" Приложения теоремы Римана Роха "

$\circ$ T(R.R.) X — АК, $D \in \operatorname{Div} X$

$$\dim L(D) = \deg D - g(X) + 1 + \dim L^{(1)}(-D)$$

$$\dim L^{(1)}(-D) = \dim L(K-D) = \dim \Omega'(D)$$

$K = (\omega)$ — канонич. див.

<u>Классификация $\overset{\text{малых}}{\vee}$ РП (АК)</u>

($g = 0$)

<u>Лемма</u>: X — комп. $\exists\, p \in X$: $\dim L(p) > 1$

Тогда $X \cong \mathbb{C}_\infty$

$\square$ $\dim L(p) > 1 \Rightarrow \exists\, f \in L(p) \setminus \mathbb{C} \subset \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$;

p — единств. полюс

Соотв. голом. отобр. $F: X \to \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\left(F: \begin{array}{l} x \mapsto f(x) \\ p \mapsto \infty \end{array} \right)$ $\deg F = m_p(f) = 1$

$\Rightarrow X \simeq \mathbb{C}_\infty$

<u>Следствие</u>, X — комп., $g(X) \geq 1$

$\Rightarrow \forall p \in X \quad L(p) \cong \mathbb{C}$

<u>Теорема</u>: X — АК $g(X) = 0 \Rightarrow X \simeq \mathbb{C}_\infty$

$\square$ $p \in X$ $K = (\omega)$ $\deg K = 2g-2 = -2$

$\deg(K-p) < 0$ $(= -2, -3)$

$\Rightarrow \dim L(K-p) = 0$

Р.Р. $\dim L(p) = \underbrace{\deg p}_{=1} + 1 - \underbrace{g}_{=0} + \underbrace{\dim L(K-p)}_{=0}$

$= 2$

$\Rightarrow X \sim C_\infty$ ■

$g = 1$

<u>Теорема</u>: X – АК $g(X) = 1 \Rightarrow X$ изом. неособой плоской кубике степ. 3 в $\mathbb{P}^2$

□ лемма g D : $\deg D \geq 2g+1 = 3$

$\varphi_D : X \to \mathbb{P}^2$, $\deg \varphi_D(X) = 3$ ■

<u>Теорема</u>: X - АК $g(X) = 1 \Rightarrow X \simeq \mathbb{C}/L$

– полн. реш.

□ Д-во из осн. Р.Р. $\{h : r\}$ ■

$g = 2$

<u>Теорема</u>: X - АК $g(X) = 2$, X – гипер. элл. кривая.

Теорема: [illegible] [illegible] — [illegible] X

[illegible] 1 [illegible] [illegible].

□ $M(X)$ — [illegible] [illegible], [illegible]

[illegible] $X = X_1 \cup X_2$

$p \in X_1$, $D = (g+1)p$

Р.-Р. $\dim L(D) \geq \deg D + 1 - g = 2$

$\Rightarrow \exists f \in L(D) \subset M(X)$, D — [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] f — [illegible] на X_2

$\Rightarrow f$ [illegible] на X_2 $\Rightarrow f$ — [illegible] на X ■

<u>Теорема Абеля и Якоби</u>

• $X = \mathbb{C}_?$ $\quad D \in \mathrm{Div}(X) \iff \deg D = 0$

$D = (f)$

$\circ$ $X = \mathbb{C}/L$ $\quad D \in PDiv\, X$ (?) $\quad \deg D = 0$

$A(D) = 0$

$\Leftrightarrow$ A - smooth Abel (-Jacobi [illegible])

$A : Div(\mathbb{C}/L) \to \mathbb{C}/L : \sum n_i P_i \mapsto \sum n_i P_i$ sum mod L

Our setup: X - RS, $g(X) = g$

$\Omega^1(X) \subset M^{(1)}(X)$ - holomorphic [illegible]

$A : X \to \Omega^1(X)^*$

$A(P)(\omega) = \int_{\gamma_P} \omega \quad , \gamma_P$ - path from P_0 to P

(A to $\Omega^1(X)^*/\Lambda = Jac\, X$)

Claim : A has [illegible] of P_0

Теор (Абеля): X - АК,

$D = (f) \Leftrightarrow \deg D = 0, \ A(D) = 0$

□ (Мир.) замеч. $\sqrt{}$ III ☒

Теорема Кодаиры

$H^1(D) = 0, \ L(K-D) = 0$

$(\deg D \geq 2g-1, \ H^1(D) = 0)$

Опр: $D \in \mathrm{Div}\, X$: $H^1(D) \neq 0$ наз. специальным ($\Leftrightarrow \dim L(D) \geq 1$, $\dim L(K-D) \geq 1$)

($\dim H^1(D) = i(D)$ – индекс специальн.)

Теорема (Клиффорда): D – спец.

1) $\dim L(D) + \dim L(K-D) \leq g+1$

2) $2\dim L(D) \leq \deg D + 2$ □ (Мир.) ☒

Существование диф. 1-форм

Теорема: X — АК, p_i — pts в X, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$, $\sum r_i = 0$. $\exists\ \omega \in \Omega^{(1)}(X)$, p_i — единств. полюса ($\nu_{p_i}(\omega) = -1$) и $\operatorname{Res}_{p_i} \omega = r_i$

$\square$ — $\boxed{\text{ДЗ}}$

[illegible]

А — II Рим. поверхн. Пополнение

$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1 \right\}$

действ. на $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$

$$gz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\} = \Gamma(1)$$

мод. гр.

• Главн. конгр. подгр. уровня N

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N) \right\}$$

$\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$

$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ наз. конгр. подгр. если

$\exists N : \Gamma(N) \subset \Gamma$

• $\forall$ подгр. [illegible] $Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$ — РП

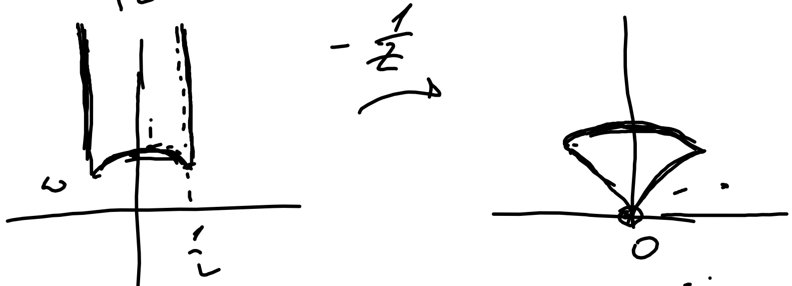
$X(\Gamma) = \overline{\mathbb{H}}/\Gamma$, $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

• Фунд. обл. — [illegible] такая [illegible]

[illegible].

$\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$

F [illegible] $\in \Gamma$



$q = e^{2\pi i z}$

$i\infty$ [illegible] 0 [illegible] [illegible] [illegible] (cusp)

i, ω [illegible] [illegible] [illegible]

• Γ – [illegible] [illegible]. z : $n_z = |\Gamma_z| > 1$

z [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] Γ

($\Gamma(1)$ $n_i = 2$, $n_\omega = 3$)

n_z [illegible] [illegible]

• Γ – [illegible], [illegible] Γz, $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

[illegible] [illegible].

$\forall z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ $\exists g \in SL_2(\mathbb{Z})$: $gz = i\infty$

$n_z = |\Gamma_{i\infty} / (g(\{\pm 1\}\Gamma)g^{-1})_{i\infty}|$

$q = e^{2\pi i \frac{z}{h}}$

- $X(\Gamma) = \overline{\mathbb{H}}/\Gamma$

$$g = 1 + \frac{d}{12} - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{3} - \frac{e_\infty}{2}$$

e_2, e_3 — число эл. точек пор. 2, 3

e_∞ — число парабол. точек

$d = \deg F$, $F: X(\Gamma) \to X(\Gamma(1))$: $\Gamma z \to \Gamma(1) z$

$g(X(\Gamma(1))) = 0$

М.Ф.:

- функц. $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ наз. модул. формой веса $2k$: $\forall g \in SL_2(\mathbb{Z})$ $\forall z \in \mathbb{H}$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z)$$

$f|_{g,2k} = \frac{1}{(cz+d)^{2k}} f(gz)$

Сл. мод. : $f|_{g,2k} = f$

• Γ — конгр. подгр. f мер.

сл. мод. $2k$: $f|_{g,2k} = f$

• нечетн. вес $2k+1$ $(-I \notin \Gamma)$

• $\Gamma(1) = \langle T, S \rangle$ (д-ть)

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Tz = z+1 \quad$ $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Sz = -\frac{1}{z}$

• f — сл. мод. $\quad f(Tz) = f(z)$

$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \parallel f(z+1)$

$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i z} \quad\quad q = 0 \leftrightarrow z = i\infty$

f — сл. мод. голом. на

f — модул. голоморф. в ∞ (2)

$f = \sum_{n \geq N} a_n q^n$ / $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$

вес $2k$

Оп: f — мод. форма (МФ) для $\Gamma(1)$

1) f — целая мод. $f|_{g,2k} = f$

2) f голом. на $\mathbb{H}$

3) f голом. в ∞

Оп: Γ — подгр. конечн. индекса. $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$

— м.ф. вес $2k$

1) $f|_g = f$ 2) голом. на $\mathbb{H}$

3) $\forall g \in SL_2(\mathbb{Z})$ $f|_g$ голом. в ∞:

$f|_g = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$.

Опр: Параб. формы — мер. ф., обр. в 0 в каждой парабол. точке (т.е. $\sum_{n\geq 0} a_n q^n$, $a_0 = 0$)

Обозн: $M_{2k}(\Gamma)$ — мер. ф.

$S_{2k}(\Gamma)$ — параб. ф-ии

Опр: f — автоморфная функция веса $2k$ для гр. Γ:

1) $f|_g = f$

2) f мер. на $\mathbb{H}$

3) мер. в парабол. точках

Обозн $A_{2k}(\Gamma)$.

$M_0(\Gamma)$, $A_0(\Gamma)$ — инв. голоморф. и мер. ф-ии на $X(\Gamma)$: $f(gz) = f(z)$

Лемма: 1) $M_0(\Gamma(1)) = \mathbb{C}$

2) $A_0(\Gamma) = \mathbb{C}(j)$ $\quad j(z) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n\geq 1} c(n)\, q^n$

□ Было в A-II, A-III ⊠

Лемма: Γ : $A_{2k}(\Gamma) = A_0(\Gamma) f$,

$f \in A_{2k}(\Gamma) \setminus \{0\}$

□ $f_0 \in A_0 = A_0(\Gamma)$ $\quad f_0(gz) = f_0(z)$

$$(f_0 f)|_g = (cz+d)^{-2k} \underbrace{(f_0 f)(gz)}_{= f_0(z)\, f(gz)} =$$

$$= \cancel{(cz+d)^{-2k}}\, f_0(z)\, \cancel{(cz+d)^{2k}}\, f(z) = f_0 f$$

$f_0 f \in A_{2k}$ $\quad A_0(\Gamma) f \subset A_{2k}(\Gamma)$

Об. $h \in A_{2k}(\Gamma)$ $\quad \frac{h}{f}(gz) = \frac{h}{f}(z)$, $\frac{h}{f} \in A_0$ ⊠

$$\frac{d}{dz} gz = \frac{d}{dz}\,\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

$f \in A_{2k}(\Gamma)$ $\qquad f(gz) = (cz+d)^{2k} f(z)$

$$f(gz)(d(gz))^k = (cz+d)^{2k} f(z)(cz+d)^{-2k}(dz)^k$$
$$= f(z)(dz)^k$$

$\omega = f(z)(dz)^k \qquad\qquad f(z)\,dz$

Опр.: $U \subset \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{M}^{(k)}(U) = \{ f(z)(dz)^k$
f - мер. ф-я $\}$

Можно опр. $\mathcal{M}^{(k)}(X)$ — мером. форм степени k

(Выч. локально $\omega_1 = f_1(dz_1)^k$. $\omega_2 = f_2(dz_2)^k$

$z_1 = \varphi(z_2) \qquad f_1(z_1)(dz_1)^k = f(\varphi(z_2))(\varphi'(z_2))^k(dz_2)^k$)

Теорема: $A_{2k}(\Gamma) \simeq \mathcal{M}^{(k)}(X(\Gamma))$

$\omega \leftrightarrow f(z)(dz)^k$, $f \in A_{2k}(\Gamma)$

□ [Diamond Shurman] ■

Следствие: $\mathcal{M}^{(1)}(X(\Gamma)) \simeq A_2(\Gamma)$

$\omega_1 \leftrightarrow f(z)\,dz$ $\quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z)$

Лемма: $\Omega^1(X(\Gamma)) \simeq S_2(\Gamma)$

Сл.: $\dim S_2(\Gamma) = g(X(\Gamma))$.

Следствие: $\mathcal{M}^{(k)}(X(\Gamma)) = \mathcal{M}(X(\Gamma))\,\omega(f)$

$\omega(f) \in \mathcal{M}^{(k)} \leftrightarrow f \in A_{2k}(\Gamma) \setminus \{0\}$ $\quad \| \; A_0(\Gamma)$

$\dim M_{2k}$. $\quad \dim S_{2k}$ $\quad S_{2k}(\Gamma) \subset M_{2k}(\Gamma) \subset A_{2k}(\Gamma)$

Что это (ω) для $\omega \in \mathcal{M}^{(a)}(X(\Gamma))$?

Опр: $\mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X) = \{ \sum n_P \cdot P : n_P \in \mathbb{Q} \}$

$(\mathrm{Div}\, X = \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X))$

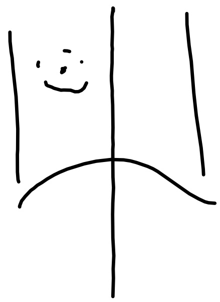
Опр: $D = \sum n_P \cdot P \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$

$[D] = \sum [n_P] \cdot P \in \mathrm{Div}(X)$.

$\omega = \omega(f) \in \mathcal{M}^{(a)}(X(\Gamma))$, $f \in A_{2k}(\Gamma)$

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Опр. $\nu_z(f)$, $z \in \mathbb{H}$

$z \mapsto P$ при $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$.

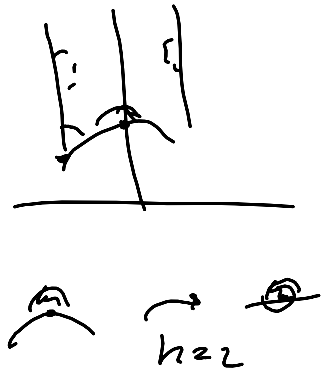


$P \in \mathring{D}$ — точка где ок

$\nu_P(\omega) = \nu_z(f)$

Если z — элл. точка $n = n_z = |\Gamma_z|$

можно положить $z = w^n$



$f(z) = a_N z^N + \dots$

$f(w) = a_N z^{N/n} + \dots$

$\nu_p(f) = \frac{1}{n} \nu_z(f)$

$\in \{ \frac{1}{2} l : l \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \frac{1}{3} l : l \in \mathbb{Z} \}$

p — параб. точка $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

$$\nu_p(f) = \begin{cases} \nu_z(f)/2, & — \\ \nu_z(f), & — \end{cases}$$

Если z не ∂D, и не элл. точка

$\nu_p(f) = \nu_z(f)$

$\omega = \omega(f)$, $f \in A_k$

$(f)' = \sum \nu_P'(f)\, P \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X(\Gamma))$.

где $\{P_{2,i}\}$, $\{P_{3,j}\}$, $\{P_{\infty,k}\}$ — [illegible]

[illegible] [illegible] 2, 3 и [illegible] e_2, e_3, e_∞ — [illegible]

$$(dz)' = -\frac{1}{2}\sum P_{2,i} - \frac{2}{3}\sum P_{3,j} - \sum P_{\infty,k} \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X(\Gamma))$$

$\omega \longleftrightarrow f(dz)^k$

$$(\omega) = (f)' + k(dz)' = (f(dz)^k)' \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}$$

<u>Лемма</u>: $(\omega) \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X(\Gamma))$,

$\deg(\omega) = 2k(g-1)$ □ [Д3] ☒

Лемма: $k \geq 1$, $f \in A_{2k}(\Gamma) \setminus \{0\}$.

Тогда $M_{2k}(\Gamma) \simeq L([(f)'])$

$\square$ $A_{2k}(\Gamma) \simeq A_0(\Gamma) f$ $\quad h \in A_{2k}$

$A_0(\Gamma) = M(X(\Gamma))$ $\quad h = f_0 f, \ f_0 \in A_0$

$M_{2k} \subset A_{2k}$ $\quad h \in M_{2k}(\Gamma) \Leftrightarrow h$ holom. на $\mathbb{H}^*$

$\forall p \quad \nu_p(h) \geq 0 \Leftrightarrow \nu_p'(h) \geq 0$

$(h)' \geq 0 \Leftrightarrow (f_0)' + (f)' \geq 0 \Leftrightarrow$

$f_0 \in A_0 = M(X(\Gamma)) \quad (f_0)' = (f_0)$

$(f_0) + (f)' \geq 0 \Leftrightarrow (f_0) + [(f)'] \geq 0$

Т.о. $M_{2k}(\Gamma) \simeq L([(f)'])$ ∎

Theorem, $k \geq 1$

$$\dim M_{2k}(\Gamma) = (2k-1)(g-1) + \left[\frac{k}{2}\right] e_2 + \left[\frac{2k}{3}\right] e_3 + k\, e_\infty$$

□ $\underset{\in \mathrm{Div}_X}{(\omega)} = \underset{\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}}{(f)'} + k \underset{\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}}{(dz)'}$

$$(f)' = (\omega) + \frac{k}{2} \sum P_{2,i} + \frac{2k}{3} \sum P_{3,j} + k \sum P_{\infty,h}$$

$$\deg\{(f)'\} = \underset{2k(g-1)}{\deg(\omega)} + \left[\frac{k}{2}\right] e_2 + \left[\frac{2k}{3}\right] e_3 + k\, e_\infty \geq$$

$$\geq \underset{2(k-1)(g-1) + 2(g-1)}{2k(g-1)} + \frac{k-1}{2} e_2 + \frac{2(k-1)}{2} e_3 + \underset{(k-1)e_\infty + e_\infty}{k\, e_\infty}$$

$=$

$$= 2g-2 + (k-1)\underbrace{\left(2g-2+\frac{1}{2}e_2+\frac{2}{3}e_3+e_\infty\right)}_{=\frac{d}{6}>0} + e_\infty$$

$$\geq 2g-2+e_\infty > 2g-2$$

$$\dim L(\varepsilon(f)') = \deg \varepsilon(f)' - g + 1 \qquad \blacksquare$$

<u>Theorem</u>: $k \geq 4$

$$\dim S_{2k}(\Gamma) = \dim M_{2k}(\Gamma) - e_\infty.$$

$\Gamma = \Gamma(1)$. $g = 0$

$$\dim M_{2k} = -(2k-1) + [\tfrac{k}{2}] + [\tfrac{2k}{3}] + k =$$

$$= \begin{cases} [\frac{k}{6}], & k \equiv 1\ (6) \\ [\frac{k}{6}]+1, & k \not\equiv 1\ (6) \end{cases} \quad \text{— see in A.II}$$