Вейль)**.**

$$|N_m - (q^n + 1)| \leq 2gq^{n/2},$$

где g – алгебраический род кривой $f = 0$.

Данный курс имеет целью раскрыть данную теорию и показать, как эти вопросы связаны через алгебраическую геометрию и теорию Римановых поверхностей.

2 Римановы поверхности (РП). Введение.

Определим основные объекты и понятия.

Определение 1. *Пусть X – множество. Говорят, что на X задана структура топологического пространства, если $\forall x \in X$ задано непустое множество подмножеств X, обозначаемое $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$, и*

1. $\forall\ U \in \mathcal{U}(x)\colon x \in U$;
2. $U, V \in \mathcal{U}(x) \implies U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;
3. $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \subset X$, $x \in V$ *и* $U \subset V \implies V \in \mathcal{U}(x)$;
4. $U \in \mathcal{U}(x)$, $\dot{U} = \{z \in U\colon U \in \mathcal{U}(z)\} \in \mathcal{U}(x)$.

Существует более полезное определение:

Определение 2. *Топологическим пространством называется пара (X, T), где T - множество подмножеств X, называемое системой открытых множеств, и удовлетворяющее:*

1. $\emptyset, X \subset T$;
2. $\forall\ (U_\alpha) \in T\colon\ \bigcup_\alpha U_\alpha \in T$;
3. $\forall\ (U_i)_{i=1}^n$, $U_i \in T$, $\bigcap_{i=1}^n U_i \in T$

Примеры:

1. Множество $\mathbb{C}$ является топологическим пространством с системой открытых множеств в виде окрестностей $|z| < \varepsilon$;
2. $\mathbb{R}^2$ является топологическим пространством с системой открытых множеств в виде окрестностей $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$.

Определение 3. *Пусть X, Y – топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется непрерывным, если $\forall x \in X\colon\ \forall\ V \in \mathcal{U}(f(x))$ (в топологии Y) $\exists\ U \in \mathcal{U}(x)$ (в топологии X) такое, что $f(U) \subset V$.*

Определение 4. *Отображение $f\colon X \to Y$ называется открытым, если для любого открытого множества U множество $f(U)$ открытое (в топологии Y).*

Определение 5. *Если $f\colon X \to Y$ – непрерывно и биективно, то f называется гомеоморфизмом.*

Определение 6. *Пусть X – топологическое пространство, $U \subset X$ – открытое множество, $V \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Гомеоморфизм $\phi : U \to V$ называется комплексной картой. Если для некоторой $p \in U\colon \phi(p) = 0$, то p называется центром карты.*

Комплексную карту можно представлять себе как некоторую «локальную координату».

Примеры:

1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $U \subset X$ – открытое подмножество. Тогда отображение $\phi_U(x, y) = x + iy$ будет комплексной картой.

2. Можно предложить другое отображение:

$$\phi_U(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

   которое также будет картой.

Определение 7. *Две карты на X: $\phi_1\colon U_1 \to V_1$ и $\phi_2\colon U_2 \to V_2$ называются совместимыми, если либо $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, либо $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$, $T\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ является голоморфной, то есть комплексно дифференцируемой функцией в окрестности любой точки рассматриваемой области.*

Функция T называется функцией склейки. Она отвечает за совпадение карт на пересечении областей определения.

Заметим, что если ψ – карта, задающая отображение из подмножества $\mathbb{C}$ в подмножество $\mathbb{C}$, то композиция $\phi \circ \psi$ по сути осуществляет замену координат.

Лемма 1. *Пусть T – функция склейки. Тогда её производная $T' = \frac{dT}{dz} \neq 0$ в области определения T.*

Доказательство. Так как T – голоморфная, то существует обратная функция $S = T^{-1}$. При этом $S \circ T$ является тождественной функцией, поэтому для любого z из области определения T верно $S \circ T(z) = z$, но тогда

$$(S \circ T(z))' = S'(T(z)) \cdot T'(z) = 1,$$

поэтому $T'(z)$ не может равняться нулю. □

Следствие 1. *Пусть ϕ, ψ – две карты, $z_0 = \phi(p)$, $w_0 = \psi(p)$, где p – точка, в которой обе карты определены. Тогда ряд Тейлора для функции склейки имеет вид:*

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, a_1 \neq 0.$$

Последнее неравенство является следствием леммы.

Упражнение. Докажите, что не совместимы две карты:

$$\phi_U(x, y) = x + iy,$$

$$\phi_U(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Определение 8. *Комплексным атласом $\mathcal{A}$ на X называется набор*

$$\mathcal{A} = \{\phi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha\},$$

для которого

1. *$\forall\ \alpha, \beta\colon\ \phi_\alpha$ и ϕ_β совместимы;*
2. *$\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.*

Далее будем обозначать $T_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, то есть соответствующую функцию склейки.

Примеры

1. Сфера в $\mathbb{R}^3$, которую обозначают

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ как плоскость, вложенную в $\mathbb{R}^3$, то есть $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0)\}$ и одновременно как $\mathbb{C}$. Определим проекцию из точки $(0, 0, 1)$ (полюса сферы):

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Данное отображение определено везде, кроме самого полюса. Аналитически можно описать прообраз:

$$\phi^{-1}(z) = (\frac{2Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}).$$

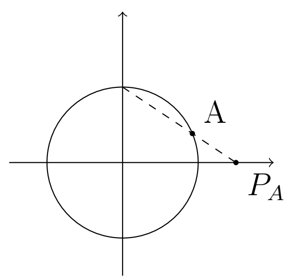

Рис. 3: Проекция точки A сферы на плоскость

Проекция из $(0, 0, -1)$ имеет вид

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 + x_3} - i\frac{x_2}{1 + x_3}.$$

Тогда функция склейки для ϕ и ψ равна $T(z) = \frac{1}{z}$.
Множество $\{\phi, \psi\}$ задает комплексный атлас на S^2.

Определение 9. *Два атласа $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называются эквивалентными, если $\forall\ \phi_\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\forall\ \phi_\beta \in \mathcal{A}_2$ карты ϕ_α и ϕ_β совместимы.*

Определение 10. *Класс эквивалентности комплексного атласа называется комплексной структурой.*

Определение 11. *Топологическое пространство X называется Хаусдорфовым, если $\forall\ x, y \in X$, $x \neq y$: $\exists\ U, V$ – окрестности x и y, соответственно, такие, что $U \cap V = \emptyset$.*

Определение 12. *Топологическое пространство X называется пространством со счетной базой, если в системе открытых множеств T можно выделить счетное число подмножеств, которое порождает T.*

Определение 13. *Пространство X называется связным, если $\nexists$ открытые непустые подмножества U_1, U_2 множества X, для которых $X = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Определение 14. *X называется Римановой поверхностью (РП), если*

1. *X – связное Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой;*

2. *на X задана комплексная структура.*

Примеры

1. $X = S^2$ с картами $\{\phi, \psi\}$ является Римановой поверхностью. Будем называть её сферой Римана (Римановой сферой). Иногда про сферу Римана говорят, что она описывает множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$, где бесконечно удаленным точкам соответствуют полюса сферы.

Предложение 1. *Как задать Риманову поверхность на множестве X? Для этого нужно:*

1. *счетное покрытие (U_α): $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$;*

2. *$\forall\ \alpha$ определим биекцию $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$, где V_α – открытые множества, а для биекций верно:*

   (a) *$\forall\ \alpha, \beta\colon\ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ – открытое в V_α;*

   (b) *$\forall\ \alpha, \beta\colon\ \phi_\alpha, \phi_\beta$ – совместимые;*

   (c) *топология на X связна и Хаусдорфова.*

Теперь определим проективное пространство, которое было упомянуто во введении:

Определение 15. *Если $\mathbb{C}^{n+1}$ – комплексное векторное пространство, то можно определить отношение эквивалентности ненулевых векторов:*

$$(z_0, z_1, ..., z_n) \sim (z'_0, z'_1, ..., z'_n),$$

если $\exists\ \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}\colon\ \forall\ i \in \overline{0, n}$ верно $z_i = \lambda z'_i$. Тогда проективное пространство определяется, как

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^{n+1}/\sim .$$

Через $\mathbb{C}^{n+1}$ будем обозначать аффинное пространство соответствующей размерности: $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$.

Пока мы работаем только с комплексными координатами, будем обозначать $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Элементы $\mathbb{P}^n$ обычно обозначают через представителей классов эквивалентности: $[z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] = [\lambda z_0 \colon \lambda z_1 \colon \ldots \colon \lambda z_n]$.

Далее покажем, что на $\mathbb{P}^1$ можно определить структуру Римановой поверхности.

Пусть

$$U_0 = \{[z_0 \colon z_1] \colon z_0 \neq 0\},$$

$$U_1 = \{[z_0 \colon z_1] \colon z_1 \neq 0\}.$$

$\{U_0, U_1\}$ образуют покрытие $\mathbb{P}^1$, то есть $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$.

Зададим отображения:

$$\phi_0 \colon U_0 \to \mathbb{C},$$

$$\phi_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$$

следующего вида:

$$\phi_0([z_0 \colon z_1]) = \frac{z_1}{z_0},$$

$$\phi_1([z_0 \colon z_1]) = \frac{z_0}{z_1}.$$

При этом $\phi(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – открытое в обычной топологии $\mathbb{C}$.

Далее для функции склейки:

$$T = (\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(z) = \frac{1}{z}.$$

На $\mathbb{C}^*$ данная функция голоморфна, поэтому ϕ_0 и ϕ_1 совместимы. Получаем, что $\{\phi_0, \phi_1\}$ – атлас.

Заметим, что U_0 и U_1 связны. Их пересечение $U_0 \cap U_1$ тоже связно, поэтому $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$ связно.

Докажем Хаусдорфовость. Пусть $p, q \in \mathbb{P}^1$. Если $p, q \in U_i, i \in \{0, 1\}$ то отделимость следует из отделимости $\mathbb{C}$. Пусть $p \in U_0 \setminus U_1$ и $q \in U_1 \setminus U_0$. Тогда $p = [1 \colon 0]$ и $q = [0 \colon 1]$. Рассмотрим $D = \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$. Имеем $p \in \phi_0^{-1}(D)$ и $q \in \phi_1^{-1}(D)$, а также $\phi_0^{-1}(D) \cap \phi_1^{-1}(D) = \emptyset$, так как $T(D) = \{|z| > 1\}$.

Заметим, что для замкнутого диска $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$:

$$\mathbb{P}^1 = \phi_0^{-1}(\overline{D}) \cup \phi_1^{-1}(\overline{D}).$$

Рассмотрим еще одно топологическое понятие:

Определение 16. *X называется компактом, если из любого покрытия (U_α) можно выделить конечное подпокрытие.*

Тогда $\mathbb{P}^1$ является компактом.

Замечание 1. *Для римановых поверхностей существует более общее понятие n-мерных комплексных многообразий: пусть задано топологическое пространство X, n-мерные комплексные карты $\phi\colon U \to V$, где $U \subset X$, а V – открытое подмножество $\mathbb{C}^n$. Тогда также $\mathbb{P}^n$ – n-мерное комплексное многообразие, а карты являются отображениями вида:*

$$\phi_i = \{[z_0\colon, ..., \colon z_n]\colon z_i \neq 0\} \to (\frac{z_0}{z_i}, ..., \hat{i}, ..., \frac{z_n}{z_i}).$$

Вернемся к понятию решетки, то есть множества вида

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2,$$

где ω_1, ω_2 – линейно независимые комплексные числа. Основной параллелепипед решетки – это множество

$$P = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\colon 0 \leq \lambda_i \leq 1\}.$$

Рассмотрим фактор-пространство $X = \mathbb{C}/L$. По сути, так как любое комплексное число z представляется в виде $z = p + \omega$, где $p \in P, \omega \in L$, то класс эквивалентности по этому фактору имеет вид $[z] = p = (z \mod L)$ или в обозначениях естественной проекции – $\pi(z)$. Используя эту проекцию, можно задать естественную топологию на X – топологию фактор-пространств, то есть $U \subset X$ – открытое тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыто в $\mathbb{C}$. При этом π непрерывно в этой топологии, а X связно, так как связно $\mathbb{C}$.

Лемма 2. *Верны следующие утверждения:*

1. *Для любого открытого множества $U \subset X$ существует открытое $V \subset \mathbb{C}$, $\pi(U) = V$;*

2. *π – открытое отображение (переводит открытые множества в открытые).*

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

Так как $\pi\colon P \to X$, то есть это сюръекция и P – компактное множество, то X также является компактным множеством.

Далее решетка L является дискретным множеством, то есть $\exists\, \varepsilon > 0\colon$ $\forall\, \omega \in L \setminus \{0\}$ верно $|w| > 2\varepsilon$. Возьмем $D_{z_0} = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$. Любые $z_1, z_2 \in D_{z_0}$ удовлетворяют $z_1 \neq z_2 \mod L$. Теперь карты можно определить, как

$$\forall\, z_0 \in \mathbb{C}, \phi_{z_0}\colon \pi(D_{z_0}) \to D_{z_0}.$$

По сути эти карты – прообразы ограничения (сужения) π на D_{z_0}, то есть $\phi_{z_0} = (\pi|_{D_{z_0}})^{-1}$. Геометрически это означает, что либо z_0 полностью лежит с окрестностью внутри параллелепипеда, либо её окрестность «раскинута» по разным «частям» параллелепипеда.

Рассмотрим вопрос совместимости $\phi_1 = \phi_{z_1}$ и $\phi_2 = \phi_{z_2}$. Пусть $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2}) \neq \emptyset$. Для функции склейки

$$T(z) = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(\pi(z))$$

можно записать

$$\pi(T(z)) = \pi(z).$$

Получаем, что z и $T(z)$ лежат в одном классе решетки, но тогда $T(z) - z = \omega = \omega(z)$. Функция $\omega(z)$ есть отображение $\phi_1(U) \to L$. Можно заметить, что ω непрерывна, так как непрерывны ϕ, T. При этом L – дискретное множество, поэтому $\omega(z)$ локально постоянна, то есть на $\phi_1(U)$ верно $T(z) = z + \omega$, где ω – константа. Из этого следует, что T – это просто «сдвиг» на ω и тогда данная функция голоморфна.

3 Род и число Эйлера

Неформально говоря, род поверхности – это число её «дырок» или «ручек».

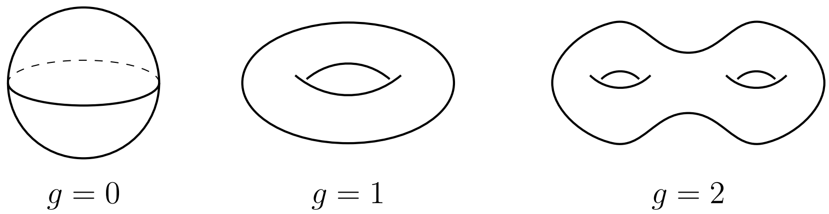

Рис. 4: Поверхности различных родов g

Определение 17. *Пусть X – это комплексное двумерное многообразие. Триангуляцией X называется разбиение $X = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$: T_i – замкнуто, гомеоморфно треугольнику и $T_i \cap T_j \in \{\emptyset, \text{вершина}, \text{ребро}\} \forall i \neq j$.*

Определение 18. *Пусть T – триангуляция X. Эйлеровой характеристикой называется $\chi(T) = v - e + t$, где v, e, t – число, соответственно, вершин, рёбер и треугольников в триангуляции.*

Лемма 3 (без доказательства)**.** *$\chi(T)$ не зависит от T, то есть $\chi = \chi(X)$.*

Определение 19. *Топологическим родом X назовем число*

$$g(X) = \frac{1}{2}(2 - \chi(X)).$$

Наше изначальное понимание топологического рода было связано со следующей теоремой:

Теорема 2 (без доказательства)**.** *Всякое комплексное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере с g ручками, где g – топологический род.*

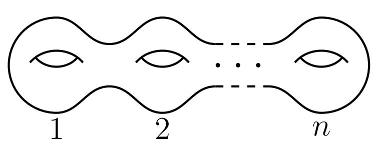

Рис. 5: Вид X при $g = n$

Примеры:

1. Разобьем сферу на «треугольные» поверхности следующим образом:

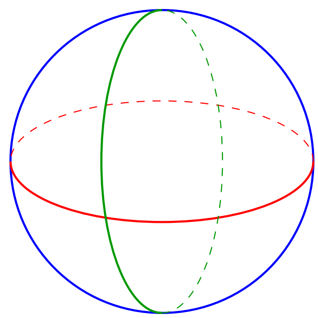

Рис. 6: Разбиение сферы на триангуляции

   Здесь триангуляции – это поверхности, ограниченные тремя дугами разного цвета. Посчитаем Эйлерову характеристику: $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$. Тогда род $g = 0$.

2. В случае тора достаточно вспомнить, что тор можно «вытянуть» в прямоугольник и далее разбить его на треугольники, учитывая, что противолежащие стороны прямоугольника отождествляются на торе. Подсчет топологического рода далее производится аналогично сфере.

Теорема 3 (то, что нам нужно из топологии)**.** *Если X – Риманова поверхность, то X гомеоморфно обобщенному тору рода $g \geq 0$.*

4 Аффинные кривые

Рассмотрим некоторые понятия алгебраической геометрии.

Определение 20. *Пусть $f \in \mathbb{C}[z, w]$ (многочлен от двух переменных). Множество*

$$X_f = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon f(z, w) = 0\}$$

называется аффинной кривой над $\mathbb{C}$.

Определение 21. *X_f или f называется невырожденной (неособенной) кривой в точке $p \in X_f$, если*

$$\frac{\delta f}{\delta z}(p) \neq 0$$

или

$$\frac{\delta f}{\delta w}(p) \neq 0.$$

Если X_f невырождена в каждой точке $p \in X_f$, то X_f называют гладкой аффинной кривой.

Теорема 4 (без доказательства). *Если f – неприводимый многочлен, то X_f – Риманова поверхность.*

Основная сложность доказательства теоремы выше состоит в доказательстве связности.

Пример. Рассмотрим многочлен $f = w^2 - h(z)$. Если f – неприводимый, то решения уравнения $w^2 = h(z)$ задают Риманову поверхность. Утверждается, что f неприводим над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда h не является полным квадратом.

В частности, при $\deg h = 3$ получим **эллиптическую кривую**. При $\deg h > 3$ получим **гиперэллиптическую кривую**.

5 Проективные кривые

Определение 22. *Пусть $F(x, y, z)$ – однородный многочлен степени d ($F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$), то есть $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z)$. Множество*

$$X_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть проективной кривой.

Аналогично аффинным кривым определяются невырожденности X_F и F, а также верна теорема:

Теорема 5 (без доказательства). *Если F – невырожденный многочлен, то X_F – компактная Риманова поверхность.*

Кроме того, верна следующая теорема:

Теорема 6 (без доказательства). *Если F – невырожденный многочлен, а также однородный многочлен степени d, то*

$$g(X_F) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Пример. Эллиптическая кривая имеет степень 3, откуда по теореме выше её род g равен 1.