# Листок 8
# 8 (2.4). Характеры. Суммы Гаусса

**Упражнения и задачи**

1. Пусть $G$ — конечная абелева группа, $H$ — собственная подгруппа, $g \in G$, $g \notin H$. Докажите, что существует характер $\chi$ группы $G$ такой что $\chi(g) \neq 1$ и $\forall h \in H$ $\chi(h) = 1$.

2. Пусть $G$ — конечная абелева группа, $\widehat{G}$ — группа характеров, $H < G$ — подгруппа, $A < \widehat{G}$ — аннигилятор $H$: $A = \{\chi \in \widehat{G} : \forall h \in H \ \chi(h) = 1\}$. Докажите, что $A \cong G/H$ и что $H \cong \widehat{G}/A$.

3. Пусть $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ — прямое произведение конечных абелевых групп (множество $k$-кортежей с операцией $(g_1, \ldots, g_k)(h_1, \ldots, h_k) = (g_1h_1, \ldots, g_kh_k)$). Докажите, что $\widehat{G} \cong \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_k}$.

4. Основная теорема о стуктуре конечных абелевых групп утверждает, что каждая такая группа изоморфна прямому произведению конечного числа циклических групп. Выведете из этой теоремы, что если $G$ — конечная абелева группа, то $\widehat{G} \cong G$.

5. Пусть $G$ – конечная абелева группа, $m > 0$ — целое. Докажите, что $g \in G$ является $m$-ой степенью в $G \iff \forall$ характера порядка $m$ выполняется $\chi(g) = 1$.

6. Покажите, что для аддитивных характеров $\psi_a$, $\psi_b$ поля $\mathbb{F}_q$ выполняется $\psi_a\psi_b = \psi_{a+b}$, и что из этого следует изоморфизм аддитивной группы $\mathbb{F}_q$ группе аддитивных характеров поля.

7. Докажите, что для аддитивного характера $\psi = \psi_1$ поля $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ для всех $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $j \in \mathbb{Z}_+$ справедливо $\psi_1(\alpha^{p^j}) = \psi_1(\alpha)$.

8. Пусть $\chi'$ — мультипликативный характер $\mathbb{F}_{q^s}$ порядка $m$, $\chi$ — ограничение $\chi'$ на $\mathbb{F}_q$. Докажите, что $\chi$ — мультипликативный характер $\mathbb{F}_q$ порядка $m/(m, (q^s-1)/(q-1))$.

9. Пусть $\chi$ — мультипликативный характер $\mathbb{F}_q$ порядка, $\chi'$ — продолжение $\chi$ на $\mathbb{F}_{q^s}$. Докажите, что $\chi'(a) = \chi(q)^s \ \forall a \in \mathbb{F}_q^*$.

10. Пусть $p \neq 2$, $ab \not\equiv 0\,(p)$, $\chi$ — квадратичный характер $\mathbb{F}_p^*$. Докажите, что
    - $G(\chi, \psi_a)G(\chi, \psi_b) = \left(\dfrac{-ab}{p}\right)p$;
    - $\sum_a G(\chi, \psi_a) = 0$.

11. Пусть $p > 2$, $G = \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i x^2/p}$ — сумма Гаусса для квадратичного характера, $A = (a_{st})_{0\leqslant s,t\leqslant p-1}$ — $p \times p$ матрица с элементами $a_{st} = e^{2\pi i st/p}$. Докажите, что:
    - если $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ – характеристические числа матрицы $A$, то $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k = G$;
    - характеристический многочлен матрицы $A^2$ имеет вид: $(t-p)^{(p+1)/2}(t+p)^{(p-1)/2}$;
    - для определителя матрицы $A$ справедливо $\det A = i^{p(p-1)/2}p^{p/2}$.

12. Пусть $q = p^n, p > 2$. Определим аналог символа Лежандра для $\mathbb{F}_q$: $\left(\frac{\alpha}{q}\right) = 1$, если $\alpha$ — квадрат в $\mathbb{F}_q$; $\left(\frac{\alpha}{q}\right) = 1$, если $\alpha$ не является квадратом в $\mathbb{F}_q$; $\left(\frac{0}{q}\right) = 0$. Докажите следующие свойства этого символа:
    - $\left(\frac{\alpha\beta}{q}\right) = \left(\frac{\alpha}{q}\right)\left(\frac{\beta}{q}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$;

- $\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{\alpha}{q}\right)=0$;
- $\left(\frac{\alpha}{q}\right)=\left(\frac{\mathrm{N}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha)}{p}\right)$ — обычный символ Лежандра $\pmod p$.

13. Докажите свойства обобщенных сумм Гаусса для конечного подя $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$:
    - $G(\chi,\psi_{ab})=\chi(a)G(\chi,\psi_b)$, $a\in\mathbb{F}_q^*$, $b\in\mathbb{F}_q$;
    - $G(\chi,\bar\psi)=\chi(-1)G(\chi,\psi)$;
    - $G(\bar\chi,\psi)=\chi(-1)\overline{G(\chi,\psi)}$;
    - $G(\chi,\psi)G(\bar\chi,\psi)=\chi(-1)q$, $\chi\neq\chi_0$, $\psi\neq\psi_0$;
    - $G(\chi^p,\psi_b)=G(\chi,\psi_{\sigma(b)})$, $b\in\mathbb{F}_q$, $\sigma$ — автоморфизм Фробениуса.
14. Пусть $f:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$, $\hat f=\frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q}f(t)\overline{\psi(st)}$ — конечное преобрахование Фурье. Докажите, что $f(t)=\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\hat f(s)\psi(st)$.

**SageMath**

- Исследуйте основные функции SageMath связанные с группой характеров конечных абелевых групп:
  - `character_table()`.

**Темы для самостоятельного изучения**

- Докажательство квадратичного закон взаимности через суммы Гаусса. [IR], §7.3; [LN], §5.2.