9. Алгебраические кривые. Слабая аппроксимация.

Пусть X — компл. РП.

$\mathcal{M}_X$ — поле (глоб.) мер. ф-ий

$\mathcal{M}_X^{(1)}$ — пр-во (глоб.) мер. 1-форм

$\mathrm{Div}\, X$ — группа дивизоров.

$D \in \mathrm{Div}\, X$

$L(D) = \{ f \in \mathcal{M}_X : (f) \geq -D \}$

$L^{(1)}(D) = \{ \omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} : (\omega) \geq -D \}$

$L^{(1)}(D) \cong L(K+D)$, $K = ($[illegible]$)$

$L(D)$, $L^{(1)}(D)$ — конечномерн. вект. пр-ва $/\mathbb{C}$

Теорема (Римана-Роха): При некоторых условиях $\forall D \in \operatorname{Div} X$

$$\dim L(D) = \deg D - g(X) + 1 + \underset{\dim L(K-D)}{\underset{\parallel}{\dim L^{(1)}(-D)}}$$

Некоторые условия:

Опр: $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}_X$. $\mathfrak{S}$ различает точки на X, если $\forall p, q \in X$, $p \neq q$ $\exists f \in \mathfrak{S}$: $f(p) \neq f(q)$.

$\mathfrak{S}$ различает касательные, если $\forall p \in X$ $\exists f \in \mathfrak{S}$: $m_p(f) = 1$ ($m_p(f) = m_p(F)$, $F: X \to \mathbb{C}_\infty$, т.е. $m_p(f) = \begin{cases} \nu_p(f - f(p)), & f \text{ - голом. в } p \\ -\nu_p(f), & p \text{ - полюс } f \end{cases}$)

Лемма: усл. в Р-Р: $\mathfrak{M}_X$ разд. точки и касательные

Решение: Для X верно утв. р.-р.

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_X$ разд. точки и кас

(т.е. 1 р.-р., $(\Leftarrow)$)

$\square$ $p \neq q$, $g = g(X)$

$D = (g+1)\cdot p$, $\deg D = g+1$

$$\dim L(D) = \cancel{g}+1-\cancel{g}+1+\underbrace{\dim L(K-D)}_{\geq 0} \geq 2$$

$\Rightarrow$ $\exists\, f \in L(D)\setminus \mathbb{C}$: f имеет полюс

кратности в p.

p — полюс f, $q \neq p$ — не полюс f

т.е. $\mathcal{M}_X$ разд. точки

Разделение касат.:

Wenn $\deg D \geq 2g-1$,

$$\deg(K-D) = \deg K - \deg D \leq 2g-2-2g+1 = -1$$

$$\Rightarrow \quad L(K-D) = \{0\}$$

$$\dim L(D) = \deg D - g + 1$$

$p \in X$, $D_n = n \cdot p$, $\deg D_n = n$

$\dim L(D_n) = n - g + 1$, $\dim L(D_{n+1}) = n - g + 2$

$\Rightarrow \exists f_n \in L(D_{n+1}) \setminus L(D_n)$, d.h. $\nu_p(f_n) = -n$

$\Rightarrow \nu_p\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) = -1$, d.h. $\nu_p\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) = 1$ $\blacksquare$

<u>Idee</u>: $\mathcal{M}_X$ trennt Punkte u. Tangenten

$\Rightarrow \exists \varphi : X \to \mathbb{P}^n$

□ X кривая рода не меньше 1

T: $D \in \mathrm{Div}\, X$ $\forall\, p, q \in X$

$\dim L(D-p-q) = \dim L(D) - 2$

2) $\exists\, \varphi = \varphi_D : X \to \mathbb{P}^n$ — вложен. изом..

$D \in \mathrm{Div}\, X$ $\deg D \geq 2g+1$

$\deg(D-p-q) \geq 2g-1$

$\Rightarrow$ $L(K-D) = L(K-(D-p-q)) = \{0\}$

Р.-Р.: $\dim L(D) = \deg - g + 1$

$$\dim L(D-p-q) = \underbrace{\deg(D-p-q)}_{\deg D - 2} - g + 1 = \dim L(D) - 2$$

Док

$D = (2g+1)\cdot p$ $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^g$ — вложен. изом. ■

Лемма (Примеры)

1) $X = \mathbb{C}_\infty$, $\mathcal{M}_X$ поле, конечно над алг.

2) $X = \mathbb{C}/L$, — " —

3) $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладк. алг. мн., — " —

□ Упр. ■

Замечание: Для любой компакт. РП $\mathcal{M}_X$ ... объяс. ...

⟹ ... ... компакт. РП = проектив. т.е. гладк. алгебраич. кривые (связная кр. р.-р.).

Т.о. $\mathcal{M}_X$ доп. поле и алгебра ⟺ X гладк. алгебр. ⟺ алг. р.-р. ⟺ X гладк. алгебр.

Теорема (без док-ва) $\forall$ компакт. РП X явл. алгебр. р.-р.

Опр: Компакт. РП X где поле мер. функций ... назовём алгебр. кривой (АК).

Следствие аппроксимации для аналит. рядов Лорана.

Лемма: X — АК, $p \in X$.

$\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists f \in \mathcal{M}_X : v_p(f) = n$

$\square$ X опр. ... (2) $\exists f \in \mathcal{M}_X \ v_p(f) \geq 1$

Если f — голом. $g = f - f(p)$, $v_p(g) \geq 1$

Если p полюс $g = \frac{1}{f}$ $v_p(g) \geq 1$

т.е. $\forall p \ \exists g : v_p(g) = 1$: $\forall n \in \mathbb{Z}$

$v_p(g^n) = n$ $\blacksquare$

Опр: $r(z) = \sum_{i=n}^{m} c_i z^i \quad n \leq m \in \mathbb{Z}$

наз. многочл. Лорана

Доп. ряд. наз. многочл. Тейлора $r(z)$ ст. младшей части ряда Тейлора ф-и $h \in \mathcal{M}_X$, если $h - r = \sum_{i \geq n} c_i z^i$ (остаток, хвост, tail). ($h - r = O(z^{n+1})$)

<u>Лемма</u>: X — АК, $p \in X$, z — лок. коорд. в p, $r(z)$ — многочл. Лорана. $\exists f \in \mathcal{M}_X$: r — младшие члены Лорана для f (в точке p)

$\square$ $r = \sum_{i \geq n}^{m} c_i z^i$, $c_n, c_m \neq 0$

Индукция по $k = m - n - 1$:

$k = 1$ $r(z) = c_n z^n$ упр. $\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{M}_X$ $\nu_p(f) = n$ (упр. лемма)

$n > 1 \qquad r = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots + c_q z^q$

По инд. для $c_n z^n$ $\exists\, h \in \mathcal{M}_x$:

$c_n z^n$ — нач. значение $h(z)$.

$$h(z) - r(z) = \underbrace{a_{n+1} z^{n+1} + \ldots + a_q z^q}_{s(z)} + a_{q+1} z^{q+1}$$

$s(z)$ — многочл. длины $\leqslant n-1$

по инд. $\exists\, g \in \mathcal{M}_x$: $s(z)$ — нач. значение $g(z)$

Т.о. $h - r = s + O(z^{q+1})$

$g = s + O(z^{q+1})$

Тогда $f = h - g = r + O(z^{q+1})$

$\Leftrightarrow$ $r(z)$ — нач. значение $f(z) \in \mathcal{M}_x$ ■

Что если заданы $p_1, \dots, p_n \in X$?

Лемма: X — АК, $p, q \in X$, $p \neq q$.
$\exists f \in M_X$: p — нуль, q — полюс

□ ... ■

Лемма: X — АК, $p, q_1, \dots, q_n \in X$
$\exists f \in M_X$: p — нуль, $q_1, \dots, q_n$ — полюса.

□ Индукция по n: $n=1$ — уже. Пусть $n>1$, по инд. $\exists g$: p — 0, $q_1, \dots, q_{n-1}$ — ∞.
$\exists h$: p — 0, q_n — ∞.
$f = g + h^k$ для достаточно больших k, что f будет удовл. (упр....) ■

Лемма: X — АК. $p, q_1, \dots, q_n \in X$, $n \geq 1$

$\exists\ f \in \mathcal{M}_X : \quad \nu_p(f-1) \geq N, \quad \nu_{q_i}(f) \geq N$

$\square\ \exists\ g \in \mathcal{M}_X : \quad \nu_p(g) > 0, \quad \nu_{q_i}(g) < 0$

$f = \dfrac{1}{1+g^N}$ $\boxtimes$

<u>Теорема</u> (аппрокс. р. Лорана):

X — РП, $p_1, \ldots, p_n \in X$, $z_i = z_{p_i}$ — лок. коорд. с центром в p_i, $1 \leq i \leq n$; $r_i(z_i)$, $1 \leq i \leq n$ — конеч. Лорана.

$\exists\ f \in \mathcal{M}_X : \quad \forall\ i,\ 1 \leq i \leq n \quad r_i(z)$ — гл. часть Лорана $f(z)$ (в p_i).

$\square\ r_i(z_i) = \sum_{j=n_i}^{m_i} c_{ij} z_i^j, \quad N = \max m_i$

$\left(= \sum^{N} c_{ij} z_i^j, \right.$ т.к. $\left. m_i < j \leq N \ \ c_{ij} = 0 \right)$

$\forall\ p_i \quad \exists\ g_i \in \mathcal{M}_X : \quad g_i(z_i) = r_i(z_i) + O(z_i^{N+1})$

$\mu = \min n_i = \min \nu_{p_i}(r_i) = \min \nu_{p_i}(g_i)$

$\forall i \ \exists h_i \in \mathcal{M}_X : \quad \nu_{p_i}(h_i - 1) \geq \nu - \mu$

$\nu_{p_j}(h_i) \geq \nu - \mu, \ j \neq i$

I.e. $h_i(z_i) = 1 + O(z_i^{\nu-\mu})$

$h_i(z_j) = O(z_j^{\nu-\mu})$

$(h_i g_i)(z_i) = (1 + O(z_i^{\nu-\mu}))(r_i(z_i) + O(z_i^{\nu-\mu})) =$

$= r_i(z_i) + O(z_i^{\nu-\mu})$

$(h_i g_i)(z_j) = O(z_j^{\nu-\mu})$

$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i, \quad f(z_i) = r(z_i) + O(z_i^{\nu-\mu})$ ■

Claim: X – AC $p_1, \ldots, p_n \in X$,

$m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z} \ \exists f \in \mathcal{M}_X : \forall i : \nu_{p_i}(f) = m_i$

Следствие. X — АК, $1 \leq i \leq n$, $p_i \in X$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $f_i \in \mathcal{M}_X$ $\exists\, f \in \mathcal{M}$:

$\nu_{p_i}(f - f_i) \geq m_i$

$\square$ ..

Вспомним КТО: $p_1, \dots, p_n$ — пр. $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{Z})$

$\exists\, a \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{Z})$: $\forall i$ $\nu_{p_i}(a - a_i) \geq m_i$

$(a \equiv a_i\ (p_i^{m_i}))$

Это теорема о слабой аппроксимации.

Трансцендентность $\mathcal{M}_X / \mathbb{C}$

Лемма: $\operatorname{tr.deg}(\mathcal{M}_X / \mathbb{C}) = 1$ (т. е.

$\exists\ f$ — не сущ... / $\mathbb{C}$

$\forall\ f, g \in M_x$ алгебр... зав...)

$\square$ $M_x \neq \mathbb{C}$, т.к. tr deg $M_x / \mathbb{C} \geq 1$

Пусть $f, g \in M_x$ — алг. незав.

Возьмем $D > \max((f)_\infty, (g)_\infty)$

$((f) = (f)_0 - (f)_\infty > -D \Rightarrow f \in L(D))$

$f, g \in L(D)$

$\forall\ i, j \geq 0 \quad i + j = n \quad f^i g^j \in L(nD)$

$f^i g^j$ — лин. незав

$$\Rightarrow \dim L(nD) \geq \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

$D \geq 0$, $\dim L(nD) \leq 1 + \deg(nD) = 1 + n \cdot \deg D$

— >< при больших n ■

Z. o. że $f \in \mathcal{M}_X \setminus \mathbb{C}$. wtedy

$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(f) \subset \mathcal{M}_X$, $\mathcal{M}_X / \mathbb{C}(f)$, $\mathbb{C}$

tr deg $\mathbb{C}(f)/\mathbb{C} = 1 = $ tr deg $\mathcal{M}_X / \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_X / \mathbb{C}(f)$ — algebraiczne

$[\mathcal{M}_X : \mathbb{C}(f)]$ — skończone

Lemat: $\forall D \in \mathrm{Div}\, X$ $\exists n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists g \in \mathbb{C}(f)$:

$D - (g) \leq n(f)_\infty$

D: $\{p \in X : p \in \mathrm{supp}\, D \setminus \mathrm{supp}(f)_\infty, D(p) \geq 1\}$

$= \{p_1, \dots, p_n\}$

jeśli $f - f(p_i)$ $\nu_{p_i}(f - f(p_i)) \geq 1$

p — zero $f - f(p_i) \Leftrightarrow p$ — należy do $\mathcal{L}$

$$g = \prod_{i=1}^{k} (f - f(p_i))^{D(p_i)} \in \mathbb{C}[f]$$

$\nu_{p_i}(g) \geq D(p_i)$; g не имеет полюсов кроме полюсов f

Б.о. $(D-(g))(p) > 0 \Rightarrow p$ - полюс f

$\Rightarrow$ можно найти $n \in \mathbb{Z}_+$: $\forall$ полюс p

$(D-(g))(p) \leq n(-\nu_p(f)) \Rightarrow D-(g) \leq n(f)_\infty$ ■

<u>Следствие</u>: $f, h \in \mathcal{M}_X \setminus \mathbb{C}$ $\exists\, r \in \mathbb{C}[t]$:

$r(f)h$ не имеет полюсов кроме полюсов f

Тогда можно $\exists\, n$: $r(f)h \in L(n(f)_\infty)$

D $D = -(h)$ ■

Лемма 1. Пусть $[M_x : \mathbb{C}(t)] \geq n$

тогда $\exists\, m_0 : \forall\, m \geq m_0$

$\dim L(m(f)_\infty) \geq (m - m_0 + 1) n$

$\square$ $\exists\, g_1, \ldots, g_n \in M_x$ — лин. незав.

$/ \mathbb{C}(t)$. $\forall\, 1 \leq i \leq n$ $\exists\, r_i \in \mathbb{C}[t]$:

$h_i = r_i(f) g_i$ — полюса только над f_i

и $\exists\, m_0 \in \mathbb{Z}_+$: $h_i \in L(m_0(f)_\infty)$

h_i — лин. незав $/ \mathbb{C}(t)$,

$f^j h_i \in L(m(f)_\infty)$ и лин. незав

$1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m - m_0$; $m \geq m_0$

т.е. $\dim L(m(f)_\infty) \geq n(m - m_0 + 1)$ $\blacksquare$

Lemma 1: $\#\{M_x : e(f)\} \leq \deg(f)_\infty$

□ Suppose $\#\{M_x : e(f)\} \geq \deg(f)_\infty + 1$

$\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0$

$\dim L(n(f)_\infty) \geq (n - n_0 + 1)(1 + \deg(f)_\infty)$

$\dim L(n(f)_\infty) \leq 1 + \deg(n(f)_\infty) =$

$1 + n \deg(f)_\infty)$

for large enough n □

$\to$ ><

Lemma 2: $\#\{M_x : e(f)\} = \deg(f)_\infty$

□ $(f)_\infty = \sum n_i P_i$

$\forall\, i$ by weak approx. $\exists\, g_{ij}$

$1 \leq j \leq n_i$: $v_{P_i}(g_{ij}) = -j$

$v_{P_k}(g_{ij}) = 0$, $k \neq i$

y_{ij} — мин. перех. от $\deg(f)_\alpha$ ~~к~~ $\{y_{ij}\}$

2) $\{ \mathcal{M}_X : C(f) \geq \deg(f)_\alpha \}$

2) $\{ \mathcal{M}_X : C(f) = \deg(f)_\alpha \}$

Следствие: $\mathcal{M}_X$ — носит. многообр.

Примеры:

1) $X = \mathbb{C}_\alpha$ $\qquad \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\alpha} \cong \mathbb{C}(z)$

2) $X = CLL$ $\qquad \mathcal{M}_{CLL}$ — эллипт. ф-ции

3) $X \subset \mathbb{P}^n$ $\qquad (x_0 : \ldots : x_n)$

$\mathcal{M}_X$ — пор. $\dfrac{x_i}{x_j}$

Обозн.: $\mathcal{M}_X = \mathbb{C}(X)$ — поле рац. ф-ций на X

Th [illegible] ([illegible]) X, Y — [illegible].
[illegible] [illegible] $\iff$ $C(X) \cong C(Y)$.