5. Группы, действующие на РП

X — РП, G — группа

Опр: G действ. на X $\Leftrightarrow$ $\exists$ отобр.

$G \times X \to X : (g, p) \mapsto gp$:

1) если $e \in G$ — ед. эл-т $\forall p \in X : ep = p$

2) $\forall g, h \in G \ \forall p \in X \ (gh)p = g(hp)$.

Опр: • Орбита точки $p \in X$: $G \cdot p = \{gp : g \in G\}$

• фактор. $X/G = \{Gp\}$ ($G \backslash X$)

• Стабилизатор точки $p \in X$: $G_p = \{g \in G : gp = p\}$

• Ядро действия $K = \bigcap_{p \in X} G_p = \{g \in G : \forall p \in X \ gp = p\}$

Лемма:

1) $G_{gp} = g G_p g^{-1}$

2) если $|G| < \infty$, то $|Gp||G_p| = |G|$

3) K — норм. подгр G, G/K действ. с тривиал. ядром.

□ Упр ■

Опр: G действ. на X эффективно, если ядро действ. K тривиал.

Опр: G действ. на X непрер./гладк., если $\forall g \in G$ $p \mapsto gp$ — непрер./гладк.

Опр: Если X — ТП, G действ. непр., $\pi: X \to X/G : p \mapsto Gp$, индуцир. топол. на X/G: $U \subset X/G$ — откр. $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ — откр.

Когда X/G явл. РП, если X - РП ?

<u>Лемма</u>: Пусть G действ. на РП X голом. и эфф., $p \in X$: $|G_p| < \infty$.

Тогда G_p — циклич. группа

□ $z = \varphi(x)$, $\varphi(p) = 0$ — лок. коорд.

$$g \cdot z = g(z) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n(g) z^n .$$

для $g \in G_p$ $g \cdot p = p$, т.е. в коорд. z

$g(0) = 0$, $a_0(g) = 0$

$g(z)$, $g^{-1}(z)$ — голом. ф-ции, $g \circ g^{-1} = e$

$\Rightarrow$ $m_0\, g(z) = 1$ $\Rightarrow$ $a_1(g) \neq 0$.

возьм. $h \in G_p$ $g(h(z)) = \sum_n a_n(g) \left(\sum_m a_m(h) \right)^n =$

$= a_1(g)\, a_1(h)\, z + \ldots$ $\Rightarrow$ $a_1(gh) = a_1(g)\, a_1(h)$

т.е. $a_1 : G_p \to \mathbb{C}^*$ — гомоморф. групп.

$\ker a_1$ — ? Пусть $g \in \ker a_1$, т.е.

$g(z) = z + \dots = z + az^n + \dots \equiv z + az^n \ (z^{n+1})$

Предположим, что $a \neq 0$. Тогда

$g^k z \equiv z + kaz^n \ (z^{n+1})$

G_p — конечна. $\Rightarrow \exists k$ $g^k = e$, $g^k z = z$

$\Rightarrow z = g^k z \equiv z + kaz^n \ (z^{n+1}) \Rightarrow ka = 0$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow g(z) = z \Rightarrow g = e$

Т.о. $\ker a_1 = \langle e \rangle$.

$\Rightarrow$ т.е. вложение $a_1 : G_p \to \mathbb{C}^*$

А все конечн. подгр. $\mathbb{C}^*$ — циклич

$\Rightarrow$ G_p — циклическая группа ∎

<u>Следствие</u>: $|G| < \infty \Rightarrow \forall p \in X$ G_p — циклич. гр.

Далее рассм. G — конечн. гр.

<u>Лемма</u>: G — конечн. гр. действ. на рп X непр. и эфф. Тогда $\{p \in X : G_p \neq \{e\}\}$ — дискр.

$\square$ Пусть (p_n) — посл-ть $p_n \to p$: $\forall n \ \exists g_n \in G_p \setminus \{e\} : g_n p_n = p_n$.

$|G| < \infty$ $\exists$ подпосл-ть $g_{n_k} = g$.

g — непр. $\Rightarrow$ $g p_n \to g p$, $g p = p$

$\Rightarrow$ $g = e$ $\boxtimes$

<u>Лемма</u>: G — конечн. гр. действ. непр. и эфф. на X, $p \in X$. $\exists$ окр. U точки p:

1) $\forall g \in G_p$ $\forall u \in U$ $gu \in U$

2) $U \cap gU = \emptyset$ $\forall g \notin G_p$ ($U \cap gU \neq \emptyset \Rightarrow g \in G_p$)

3) $\alpha : U/G_p \to W \subset X/G$ — гомеом.

4) $\forall x \in U \setminus \{p\}$ $\forall g \in G_p$ $gx \neq x$

□ $G \setminus G_p = \{g_1, \dots, g_n\}$, $\forall i$ $g_i p \neq p$

X — хаусдорф. $\Rightarrow$ $\forall$ $1 \le i \le n$ $\exists$ окр.

V_i — окр. p, W_i — окр. $g_i p$: $V_i \cap W_i = \emptyset$

$\forall i$ $g_i^{-1} W_i$ — откр. окр. p.

Рассмотрим $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} W_i)$, $R = \bigcap_i R_i$,

$U = \bigcap_{g \in G_p} gR$; R_i, R, U — откр. окр. p.

$\forall h \in G_p$ $hU = \bigcap_{g \in G_p} ghR = \bigcap_{g \in G_p} gR = U$.

$\Rightarrow$ 1).

$$\underbrace{R_i}_{\subset V_i} \cap \underbrace{(g_i R_i)}_{\subset W_i} \subset V_i \cap W_i = \emptyset \Rightarrow R_i \cap g_i R_i = \emptyset$$

$\Rightarrow U \cap g_i U = \emptyset \quad (g_i \in G \setminus G_p) \Rightarrow$ 2)

3) $\alpha : U/G_p \to X/G$ (инъ. $x \mapsto Gx$)

$\alpha : U/G_p \to \mathrm{Im}\,\alpha = W$ — вз.-одн. соотв.

$\beta : U \to U/G_p$, $\quad \pi : X \to X/G$

$\pi|_U = \beta \circ \alpha$, $\quad \pi|_U$, β — непр. откр. отобр.

$\Rightarrow \alpha$ — непрер. отобр.

4) Из. услов. вместе с $|G_p| \neq 1$ ∎

__Следствие__: G — конечн. гр. действ. гладк. и эфф. на РП X. Тогда X/G — РП. Проекция $\pi : X \to X/G$ —

— голом. отобр. $\deg \bar\pi = |G|$,

$\forall p \in X \quad m_p(\bar\pi) = |G_p|$

$\square$ Если $|G_p| = 1$, что по лемме

$\exists$ окр (откр) U точки p:

$U \xrightarrow[\cong]{} U/G_p \to W \subset X/G$ — гомеом.

$\bar p = \pi(p) = Gp$. $\quad \bar\pi^{-1}|_W : W \to V \subset U$

Если $m = |G_p| > 1$.

$z = \varphi(\cdot)$ — карта с центром в p

$g(z)$ — задаёт ф-ию локальн. $g\,p$

$f(z) = \prod\limits_{g \in G_p} g(z)$, $\quad m_0(g(z)) = 1$

$h \in G_p \quad f(h(z)) = \prod g h(z) = \prod g(z) = f(z)$

$m_0(f) = m = |G_p|$

т.е. $\exists$ окр. U точки p : в координ.

z $\quad f(z) = z^m$

$\bar f : U / G_p \to V \subset \mathbb{C}$

f – гол.-ф. отобр. $\Rightarrow$ $\bar f$ – гол.-ф.

в $U \setminus \{p\}$ $\quad f$ – накр. $m : 1$

$\forall\ q \in U \setminus \{p\} \quad |G_p q| = m$

$\Rightarrow \quad \bar f : U / G_p \to V$ – $1 : 1$

α – из леммы $\quad \alpha : U / G_p \to W \subset X / G$

– гомеом.

$\varphi : W \xrightarrow{\alpha^{-1}} U / G_p \xrightarrow{\bar f} V \subset \mathbb{C}$ – карта.

Согласованность – исключительно рассмотр

$\{ p \, i \, r \}$. $\boxtimes$

Теорема (Гурвица): X — компакт. РП, $g(X) = g \geq 2$. G — конечн. гр., дейст. голоморф. и эфф. Тогда $|G| \leq 42(2g-2)$.

□ $\pi : X \to X/G = Y$, $\deg \pi = |G|$, $m_p(\pi) = |G_p|$. Обозн. $g' = g(Y)$.

Ф. Гурвица:

$$2g - 2 = (2g' - 2)\deg \pi + \sum_{p \in X} (m_p(\pi) - 1)$$

$$= |G|(2g' - 2) + \sum (|G_p| - 1) =$$

$$= |G|((2g' - 2) + \sum (1 - \frac{1}{r_i})))$$

Случаи для g'!

1) $g' \geq 2$: $2g-2 \geq |G|(4-2+R) \geq 2|G|$

$|G| \leq g-1 \leq 84(g-1)$

2) $g' = 1$ $2g-2 = |G| \sum_p \left(1 - \frac{1}{|G_p|}\right)$

sinon $\forall p \; |G_p| = 1 \Rightarrow 2g-2 = 0$ $g = 1$ $><$

$\Rightarrow \exists p \,, |G_p| \geq 2$ $1 - \frac{1}{|G_p|} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2g-2 \geq |G| \frac{1}{2}$, $|G| \leq 4(g-1) \leq 84(g-1)$

3) $g' = 0$: $2g-2 = |G|\left(\underbrace{\sum \left(1 - \frac{1}{|G_p|}\right)}_{R} - 2\right)$

$R = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$, $r_i \geq 2$

$r_i \geq 2$ $\qquad \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{r_i} < 1$

ew $n = 1, 2$, uw $R - 2 < 0 \Rightarrow$

$2g - 2 < 0 \Rightarrow g = 0$

$\rightarrow$ ><

T.o. $n \geq 3$

ew $n \geq 5$ $\qquad R = \sum \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \geq \frac{5}{2}$

$2g - 2 \geq |G|\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \frac{|G|}{2}$

$\therefore |G| < 4(g-1)$

ew $n = 4$, ew $r_i = 2 \ \forall i$

$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow g = 1$ $\rightarrow$ ><

$\exists \ r_i > 2 \qquad r_i \geq 3$

$$2g - \quad \geq |G| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{12} |G|$$

$$|G| \leq 24(g-1)$$

$n = 3$ $\qquad R = 3 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) > 2$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} < 1, \quad 2 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3$$

$\Rightarrow r_2 \geq 3, \quad r_3 > 3$

Случаи:

$r_3 \geq 4, \quad r_2 \geq 3, \quad r_1 \geq 3 \qquad (\ldots) \leq \frac{11}{12}$

$$2g - 2 \geq |G| \left(1 - \frac{11}{12}\right)$$

$$|G| \leq 24(g-1)$$

$r_3 \geq 7$, $r_1 \geq 2$, $r_2 \geq 3$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

$$2g - 2 \geq |G| \left(1 - \frac{41}{42}\right)$$

$$|G| \leq 84(g-1)$$

$|G| = 84(g-1)$ достигается при $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 7$ ∎

Опр: Говорят, что G имеет сигнатуру $(r_1, \ldots, r_n)$.

Теорема: $X = \mathbb{C}_\infty$ если можно изобразить наш граф G:

$(2,2,r)$, $(2,3,3)$ $(2,3,4)$ $(2,3,5)$

E_6 E_7 E_8.

Собств. разрывн. действ. групп

Опр: X — хаусд. топол. пр-во. G действ. вполне разрывно на X если $\forall\, x, y \in X$ $\exists\, U, V$ — окр.: $|\{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}| < \infty$

Пример: $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ действ. на $\mathbb{C}$ $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ $z \mapsto m z + n$. $\mathbb{C} / G$ — тор.

Накрывающие группы

Напоминание.

$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$

$SL_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathbb{H} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$:

$gz = \dfrac{az+b}{cz+d}$, корр. ($cz+d \neq 0$, $z = -\frac{d}{c} \notin \mathbb{H}$)

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Iz = z$. $\quad (-I)z = \dfrac{-z}{-1} = z$

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$

Нас интересует мн. ФП на $\mathbb{H}/\Gamma = Y(\Gamma)$

Из А-П:

<u>Теорема</u>: 1) $F = \{ z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \}$ — фунд. обл. для Γ, т.е.

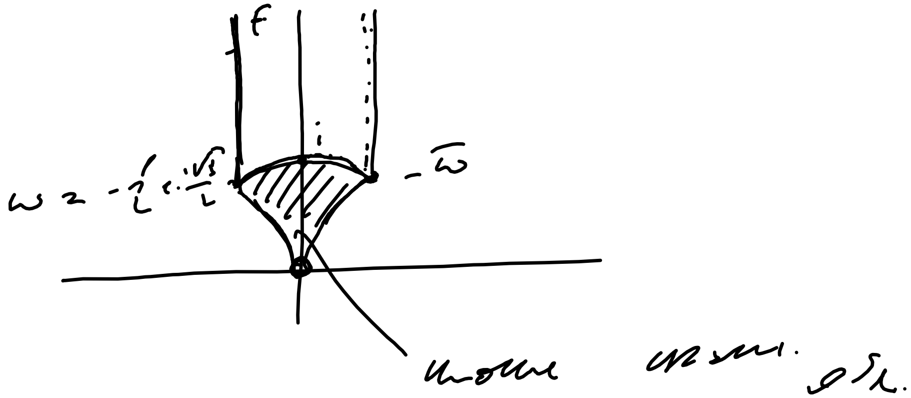
∘ $\forall z \in \mathbb{H} \ \exists z_0 \in F \ \exists g \in \Gamma : gz = z_0$

∘ $\forall z_1, z_2 \in F \setminus \partial F \quad z_1 \neq g z_2 \quad \forall g \in \Gamma$

∘ $\forall z_1, z_2 \in F \quad z_1 \neq z_2, \quad \exists g \quad z_1 = g z_2 \Rightarrow$

$z_1, z_2 \in \partial F$ или $\operatorname{Re} z_1 = \pm \frac{1}{2}$ и

$z_2 = z_1 \mp 1$, или $|z_1| = |z_2|$, $z_2 = -\frac{1}{z_1}$,



2) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $Tz = z+1$

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Sz = -\frac{1}{z}$

Стабилизатор Γ_z нетривиален только

∘ $z = i$. $\Gamma_i = \{I, S\}$ $\left(\{\pm I, \pm S\} \right)$

• $z = \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \Gamma_\omega = \{ I, ST, (ST)^2 \}$

$\Gamma_{-\bar{\omega}}$

Опр: $n_z = |\Gamma_z|$ наз. порядком z. если $n_z > 1$, то z наз. эллипт. точкой.

(Опр: $i\infty$ наз параболической точкой (касп))

Т.е. у $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ есть 2 элл. точки i, ω, $n_i = 2$, $n_\omega = 3$

Орбиты в $\mathbb{H}/\Gamma = Y(\Gamma)$ также наз элл. точками ($n_z = n_{gz}$)

Лемма: Γ действ. вполне разрывно

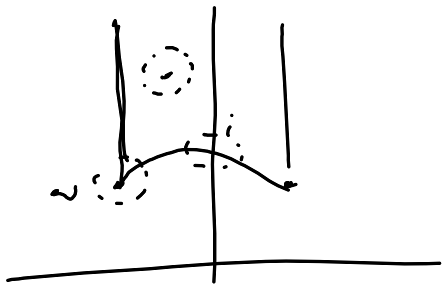
не $\mathbb{H}$ (т.е. $\forall\ U, V$ — компакты

$|\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \varnothing\}| < \infty$

$\square$ ...

Следствие: $Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$ — хаусдорфово.

Локал. стр-ра на $Y(\Gamma)$:

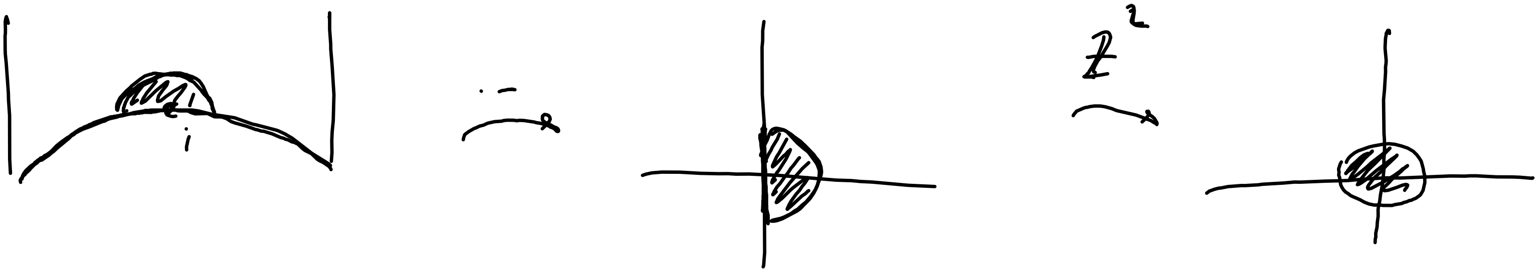


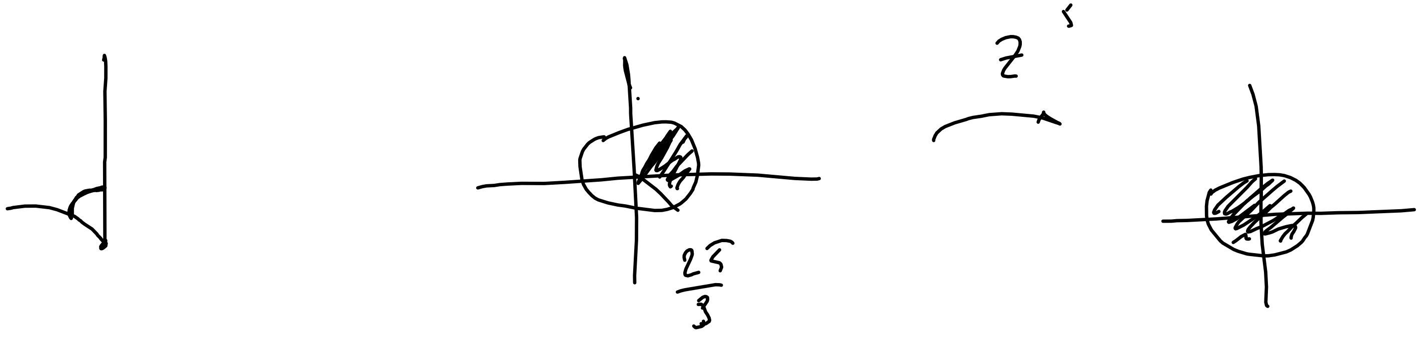
z — не элл. точка

$\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$

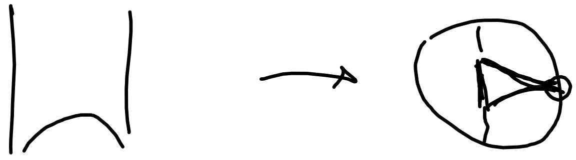
$\exists$ окр. $U \subset F \setminus \partial F$

$\pi^{-1}|_U$ — карта.





$g(\Gamma)$ — $p\Pi$



$$\frac{z-i}{z+i}$$

<u>Более общ. случай</u>

<u>Опр.</u> $\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N) \right\}$

— главной конгруэнц. подгр.

$\Gamma(1) = \Gamma$

$\Gamma' < SL_2(\mathbb{Z})$ наз. конгруэнц подгр.

если $\exists\, N : \Gamma(N) \subset \Gamma'$.

$Y(\Gamma') = \mathbb{H}/\Gamma'$

<u>Следствие</u>: ∘ Γ' — конгр. подгр. $SL_2(\mathbb{Z})$

Γ' имеет конечный индекс и

$Y(\Gamma')$ — компактна.

∘ $Y(\Gamma')$ имеет конечн. число эллипт. точек, Γ_x — конечн. группы.

$\square$ Индекс: $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma'] = N^3 \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$

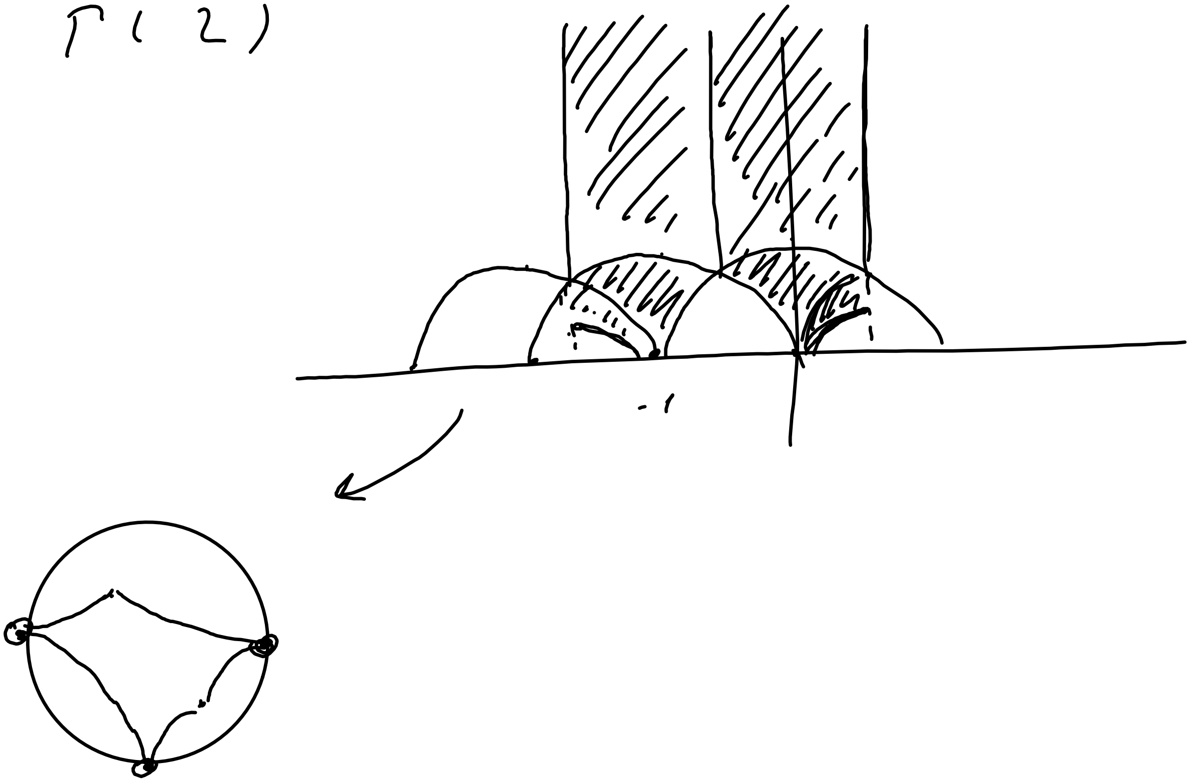
$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{j=1}^{d} \Gamma' g_j \Rightarrow$

Упр. тогда $\Gamma' \in \{\Gamma g_1, \ldots, \Gamma g_d\}$ ∎

Замечание: F' – фунд. обл. Γ'

$F' = \bigcup\limits_{j=1}^{d} g_j F$, F – фунд. обл. Γ.

Пример: $\Gamma(2)$



$SL_2(\mathbb{Z})$ [illegible] $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$

$\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ $\quad (a,c)=1 \quad \exists\, b, d : ad - bc = 1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (i\infty) = \frac{a}{c}$$

$$\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$$

$\Gamma' \subset SL_2(\mathbb{Z})$ [illegible] auf $\overline{\mathbb{H}}$

$$\overline{\mathbb{H}} / \Gamma' = X(\Gamma')$$

Obs: Finit. many orbits on $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$

n = # orbits = # $(\mathbb{Q} \cup \{i\infty\})/\Gamma'$

$$\Gamma_{i\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\Gamma' \subset SL_2(\mathbb{Z})$, $\quad z \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$

$\exists\, g \in SL_2(\mathbb{Z}) : \; gz = i\infty$

$$h_z = h_{z,\Gamma'} = \left| \Gamma_{i\infty} / (g(\pm I)\Gamma')g^{-1})_{i\infty} \right|$$

$X(\Gamma')$ — рп ?

$$\varphi(z) = e^{2\pi i z/h}$$

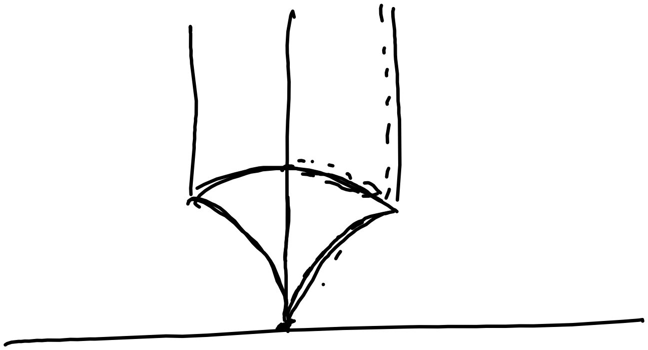
$X(\Gamma)$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ $\quad z \mapsto e^{2\pi i z}$

Теорема. Γ' — конгр. подгр. $X(\Gamma')$ — комп. рп.

Теорема:

$$g(X(\Gamma')) = 1 + \frac{d}{12} - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{3} - \frac{e_\infty}{2}$$

$d = \deg f$, $\quad f : X(\Gamma') \to X(\Gamma)$



$g(X(\Gamma)) = 0$

Теорема: $E: y^2 = x^3 + ax + b$ — ЭК / $\mathbb{C}$
($a, b \in \mathbb{Q}$) — РП.

Γ' — подгр. кон. инд. $X(\Gamma')$ — РП

$\forall E : \exists \Gamma' \; \exists f : X(\Gamma') \to E$ —
— сюр., голом. отобр. РП.

(теорема о модулярности).

$X(\Gamma)$