4 Отображение РП

Прошлые разы:

- X — РП — связн. хаусдорф. ТП со счетн. базой, на котором задан компл. стр. атласом $\mathcal{A}: \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, $U_\alpha \subset X$ — откр., $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ — откр. φ_α — гомеом. ф-ции склейки $T_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ — голом. на $U_\alpha \cap U_\beta$
- $f : X \to \mathbb{C}$ — голом. в $p \in X$, если $\exists$ карта $\varphi : U \to V$, $p \in U$, $f \circ \varphi^{-1}$ — голом.

$f : X \to \mathbb{C}$ — мер., если либо голом. либо имеет устр. о.т., либо полюс.

О-е: Пусть X, Y — РП, $F: X \to Y$ нез.

голом. в $p \in X$ $\iff$ $\exists\ \varphi_1: U_1 \to V_1$, $U_1 \subset X$, $p \in U_1$,

$\exists\ \varphi_2: U_2 \to V_2$, $U_2 \subset Y$, $F(p) \in U_2$

такие что $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ — голом. в $\varphi_1(p)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & Y \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$z = \varphi_1(x)$ $\qquad$ $w = \varphi_2(y)$

$w = g(z) = \varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z)))$ — голом.

F — голом. на $W \subset X$ — откр. $\iff$ F голом. в $p \in W$ $\forall p \in W$

$F: X \to Y$ — голом. отобр., если голом. $\forall p \in X$

Лемма: 1) F голом. в p $\iff$ вместо „$\exists$“ в опр. можно „$\forall$“

2) f — голом. на W $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\{\varphi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \to V_1^{(i)}\}$
$\{\varphi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \to V_2^{(j)}\}$

— атласы карт на X, Y:
$W \subset \bigcup_i U_1^{(i)}$, $f(W) \subset \bigcup_j U_2^{(j)}$, $\varphi_2^{(j)} \circ f \circ (\varphi_1^{(i)})^{-1}$ — голом. в обл. опр.

1) Упр. ∎

Лемма:
1) $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ — голом. $\Rightarrow$
$G \circ F : X \to Z$ — голом.
2) $F : X \to Y$ — голом., $g : Y \to \mathbb{C}$ — голом.
на $W \subset Y$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ — голом. ф-я на $f^{-1}(W)$
3) $F : X \to Y$ — голом., g — мер. на $W \subset Y$
$F(X) \not\subset \{\text{полюса } g\}$ $\Rightarrow$ $g \circ F$ — мер.

$\mathcal{O}_X$, $\mathcal{M}_X$ — пучки голом. / мером. ф-ций

Замечание: см. 2, 3 эквив.

$$g \in \mathcal{O}_{w,Y} \longmapsto g \circ F \in \mathcal{O}_{F^{-1}(w),X}, \quad F^*(g) = g \circ F$$

$$F : X \to Y \qquad F^* : \mathcal{O}_{w,Y} \to \mathcal{O}_{F^{-1}(w),X}$$

Аналогично, $F^* : \mathcal{M}_{w,Y} \to \mathcal{M}_{F^{-1}(w),X}$.

Опр: $F : X \to Y$ — изоморфизм РП $\Leftrightarrow$ F — голом. биек., $F^{-1} : Y \to X$ голом. Пишем $Y \cong X$, что F наз. изоморфизмом.

Теорема: $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ изоморфны.

$\square$ $F : \mathbb{P}^1 \to \underset{\cong S^2}{\mathbb{C}_\infty}$: $[z : w] = \left(2\operatorname{Re}(z\bar{w}), 2\operatorname{Im}(z\bar{w}), \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2}\right)$ $\blacksquare$

Аксиомы и следствия из T_2

__Лемма__: $f: X \to Y$ — непрер., замкн., т.е. f — открытое отобр.

__Лемма__: $F: X \to Y$ — замкн., инъективн. отобр., то $F: X \to F(X)$ — гомеоморфизм.

__Лемма__: $F, G: X \to Y$ — непрер., $S \subset X$ всюду плотно и $\forall p \in S$ $F(p) = G(p)$. Тогда $F = G$.

□ __упр__ ⊠

__Лемма__: $f: X \to Y$ — непрер., замкн.

X — компактно $\Rightarrow$ f — отобр. „на".

Y — хаусдорфово.

□ __самост.__ ⊠

Лемма: $F: X \to Y$ — голоморфн., непост.

$\forall\, y \in Y \quad F^{-1}(y)$ — дискр. множ-во.

Если X — компактна, то $F^{-1}(y)$ — конечно

□ Доказательство:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] & \\ z & \mathbb{C} \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} & w \end{tikzcd}$$

$w = g(z) = \psi(F(\varphi^{-1}(z)))$ — голоморф.

пусть $y \in Y$, $x \in F^{-1}(y)$

возьмём с центрами в x, y коорд., т.ч.

$\varphi(x) = 0$, $\psi(y) = 0$

прообр. $x \in F^{-1}(y)$ соотв. z: $g(z) = 0$

Нули голоморф. функции изолир. ■

Замечание: $F: X \to \mathbb{C} = Y$ — голом. ф-я ⟺ голом. непр. отобр.

Пусть $f: X \to \mathbb{C}$ — мероморфная,

$$F: X \to \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ — не полюс } f \\ \infty, & x \text{ — полюс } f \end{cases}$$

Тогда F — голом. отобр. РП.

Т.о.

мер. ф-ии $f: X \to \mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ голом. отобр. $F: X \to \mathbb{C}_\infty$.

Следствие, I: $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$ $\sum \nu_p(f) = 0$

(если $f = z^{\nu_p(f)} + \dots$ в окр. 0)

Для тора $\mathbb{C}/L$ д-во:

Теорема: $\forall f \in M_{\mathbb{C}/L}$ — непост.

$$\sum_p \nu_p(f) = 0$$

$\square$ $L = L_w = L(1, w)$, $w \in \mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

Будем (=) с учётом кратностей считать нули и полюсы.

Предположим, что $(p_i)_{i=1}^{n}$ — нули с кратн., $(q_j)_{j=1}^{k}$ — полюсы, с кратн.

Пусть $n < k$, т.е. $n \neq k$ (если $n > k$ заменим f на $\frac{1}{f}$)

$\exists\ p_{n+1}, \ldots, p_m$: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=n+1}^{m} p_i}_{\sum_{i=1}^{m} p_i} = \sum_{j=1}^{m} q_j$ в $\mathbb{C}/L$

$p_i, q_j \in \mathbb{C}/L$.

$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L : z \mapsto z \bmod L$

„Прообразы" p_i, q_j это $x_i = \pi^{-1}(p_i)$
$y_j = \pi^{-1}(q_j)$

такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$ (в $\mathbb{C}$)

(возможно, т.к. L - решётка - [illegible])

Тэта-функция: $\Theta_\omega(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(2lz + l^2\omega)}$

$$\Theta_\omega^{(x)}(z) = \Theta_\omega\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} - x\right)$$

Т: для x_i, y_j : $\sum x_i - \sum y_j \in \mathbb{Z}$,

то $\prod_i \Theta_\omega^{(x_i)} / \prod_j \Theta_\omega^{(y_j)} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}/L}$.

x_i - нули, y_j - полюса

$\sum x_i - \sum y_i = 0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad R = \prod \Theta_\alpha^{(x_i)} / \prod \Theta_\alpha^{(y_i)}, \quad R = R(z),$

$R \in \mathcal{M}_{C/L}$

Рассмотрим $\quad g = \dfrac{R}{f}$

g не имеет полюсов, т.к. может нулей: $p_{n+1}, \dots, p_m$, но g - голом.

C/L — компактн. $\Rightarrow \quad g \equiv const = 0$

$\Rightarrow \quad R \equiv 0$, но $R \not\equiv const$ (?!)

$\Rightarrow \quad m = n$

$\Rightarrow \quad \sum \nu_p(f) = 0 \quad \blacksquare$

Теорема (о локальной нормальной форме):

$f: X \to Y$ — непост. голом., $p \in X$,

f — опр. в p.

$\exists!\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: $\forall\ \varphi_2 : U_2 \to V_2$: $\varphi_2(f(p)) = 0$

$\exists\ \varphi_1 : U_1 \to V_1$: $\varphi_1(p) = 0$:

$$\varphi_2(f(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m$$

$\square$ Возьм. $\varphi_2 : U_2 \to V_2$: $\varphi_2(f(p)) = 0$

$\forall\ \psi : U \to V$ — карта на X, $\psi(p) = 0$

т.к. $\varphi_2(f(\psi^{-1}(z)))$ — голом.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & Y \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \mathbb{C}_z \arrow[r, "T"'] & \mathbb{C}_w \end{tikzcd}$$

$T(w) = \varphi_2(f(\psi^{-1}(z))) = \sum_{i \geq m} c_i w^i$.

где $m \geq 0$, более того $m \geq 1$, т.к. $T(0) = 0$

$\Rightarrow T(w) = w^n \xi(w)$, ξ — голом. в окр. $w = 0$, $\xi(0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists R(w)$: $\xi(w) = R(w)^n$, R — голом.

$T(w) = (\underbrace{w R(w)}_{=\eta(w)})^n = (\eta(w))^n$, η — голом.

$\eta' = R + wR'$, $\eta'(0) = \underset{\neq 0}{R(0)} \neq 0$

$\Rightarrow \eta$ — обр. в окр. 0

Тогда $\varphi_1 = \eta \circ \psi$ — новая карта

$\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = \varphi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) = T(\eta^{-1}(z)) =$

$= T(w)$. $[z = \eta(w)]$

$T(w) = \eta(w)^n \Rightarrow$ имеет вид $z \mapsto z^n$ ∎

Опр.: Число m наз. кратностью f в точке p, обозн. $m_p(f)$.

Лемма: Пусть $f : X \to Y$ — голом. отобр., окр-ть $p \in X$, φ, ψ — карты

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{C}_{(z)} \arrow[r, "h"] & \mathbb{C}_{(w)} \end{tikzcd}$$

$$w = h(z) = \psi(f(\varphi^{-1}(z)))$$

Тогда $m_p(f) = 1 + \nu_{z_0}(h'(z))$, $h' = \frac{dh}{dz}$

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{i \geq m_p(f)} c_i (z - z_0)^i$$

□ Док.: у-во аналогично. Ранее

$$w - w_0 = h(z) - h(z_0)$$ ■

<u>Лемма</u>: $F: X \to Y$ — голом.,

$\{p \in X : F$ — отобр. в p, $m_p(F) \geq 2\}$

— дискр.

□ Следует, т.к. можно так локализ.

нули $h(z)$, h — голом. $\Rightarrow$ значит

нулей дискр. ■

Опр.: $p \in X$ наз. точкой ветвл.

$F: X \to Y$, если $m_p(F) \geq 2$

<u>Лемма</u>: Пусть $f: X \to \mathbb{C}$ — мер. ф-я

$F: X \to \mathbb{C}_\infty$ — соотв. голом. отобр.

1) $p \in X$ — нуль f $\Rightarrow$ $m_p(F) = \nu_p(f)$

2) $p \in X$ — полюс $\Rightarrow$ $m_p(F) = -\nu_p(f)$

3) p — не нуль, не полюс $\Rightarrow$ $m_p(F) = \nu_p(f - f(p))$

□ 44.

Для поверхностей (без д.-ва)

Теорема: Пусть $X: f(x,y)=0$ — плоская алг. кривая, p — точка ветвл. $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$ $\;\Big|\;$ $\pi: X\to\mathbb{C}$; $(x,y)\mapsto x$

Теорема: $X: F(x,y,z)=0$ — неособая проективная кривая, $\pi: X\to\mathbb{P}^1$ — проекция на $y=0$, т.е. $\pi: [x:y:z]=[x:z]$. $p\in X$ — точк. ветвл. $\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(p)=0$

□ **Следствие** [Мир]

Лемма: X, Y — компактные р.п.,

$F: X \to Y$ — голом., непост.

$\forall y \in Y$ опр. $d_y(F) = \sum\limits_{p \in F^{-1}(y)} m_p(F)$

Тогда $d_y(F)$ не зав. от y.

$\forall y \in Y \quad d_y(F) = d$

□ Идея д-ва:

- $F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечн. мн. (т.к. Y - компакт.)

- $\forall$ окр. x_i $\exists$ лок. коорд. z_i ($z_i = \varphi(x)$, $x \in$ окр. x_i): F имеет вид

$F: z_i \to z_i^{m_i}$

o $w = z^n$ — [illegible]. $f : D \to D$

$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \}$

$z = 0$ — [illegible] [illegible]. $f^{-1}(0) = \{0\}$

$m_0(f) = n$

$\forall w \in D \setminus \{0\}$, $f^{-1}(w) = \{ \sqrt[n]{w} \}$,

$|f^{-1}(w)| = n$, $\forall p \in f^{-1}(w)$, $m_p(f) = 1$,

$$d_w(f) = \begin{cases} n, & w = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 1 = n, & w \neq 0 \end{cases}$$

[illegible] $f : D \to D$; $z \mapsto z^n$

— [illegible]

o [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

$y \mapsto d_y(f) = m_i$ — [illegible] [illegible].

2) $m_i = n =$ const ∎

Опр: $f : X \to Y$ — голом. непост.,

X, Y — компакт. $d(f) = d_y(f)$ не зав.

Численно обозн. $d(f) = \deg(f)$.

<u>Лемма</u>: $f : X \to Y$ — — " —

f — изом. $\Leftrightarrow$ $\deg f = 1$

<u>Теорема</u>: X — компакт. РП, $\exists f \in \mathcal{M}_X$:

f имеет единств. полюс $p \in X$:

$\nu_p(f) = -1$. Тогда X изом. $\mathbb{C}_\infty$

□ Расс. $f : X \to \mathbb{C}_\infty$.

$m_p(f) = 1$,

$f^{-1}(\infty) = \{p\}$, т.к. единств. полюс

$\deg f = d_\infty(f) = 1 \Leftrightarrow f$ — изом. ■

Напоминание, I: $X \in \mathbb{C}_\infty$ $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$

$$\sum_{p \in X} \nu_p(f) = 0.$$

<u>Теорема</u>: X — компакт. РП, $f \in \mathcal{M}_X$

$$\Rightarrow \sum_{p \in X} \nu_p(f) = 0$$

$\square$ $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ — соотв. f голом. отобр. Если (x_i) — нули f, (y_j) — полюса f

$$F : x_i \mapsto 0, \quad y_j \mapsto \infty$$

$$\underbrace{\sum m_{x_i}(F)}_{= \nu_{x_i}(f)} = \underbrace{\deg F}_{= d} = \underbrace{\sum m_{y_j}(F)}_{= -\nu_{y_j}(f)}$$

$$\Rightarrow 0 = d - d = \sum \nu_{x_i}(f) + \sum \nu_{y_j}(f) \qquad \blacksquare$$

Напоминание: I: (x_i), (y_i), $1 \le i \le d$.

$\sum x_i - \sum y_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = \prod \Theta_w^{(x_i)} / \prod \Theta_w^{(y_i)} \in \mathcal{M}_{ell}$

Теорема: $\forall f \in \mathcal{M}_{ell}$ f — такого вида

$\left(\Theta_w^{(x)}(z) = \Theta_w\left(z - \frac{1}{2} - \frac{w}{2} - x\right)\right.$

$\left. \Theta_w(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (2lz + l^2 w)} \right)$

$\square$ $\sum \nu_p(f) = 0 \Leftrightarrow$ число нулей с учётом кратн. = число полюсов с учётом кратн.

$(p_i)_{i=1}^n$ — нули (с повт.)

$(q_i)_{i=1}^n$ — полюса (с повт.)

Предположим, что $\sum p_i \neq \sum q_j$ (в $\mathbb{C}/L$)

Докажем, что: $\exists\, p_0, \dots, q_0 \in \mathbb{C}/L$.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} q_i$$

Рассмотрим p_i, q_i в $\mathbb{C}$ относит.

$\pi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$: $x_i = \pi^{-1}(p_i)$, $y_i = \pi^{-1}(q_i)$,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

Тогда $R = \prod_{i=0}^{n} \theta_\omega^{(x_i)} / \prod_{i=0}^{n} \theta_\omega^{(y_i)}$,

$g = \dfrac{R}{1}$, g по построению имеет один нуль p_0, а полюс q_0 порядка 1

Следств. голом. $G: X \to \mathbb{C}_\infty$

$\deg G = 1 \Rightarrow X = \mathbb{C}/L$ — изом. $\mathbb{C}_\infty$

Но $g(X) = 1$, $g(C_\alpha) = 0$ — $><$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i$

Аналогично $\exists\, x_i, y_i$: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

$R_1 = \prod \Theta_\alpha^{(x_i)} / \prod \Theta_\alpha^{(y_i)}$, $g_1 = \dfrac{R_1}{f}$

g_1 не имеет нулей и полюсов

$\Rightarrow$ $g_1 \equiv \underline{\text{const}}$ $\Rightarrow$ $f = cR_1$ ∎

__Теорема__ (формула Гурвица): $F: X \to Y$

конечн. накрыт., X, Y — комп. РП

$$2g(X) - 2 = \deg F \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (m_p(F) - 1)$$

(″ $-\chi(X)$)

□ [Мир] ⊠

Теорема: $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$,

$f: X \to Y$ — голом. Тогда f имеет

вид (с точностью до сдвига) $G(z) = \gamma z + a$

$\gamma: \gamma L \subset M$

$a = 0 \iff f$ — гом. групп ($f(0) = 0$)

$\deg f = [M : \gamma L]$

f — изом $\iff \gamma L = M$

$G(z) = \gamma z$

Теорема: $X = \mathbb{C}/L$, $f: X \to X$ — автом.

$\iff$ обычно id

1) L — квадр. реш., $\gamma \in \sqrt[4]{1}$

2) L — шест. реш., $\gamma \in \sqrt[6]{1}$

3) L — не квадр., не гекс., $\gamma = \pm 1$

Итак $\mathrm{Aut}\, X$ — ц. гр.

1) $\mathrm{Aut}\, X = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

2) $\mathrm{Aut}\, X = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

3) $\mathrm{Aut}\, X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

__Следствие__: L — н. квадр., M — гекс.

X/L, X/M — не изоморф.

__Theorem__: $L_{w_1} = L(1, w_1)$, $L_{w_2} = L(1, w_2)$, $w_i \in \mathbb{H}$, $X_{w_i} = \mathbb{C}/L_{w_i}$

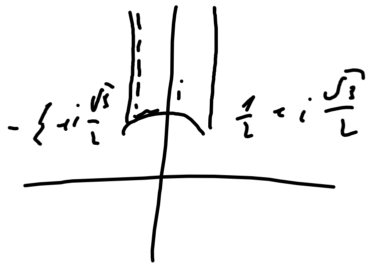
X_{w_1} изом. X_{w_2} $\Leftrightarrow$ $\exists\, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$w_1 = g \cdot w_2 = \frac{a w_2 + b}{c w_2 + d}$$

П. О.

Мн-во кл. изом. кривых $\longleftrightarrow$ точки $\mathbb{H}/\Gamma$

(фундаментальная обл.



)

$\mathbb{H}/\Gamma$ — кривая модулей