Лекция №7 «Пространства функций дивизоров и линейные системы». Курс А-III

Турашев Артём Сергеевич 619/2

25 октября 2025

- В прошлый раз было введено понятие голоморфных/мероморфных дифференциалов.

$1-$ форм : $\quad \omega = f(z)dz$

Если $\quad \omega_1 = f(z)dz, \quad \omega_2 = g(w)dw \quad \omega_1$ переходит в ω_2, если $g(w) = f(T(w))T'(w), \quad T = \varphi \circ \psi^{-1}$

- (Теорема о вычетах) : Если $X-$компактная РП, то $\forall \omega \in M_x^{(1)} \quad \sum_{p\in X} Res_p\omega = 0 \quad (Res_p\omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_p}\omega)$
- $Div(X) = \{D = \sum_{p\in X} n_p \cdot p, \quad n_p = 0$ для почти всех p$\}$

supp D $= \{$p: $\quad$ n$_p \neq 0\}$

deg D $= \sum n_p$

D $= \prod_{p\in X} p^{n_p}$

D: X $\to \mathbb{Z}$

- $(f) = \sum \nu_p(f)\cdot p -$ главные дивизоры, $\quad PDiv(X) = \{(f)\}$

$(\omega) = \sum \nu_p(\omega)\cdot p -$ канонические дивизоры, $\quad KDiv(X)$

- $Cl(X) = Div(X)/PDiv(X)$

$([D_1] = [D_2] \Leftrightarrow D_1 \sim \mathrm{D}_2 \Leftrightarrow D_1 \cdot D_2 = (f) \in PDiv$

$(Cl(X) = Pic(X))$

- $T : \forall \omega_1, \omega_2 \in M_X^{(1)} \quad \omega_1 \sim \omega_2$
- $deg(f) = 0 \Rightarrow D_1 \sim \mathrm{D}_2 \Rightarrow degD_1 = degD_2$

F: X $\to Y -$ голоморфное непостоянное отображение РП

$\forall W \subset Y -$ открытое, также есть функция $\quad g \in O_{W,Y} \quad X \to^F Y \to^g \mathbb{C}$

(по этому утверждению следует то, что $\quad X \to^{g\circ F} \mathbb{C}$)

$F -$ индуцирует отображение $\quad F^* : O_{W,Y} \to O_{F^{-1}(W),X}$

Аналогично $\quad$ F$^* : M_{W,Y} \to M_{F^{-1}(W),X}$

Для 1-форм: $\quad \varphi : u \to v -$ карта на X, $\quad \psi : u' \to v' -$ карта на Y : $\quad F(u) \subset u'$

$z = \varphi(x), \quad w = \psi(y) -$ локальные координаты.

Fв координатах $\quad z, w \quad$ имеет вид $\quad w = f(z)$

Пусть $\quad \omega \in \Omega_y \quad$ (мероморфн $\in M_Y^{(1)}) \quad w = g(w)dw$

Опредление 1. $F^*w = g(f(z))f'(z)dz -$ *прообраз формы*

Лемма 1. $F^* : \Omega_Y \to \Omega_X; \quad F^* : M_Y^{(1)} \to M_X^{(1)}$

$\square \ldots \blacksquare$

Для $\quad$ Div:

Определение 2. *1)* $D = q \in DivY \quad F^*D = \sum_{p\in F^{-1}(q)} m_p(F)\cdot p \quad (m_p: \quad F:\mathbb{Z}\to \mathbb{Z}^{m_p})$

2) $\quad D = \sum n_q \cdot q \in Div(Y)$

$F^*D = \sum n_q \cdot F^*q = \sum n_q \sum_{p\in F^{-1}(q)} m_p(F)\cdot p$

или: $\quad D: Y\to\mathbb{Z} \quad F^*D: X\to\mathbb{Z}$

$(F^*D)(p) = m_p(F)D(F(p))$

Лемма 2. *F: $X\to Y$ – голоморфное непостоянное*

1) $\quad F^*: \quad DivY \to DivX$ – *гомоморфизм групп*

2) $\quad F^*: PDivY \to PDivX$ – *гомоморфизм групп*

3) $\quad degF^*D = degF\cdot degD \quad (degF = \sum_{p\in F^{-1}(Y)} m_p(F))$

□ $\quad$ 1) – ...

2)$D = (f)\in PDivY$

$(F^*D/(p)) = m_p(F)D(F(p)) = m_p(F)\nu_{F(p)}(f)$

для $\quad g = f\circ F \quad \nu_p(g) = m_p(F)\nu_{F(p)}(f)$

$D' = (g): \quad D' = F^*D.$

3) – ... $\quad$ ■

Лемма 3. $f\in M_X\backslash\mathbb{C}, \quad F: X\to C_\infty$–*соответствующее голоморфное отображение. Тогда:*

$F^*(D) = (f)_0$

$F^*(\infty) = (f)_\infty$

□ $\quad F^*(D) = \sum_{p\in F^{-1}(D)} m_p(F)\cdot p = \sum_{\nu_p(f)>0}\nu_p(f)\cdot p = (f)_0$

$F^*(\infty) = \sum_{p\in F^{-1}(\infty)} m_p(F)\cdot p = (f)_\infty$

$((f) = (f)_0 - (f)_\infty)$ $\quad$ ■

Определение 3. *F: $X\to Y$–голоморфное, непостоянное отображение компактных* $\quad X, Y$

Можно определить дивизор разветвления: $\quad R_F = \sum_{p\in X}(m_p(x)-1)\cdot p\in DivX$

Можно определить дивизор ветвления: $\quad B_F = \sum_{q\in Y}(\sum_{p\in F^{-1}(q)}(m_p(F)-1))\cdot q \in DivY$

Вспомним формулу Гурвица:

2g(X) - 2 = (2g(Y)-2) $\cdot \quad degF + \sum_{p\in X}(m_p(F)-1) \quad (\sum_{p\in X}(m_p(F)-1) = degR_F)$

Более общая формула Гурвица

Теорема 1. *F: $X\to Y$ – голоморфное непостоянное,* $\quad \omega\in M_Y^{(1)}\setminus\{0\}$

$(F^*\omega) = F^*(\omega) + R_F$

Лемма 4. *F: $X\to Y$ – голоморфное непостоянное,* $\quad p\in X$

$\nu_p(F^*\omega) = (1+\nu_{F(p)}(\omega))m_p(F) - 1$

□ $\quad m_p(F) = n, \quad k = \nu_{F(p)}(\omega)$

для первого выражения означает, что в окретсности точки p $\quad F: w = z^n = h(z)$

для второго выраденxия означает, что $\quad\omega\quad$ *в окрестности* $\quad F(p) \quad$ *имеет вид*: $\quad \omega = g(\omega)d\omega \quad g(\omega) = c\omega^k + \dots$

$F^*\omega: \quad g(h(z))h'(z)dz = (cz^{nk}+\dots)nz^{n-1}dz = (cnz^{nk+n-1}+\dots)$ $\quad$ *где* $\quad \nu_p(F^*\omega) = nk+n-1 = (1+k)n-1$ $\quad$ ■

Лемма 5. *X - компактно,* $\quad g(X) = g, \quad M_X \quad$ *нетривиально*

Тогда $\quad deg(\omega) = deg\{(\omega)\} = 2g-2$

$\square \quad \exists f \in M_X \quad f \not\equiv const, \quad F: X \to \mathbb{C}_\infty -$ *голоморфное отображение*
Пусть $\quad degF = d \qquad$ *формула Гурвица*
$2g-2 = -2 \cdot d + \sum(m_p(F)-1)$
$\omega = dw \in M^{(1)}_{\mathbb{C}_\infty} \quad (\nu_\infty(\omega) = -2, \quad \nu_p(\omega) = 0 \quad \forall p \quad$ *отличного от* $\quad \infty)$
$\eta = F^*\omega \in M^{(1)}_X$
$deg\eta = \sum \nu_p(\eta) = \sum \nu_p(F^*\omega) = \sum_{p\in X}((1+\nu_{F(p)}(\omega))m_p(F)-1) =$
$\sum_{q\neq\infty, p\in F^{-1}(q)}(m_p(F)-1) + \sum_{q=\infty, p\in F^{-1}(\infty)}(-m_p(F)-1) = \sum_p(m_p(F)-1) -$
$\sum_{p\in F^{-1}(\infty)} 2 \cdot m_p(F) = \{$*первая сумма равна* $\;2g-2+2d,\quad$ *а вторая сумма равна* $\;2d\} =$
$2g-2$
то есть $\quad deg(\eta) = 2g-2 = deg\{(\eta)\} \qquad \blacksquare$

$(\mathrm{F}^*\omega) = F^*(\omega) + R_F \qquad \square \quad \ldots \quad \blacksquare$
$deg(F^*\omega) = degF^*(\omega) + degR_F$

Приложение к кривым
$\mathrm{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^n = \{[z_0,\ldots,z_n] = [\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n], \quad \lambda \in \mathbb{C}^*\}$
в $\;\mathbb{P}^2 -$ гладкие кривые $\quad X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \setminus F(x,y,z) = 0\}, \quad$ где $\quad F -$ однородный многочлен, гладкость или невырожденность $\quad F: \quad$ нет решений у системы: $\quad F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

Определение 4. *РП* $\quad X \subset \mathbb{P}^n \quad$ *наз голоморфн влож, если* $\quad \forall p \in X$
$\exists \quad$ *однородные кординаты* $\quad [z_0,\ldots,z_n]:$
1) $\quad z_j \neq 0 \quad$ *в* $\quad P$
2) $\quad \forall k \quad \frac{z_k}{z_j} \in O_p \quad$ *(голоморфна в окрестности точки p)*
3) $\quad \exists i \quad \frac{z_i}{z_j} -$ *лок коорд в окрестности точки p*

Лемма 6. *X - голоморфное, вложенное в* $\quad P^n$
$G, H -$ *однородные многочлены* $\quad degG = degH, H \not\equiv 0 \quad$ *на X. Тогда* $\quad \frac{G}{H} \in M_X$
$\square \ldots \blacksquare$

Лемма 7. $X \subset \mathbb{P}^2 -$ *гладкая проективная кривая* $\Rightarrow X -$ *голоморфно вложенная*
$\square \ldots \blacksquare$

Замечание. *X - голоморфно вложено, то X называется проективной кривой.*

X - голоморфно вложено в $\quad \mathrm{P}^n$

Определение 5. *G - однородный многочлен,* $\quad G \not\equiv 0 \quad$ *на X*
Дивизором пересечения будем обозначать $\quad divG \in divX$
$p \in X$
- $G(p) = 0, \quad$ *выберем однородный многочлен* $\quad H: \quad degH = degG.$

$H(p) \neq 0 \quad$ *(по определению голоморфной вложенности* $\quad \exists z_i \neq 0, \quad H = z_j^d, \quad$ *если* $\quad d = degG) \quad f = \frac{G}{H} \in M_X$
$(divG)(p) = \nu_p(f) > 0, \quad$ *так как* $\quad f(p) \equiv 0$
- $G(p) \neq 0, (divG)(p) = 0$

Лемма 8. *div G корректно определено*
$\square$ H_1 *— другой многочлен однородный из определения, то* $f_1 = \frac{G}{H_1} = \frac{G}{H}\frac{H}{H_1} = f \cdot h_1, \quad h_1(p) \neq 0$
$\nu_p(f_1) = \nu_p(f) + \nu_p(h_1) = \nu_p(f)$ $\blacksquare$

Лемма 9. $div(G_1G_2) = divG_1 + divG_2$
$\square \dots \blacksquare$

Определение 6. *Если deg G = 1, то div G называется дивизором гиперплоского сечения*

Лемма 10. *Если* $f = \frac{G_1}{G_2}$ *(то есть* $f \in M_X$*), то* $(f) = \operatorname{div} G_1 - \operatorname{div} G_2$, *то есть* $[\operatorname{div} G_1] = [\operatorname{div} G_2] \Rightarrow \deg\operatorname{div} G_1 = \deg\operatorname{div} G_2$
$\square$ $\nu_p(f) = \nu_p(\frac{G_1}{G_2}) = \nu_p(\frac{G_1}{H} \cdot (\frac{G_2}{H})^{-1}) = \nu_p(\frac{G_1}{H}) - \nu_p(\frac{G_2}{H})$ $\blacksquare$

В случае плоскости P^2 $X : F(x, y, z) = 0$
$degF = d$ называем степенью кривой X

Определение 7. *X - голоморфно вложено в* P^n
D *— дивизор гиперплоского сечения*
степенью X называется $degD$ *обозначается* $degX$ *(корректно определено, так как* $degD_1 = degD_2$*)*

Лемма 11. *Для* $X \subset \mathbb{P}^2 : \quad F(x, y, z) = 0 \quad degF = d, \quad degX = degF$
$\square$ $degX = degdivG_1$ G_1 *— линейная форма* $degG_1 = 1$
Будем считать, что: $G_1 = X, \quad [0 : 0 : 1] \in X$ *замена координат*
в определении дивизора пересечения есть функция H_1, *возьмем* $H_1 = y$
обозначим $h = \frac{x}{y}$

$$divG_1 = divX = \begin{cases} \nu_p(h), & G_1(p) = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = (h)_0 \qquad h = \frac{x}{y} \in M_x$$

$H : \quad X \to \mathbb{C}_\infty$ *— соотв* h *голоморфное отображение на риманову сферу*
$H^*O = (h)_0$
$degH^*O = degH \cdot degO = degH \quad (degO = 1)$
$deg(h)_0 = degdivX \quad (degH^*O = deg(h)_0)$
$degH-?$
Пусть $H(p) = \lambda \in \mathbb{C}, \quad p \in [x : y : z] \quad (H(p) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \lambda, \quad x = \lambda y,$
$p = [\lambda y : y : z])$
$p \in X$, *то есть* $F(p) = 0$, *если* $x = 0$ *или* $y = 0$
$p = [0 : 0 : z] = [0 : 0 : 1] \notin X$ *— получаем противоречие*
$\Rightarrow x \neq 0, \quad y \neq 0$
Таким образом $p = [x : y : z] = [\lambda y : y : z] = [\lambda : 1 : z]$
$H^{-1}(p) = \{[\lambda : 1 : z] : F(\lambda, 1, z) = 0 \quad (F(\lambda, 1, z) = f_\lambda(z) \quad degf_\lambda = d)\}$
$\exists \lambda : \quad f_\lambda(z) = 0$ *— имеет* d *различных корней кратности равной* 1
(иначе будет противоречие с невырожденностью)
Таким образом $|H^{-1}(p_\lambda)| = d \Rightarrow degH = d$ $\blacksquare$

Теорема 2. *(Безу) X - голоморфно вложено в* P^n *РП,* $degX = d$
G *— однор* $degG = e$ $G \not\equiv 0$ *на X. Тогда* $degdivG = degG \cdot degX \sim d \cdot e$

Следствие. $X \subset \mathbb{P}^2 \quad F = 0 \quad degdivG-$*число точек пересечения* $\quad G \quad$ *и* $\quad F \quad$ *с кратностями* $= degF \cdot degG$

$\square$ (Доказательство теоремы Безу) $\quad divH-$дивизор гиперплоского сечения $\quad degH = 1, \quad divH^e = e = degG$
$divH^e$ – дивизор пересечения
$degdivH^e = degdivG \quad (degdivH^e = e \cdot degdivH = e \cdot d) \qquad \blacksquare$

В лекции $\quad 4:$

Лемма 12. *X: F(x,y,z) = 0 - гладкая проективная плоская кривая* $\quad \pi : x \to \mathbb{P}^1 : [x : y : z] \mapsto [x : z]$
$m_p(\pi) > 1 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$
$deg\pi = degF$

Лемма 13. *(Все по аналогии с предыдущим случаем)* $\quad R_\pi = div\frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 3. *(Формула Плюккера):* $\quad X \subset \mathbb{P}^2-$*плоская гладкая проективная кривая* $\quad F = 0 \quad degF = d$
$g(X) = \frac{(d \cdot 1)(d \cdot 2)}{2}$
$\square \quad \pi : X \to \mathbb{P}^1$
формула Гурвица:
$2g(X) - 2 = (deg\pi)(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + degR_\pi$
$degR_\pi = degdiv\frac{\partial F}{\partial y} = degX \cdot deg\frac{\partial F}{\partial y} \quad$ (*они равны соответственно* $\quad d \quad$ *и* $\quad d - 1$)
Таким образом $\quad 2g - 2 = -2d + d(d - 1) \qquad \blacksquare$