Лекция №9 «Сильная аппроксимация, теорема Римана-Роха». Курс А-III

Кучерин Георгий Дмитриевич 619/2

15 ноября 2025

Пусть X - компактная РП
M_X – поле (глобальных) мероморфных функций
$\mathrm{M}_x^{(1)}$ – пространство (глобальных) мероморфных 1 - форм
Div X - группа дивизоров
$\mathrm{D} \in DivX$
$\mathrm{L(D)} = \{ \mathrm{f} \in M_X : \quad (f) \geq -D\}$
$\mathrm{L}^{(1)}(D) = \{\omega \in M_X : \quad (\omega) \geq -D\}$
$\mathrm{L}^{(1)}(D) \cong L(K + D), \quad K = (\omega)$
$\mathrm{L}^{(1)}(D), L(D)$ – конечномерные векторные пространства над $\mathbb{C}$

Теорема 1. *(Риман-Рох) При некоторых условиях для любого дивизора* $D \in DivX \quad dimL(D) = degD - g(X) + 1 + dimL^{(1)}(-D) \quad (dimL^{(1)}(-D) = dimL(K - D))$

некоторые условия определяются вот так

Определение 1. $S \subset M_X$ S *разделяет точки на X, если* $\forall p, q \in X, \quad p \neq q \quad \exists f \in S : \quad f(p) \neq f(q)$
S *разделяет касательные, если* $\forall p \in X \quad \exists \in S : \quad m_p(f) = 1 \quad (m_p(f) = m_p(F))$
$F : X \to \mathbb{C}_\infty, \quad$ *то есть* $\quad m_p(f) = \begin{cases} \nu_p(f - f(p)), & f - \textit{голоморфна в} \quad p \\ -\nu_p(f), & p - \textit{полюс в} \quad f \end{cases}$

Некоторые условия в теореме Римана - Роха: M_X разделяет точки и касательные.

Лемма 1. *Если для X верно условие Римана-Роха* $\Rightarrow M_X$ *разделяет точки касательной (то ест*
$\square \quad p \neq q, g = g(X)$
$D = (g+1) \cdot p, \quad degD = g + 1$
$dimL(D) = g + 1 - g + 1 + dimL(K - D) \geq 2 \quad (dimL(K - D) \geq 0) \Rightarrow \exists f \in L(D) \setminus \mathbb{C} :$
f *– имеет полюс только в точке* p
p *– полюс* f, $\quad q \neq p$ *– не полюс* f
то есть M_X *разделяет точки*

Разделение касательных
Если $degD \geq 2g - 1$
$deg(K - D) = degK - degD \leq 2g - 2 - 2g + 1 = -1$
$\Rightarrow 2(K - D) = \{0\}$
$dimL(D) = degD - g + 1$
$p \in X, \quad D_n = n \cdot p, \quad degD_n = n$

$dimL(D_n) = n - g + 1, \quad dimL(D_{n+1}) = n - g + 2$
$\Rightarrow \exists f_n \in L(D_{n+1}) \setminus L(D_n)$ *то есть* $\nu_p(f_n) = -n$
$\Rightarrow \nu_p(\frac{f_n}{f_{n+1}}) = -1,$ *то есть* $m_p(\frac{f_n}{f_{n+1}}) = 1$ ■

Лемма 2. *M_X − разделяет точки касат $\Rightarrow \exists \varphi : X \to \mathbb{P}^n$*
□ *В прошлый раз не успели сказать про следующее:*

Теорема 2. *$D \in DivX \quad \forall p, q \in X \quad dimL(D - p - q) = dimL(D) - 2 \Rightarrow \exists \varphi = \varphi_D :$ $X \to \mathbb{P}^n$ − голоморфное отображение*

Пусть D $\in DivX \quad degD \geq 2g + 1$
$deg(D-p-q) \geq 2g-1$ и $L(K-D) = 2(K-(D-p-q)) = \{0\}$ теорема Римана - Роха гласит, что $deg - g + 1$
$dimL(D-p-q) = deg(D-p-q) - g + 1 \quad \{deg(D-p-q) = degD - 2\} = dimL(D) - 2$
Для $D = (2g + 1) \cdot p \quad \varphi_D : X \to \mathbb{P}^n$голоморфное вложение ■

Лемма 3. *(Примеры)*
1) $X = C_\infty$, M_X разделяет точки и касательные
2) $X = \mathbb{C}/L$, *аналогично*
3)*$X \in \mathbb{P}^n$ − голоморфно вложено, то аналогчино*
□ *Упражнение* ■

Замечание. *Для голоморфно вложенных РП существует система уравнений из однородных многочленов, то есть голомофрно вложенные РП = проективные кривые (следует из Римана - Роха)*
Таким образом M_X разделяет точки и касательные (это то же самое что и условие Римана - Роха, это тоже самое что X голоморфно вложено)

Теорема 3. *(без доказательства) $\forall$ компактной РП X выполняются условия Римана-Роха*

Определение 2. *Компактная РП, для которой выполнено условие выше, называется алгебраической кривой (АК)*

Слабая аппроксимация или в самом деле аппроксимация рядов Лорана

Лемма 4. *X - АК, $p \in X$*
$\forall N \in \mathbb{Z} \quad \exists f \in M_X : \quad \nu_p(f) = N$
□ *X отделяет касательную $\longleftrightarrow \exists f \in M_X \quad m_p(f) = 1$*
Если f − голом $g = f - f(p), \nu_p(g) = 1$
Если p - полюс, то $g = \frac{1}{f} \quad \nu_p(g) = 1$
Таким образом $\forall p \quad \exists g : \quad \nu_p(g) = 1 : \quad \forall N \in \mathbb{Z}$
$\nu_p(g^N) = N$ ■

Определение 3. *r(z) = $\sum_{i=n}^{m} c_i z^i \quad n \leq m \in \mathbb{Z}$ − назыв многочлен Лорана*

Будем говорить, что многочлен Лорана r(z) является главной частью ряда Лорана функции h $\in M_X$, если $h - r = \sum_{i>m} c_i z^i$ (остаток, хвост, *tail*)
$(h - r = O(z^{m+1}))$

Лемма 5. *X - АК, $p \in X$ $z-$локальная координата в p, $r(z)-$многочлен Лорана*
$\exists f \in M_X:$ $r -$ главная часть Лорана для f (в точке p)
$\square$ $r = \sum_{i=n}^{m} c_i z^i,$ $c_n, c_m \neq 0$
индукция по $k = m - n - 1$
$k = 1$ $r(z) = c_n z^n$ *утверждение равносильно тому, что* $f \in M_x,$ $\nu_p(f) = n$
(следует из предыдущей леммы)
$n > 1$ $r = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots + c_m z^m$
По индукции для $c_n z^n$ $\exists h \in M_X:$ $c_n z^n -$ *главная часть для* $h(z)$
$h(z) - r(z) = \dots + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1}$ $(s(z) = \dots + a_m z^m$ $-$ *многочлен Лорана* $\leq$
$n - 1)$
по индукции $\exists g \in M_x:$ $s(z) -$ *главная часть* $g(z)$
Таким образом $h - r = s + O(z^{m+1})$
$g = s + O(z^{m+1})$
Для $f = h - g = r + O(z^{m+1})$
$\Leftrightarrow r(z) -$ *главная часть функции* $f(z) \in M_X$ $\blacksquare$

Что, если заданы точки $p_1, \dots, p_n \in X$?

Лемма 6. *X - АК $p, q \in X,$ $p \neq q$*
$\exists f \in M_X:$ $p -$ ноль, $q -$ полюс
$\square$ $\dots$ $\blacksquare$

Лемма 7. *X - АК, $p, q_1, \dots, q_n \in X$*
$\exists f \in M_X:$ $p -$ ноль, $q_1, \dots, q_n -$ полюсы
$\square$ *индукцией по* $n:$ $n = 1 -$ *предыдущая лемма*
$n > 1$ *по индукции* $\exists g:$ $p - 0, q_1, \dots, q_{n-1} -$ *полюсы*
$\exists h:$ $p - 0,$ $q_n - \infty$
$f = g + h^m$ *выберем достаточно большое* $m,$ *то* f *будет удовлетворять условиям*
(Упражненние) $\blacksquare$

Лемма 8. *X - АК $p, q_1, \dots, q_n \in X,$ $N \geq 1$*
$\exists f \in M_X:$ $\nu_p(f - 1) \geq N,$ $\nu_{q_i}(f) \geq N$
$\square$ $\exists g \in M_X:$ $\nu_p(g) > 0,$ $\nu_{q_i}(g) < 0$
$f = \frac{1}{1+g} N$ $\blacksquare$

Теорема 4. *(аппроксимация рядов Лорана)*
X - АК, $p_1, \dots, p_n \in X$ $z_i = z_{p_i} -$ локальные координаты с центром в p_i $1 \leq$
$i \leq n$
$r_i(z),$ $1 \leq i \leq n -$ многочленов Лорана
$\exists f \in M_X:$ $\forall i:$ $1 \leq i \leq n$ $r_i(z)-$главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в точке p_i
$\square$ $r_i(z_i) = \sum_{j=n_i}^{m_i} c_{ij} z_i^j,$ $N = max$ m_i
$(= \sum^N c_{ij} z_i^j,$ $m_i < j \leq N,$ $c_{ij} = 0)$
$\forall p_i$ $\exists g_i \in M_X:$ $g_i(z_i) = r_i(z_i) + O(z_i^{N+1})$
$M = min$ $n_i = min$ $\nu_{p_i}(r_i) = min$ $\nu_{p_i}(g_i)$
$\forall i$ $\exists h_i:$ $M_X:$ $\nu_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$ $\nu_{p_j}(h_i) \geq N - M,$ $j \neq i$
То есть $h_i(z_i) = 1 + O(z_i^{N-M})$
$h_i(z_j) = O(z_j^{N-M})$
$(h_i g_i)(z_i) = (1 + O(z_i^{N-M}))(r_i(z_i) + O(z_i^{N-M})) = r_i(z_i) + O(z_i^{N-M})$
$(h_i g_i)(z_j) = O(z_j^{N-M})$
$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$ *в* $f(z_i) = r(z_i) + O(z_i^{N-M})$ $\blacksquare$

Следствие. X - $AK \quad p_1, \dots, p_n \in X$
$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \quad \exists f \in M_X: \quad \forall i \quad \nu_{p_i}(f) = m_i$

Следствие. X - $AK \quad 1 \le i \le n \quad p_i \in X$
$m_i \in \mathbb{Z}, \quad f_i \in M_X \quad \exists f \in M$
$\nu_{p_i}(f - f_i) = m_i$
$\square \quad \dots \quad \blacksquare$

Вспомним КТО из обычной теории чисел: $\quad$ p$_1, \dots, p_n -$ простых
$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \quad (\mathbb{Z})$
$\exists a \in \mathbb{Q} \quad (\mathbb{Z}): \quad \forall i: \quad \nu_{p_i}(a - a_i) = m_i$
$(a \equiv a_i(p_i^{m_i}))$
Это теорема о слабой аппроксимации

Расширение полей комплексных чисел $\quad \mathrm{M}_X/\mathbb{C}$

Лемма 9. *tr. deg* $(M_x(\mathbb{C})) = 1$ (*то есть* $\exists f -$ *не алгебраический над* $\mathbb{C}) f, g \in M_X$ *есть алгебраическая зависимость*)
$\square \quad M_X \neq \mathbb{C},$ *то есть tr.* $deg M_X/\mathbb{C} \ge 1$
Пусть $f, g \in M - X$ *алгебраически независимы*
Возьмём $D > max((f)_\infty, (g)_\infty)$
$((f) = (f)_0 - (f)_\infty > -D \Rightarrow f \in L(D))$
$f, g \in L(D)$
$\forall i, j \ge 0 \quad i + j = n \quad f^i g^j \in L(nD)$
$f^i g^j -$ *линейно независимы*
$\Rightarrow dim L(nD) \ge \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$
$D > 0, \quad dim L(nD) \le 1 + deg nD = 1 + n deg D$ (*получаем противоречие для больших* n)
Таким образом если $f \in M_X \setminus \mathbb{C}$, *рассмотрим* $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(g) \subset M_X, \quad M_X/\mathbb{C}(f), \mathbb{C}$
$tr.deg \quad C(f)/\mathbb{C} = 1 = tr.deg \quad M_X/\mathbb{C}$
$\Rightarrow M_X/\mathbb{C}(f) -$ *конечное*
$[M_X : \mathbb{C}(f)] -$ *конечна*

Лемма 10. $\forall D \in Div X \quad \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \quad \exists g \in \mathbb{C}(f):$
$D - (g) \le m(f)_\infty$
$\square \quad \{p \in X: \quad p \in supp D \setminus supp(f)_\infty, \quad D(p) \ge 1\} = \{p_1, \dots, p_n\}$
Рассмотрим функцию $f - f(p_i) \quad \nu_{p_i}(f - f(p_i)) \ge 1$
$p -$ *полюс* $f - f(p_i) \Leftrightarrow p -$ *полюс* f
$g = \prod_{i=1}^k (f - f(p_i))^{D(p_i)} \in \mathbb{C}[f]$
$\nu_{p_i}(g) \ge D(p_i): \quad g$ *не имеет полюсов, кроме полюсов* f *Таким образом* $(D - (g))(p) > 0 \Leftrightarrow p -$ *полюс* f
$\exists$ *достаточно большое* $m \in \mathbb{Z}_{>0}: \quad \forall$ *полюса*
$(D - (g))(p) \le m(-\nu_p(f)) \Rightarrow D - (g) \le m(f)_\infty \quad \blacksquare$

Следствие. *f,h* $\in M_X \setminus \mathbb{C} \quad \exists r \in \mathbb{C}[f]:$
$r(f)h$ *не имеет полюсов кроме* f
или более точно $\exists m: \quad r(f)h \in L(m(f)_\infty)$
$\square \quad D = -(h) \quad \blacksquare$

Лемма 11. *Пусть* $[M_X : \mathbb{C}(f)] \geq K$
Тогда $\exists m_0 : \quad \forall m \geq m_0$
$dimL(m(f)_\infty) \geq (m - m_0 + 1)K$
$\Box \quad \exists g_1, \ldots, g_k -$ *линейно независимые над* $\mathbb{C}(f) \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n \quad \exists r_i \in \mathbb{C}[f] :$
$h_i = r_i(f)g_i -$ *имеют полюса только в* f_i
$\exists m_0 \in \mathbb{Z}_{>0} : \quad h_i \in L(K(f)_\infty)$
$h_i -$ *линейно независимы*
$f^j h_i \in L(m(f)_\infty)$ *и линейно независимы* $1 \leq i \leq k \quad 0 \leq j \leq m - m_0 \quad K \geq m_0$
то есть $dimL(m(f)_\infty) \geq K(m - m_0 + 1)$ ■

Лемма 12. $[M_X : \mathbb{C}(f)] \leq deg(f)_\infty$
$\Box$ *Пусть* $[M_X : \mathbb{C}(f)] \geq def(f)_\infty + 1$
$\exists m_0 : \quad \forall m \geq m_0$
$dimL(m(f)_\infty) \geq (K - m_0 + 1)(1 + deg(f)_\infty)$
$dimL(m(f)_\infty) \leq 1 + deg(m(f)_\infty) = 1 + mdeg(f)_\infty$
противоречие с тем, что для достаточно больших m ■

Лемма 13. $[M_X : \mathbb{C}(f)] = deg(f)_\infty$
$\Box \quad (f)_\infty = \sum n_i p_i$
$\forall i$ *по слабой аппроксимации* $\exists g_{ij} \quad 1 \leq i \leq n_i :$
$\nu_{p_i}(g_{ij}) - j \quad \nu_{p_k}(g_{ij}) = 0, \quad k \neq i$
$g_{ij} -$ *линейно независимы, всего их* $deg(f)_\infty$
$\Rightarrow [M_X : \mathbb{C}(f)] \geq deg(f)_\infty$
$[M_X : \mathbb{C}] = deg(f)_\infty$ ■

Следствие. $M_X -$ *конечно порожденная алгебра*

Примеры. *1)* $X = C \quad M_{\mathbb{C}_\infty} \cong \mathbb{X}$
2) $X = \mathbb{C}/L \quad M_{\mathbb{C}/L} -$ *порождается* $\theta -$ *функциями*
3) $X \subset \mathbb{P}^n \quad [x_0, \ldots, x_n]$
$\mathbb{X} \quad M_X -$ *будет порождаться* $\frac{x_i}{x_j}$
$M_X = \mathbb{C}(\mathbb{X}) -$ *обозначение поля рациональных функций на* X

Теорема 5. *(без доказательства)* *X, Y - изоморфныы, компактны РП* $\Leftrightarrow \mathbb{C}(X) \cong \mathbb{C}(Y)$