Листок 10
Тема 10(3.1). p-адические числа: элементарное определение и свойства

Упражнения и задачи

1. Докажите, что различные канонические последовательности определяют различные целые p-адические числа.

2. Докажите, что для целых p-адических чисел α и β заданные в лекции операции $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$ корректно определены (то есть результат не зависит от выбора последовательностей-представителей $\alpha \sim (x_n)$, $\beta \sim (y_n)$) и $\mathbb{Z}_p$ — действительно коммутативное кольцо.

3. Пусть $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$. Какой будет иметь вид разложение числа $-\alpha$?

4. Докажите, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет решений в $\mathbb{Q}_5$.

5. Докажите, что $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p \ \exists a \in \mathbb{Z} : \ \alpha \equiv a \pmod{p^n}$. Для $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv b \pmod{p^n}$ как сравнение в $\mathbb{Z}_p \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p^n}$ как сравнение в $\mathbb{Z}$.

6. Пусть $p \neq 2$, c — квадратичный вычет $\operatorname{mod} p$. Докажите, что существует два различных p-адических числа $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p : \ \alpha^2 = \beta^2 = c$.

7. Пусть $p \neq 2$, $(m, p) = 1$. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $x^2 = m$ в $\mathbb{Q}_p$. Сделайте вывод, что $\mathbb{Q}_p$ не является алгебраически замкнутым.

8. Докажите, что если $\xi_n \to \xi$ в $\mathbb{Q}_p$ и $\xi \neq 0$, то $1/\xi_n \to 1/\xi$ в $\mathbb{Q}_p$.

9. Докажите p-адический аналог утверждения из анализа: из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

10. Докажите p-адический критерий Коши: последовательность (ξ_n) сходится $\Leftrightarrow$ $\nu_p(\xi_m - \xi_n) \to \infty$, при $m, n \to \infty$.

11. Пусть последовательность (x_n) определена как $x_n = 1 + p + \cdots + p^{n-1}$. Докажите, что в $\mathbb{Q}_p$ $x_n \to 1/(1-p)$, $n \to \infty$.

12. Докажите, что для $0 \neq \xi \in \mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}$ представление $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, $0 \leqslant a_n \leqslant p-1$ имеет периодические коэффициенты (начиная с некоторого номера k_0, т.е. $\exists m : \forall k \geq k_0$ $a_{m+k} = a_k$). Обратно всякий такой ряд представляет рациональное число.

SageMath

- Исследуйте основные функции SageMath связанные с арифметикой p-адических чисел. Определение кольца и поле p-адических чисел: `Zp(n)`, `Qp(n)`. Рассмотрите примеры уравнения $x^2 = m$ (используйте функцию `sqrt()`).