1 Функции на римановых поверхностях

Определение 1. *X — РП, $p \in X$, $W \subset X$ — окрестность p. $f : W \to \mathbb{C}$ — функция называется голоморфной (аналитической) в p, если $\exists$ карта $\varphi : U \to V$, $p \in U$: $f \circ \varphi^{-1}$ голоморфно в $\varphi(p)$.*

f — голоморфно на W, если голоморфно $\forall g \in W$.

Лемма 1. *X, $p \in X$, $W \subset X$, $f : W \to \mathbb{C}$ как выше. Тогда:*

1) f голоморфна в p <=> $\forall$ карты $\psi : U \to V$, $p \in U$: $f \circ \varphi^{-1}$ голоморфно в $\psi(p)$;

2) f голоморфно на W <=> $\exists$ $(\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha)$, $W \subset \bigcup U_\alpha$, $\forall \alpha$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфно на $\varphi_\alpha(W \bigcap U_\alpha)$;

3) f голоморфно в p <=> f голоморфно в окр. p.

Доказательство. 1) φ — карта из определения,

$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (f \circ \varphi^{-1})$ — голоморфно.

Урп.: 1) => 2),3). □

Лемма 2. *Если f, g — голом. в p (на W), то $f \pm g$, fg — голом. в p (W).*

Доказательство. Урп. □

Определение 2. *$\mathcal{O}_{x,w} = \mathcal{O}_w = \{f : W \to \mathbb{C}$ — голом.$\}$ называется кольцом голоморфных функций.*

Примеры. 1) $\varphi : U \to V$ — карта;

2) $X = \mathbb{C}_\infty$, $f(z)$ — голом. в окр. ∞ <=> $f(\frac{1}{z})$ голом. в окр. 0.

Если $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ — рациональная функция ($p, q \in \mathbb{C}[z]$), f голом. в окр. ∞ <=> $\deg p \leq \deg g$;

3) $X = \mathbb{P}^1$. $p(z,w), q(z,w) \in \mathbb{C}[w,d]_d$, $p = [z_0 : w_0]$, $q(z_0, w_0) \neq 0$, тогда $f([z : w]) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$ — голом. в окр. $p = [z_0 : w_0]$;

4) $X = \mathbb{C}/L$, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L : z \to z \bmod L$, f голом. в p <=> $\exists$ прообраз z точки p: $f \circ \pi^{-1}$ голом. в z;

5) $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая проективная кривая $F(x,y,z) = 0$, $p = [x_0, y_0, z_0] \in U_0 = \{x \neq 0\}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ — голом. функции.

$\forall g$ — многочлен, $g(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ голом.

$f = \frac{G}{H}$, $G, H \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$, $H(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ — голом. функции.

2 Ряды Лорана и особые точки

Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голом. в кольце $r < (z - z_0) < R$, $0 \leq r < R$, то $\exists!$ разложение в ряд Лорана (РЛ):

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=p} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$.

Типы (изолированных) особых точек.

1) Устранимая: $\forall n < 0$, $c_n = 0$;

2) Полюс: $c_n \neq 0$ для конечного числа $n < 0$, т. е. $f(z) = \sum_{n \geq -N} c_n (z - z_0)^n$;

3) Существенно особая точка: $\exists$ беск. много $n < 0$: $c_n \neq 0$.

Определение 3. *X — РП, $p \in X$, W — окр. p.*

1) p — устранимая особенность, если $\exists$ карта φ: $\varphi(p)$ — устранимая особенность для $f \circ \varphi^{-1}$;

2) p — полюс, если $\exists \varphi$: $\varphi(p)$ — полюс для $f \circ \varphi^{-1}$;

3) p — существенно особая, если $\exists \varphi$: $\varphi(p)$ — существенно особая для $f \circ \varphi^{-1}$.

Лемма 3. *f имеет изолированную особую точку типов 1,2,3 $<=>$ $\forall$ карты ψ, $\psi(p)$ — изолированная особая точка $f \circ \varphi^{-1}$ типов 1,2,3.*

Доказательство. Урп. □

Определение 4. *X — РП, $f : X \to \mathbb{C}$, $p \in X$, f называется мероморфной в p, если либо f голоморфно в p, либо имеет или устранимую ОТ или полюс в p.*

f называется мероморфной на W, если f мероморфно в q, $\forall q \in W$.

Лемма 4. *f, g — мероморфны в p (на W), то $f \pm g$, fg — мероморфны; если $g \not\equiv 0$, то $\frac{f}{g}$ — мероморфны в p (на W).*

Доказательство. Урп. Замечание про $\frac{f}{g}$: Теорема из комплексного анализа: если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ мероморфно на $W \subset \mathbb{C}$ — открытом связном множестве, то множество нулей и полюсов дискретно (изолировано). □

Определение 5. *$M_{X,W} = M_W = \{f : W \to \mathbb{C}$ — мероморфны$\}$ называется полем мероморфных функций.*

Примеры. 1) $X = \mathbb{C}$ — определение мероморфности совпадает с комплексным анализом;

2) $X = \mathbb{C}_\infty$: f мероморфно в ∞ $<=>$ $f(\frac{1}{z})$ мероморфно в 0.

Если $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ — рациональная функция, то она мероморфна в ∞. Т. о. рациональные функции $\in M_{\mathbb{C}_\infty}$;

3) $X = \mathbb{P}^1$. $f([z : w]) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$, $p, q \in \mathbb{C}[z, w]_d$ — мероморфная функция:

($\varphi = \varphi_1$: $\underset{\{w \neq 0\}}{U} \to \mathbb{C}$, $\varphi([z : w]) = \frac{z}{w}$, $\varphi^{-1}(u) = [u : 1]$, $(f \circ \varphi^{-1})(u) = f(\varphi^{-1}(u)) = \frac{p(u,1)}{q(u,1)}$ рациональная мероморфная функция, $z \neq 0$ — аналогично);

4) $X = \mathbb{C}/L$, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$, f мероморфно на W $<=>$ $g = f \circ \pi$ мероморфно на $\pi^{-1}(w)$, $g(z + \omega) = g(z), \forall \omega \in L$;

5) $X : F(x, y, t) = 0$, $G, H \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$, $H \neq 0$, $\frac{G(x,y,z)}{H(x,y,z)}$ — мероморфно на F.

Определение 6. *X — РП, f мероморфно в $p \in X$, $z = \varphi(X)$ — карта, $\varphi(p) = z_0$, $f(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{n \geq c_N} c_n(z - z_0)^n$ — Ряд Лорана (РЛ), $c_N \neq 0$, N называется порядком функции f в p (Обозн. $\nu_p(f) = N$).*

Лемма 5. *$\nu_p(f)$ корректно определено.*

Доказательство. Пусть ψ — другая карта $w = \psi(x)$, $\psi(p) = w_0$, функция склейки $T = \varphi \circ \psi^{-1}$, $T(w) = z$: $z = T(w) = z_0 + \sum_{k \geq 1} a_k(w - w_0)^k$, $a_1 \neq 0$. Тогда $\sum_{m \geq M} c'_m(w - w_0)^m = f(\psi^{-1}(w)) = f(\varphi^{-1}(T(w))) = \sum_{n \geq N} c_n(\sum_{k \geq 1} a_k(w - w_0)^k)^n => M = N$, $c'_M = c_N a_1^N \neq 0$. □

Лемма 6. *Пусть f — мероморфно в $p \in X$, тогда*
1) f голоморфно в p <=> $\nu_p \geq 0$;
2) $f(p) = 0$ <=> $\nu_p(f) > 0$;
3) p — полюс f $(f(p) = \infty)$ <=> $\nu_p(f) < 0$;
4) p не нуль и не полюс <=> $\nu_p(f) = 0$.

Доказательство. Урп. □

Лемма 7. *1) $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$;*
2) $\nu_p(\frac{1}{f}) = -\nu_p(f)$, $\nu_p(\frac{f}{g}) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$;
3) $\nu_p(f \pm g) \geq \min(\nu_p(f), \nu_p(g))$.

Доказательство. Урп. □

Т. о. w — окр. p, $0 < \rho < 1$, $\varphi_p(f) = \rho^{\nu_p(f)}$ — неархимедова метрика поля μ_w.

Пример. $X = \mathbb{C}_\infty$, $f = \frac{p}{q}$, $f = c\prod(z - \lambda_i)^{e_i}$, λ_i — корни p или q, $\nu_{\lambda_i}(f) = e_i$, $\nu_\infty(p) = \deg q - \deg p = -\sum e_i$ => $\sum_{p \in X} \nu_p(f) = \sum e_i - \sum e_i = 0$.

3 Сфера $\mathbb{C}_\infty$

Теорема 1. $\forall f \in M_{\mathbb{C}_\infty}$, *$f = \frac{p}{q}$ — рациональная функция.*

Доказательство. Множество нулей и полюсов f дискретно, а $\mathbb{C}_\infty$ — компакт, т. е. замкн. огр. => f имеет только конечное число "$0, \infty$"$(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$. $\nu_{\lambda_i}(f) = e_i$, Пусть $r(z) = \prod_{i=1}^{k}(z - \lambda_i)^{e_i}$, r — рациональная функция (причём 0 и ∞ и ν совпадают с 0 и ∞ и ν функции f на $\mathbb{C}_\infty \setminus \infty = \mathbb{C}$). Пусть $g(z) = \frac{f(z)}{r(z)}$ — мероморфная функция, нет 0 и ∞ в $\mathbb{C}_\infty \setminus \infty = \mathbb{C}$ => g — голоморфна на $\mathbb{C}$, т.е. $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. g мероморфно в ∞, $g(\frac{1}{z}) = g(w)$, $w = \frac{1}{z}$, $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$ — мероморфна => $\exists N$: $\forall n \geq N$ $c_n = 0$ => $g \in \mathbb{C}[z]$. Если $g \neq \text{const}$, $\exists z_0 : g(z_0) = 0$ => ?!! => $g = \text{const}$, $f = cr$. □

Следствие 1. $\forall f \in M_{\mathbb{C}_\infty}$, $\sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \nu_p(f) = 0$.

4 Проективная прямая $\mathbb{P}^1$

Если $p, q \in \mathbb{C}[z, w]_d$, $q \neq 0$, $f = \frac{p}{q}$: $f(z, w) = w^d f(\frac{z}{w}, 1) = w^d c \prod(\frac{z}{w} - \lambda_i)^{e_i} = \prod(b_i z - a_i w)^{e_i}$.

Теорема 2. $\forall f \in M_{\mathbb{P}^1}$, $f = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{C}[z, w]_d$.

Доказательство. Урп., аналогично $\mathbb{C}_\infty$. □

Следствие 2. $\forall f \in M_{\mathbb{P}^1}$, $\sum \nu_p(f) = 0$.

5 Тор $\mathbb{C}/L$

$L = L(1,\omega) = L_\omega$, $\omega \in \mathbb{H} = \{z : Im\ z > 0\}$. $\theta(\omega, z) = \theta_\omega(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(2lz+l^2\omega)}$, $\theta(\omega) = \theta(\omega, 0)$, $\theta_\omega(z+1) = \theta_\omega(z)$, $\theta_\omega(z+w) = e^{-\pi i(2z+w)}\theta_\omega(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. (Упр.)

Лемма 8. *1) θ_ω голоморфна на $\mathbb{C}$;*

2) $\theta_\omega(z_0) = 0 <=> \theta_\omega(z_0 + m + n\omega) = 0$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$;

3) $\nu_{z_0}(\theta_\omega) = \nu_{z_0+m+n\omega}(\theta_\omega)$;

4) Нули имеют вид: $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} + m + n\omega$, $\nu_{z_0}(\theta_\omega) = 1$.

Доказательство. Урп.; надо рассмотреть $\int_{p(1,\omega)} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz$. □

Обозн. $\theta_\omega^{(x)}(z) = \theta_\omega(z - \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} - x)$.

Лемма 9. $\theta_\omega^{(x)}(z+1) = \theta_\omega^{(x)}(z)$, $\theta_\omega^{(x)}(z+\omega) = -e^{-2\pi i(z-x)}\theta_\omega^{(x)}(z)$.

Теорема 3. *$x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le d$: $\sum_{i=1}^d x_i - \sum_{i=1}^d y_i \in \mathbb{Z}$, Тогда $f = \prod_{i=1}^d \theta_\omega^{(x_i)}(z) / \prod_{i=1}^d \theta_\omega^{(y_i)}(z) \in M_{\mathbb{C}/L}$ (Или f мероморфно на $\mathbb{C}$ и L-периодическая).*

Доказательство. f — мероморфно, т.к. $\theta_\omega^{(x)}$ голоморфно, $f(z+1) = f(z)$ — из $\theta_\omega^{(x)}$. $f(z+\omega) = \prod_i \theta_\omega^{(x_i)}(z+\omega) \prod_j (\theta_\omega^{(y_j)}(z+\omega))^{-1} = \prod_i(-e^{-2\pi i(z-x_i)}\theta_\omega^{(x_i)}(z)) \prod_j(-e^{-2\pi i(z-y_j)}\theta_\omega^{(y_j)}(z))^{-1} = e^{-2\pi i(\sum y_i - \sum x_i)}f(z) = f(z)$. □

Замечание 1. *Идея похожа на $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 = \{[z : w] = [\lambda z : \lambda w]\} = \mathbb{C}^2_{\neq(0,0)}/\mathbb{C}^*$, т.е. $\mathbb{C}^*$ действует на $\mathbb{C}^2_{\neq(0,0)}$ умножениями $(z, w) \to (\lambda z, \lambda w)$.*

$f \in M_{\mathbb{P}^1}$, $f = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$ — инвариантны относительно этого действия, $f(\lambda z, \lambda w) = \frac{\lambda^d p(z,w)}{\lambda^d q(z,w)} = f(z, w)$.

6 Гладкие кривые

Теорема 4. *X — гладкая афинная кривая $f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — невырожденный многочлен, $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$, $f \nmid q$. тогда $h = \frac{p}{q} \in M_x$.*

Теорема 5. *X — гладкая проективная кривая $F(x, y, z) = 0$, $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$, $F \nmid Q$, тогда $H = \frac{P}{Q} \in M_x$.*

Теорема 6. *(Гильберта о нулях) Пусть $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — неприводимый многочлен, $g \in \mathbb{C}[x, y]$: $g(x, y) = 0$ $\forall (x, y) : f(x, y) = 0$, тогда $f|g$.*