7 Сл-ка дивизоров. Главные пространства. Дивизоры

• голом. / мер. 1-формы: $\omega = f(z)\,dz$;

$\omega_1 = f(z)\,dz$, $\omega_2 = g(w)\,dw$ — ω_1 согл. с ω_2

если $g(w) = f(T(w))\,T'(w)$, $T = \varphi \circ \psi^{-1}$.

• **Т**: X — комп. РП, $\forall\, \omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$

$$\sum_{p \in X} \operatorname{Res}_p \omega = 0 \qquad \left(\operatorname{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_p} \omega \right)$$

• $\operatorname{Div}(X) = \{ D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p \ .\ n_p = 0$ для почти всех $p \}$

$\operatorname{supp} D = \{ p : n_p \neq 0 \}$

$\deg D = \sum n_p$

$D = \prod_{p \in X} p^{n_p}$

$D : X \to \mathbb{Z}$

- $(f) = \sum \nu_p(f)\cdot p$ — główne, $PDiv(X) = \{(f)\}$

  $(\omega) = \sum \nu_p(\omega)\cdot p$ — kanoniczne, $KDiv(X)$

- $Cl(X) = Div(X) / PDiv(X)$

  $([D_1] = [D_2] \iff D_1 \sim D_2 \iff \underbrace{D_1 - D_2 = (f)}_{\in PDiv}$

  $(\, Cl(X) = Pic(X) \,)$

- T: $\forall\ \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)}_X \quad \omega_1 \sim \omega_2$

- $\deg(f) = 0 \Rightarrow D_1 \sim D_2 \Rightarrow \deg D_1 = \deg D_2$

$F: X \to Y$ — [illegible] zwarte [illegible] PR

$\forall\ W \subset Y$ — otwarte, $g \in \mathcal{O}_{W,Y}$

F wyznacza $F^*: \mathcal{O}_{W,Y} \to \mathcal{O}_{F^{-1}(W),X}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "g\circ F"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Аналогично $F^*: \mathcal{M}_{w,Y} \to \mathcal{M}_{F^{-1}(w),X}$

Опр 1-форм: $\varphi: U \to V$ — карта на X

$\psi: U' \to V'$ — карта на Y : $F(U) \subset U'$

$z = \varphi(x)$, $w = \psi(y)$ — лок. коорд.

F в коорд. z, w имеет вид $w = f(z)$

Пусть $\omega \in \Omega_Y$ (или $\in \mathcal{M}^{(1)}_Y$) $\omega = g(w)\,dw$

Опр.: $F^*\omega = g(f(z))\,f'(z)\,dz$ — прообраз формы

Лемма: $F^*: \Omega_Y \to \Omega_X$; $F^*: \mathcal{M}^{(1)}_Y \to \mathcal{M}^{(1)}_X$

□ … ■

Опр Div:

Опр.: 1) $D = q \in \mathrm{Div}\, Y$ $\quad F^*D = \sum\limits_{p \in F^{-1}(q)} m_p(F) \cdot p$

$(m_p :\ F: z \to z^{m_p})$

2) $D = \sum n_q \cdot q \in \mathrm{Div}(Y)$

$$F^*D = \sum n_q \cdot F^*q = \sum n_q \sum_{p \in F^{-1}(q)} m_p(F) \cdot p$$

иначе $\quad D : Y \to \mathbb{Z} \qquad F^*D : X \to \mathbb{Z}$

$$(F^*D)(p) = m_p(F)\, D(F(p))$$

X, Y - комп. РП

Лемма: $F : X \to Y$ - непост. голом. отобр.

1) $F^* : \mathrm{Div}\, Y \to \mathrm{Div}\, X$ — гомом. гр.

2) $F^* : \mathrm{PDiv}\, Y \to \mathrm{PDiv}\, X$ — — " —

3) $\deg F^*D = \deg F \cdot \deg D$

$$\left(\deg F = \sum_{p \in F^{-1}(y)} m_p(F) \right)$$

$\square$ 1) — ....

2) $D = (f) \in \mathrm{PDiv}\, Y$

$$(F^*D)(p) = m_p(F)\underbrace{D(F(p))}_{=\nu_{F(p)}(f)} = m_p(F)\,\nu_{F(p)}(f)$$

Du $\quad g = f \circ F \quad \nu_p(g) = m_p(F)\cdot \nu_{F(p)}(f)$

$D' = (g) \quad : \quad D' = F^*D$.

3) – ...

Lemma: $f \in \mathcal{M}_X \setminus \mathbb{C}$, $\quad F: X \to \mathbb{C}_\infty$ – corr. holom. mapp. Then $F^*(0) = (f)_0$

$F^*(\infty) = (f)_\infty$

□ $$F^*(0) = \sum_{p \in F^{-1}(0)} \underbrace{m_p(F)}_{\nu_p(f)} \cdot p = \sum_{\nu_p(f)>0} \nu_p(f)\cdot p = (f)_0$$

$p: f(p) = 0$

$$f^*(\infty) = \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} m_p(f)\cdot p = (f)_\infty$$

$m_p(f) \leftarrow -\nu_p(f)$

$p \in f^{-1}(\infty)$ ↑ полюса f

$$\Big(\ (f) = (f)_0 - (f)_\infty \ \Big)$$

$\blacksquare$

Опр: $f: X \to Y$ — голом., непост., комп. X, Y

Def. разветвления (ramification)

$$R_f = \sum_{p \in X} (m_p(X) - 1)\cdot p \in \operatorname{Div} X$$

Def ветвления (branch)

$$B_f = \sum_{q \in Y} \Big(\sum_{p \in f^{-1}(q)} (m_p(f) - 1) \Big)\cdot q \in \operatorname{Div} Y$$

Вспомним ф. Гурвица:

$$2g(X) - 2 = (2g(Y) - 2)\cdot \deg f + \underbrace{\sum_{p \in X} (m_p(f) - 1)}_{\deg R_f}$$

Док-во обычн. ф. Гурвица.

Теорема. $F : X \to Y$ — " —, $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}_Y \setminus \{0\}$

$$(F^*\omega) = F^*\underbrace{(\omega)}_{\text{наивн. див.}} + R_F$$

Лемма: — " —, $p \in X$

$$\nu_p(F^*\omega) = (1 + \nu_{F(p)}(\omega))\, m_p(F) - 1$$

□ $m_p(F) = n$, $k = \nu_{F(p)}(\omega)$

в окр. p — ω в окр. $F(p)$

$F: w = z^n = h(z)$ — если для $\omega = g(w)\,dw$

$g(w) = c w^k + \dots$

$F^*\omega$: $g(h(z))\, h'(z)\, dz =$

$= (c z^{nk} + \dots)\, n z^{n-1}\, dz = (cn\, z^{nk+n-1} + \dots)$

$\nu_p(F^*\omega) = nk + n - 1 =$

$= (1+k)n - 1$ ∎

Лемма: X – комп., $g(X) = g$, $\mathcal{M}_X \neq \mathbb{C}$

Тогда $\deg(\omega) = \deg[(\omega)] = 2g-2$

$\square$ $\exists\, f \in \mathcal{M}_X$ $f \not\equiv const$

$F: X \to \mathbb{C}_\infty$ – голом. отобр.

пусть $\deg F = d$. ф. ~~Гу~~ Гурвица

$$2g-2 = -2\cdot d + \sum (m_p(F) - 1).$$

$$\omega = dw \in \mathcal{M}^{(1)}_{\mathbb{C}_\infty} \quad (\nu_\infty(\omega) = -2,\ \nu_p(\omega) = 0 \ \forall p \neq \infty)$$

$$\eta = F^*\omega \in \mathcal{M}^{(1)}_X$$

$$\deg \eta = \sum \nu_p(\eta) = \sum \nu_p(F^*\omega) =$$

$$= \sum_{p\in X} ((1+\nu_{F(p)}(\omega))\, m_p(F) - 1) =$$

$$= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in f^{-1}(q)}} (m_p(f) - 1) + \sum_{\substack{q = \infty \\ p \in f^{-1}(\infty)}} (-m_p(f) - 1) =$$

$$= \underbrace{\sum_{p} (m_p(f) - 1)}_{2g-2+2d} - \underbrace{\sum_{p \in f^{-1}(\infty)} 2 \cdot m_p(f)}_{2d} =$$

$$= 2g - 2$$

i.e. $\deg(\eta) = 2g - 2$

$\deg\{(\eta)\}$ $\blacksquare$

$(f^{*}\omega) = f^{*}(\omega) + R_f$ $\square$ ... $\blacksquare$

$\deg(f^{*}\omega) = \deg f^{*}(\omega) + \deg R_f$

Приложения к кривым

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} / \mathbb{C}^* = \{ [z_0 : \ldots : z_n] = [\lambda z_0 : \ldots : \lambda z_n], \ \lambda \in \mathbb{C}^* \}$

в $\mathbb{P}^2$ гладкие кривые

$X = \{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0 \}$

F — однор. многоч., гладкость, т.е. не бывает т.: реш. реш. сист.

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Опр.: $P \cap X \subset \mathbb{P}^n$ наз. гладк. многообр., если $\forall p \in X$ $\exists$ окрестн. $[z_0 : \ldots : z_n]$:

1) $z_j \neq 0$ в p

2) $\forall k \quad \frac{z_k}{z_j} \in \mathcal{O}_p$ (голом. в окр. p)

3) $\exists\, i : \frac{z_i}{z_j}$ — гол. необр. в окр. p

<u>Лемма</u>: X — замкн. подмн. в $\mathbb{P}^n$, $\deg G = \deg H$, G, H — однор. многоч., $H \not\equiv 0$ на X. Тогда $\frac{G}{H} \in \mathcal{M}_X$

$\square$ ... $\blacksquare$

<u>Лемма</u>: $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкая проективная кривая $\Rightarrow$ X — компакт. поверх.

$\square$ ... $\blacksquare$

<u>Следствие</u> / Опр: X — компакт. поверх. Тогда X наз. проективн. кривой.

X — компл. кривая в $\mathbb{P}^n$

Опр.: G — однор. многоч., $G \not\equiv 0$ на X.

Дивизор нулей многочлена $\operatorname{div} G \in \operatorname{Div} X$.

$p \in X$

- $G(p) = 0$, возьмём однор. H: $\deg H = \deg G$, $H(p) \neq 0$ (по опр. гладкой кривой $\exists\, z_i \neq 0$, $H = z_i^d$, $d = \deg G$) $f = \frac{G}{H} \in \mathcal{M}_X$

$(\operatorname{div} G)(p) = \nu_p(f) > 0$, т.к. $f(p) = 0$

- $G(p) \neq 0$, $(\operatorname{div} G)(p) = 0$

Лемма: $\operatorname{div} G$ корр. опр.

□ H_1 — др. многоч. той же ст.

$f_1 = \frac{G}{H_1} = \frac{G}{H}\,\frac{H}{H_1} = f \cdot h_1$, $h_1(p) \neq 0$

$\nu_p(f_1) = \nu_p(f) + \underbrace{\nu_p(h_1)}_{=0} = \nu_p(f)$ ■

Лемма: $\operatorname{div}(G_1 G_2) = \operatorname{div} G_1 + \operatorname{div} G_2$

□ ... ■

Опр.: Если $\deg G = 1$, то $\operatorname{div} G$ наз. див. гиперплоского сечения

Лемма: Если $f = \frac{G_1}{G_2}$ (т.е. $f \in M_X$), то $(f) = \operatorname{div} G_1 - \operatorname{div} G_2$, т.е. $[\operatorname{div} G_1] = [\operatorname{div} G_2]$ т.к. $\deg \operatorname{div} G_1 = \deg \operatorname{div} G_2$

□ $\nu_p(f) = \nu_p\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = \nu_p\left(\frac{G_1}{H} \cdot \left(\frac{G_2}{H}\right)^{-1}\right) = \nu_p\left(\frac{G_1}{H}\right) - \nu_p\left(\frac{G_2}{H}\right)$ ■

В случае $\mathbb{P}^2$ $X: F(x, y, z) = 0$

$\deg F = d$ наз. степенью X

Опр.: X — гладк. кривая в $\mathbb{P}^n$,

D — гип. плоскостное сечение

степенью X наз. $\deg D$. обозн. $\deg X$. (Корректн. опр. т.к. $\deg D_1 = \deg D_2$)

<u>Лемма</u>: Для $X \subset \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0$

$\deg F = d$, $\deg X = \deg F$.

□ $\deg X = \deg \operatorname{div} G_1$. G_1 — лин. форма $\deg G_1 = 1$

Без ограничения: $G_1 = x$,

$[0:0:1] \in X$ (замена коорд.)

в отм. $\operatorname{div} G_1$ если ф-я H_1

конст $H_1 = y$, обозн $h = \frac{x}{y} \in \mathcal{M}_X$

$$\operatorname{div} G_1 = \operatorname{div} x = \begin{cases} \nu_p(h), & G_1(p) = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = (h)_0$$

$H : X \to \mathbb{C}_\infty$ — морфизм. h — мером. функц.

$H^* 0 = (h)_0$

$$\underset{\displaystyle \deg (h)_0 = \deg \operatorname{div} x.}{\overset{\displaystyle \|}{\deg H^* 0}} = \deg H \cdot \underbrace{\deg \overset{1\cdot 0}{0}}_{=1} = \deg H$$

$\deg H$ — ?

Пусть $H(p) = \lambda \in \mathbb{C}$, $p = [x : y : z]$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \lambda$, $x = \lambda y$, $p = [\lambda y : y : z]$

$p \in X$, т.ч. $f(p) = 0$, если $x = 0$ или $y = 0$

$p = [0:0:t] = [0:0:1] \notin X$ — $><$

$\Rightarrow$ $x \neq 0$, $y \neq 0$

Т.о. $p = [x:y:z] = [\lambda y : y : z] =$

$= [\lambda : 1 : z]$

$\pi^{-1}(p) = \{ [\lambda : 1 : z] : \underbrace{F(\lambda, 1, z)}_{f_\lambda(z)} = 0 \}$

$\deg f_\lambda = d$

$\exists \lambda :$ $f_\lambda(z) = 0$ — имеет d разн. корней кратности 1

(иначе $><$ с [illegible])

Т.о. $|\pi^{-1}(p_\lambda)| = d$ $\Rightarrow$ $\deg \pi = d$ ∎

Теорема (Безу): X — гладк. кривая в $\mathbb{P}^n$ рП, $\deg X = d$. G — однор. $\deg G = e$. $G \not\equiv 0$ на X.

Тогда $\deg \operatorname{div} G = \deg G \cdot \deg X = d \cdot e$

Следствие: $X \subset \mathbb{P}^2$ $F = 0$,

$\deg \operatorname{div} G$ — число множеств. пересеч. G и F с кратност. $= \deg F \cdot \deg G$

Д (Безу) $\operatorname{div} H$ — гип. плоское сеч.

$\deg H = 1$, $\deg H^e = e = \deg G$

$\operatorname{div} H^e$ — гип. пересеч.

$\deg \operatorname{div} H^e = \deg \operatorname{div} G$

$= e \cdot \deg \operatorname{div} H = e \cdot d$. ∎

Лекция 7 :

Лемма: X : $F(x, y, z) = 0$ — гладкая

$\pi : X \to \mathbb{P}^1$: $[x : y : z] \longmapsto [x : z]$

$k_p(\pi) > 1 \iff \dfrac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$

$\deg \pi = \deg F$

Лемма: — « — $R_\pi \equiv \operatorname{div} \dfrac{\partial F}{\partial y}$

Теорема (ф. Плюккера): $X \subset \mathbb{P}^2$ — гл. $F = 0$, $\deg F = d$.

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

$\square$ $\pi : X \to \mathbb{P}^1$

ф. Гурвица

$$2g(X) - 2 = (\deg \bar{\pi})(2\underbrace{g(\mathbb{P}^1)}_{=0} - 2) + \deg R_{\bar{\pi}}$$

$$\deg R_{\bar{\pi}} = \deg \operatorname{div} \frac{\partial F}{\partial s} = \underbrace{\deg X}_{d} \cdot \underbrace{\deg \frac{\partial F}{\partial s}}_{d-1}$$

d.h. $\quad 2g - 2 = -2d + d(d-1)$ $\blacksquare$