1 Пространство Римана-Роха и Линейные системы

- Пусть X - компактная риманова поверхность.
- $\mathbf{Div}\, X = \{D = \sum n_p \cdot p\}$
  $n_p = D(p), D : X \to \mathbb{Z}$
  $\mathbf{Deg}\, D = \sum n_p$
- $D = p$ – простые дивизоры
  $D = (f) = \sum \nu_p(f) \cdot p$ – главные
  $D = (w) = \sum \nu_p(w) \cdot p$ – канонические
- $\mathbb{C}/X = \mathbf{Div}\, X/\mathbf{PDiv}\, X$
- $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow D_1 - D_2 = (f) \in \mathbf{PDiv}\, X$

Определение 1.1. *$f, g \in \mathcal{M}_X, D \in \mathbf{Div}\, X$. $f \equiv g\ (D) \leftrightharpoons (f-g) \geq D$ или, что тоже самое, $\forall p \in X \quad \nu_p(f-g) \geq n_p = D(p)$*

Замечание 1.1. $D = \prod_p p^{n_p}, D_1 \leq D_2 \sim D_1 | D_2$

Определение 1.2. *$L(D) = \{f \in \mathcal{M}_X : f \equiv 0\ (-D)\}$, т.е. $f : (f) \geq -D$ или $\nu_p(f) \geq -n_p$.*
$L(D)$ – линейное пространство функций с полюсами ограниченными дивизором D [пространство Римана-Роха].
$(D(p) = n_p = n > 0 \quad f \in L(D) \Leftrightarrow \nu_p(f) \geq n$ т.е. полюс в p порядка $\leq n)$

По определению $L(0) = O_x$ – пространство голоморфных функций.

Лемма 1.1. *$D_1 \leq D_2 \Rightarrow L(D_1) \subseteq L(D_2)$*

Лемма 1.2. *X – компактная РП:*

1. *$L(0) = \mathbb{C}$*
2. *$\mathbf{Deg}\, D < 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$*

Доказательство.

1. Доказано ранее
2. $f \in L(D), \quad D_1 = (f) + D \geq 0\ \ (\nu_p(f) + n_p \geq 0) \Rightarrow \mathbf{Deg}\, D_1 \geq 0$,
   но $\mathbf{Deg}\, D_1 = \mathbf{Deg}\,(f) + \mathbf{Deg}\, D \leq 0$. Если $f \not\equiv 0$ получаем противоречие.

$\square$

Лемма 1.3. *X – компактная РП, $\mathbf{Deg}\, D = 0$*

1. *$D \sim 0 \Rightarrow \mathbf{Dim}\, L(D) = 1$*

2. $D \not\sim 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$

Доказательство.

1. $D \sim 0 \Leftrightarrow D(f)$. $\quad L(D) = \{g : \underbrace{(g) + (f)}_{=(gf)} \geq 0\}$
   $(gf) \geq 0 \Rightarrow gf \in O_x \Rightarrow gf = c \in \mathbb{C}$.
   Таким образом $L(D) = \{c \cdot \frac{1}{f}, c \in \mathbb{C}\} =< \frac{1}{f} >\Rightarrow \mathbf{Dim}\, L(D) = 1$

2. $D \not\sim 0, \mathbf{Deg}\, D = 0$
   $g \in L(D) \Leftrightarrow \underbrace{(g) + D}_{E} \geq 0$
   $\mathbf{Deg}\, E = \mathbf{Deg}\, (g) + D = 0 = \sum n_p, \quad n_p \geq 0 \Rightarrow n_p = 0 \Rightarrow E = 0$

$\square$

Лемма 1.4. $D_1 \sim D_2 \Rightarrow L(D_1) \cong L(D_2)$

Доказательство. $D_1 = D_2 + (h) \quad f \in L(D_1) \Leftrightarrow (f) \geq -D_1$
$(hf) = (h) + (f) \geq (h) - D_1 = -D_2 \Leftrightarrow hf \in L(D_2)$
Обратно: $f \in L(D_2) \to \frac{f}{h} \in L(D_1)$, т.е. умножение на h задает изоморфизм. $\square$

Определение 1.3. $L^{(1)}(D) = \{w \in \mathcal{M}_X^{(1)} : (w) \geq -D\}$
$L^{(1)}(0)$ *– пространство голоморфных форм.*

Лемма 1.5. $D_1 \sim D_2 \Rightarrow L^{(1)}(D_1) \cong L^{(1)}(D_2)$

Доказательство. Аналогично $\square$

Лемма 1.6. $L^{(1)}(D) \cong L(D + K)$, *где* $K = (w)$ *– канонический дивизор.*

Доказательство. $f \in L(D + K) \Leftrightarrow (f) + D + K \geq 0$
$fw \in \mathcal{M}_X^{(1)} \quad (fw) = (f) + K \geq -D \Rightarrow fw \in L^{(1)}(D)$
Обратно $w' \in L^{(1)}(D) \Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}_X$ (лемма лекция 7)
$(f) + D + \underset{=(w)}{K} = (fw) + D = (w') + D \geq 0$
$f \in L(D + K)$ $\square$

Теорема 1.1. $X = \mathbb{C}_\infty, \quad D \in \mathbf{Div}\, \mathbb{C}_\infty, \mathbf{Deg}\, D \geq 0$
$D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty. \quad \lambda_i \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$
$f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$, *тогда* $L(D) = \{g(z) f_D(z)\}$, *где* $g \in \mathbb{C}[z], \mathbf{Deg}\, g \leq \mathbf{Deg}\, D$

Доказательство. $L' = \{g(z) f_D(z)\}$, где $g \in \mathbb{C}[z], \mathbf{Deg}\, g \leq \mathbf{Deg}\, D$
Возьмём $g \in \mathbb{C}[z], \mathbf{Deg}\, g = d$
$(gf_D) + D = \underset{\geq -d\cdot\infty}{(g)} + \underset{=\sum(-e_i)\lambda_i + (\sum e_i)\cdot\infty}{(f_D)} + \underset{\sum e_i \lambda_i + e_\infty \cdot \infty}{D} =$
$= (-d + \sum e_i + e_\infty) \cdot \infty \geq 0 \Leftrightarrow d \leq \mathbf{Deg}\, D$
Таким образом $d \leq \mathbf{Deg}\, d \Rightarrow gf_D \in L(D), L' \subset L(D)$.

Пусть $h = L(D) \setminus \{0\}, g = \frac{h}{f_D}$
$(g) = (h) - (f_D) \geq -D - (f_D) = -(D + (f_D)) = -\underbrace{(\sum e_i + e_\infty)}_{\mathbf{Deg}\, D \geq 0} \cdot \infty \Leftrightarrow$ у g нет полюсов кроме полюса порядка $\leq \mathbf{Deg}\, d$ в точке $\infty \Rightarrow g \in \mathbb{C}[z]$ □

Следствие 1.1. $D = \mathbf{Div}\, \mathbb{C}_\infty$, *тогда* $\mathbf{Dim}\, L(D) = \begin{cases} 0, \mathbf{Deg}\, D < 0 \\ 1 + \mathbf{Deg}\, D, \mathbf{Deg}\, D > 0 \end{cases}$

Теорема 1.2. $D = \mathbb{C}/L$

1. $\mathbf{Deg}\, D < 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$
2. $\mathbf{Deg}\, D > 0 \Rightarrow \mathbf{Dim}\, L(D) = \mathbf{Deg}\, D$
3. $\mathbf{Deg}\, D = 0$
   (a) $D \sim 0 \Rightarrow \mathbf{Dim}\, L(D) = 1$
   (b) $D \not\sim 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$

Лемма 1.7. $D \in \mathbf{Div}\, X.p \in X$

- *Либо* $L(D - p) = L(D)$
- *либо* $\underbrace{\mathbf{Dim}\, L(D)/L(D-p)}_{\mathbf{codim}_{L(D)} L(D-p)} = 1$

$(D - p \leq D \Rightarrow L(D-p) \subseteq L(D))$
(*или* $\mathbf{Dim}\, L(D)/L(D-p) \leq 1$)

Доказательство. $n = -D(p).f \in L(D) \Leftrightarrow$ в окрестности p, f имеет вид $cz^m + \dots$
Рассмотрим $\alpha : L(D) \to \mathbb{C} : f \mapsto c$ – линейное отображение.
$\mathbf{Ker}\, \alpha = \{f : c = 0, \text{т. е. } \nu_p(f) > n\} = L(D-p)$.
Если $\alpha \equiv 0 \Rightarrow L(D) = \mathbf{Ker}\, \alpha = L(D-p)$
Либо $L(D)/L(D-p) \cong \mathbb{C}$ □

Теорема 1.3. *X – компактная РП. $D \in \mathbf{Div}\, x$. Тогда $\mathbf{Dim}\, L(D) < \infty$. Именно, если $D = P - N \quad P, N > 0$ тогда $\mathbf{Dim}\, L(D) \leq 1 + \mathbf{Deg}\, P$*

Доказательство. Индукция по $\mathbf{Deg}\, P$.
$\mathbf{Deg}\, P = 0 \Leftrightarrow P = 0, \;\; L(P) = L(0) = O_x \cong \mathbb{C}$, т.е. $\mathbf{Dim}\, L(P) = 1$
$D \leq P \Rightarrow L(D) \subseteq L(P) \Rightarrow \mathbf{Dim}\, L(D) \leq \mathbf{Dim}\, L(P) = 1 = 1 + 0 = 1 + \mathbf{Deg}\, P$
Пусть верно для $\mathbf{Deg}\, P \leq k - 1$
Рассмотрим для $\mathbf{Deg}\, P = k \geq 1$
$\exists p \in supp\, P : P(p) \geq 1.\;\; D - p = \underbrace{P - p}_{\geq 0} - N \qquad \mathbf{Deg}\,(P - p) = k - 1$
$\Rightarrow$ (индукция) $\mathbf{Dim}\,(D - p) \leq 1 + \mathbf{Deg}\,(P - p) = k = \mathbf{Deg}\, P$
$\mathbf{Dim}\, L(D)/L(D-p) = \mathbf{Dim}\, L(D) - \mathbf{Dim}\, L(D-p) \leq 1$
$\mathbf{Dim}\, L(D) \leq 1 + \mathbf{Dim}\, L(D-p) \leq 1 + \mathbf{Deg}\, P$ □

Следствие 1.2. *X – компактная РП, $D \in \mathbf{Div}\, X$, тогда $\mathbf{Dim}\, L^{(1)} < \infty$*

Доказательство. Следует из изоморфизма $\mathbf{Dim}\, L^{(1)}(D) \sim L(D+K)$ □

1.1 Линейные системы

Определение 1.4. *$D \in \mathbf{Div}\, X$. Полной линейной системой $|D| = \{E \in \mathbf{Div}\, X : E \sim D, E \geq 0\}$*

Лемма 1.8.

1. *$E \in |D|, |E| = |D|$*
2. *X – компактно, $\mathbf{Deg}\, D < 0 \Rightarrow |D| = \emptyset$*

Определение 1.5. *V – конечномерное векторное пространство, проективизация V: $\mathbb{P}(V) = \{$множество линейных подпространств $W \subset V, \mathbf{Dim}\, W = 1\}$*
$L(D)$, $\mathbb{P}(L(D))$ имеет смысл.

Лемма 1.9. *X - компактно, $S : \mathbb{P}(L(D)) \to |D| :< f > \mapsto (f) + D$ – 1 к 1*

Доказательство. $E \in |D|, E \sim D \Leftrightarrow E = (f) + D \geq 0 \Rightarrow (f) \in L(D)$
$S(f) = E$, т.е. S – сюръективное.
Пусть $S(f) = S(g) \Leftrightarrow (f) + D = (g) + D \Rightarrow (f) = (g) \Rightarrow (\frac{f}{g}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{f}{g} \equiv \mathbf{const} \Rightarrow f = \lambda g \Rightarrow < f > = < g >$ □

Определение 1.6. *Линейной системой Λ называется $\Lambda \subset |D|$:*
$S(\Lambda)$ – линейное пространство $\mathbb{P}(L(D))$.

Определение 1.7. *X – РП, отображение*
$\phi : X \to \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ называется голоморфным в точке $p \in X$, если
$\exists g_0, \ldots, g_n \in O_{n,p} : \phi(x) = [g_0(x), \ldots g_n(x)]$ в окрестности $p \in X$.
ϕ голоморфное $\Leftrightarrow$ если оно голоморфно $\forall p \in X$.

Лемма 1.10. *Пусть $f = (f_0, \ldots f_n) : f_i \in \mathcal{M}_X$. Такие, что не все*
$f_i \equiv 0$. $\phi_f : X \to \mathbb{P}^n : p \mapsto [f_0(p), \ldots, f_n(p)]$.
ϕ_f продолжается до голоморфного на всей РП X.

Доказательство. ϕ_f не определена в p если

1. $\exists i$ такое, что p это полюс f_i.
2. $\forall i$ такое, что p ноль f_i.

□

Т. е. $n = \mathbf{min}_{1 \leq i \leq n} \nu_p(f_i)$

- $n < 0 \Rightarrow 1)$

- $n > 0 \Rightarrow 2)$
- $n = 0$ – определено

Пусть $p : n = \mathbf{min}_{1 \le i \le n} \nu_p(f_i) = 0$.
z – карта с центром в точке p в окрестности p без других нулей и полюсов.
$g_i(z) = z^{-n} f_i z, \quad z \neq 0$. (т. е. при $x \neq p$)
$\phi_f(z) = [f_0(z), \dots, f_n(z)] = [z^n g_0(z), \dots, z^n g_n(z)] = [g_0(z), \dots g_n(z)]$, при $z \neq 0$.
Но при $z = 0$ определено значение $[g_0(z), \dots, g_n(z)]$, более того $m = \mathbf{min}\, \nu_p(g_i) \neq 0$

Лемма 1.11. *$\phi : X \to \mathbb{P}^n$ – голоморфное отображение, $\exists f = (f_0, \dots, f_n), f_i \in \mathcal{M}_X : \phi = \phi_f$. Причем в однозначном смысле $\mathbb{P}^n$, т.е. если $g = (g_0, \dots, g_n) : \phi = \phi_g$, то $\exists h \in \mathcal{M}_X : \forall i g_i = h f_i$.*

Доказательство. Идея. $z_0 \neq 0, \ \ e_i = \frac{z_i}{z_0}$.
$(z_0, \dots, z_n)$ – однородные проективные координаты.
$f_i = \phi \circ e_i$ – мероморфная. □

Определение 1.8. *Пусть $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ – голоморфное отображение. $\phi = (f_0, \dots, f_n), D = -\mathbf{min}_i (f_i)$, т.е. $D : \forall i\ f_i \in L(D) \Leftrightarrow -D \le (f_i)$.*
Пусть $V =< f_0, \dots, f_n >$ – линейная оболочка.
Линейной системой отображения ϕ называется $|\phi| = \{(g) + D : g \in V\}$
$(|\phi| \subset |D|)$

Лемма 1.12. *$|\phi|$ корректно определена.*

Лемма 1.13. *$\phi : X \to \mathbb{P}^n$ – голоморфное отображение, то $\forall p \in X\ \exists E \in |\phi| : p \notin suppE$*

Доказательство. $\phi = [f_0, \dots, f_n]$. $D = -\mathbf{min}\,(f_i)$
$D(p) = -k$, $k = \mathbf{min}_i \nu_p(f_i)$. Пусть j – на котором достигается минимум: $\nu_p(f_j) = k$.
Рассмотрим $E = (f_j) + D, E \in |\phi|$.
$E(p) = \nu_p(f_j) + D(p) = k - k = 0 \Rightarrow p \notin suppD$ □

Определение 1.9. *Λ - линейная система, $p \in X$ называется базисной (особой) для Λ, если $\forall E \in \Lambda$. $p \in suppE$*

Λ называется линейной системой без базисных точек если не существует базисных точек.

Следствие 1.3. *$|\phi|$ – линейная система без базисных точек.*

Лемма 1.14. *X - компактно. $D \in \mathbf{Div}\, X$*
$p \in X$ – базисная точка линейной системы $|D| \Leftrightarrow \mathbf{Dim}\, L(D - p) = L(D)$
$|D|$ без базисных точек $\Leftrightarrow \forall p : \mathbf{Dim}\, L(D - p) = L(D) - 1$

Пример 1.1.

- $C_\infty, \forall D, \mathbf{Deg}\, D \geq 0, \Rightarrow |D|$ *без базисных точек.*
- $\forall D \in \mathbf{Div}\, \mathbb{C}/L, \mathbf{Deg}\, D \geq 2 \Rightarrow |D|$ *без базисных точек.*

Теорема 1.4. *X – компактное, $\Lambda \subset |D|$ – без базисных точек, $\mathbf{Dim}\, \Lambda = n$. Тогда существует голоморфное отображение $\phi : X \to \mathbb{P}^n : |\phi| = \Lambda$*

Линейные системы без базисных точек соотвествуют голоморфным отображениям $\phi : X \to \mathbb{P}^n$

Теорема 1.5. *X – компактное, $|D|$ – без базисных точек. $\phi_D : X \to \mathbb{P}^n$ голоморфным вложением, т. е. $\phi_D(X) = Y$ – голоморфно вложенная поверхность.*

Пример 1.2.

1. *$\mathbb{C}_\infty \mathbf{Deg}\, D \geq 0, \phi_D$ определяет голоморфное вложение сферы.*
2. *$\mathbb{C}/L \mathbf{Deg}\, D \geq 3, \phi_D$ определяет голоморфное вложение тора.*