Листок 4
Тема 4 (1.4). Квадратичные вычеты

Упражнения и задачи

1. Докажите, что существует бесконечно много простых $p \equiv 1\ (4)$ и $p \equiv 3\ (4)$.

2. Докажите, что $\left\lceil \frac{p-1}{4} \right\rceil$ четно $\Leftrightarrow p = 8k \pm 1$.

3. Докажите свойства символа Якоби:
   - $a \equiv b\ (P) \Rightarrow \left(\dfrac{a}{P}\right) = \left(\dfrac{b}{P}\right)$;
   - $\left(\dfrac{ab}{P}\right) = \left(\dfrac{a}{P}\right)\left(\dfrac{b}{P}\right)$;
   - $\left(\dfrac{a}{PQ}\right) = \left(\dfrac{a}{P}\right)\left(\dfrac{a}{Q}\right)$.

4. Пусть p — простое, $(a,p) = 1$. Докажите, что число решений сравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ равно $1 + \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)$.

5. Докажите, что если $(a,p) = 1$ то $\sum_{x \bmod p} \left(\frac{ax+b}{p}\right) = 0$.

6. Используя замену переменных, докажите, что число решений сравнения $x^2 - y^2 \equiv a \pmod p$ равно $p-1$, если $(a,p) = 1$, и $2p-1$, если $p|a$. Выразите число решений этого сравнения через сумму с символом Лежандра. Используя эти выражения, найдите значение для суммы $\sum_{y \bmod p} \left(\frac{y^2+a}{p}\right)$.

7. Докажите, что если $(a,p) = 1$ то $\sum_{x \bmod p} \left(\frac{x(x+a)}{p}\right) = -1$.

8. Пусть $r_1, \ldots, r_{(p-1)/2}$ — квадратичные вычеты в промежутке $[1;p]$. Докажите, что их произведение $\equiv 1\ (p)$, если $p \equiv 3\ (4)$, и $\equiv -1\ (p)$, если $p \equiv 1\ (4)$.

9. Пусть $p \equiv 1\ (4)$ — простое, $(a,p) = 1$, $S(a) = \sum_{x \bmod p} \left(\frac{x(x^2+a)}{p}\right)$. Докажите, что
   - $S(a) \equiv 0\ (2)$;
   - $S(at^2) = \left(\frac{t}{p}\right) S(a)$;
   - если r, n — такие, что $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, то $p = \left(\frac{1}{2}S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}S(n)\right)^2$.

10. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Будем говорить, что простое p делит $f(x)$, если $\exists n \in \mathbb{Z}$ такое, что $p|f(n)$. Опишите простые делители многочленов $x^2 + 1$ и $x^2 - 2$. Докажите, что если p делит $x^4 - x^2 + 1$, то $p \equiv 1\ (12)$.

11. Пусть $D > 0$ — нечетное и свободное от квадратов. Докажите, что $\exists b \in \mathbb{Z}$, $(b, D) = 1$ такое, что $\left(\frac{b}{D}\right) = -1$. Докажите также, что $\sum' \left(\frac{a}{D}\right) = 0$, где суммирование берется по приведенной системе вычетов $\bmod D$.

SageMath

- Исследуйте основные функции SageMath связанные с вычислением квадратичных вычетов и символов Лежандра и Якоби:
  - Квадратичные вычеты: `quadratic_residues()`;
  - Символы: `legendre_symbol()`, `jacobi()`.

- Пусть $r(p)$ — наименьший квадратичный вычет $\bmod p$, $n(p)$ — наименьший квадратичный невычет $\bmod p$, $d(p)$ — максимальное расстояние между соседними квадратичными невычетами $\bmod p$. Постройте частотные таблицы для $r(p), n(p), d(p)$. Что можно заметить?
(Согласно гипотезам Виноградова, $\forall \varepsilon > 0$ $\frac{d(p)}{p^\varepsilon} \to 0$, $\frac{n(p)}{p^\varepsilon} \to 0$, $\frac{r(p)}{p^\varepsilon} \to 0$ при $p \to \infty$.)

- Проведите численные эксперименты относительно равномерного распределения последовательностей, которые упоминались в лекции:
  - $(\{n\alpha\})_{n=1}^{\infty}$, α — иррациональное;
  - $(\{p\alpha\})_{p=1}^{\infty}$, α — иррациональное, p пробегает все простые;
  - $(\{\frac{x_p}{p}\})_{p=1}^{\infty}$, x_p — решение сравнения $x^2 \equiv a\ (p)$, p пробегает все простые.

Темы для самостоятельного изучения

- Когда простое q является квадратичным вычетом по модулю простого p? (Приложение квадратичного закона взаимности, [IR, §5.2, теорема 2]).

- Существует бесконечно много простых таких, что $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, где a — целое, отличное от квадрата. ([IR, §5.2, теорема 3]).

- Критерий разрешимости сравнения $x^2 \equiv a\ (m)$ для произвольного m. ([IR, §5.1, предложение 5.1.1], [Вин, §V.4]).