Алгебраические множества и многообразия

Конспект лекций по спецкурсу А-III
«Римановы поверхности и алгебраические кривые»

Лектор: Снурницын Павел Владимирович

Конспект подготовила: Арьянова А., группа 601

На прошлых лекциях рассмотрели: *определения римановой поверхности (РП), голоморфной функции, мероморфной функции;*

Th: *Любая мероморфная функция f на сфере Римана $\mathbb{C}_\infty$ есть рациональная функция, т.е. $f = p/q$, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ – множество многочленов от комплексного переменного.*

Аналогично, для проективной прямой над комплексной плоскостью $X = \mathbb{P}' = \mathbb{P}'(\mathbb{C})$.

O_P – Кольцо голоморфных функций точки $P \in X$.

$O_P.\mathbb{C}_\infty$ – Кольцо голоморфных функций точки $P \in \mathbb{C}_\infty$.

Опр. $O_P.\mathbb{C}_\infty = \left\{ \dfrac{p(z)}{q(z)} : p, q \in \mathbb{C}[z], q(P) \neq 0 \right\}$.

Если X – гладкая аффинная плоская кривая, т.е. кривая, заданная многочленом $f(x, y) = 0$, где $f \in \mathbb{C}[x, y]$, f – невырожденный, то функции вида $n = p(x, y)/q(x, y)$, $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$, причем q не делится на f $(f \nmid q)$, являются мероморфными функциями на X.

Теорема 1 (Гильберта о нулях)**.** *Если $f \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен, $g \in \{\mathbb{C}[x, y] : g(x, y) = 0\ \forall (x, y) : f(x, y) = 0\}$ (т.е. g обращается в нуль на аффинной кривой f), то тогда f делит g $(f \mid g)$.*

Пусть k – произвольное поле, $\mathbb{P}^n(k)$ – проективное пространство над полем k. $\mathbb{P}^n(k)$ является множеством классов эквивалентности из $(n + 1)$ точек, которые пропорциональны друг другу, т.е.

$$\mathbb{P}^n(k) = \{[a_0 : \ldots : a_n] = [\lambda a_0 : \ldots : \lambda a_n]\},$$

где $\lambda \in k^*$ – ненулевой или обратимый элемент поля.

$k^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in k\} = \mathbb{A}^n(k)$ - *аффинное пространство.*

Опр. Пусть s – множество многочленов от n переменных, т.е. $s \subset k[x_1, ..., x_n]$. Множество вида

$$V(s) = \{P = (a_1, ..., a_n) \in k^n : f(P) = 0 \ \forall f \in s\},$$

т.е. множество, на котором многочлены из s обращаются в нуль, называется ***аффинным алгебраическим множеством***.

Аналогично, если $s \subset k[x_0, ..., x_n]$ – множество однородных многочленов, то множество вида

$$V(s) = V_{\mathbb{P}}(s) = \{P = [a_0 : ... : a_n] : f(P) = 0 \ \forall f \in s\},$$

называется ***проективным алгебраическим множеством***.

Если $f, g \in s, P \in V(s)$, то $(f + g)(P) = 0$.

Если $f \in s, h$ – произвольный многочлен и $P \in V(s)$, тогда $(hf)(P) = 0$.

Таким образом, естественно рассматривать идеалы кольца $k[x_1, ..., x_n]$.

Напоминание из курса А-I

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей.

Опр. Множество $I \subset R$ называется ***идеалом***, если:

1) $\forall\ f, g \in I \to f + g \in I$,

2) $\forall\ f \in I, \forall\ h \in R \to hf \in I$.

Опр. Идеал вида $I = \{hf : h \in R\} = (f)$ называется ***главным идеалом***.

Опр. Кольцо R называется ***кольцом главных идеалов (КГИ)***, если $\forall I : I = (f)$, т.е. всякий идеал из R – главный идеал.

Опр. Говорят, что f *делит* g, если $\exists\ h \in R : g = fh$. обозначение: $f \mid g$.

Опр. Элементы $f, g \in R$ называются ***ассоциированными***, если $f = ug, u \in R^*$ – единица кольца R или обратимый элемент.

Опр. Элемент $f \in R$ называется ***неприводимым***, если из того, что $f \mid g$ слеудет, что $g \in R^*$ или f, g - ассоциированные.

Опр. Элемент $f \in R$ называется ***простым***, $\iff$ $f \notin R^*$ и из того, что $f \mid gh$ следует, что $f \mid g$ или $f \mid h$.

Лемма 1 (на языке идеалов)**.**
1) $f \mid g \iff (g) \subset (f)$.
2) $f \in R^* \iff (f) = 1 = R$.
3) f, g *– ассоциированы* $\iff (f) = (g)$.
4) f *– простой* $\iff$ *если из того, что* $gh \in (f)$ *следует, что* $g \in (f)$ *или* $h \in (f)$.
5) f *– неприводимый* $\iff$ *если из того, что* $(f) \subset (g)$ *следует, что* $(g) = 1 = R$ *или* $(g) = (f)$.

Лемма 2. *Если R - кольцо главных идеалов (КГИ), то два определения совпадают, т.е. f – простой $\iff$ f – неприводимый.*

Упражнение: *доказать лемму.*

Опр. Пусть I – идеал кольца R. I называется ***простым идеалом*** $\iff$ Если из того, что $gh \in I \iff\ g \in I$ или $h \in I$.

Опр. Идеал I называется ***максимальным идеалом***, если из того, что $I \subset J$ следует, что $J = I$ или $J = (1) = R$.

Лемма 3. *Если I – максимальный, то I – простой.*

Упражнение: *доказать лемму.*

Опр. R называется ***кольцом с однозначным разложением на множители***, если $\forall\ f \in R$ однозначно раскладывается на простые множители.

Лемма 4. *Если R – КГИ, то R – кольцом с однозначным разложением на множители.*

Примеры: $\mathbb{Z}[i]$ (множество гауссовых чисел), $\mathbb{Z}[w]$ (множество Эйзенштейна) – кольца с однозначным разложением на множители.

Действительно, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$.

Опр. Кольцо R называется ***областью целостности***, если из того, что $f \cdot g = 0, f, g \in R$ следует, что $f = 0$ или $g = 0$.

Опр. Пусть $I \subset R$ – идеал. Говорят, что a ***сравнимо с*** b ***по модулю*** I (обозн. $a \equiv b(I)$), если $(a - b) \in I$ является отношением эквивалентности и фактор кольца R по идеалу I R/I – тоже кольцо.

Лемма 5.
1) I – простой идеал $\iff$ фактор-кольцо R/I является областью целостности.
2) I – максимальный $\iff$ R/I является полем.

Упражнение: *доказать лемму.*

Опр. Кольцо R называется ***нётеровым***, если для любой возрастающей последовательности по включению идеалов
$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$ $\exists N : \forall\ n \geq N \Rightarrow I_n = I_{n+1}$.

Лемма 6. *Кольцо R – нётерово $\iff$ $\forall$ идеал I конечно порожден, т.е. $\exists f_1, ..., f_r : I = (f_1, ..., f_r)$ $\iff$ для любого множества идеалов $\mathcal{A} = \{I\}$ $\exists$ максимальный по включению идеал m.*

Примеры: КГИ – нётерово, $\mathbb{Z}, F[x]$ (кольцо многочленов над полем F) – нётеровы, D_k – кольцо целых числового поля k – нётерово.

Лемма 7 (Th Гильберта о базисе)**.** *Если R – нётерово, то $R[x]$ – тоже нётерово.*

Доказательство:

Покажем, что всякий идеал конечно порожден. Пусть J – идеал кольца $R[x]$. Определим I_n следующим образом:

$$I_n = \{a \in R : \exists f \in J : f = ax^n + ...\}$$

I_n – идеал кольца R. $I_n \subset I_{n+1}$, т.к. $x \cdot (ax^n + ...) = (ax^{n+1} + ...)$. Поскольку по условию R – нётерово, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow I_n \subset I_{n+1}$ и $\forall I_n$ – конечно порожден, т.е. $I_n = (a_{n1}, ..., a_{nm_n})$.

Пусть $f_{ij} = a_{ij}x^i + ..., 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq m(i)$ – соответствующие многочлены из J. Если $J' = ((f_{ij}))$, то $J' = J$. ■

Упражнение: *доказать последнее утверждение в доказательстве леммы.*

Следствие: Если R – нётерово, то и $R[x_1, ..., x_n]$ – нётерово.

Аффинные алгебраические множества

Если задано множество многочленов s, можем взять идеал, порожденный этим множеством $I = (s)$, тогда алгебраическое множество $V(s) = V(I)$. Если $I = (f)$, то будем использовать обозначение: $V(I) = V(f)$.

Лемма 8 (процедура создания алгебр. множества по идеалу)**.**
1) $V(\cup I_\alpha) = \cap V(I_\alpha)$, *где* $\{I_\alpha\}$ *– семейство идеалов.*
2) Если $I \subset J \quad \Rightarrow \quad V(I) \supset V(J)$.
3) $V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$.
4) $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$.
5) $V(0) = k^n, V(1) = \emptyset$.
$V(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) = \{(a_1, ..., a_n)\}$.

Доказательство:

2) $P \in V(J) \iff \forall f \in J \ f(P) = 0 \Rightarrow \forall f \in I \ f(P) = 0 \iff P \in V(I)$. ■

Упражнение: *доказать остальные свойства из леммы.*

Замечание. Можно определить на k^n ***топологию Зарисского***, в которой замкнутые множества = алгебраические множества. В таком случае имеем соответствие:

$$\text{идеалы } k[x_1, ..., x_n] \xrightarrow{V} \text{алгебраические множества } X \subset k^n$$

$$I \to X = V(I).$$

Опр. Пусть $X \subset k^n$. ***Идеалом множества*** X называется $I(X) = \{f \in k[x_1, ..., x_n] : f(a_1, ..., a_n) = 0 \ \forall P = (a_1, ..., a_n) \in X\}$.

Утверждение. $I(X)$ – идеал.

Упражнение: *доказать утверждение.*

Лемма 9.

1) Если $X \subset J \quad \Rightarrow \quad I(X) \supset I(J)$.

2) $I(\emptyset) = (1) = k[x_1, ..., x_n], I(k^n) = (0)$ *(k – конечное поле).*

$I(\{(a_1, ..., a_n)\}) = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ *– максимальный идеал.*

3) $\forall X \subset k^n \Rightarrow X \subset V(I(X))$ *или* $X = V(I(X)) \iff X$ *– алгебраическое множество.*

4) Если J *– идеал кольца* $k[x_1, ..., x_n] \ \Rightarrow \ J \subset I(V(J))$.

Доказательство:

1): $f \in I(J) \iff \forall P \in J f(P) = 0$

$X \subset J \quad \Rightarrow \quad \forall P \in X \ f(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \in I(X) \ \Rightarrow \ I(J) \subset I(X)$. ■

Упражнение: *доказать остальные свойства из леммы.*

Замечание. Включение $J \subset I(V(J))$ может быть только строгим, т.е. $J \subsetneq I(V(J))$.

Рассмотрим $(f), (f^n) \quad \Rightarrow \quad V(f) = V(f^n)$, но при этом в общем случае $f \notin (f^n)$.

Таким образом, можем построить обратное соответствие:

$$\text{идеалы } k[x_1, ..., x_n] \xleftarrow{I} \text{множества } X \subset k^n$$

$$I \leftarrow X = V(I).$$

Неприводимые множества и компоненты

Опр. Алгебраическое множетсво $X \subset k^n$ называется ***неприводимым множеством***, если $\nexists$ представления $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 – алгебраические множества и $X_1, X_2 \subsetneq X$.

Теорема 2. X *– неприводимо* $\iff I(X)$ *– простой идеал* $\iff X$ *– приводимо* $\iff I(X)$ *– НЕ простой.*

Доказательство:

$\Rightarrow$

Пусть $X = X_1 \cup X_2, X_1, X_2 \subsetneq X$ – алгебраическое, $X_1 \subsetneq X_2$, т.е. X – приводимо.

$f_1 \in I(X_1)\ I(X)$

$f_2 \in I(X_2)\ I(X)$

Но $f_1 \cdot f_2 \in I(X) \Rightarrow I(X)$ – НЕ простой.

$\Leftarrow$

$I(X)$ – не простой $\Rightarrow \exists f_1, f_2 \in I(X), f_1 \cdot f_2 \in I(X)$.

Возьмем $I_1 = (I(X), f_1), I_2 = (I(X), f_2)$.

Тогда $V(I_i) = X_i$

$I(X) \subsetneq I_i, X = V(X(X)) \supset V(I_i) = X_i$, $X_i \subsetneq X$.

$\forall P \in X, \quad f_1 \cdot f_2 \in I(X) \quad \Rightarrow \quad (f_1 f_2)(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(P) = 0$

или $f_2(P) = 0$

$\Rightarrow X \subset (X_1 \cup X_2)$

$X = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2)$ – приводимое, ($X \cap X_1, X \cap X_2$ – собственные алгебраические). ■

Теорема 3. *Для любого алгебраического множества X $\exists$ представление вида $X = X_1 \cup ... \cup X_r, X_i$ – неприводимые, $X_i \not\subset X_j, i \neq j$, причём это представление единственно.*

Доказательство:

Во-первых, если $X_1 \supset X_2 \supset ...$ – убывающая цепочка алгебраических множеств, то $I(X_1) \subset I(X_2) \subset ...$ – возрастающая цепочка идеалов $k[x_1, ..., x_n]$. Т.к. кольцо нётерово, цепочка идеалов стабилизируется, т.е. $\exists N : X_N = X_{N+1} = ...$. Таким образом, $\forall \mathcal{X}$ – множество алгебраических множеств k^n – $\exists$ минимальный элемент X, т.е. такой, что если $Y \subset X, Y \in \mathcal{X}$, то $Y = X$ или $Y = 0$.

Далее от противного. Пусть $\mathcal{X}$ – множетсво алгебраических множеств, которые НЕ раскладываются на неприводимые компоненты.

Если $\mathcal{X} \neq \emptyset$, то $\exists$ минимальный элемент $X \in \mathcal{X}, X$ – приводимый, т.е. $X = X_1 \cup X_2$. $X_1, X_2 \notin \mathcal{X}$, т.к. X – минимальный.

$\Rightarrow X_1 = X_{11} \cup ... \cup X_{1s}, X_2 = X_{21} \cup ... \cup X_{2t}, X_{ij}$ – неприводимые, $i = 1, 2$.

$\Rightarrow X = X_{11} \cup ... \cup X_{1s} \cup X_{21} \cup ... \cup X_{2t}$ – разложение X на неприводимые компоненты $\rightarrow$ противоречие.

Теперь докажем единственность.

Пусть $X = X_1 \cup ... \cup X_r = Y_1 \cup ... \cup Y_s$, X_{i_0} – неприводимое,

$X_{i_0} = X_{i_0} \cap X = \bigcup_{j=1}^{s}(X_{i_0} \cap Y_j) \Rightarrow X_{i_0} \subset (X_{i_0} \cap Y_{j_0}) = Y_{j_0}$.

Аналогично, $Y_{j_0} \subset X_{k_0} \Rightarrow X_{i_0} \subset X_{k_0} \rightarrow i_0 = k_0 \Rightarrow Y_{j_0} = X_{i_0}$, $r = s$. ■

Аффинные алгебраические множества на плоскости

Лемма 10. *Если $f, g \in k[x, y]$ не имеют общих делителей, то $V(f) \cap V(g) = V(f, g)$ – конечно.*

Доказательство:

$k[x, y] = k[x][y] \subset k(x)[y]$, где $k(x) = frac\ k[x]$ – поле частных $k[x]$. Если f, g не имеют общих делителей в $k[x, y] \Rightarrow f, g$ не имеют общих делителей в $k(x)[y]$.

Упражнение: *доказать последнее утверждение.*

В $k(x)[y]$ $(f, g) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists r, s \in k(x)[y] : rf + sg = 1$.

Возьмём $h \in k[x] : hr, hs \in k[x][y] \quad \Rightarrow \quad hrf + hsg = h$. Если $P \in V(f, g), P = (x_0, y_0)$, то $h(x_0) = (hrf + hsg)(x_0, y_0) = 0$. Т.е. x_0 – ноль многочлена h, но число нулей $\leq deg(h)$, т.е. существует конечное число нулей x_0.

Аналогично, есть конечное число $y_0 \Rightarrow |V(f, g)| < \infty$. ■

Следствия.

1) Если $f \in k[x, y]$ – неприводимый, $V(f)$ – бесконечное множество, то $I(V(F)) = (f)$.

2) Если k – бесконечное поле, то неприводимые алгебраические множества $k^2 : \emptyset, k^2$, точки, неприводимые алгебраические кривые

$f = 0, f$ – неприводимый.

3) Если k – алгебраически замкнутое поле, $f \in k[x, y]$, $f = \prod_{i=1}^{k} f_i^{a_i}$, f_i – неприводимые, тогда

$V(f) = V(f_1) \cup ... \cup V(f_n)$ и $I(V(f)) = (\prod f_i)$.

Доказательство:

1) : Пусть $g \in I(V(f)) \Rightarrow V(g) \supset V(I(f)) = V(f)$.

$V(f, g) = V(f) \cap V(g) = V(g) \supset V(f)$ – бесконечное множество $\Rightarrow f, g$ имеют общие делители, f – неприводимый $\Rightarrow f \mid g \Rightarrow g \in (f)$. $\blacksquare$

Упражнение: *доказать следствия 2) и 3).*

Примеры:

1) $x^2 - y^2 = 0 \quad (x - y)(x + y) = 0$ – приводимо в $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$.

2) $y - x^2 = 0$ – неприводимое множество.

3) $(x - 1)(y - x^2) = 0$ – приводимое множество.

4) $y^2 = x(x^2 - 1)$ – неприводимо в $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$.

5) Рассмотрим множетсво $\quad y^2 + x^2(x - 1)^2 = 0$.

Многочлен $y^2 + x^2(x - 1)^2$ – неприводим в $\mathbb{R}^2$, но!

$y^2 + x^2(x - 1)^2 = 0 \iff y = 0, \quad x(x - 1) = 0$

$V(f) = \{(0, 0), (1, 1)\}$ – приводимое, т.к. одноточечные множества неприводимы, а данное множество содержит две точки.

Теорема Гильберта о нулях

Опр. Пусть $I \subset R$ – идеал. ***Радикалом идеала*** I называется множетсво $\sqrt{I} = rad\ I = \{f \in R : f^n \in I\}$.

Лемма 11. $\sqrt{I}$ *– идеал.*

Доказательство:

Пусть $f \in \sqrt{I}, \forall h \in R \Rightarrow h^n f^n \in I$.

$f, g \in \sqrt{I} \iff f^n, g^m \in I$

$(f + g)^l = \sum \binom{l}{k} f^k g^{l-k} \in I$ при $l \geq n + m - 1$

$\Rightarrow \sqrt{I}$ – идеал. $\blacksquare$

Опр. Идеал $I \subset R$ называется ***радикальным идеалом***, если $I = \sqrt{I}$.

Лемма 12. *Если* $f \in k[x_1, ..., x_n], f = \prod f_i^{a_i}, f_i$ *– неприводимые* $\Rightarrow$ $\sqrt{I} = (\prod f_i)$.

Упражнение: *доказать лемму.*

Теорема 4 (Гильберта о нулях)**.** *Если k – алгебраическое поле,*
$R = k[x_1, ..., x_n]$*, то*

1) Любой максимальный идеал $I \subset R$ имеет вид
$I = m_p = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$*;*

2) $\forall J \subset R, J \neq (1) = R \Rightarrow V(J) \neq \emptyset$*;*

3) Если $J \subset R$ – идеал, то $I(V(J)) = \sqrt{J}$*.*

Доказательство:

1) $I \subset R$ – максимальный $\iff$ R/I – поле. Пусть $\phi : R \to R/I$ – естественная проекция.

Факт из алгебры: Если k – алгебраически замкнутое поле L/k – расширение и $\exists$ сюръективное отображение $\phi : k[x_1, ..., x_n] \to L$, тогда $k = L$. (см. [Fault], [Reid])
$k \to R = k[x_1, ..., x_r] \to R/I = L$ – изоморфизм
$\psi : k \to L$ – изоморфизм полей
$b_i = \phi(x_i), a_i \in \psi^{-1}(b_i) \in k \Rightarrow x_i - a_i \in ker\ \phi = I$
$\Rightarrow (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \subset I$, но максимальный идеал
$I = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$.

2) $J \neq R = (1) \Rightarrow \exists$ максимальный идеал $m : j \subset m$.
Из п. 1) $\Rightarrow m = m_P = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$.
$\Rightarrow P = (a_1, ..., a_n) = V(m_P) \subset V(J) \Rightarrow V(J) \neq \emptyset$.

3) $\sqrt{J} \in I(V(J))$ *(**Упражнение:** доказать это)*
Обратно: пусть $g \in I(V(J))$.
$J = (f_1, ..., f_r)$, т.к. $k[x_1, ..., x_n]$ – нётерово.
Построим $J_1 = (f_1, ..., f_r, x_0 g - 1) \in k[x_0, ..., x_n]$. $P \in V(J_1) \subset k^{n+1} \Rightarrow$ $f_i(P) = 0$.

$\Rightarrow g(P) = 0 \Rightarrow 0 = -1 \Rightarrow V(J_1) = \emptyset$.

$\Rightarrow$ по свойству 2) $J_1 = (1) = k[x_0, ..., x_n]$

$\Rightarrow h_i \in k[x_0, ..., x_n] : \sum h_i f_i + h_0(x_0 g - 1) = 1 \quad (*)$

Возьмём $N = \max\limits_{0 \le i \le r} \deg_{x_0} h_i$, где $\deg_{x_0} h_i$ – степень, с которой x_0 входит в h_i, и домножим равенство $(*)$ на g^N.

$\Rightarrow g^N = \sum g^N h_i f_i + g^N h_0(x_0 g - 1)$,

обозначим $H_i = H_i(gx_0, x_1, ..., x_n) = g^N h_i$.

Здесь мономы: $g^N x_0^{j_1}, ..., x_n^{j_n} = (gx_0)^{j1} g^{N-j_1}, \dots$, причем $g^{N-j_1} \in k[x_1, ..., x_n]$.

Возьмём вычеты $mod(x_0 g - 1)$, т.е. $x_0 g \to 1$.

$G_i = H_i \mod (x_0 g - 1) \in k[x_1, ..., x_n]$

$g^N \equiv \sum G_i f_i(\mod (x_0 g - 1))$

Здесь $g^N \in k[x_1, ..., x_n]$ и $G_i f_i(mod(x_0 g - 1)) \in k[x_1, ..., x_n]$.

$\Rightarrow$ в $k[x_1, ..., x_n]$ $\ g^N = \sum G_i f_i$

$\Rightarrow g^N \in J \Rightarrow g \in \sqrt{J}$. ■

Следствие: Если $f \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен, $g \in \mathbb{C}[x, y], g \in I(V(f))$, тогда $f \mid g$.

Доказательство:

$g^N \in (f)$ т.е. $g^N = hf$

$\Rightarrow f \mid g^N \Rightarrow f \mid g$, т.к. f – неприводимый. ■

Таким образом, имеем следующие соответствия:

идеалы $k[x_1,...,x_n]$	$\overset{\mathrm{V}}{\longrightarrow}$ $\underset{\mathrm{I}}{\longleftarrow}$	алгебр. подмножества $X \subset k^n$
$\cup$		$\cup$
радикальные идеалы	$\leftrightarrow$	алгебр. множества
$\cup$		$\cup$
максим. идеалы $m_p = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$	$\leftrightarrow$	точки $(a_1, ..., a_n) \in k^n$

*Соответствия, обозначенные символом $\leftrightarrow$, взаимно однозначные.

Алгебраические многообразия

Опр. Неприводимые алгебраические множества $\subset k^n$ называются ***алгебраическими многообразиями***.

Если $X \subset k^n$ – алгебраическое многообразие, то можно говорить о функциях $f : X \to k$.

Опр. Функция $f : X \to k$ называется ***регулярной (алгебраической/полиномиальной)*** , если $\forall P = (a_1, ..., a_n) \in X$ $\exists$ многочлен $F \in k[x_1, ..., x_n] : f(a_1, ..., a_n) = F(a_1, ..., a_n)$.

Многочлены $F, G \in k[x_1, ..., x_n]$ определяют одну и ту же функцию $f : X \to k \iff \forall P \in X \;\; (F - G)(P) = 0$, т.е. $F - G \in I(x)$.

Опр. $O_X = \Gamma(X) = k[X] = k[x_1, ..., x_n]/I(X)$, т.е. фактор кольца по многочленам, называется ***аффинным координатным кольцом*** *(или кольцом регулярных функций)* .

Если X – многообразие, т.е. $I(X)$ – простой идеал, $k[X] = O_X$ – область целостности $\Rightarrow$ можно вложить $k[X] \hookrightarrow frac\ k[X]$ в поле частных.

Опр. $k(X) = frac\ k[X]$ называется ***полем рациональных функций***.

Если $f \in k(X), P \in X$, то говорят, что f определена в P, если $\exists\ p, q \in k[X] : f = p/q, q(P) \neq 0$.

$O_{PX} = O_P$ – кольцо рациональных функций в точке P.

Опр. Точка $P \in X$ называется ***полюсом*** функции $f \in k[X]$, если f не определена в P.

Лемма 13.
1) Множество полюсов f является алгебраическим множеством.
2) $k[X] = \bigcap\limits_{P \in X} O_P$.

Доказательство:

Пусть $f \in k[X]$.

Определим множество

$J_f = \{g \in k[x_1, ..., x_n] : \overline{g} f \in k[X], \overline{g} = g \mod I(X)\}$.

J_f – идеал и $I(X) \subset J_f$. *(**Упражнение:** доказать это)*

$V(J_f)$ – алгебраическое множество точек, в которых f не определена.

2) : $f \in \bigcap\limits_{P \in X} O_P \Rightarrow V(J_f) = \emptyset \Rightarrow J_f = (1)$, т.е. $f \in k[X]$. Обратное включение очевидно. ■

Теорема 5. *Если X – алгебраическое многообразие, $P \in X \Rightarrow$*
1) O_P – нётерово, является областью целостности;
2) $m_P = \{f \in O_P : f(P) = 0\}$ – максимальный идеал кольца O_P, причем единственный.

Проективный случай

Любой многочлен $f \in k[x_0, ..., x_n]$ представляется в виде $f = F_1 + ... + F_d$, где F_i – формы (т.е. однородные многочлены), $\deg F_i = i$.

Опр. Идеал $I \subset k[x_0, ..., x_n]$ называется ***однородным***, если $\forall f \in I\ F_i \in I$, где $f = F_1, ..., F_d$.

Аналогично прошлым соответствиям,

$$\text{однор. идеалы } k[x_0, ..., x_n] \quad \underset{\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{V}}{\rightleftarrows}} \quad \begin{array}{c}\text{подмножества}\\ X \subset \mathbb{P}^n(k)\end{array}$$

Теорема 6 (Гильберта о нулях)**.**

Если k алгебраически замкнуто, то

1) $V(J) \neq \emptyset \iff \sqrt{J} \supset (x_0, ..., x_n)$;

2) Если $V(J) \neq \emptyset \Rightarrow I(V(J)) = \sqrt{J}$. $\square$

(Доказательство см. [Fault], [Reid])

Замечание. В аффинном пространтсве k^{n+1} идеал $(x_0, ..., x_n) \leftrightarrow (0, ..., 0) \in k^{n+1}$, это соответствует $\emptyset \subset \mathbb{P}^n(k)$.

Следствие. Имеют место взаимно однозначные соответствия:

однор. радик. идеалы	$\leftrightarrow$	алгебр. множества $\mathbb{P}^n(k)$
однор. простые идеалы	$\leftrightarrow$	неприводимые алгебр. кривые.

В проективном случае аналогично определяются : $k[X]$,$k(X)$, O_P, m_P, ... и т.д.

Литература

[Fult] W. Fulton, Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry, 3rd edition, AMS, 2008.

[Reid] M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press, 1988.