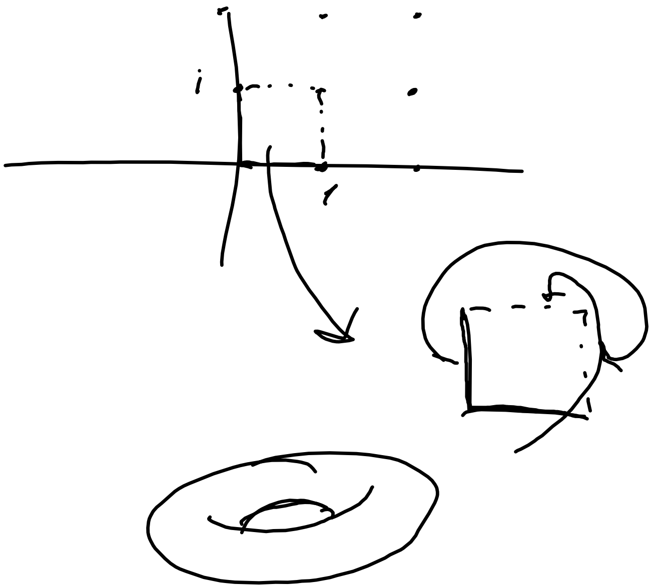
$A - \overline{\underline{III}}$

$A - \underline{I}$: Введение в анал. ТЧ

$A - \underline{II}$: Римм. (разл. элл. риман.) и формы (мод. и авт. ф.)

$A - \underline{II}$: $L \subset \mathbb{C}$ $\quad L = \{ n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z} \}$.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$



$\mathbb{C}/L \sim P$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad z = \underset{\in L}{\omega} + \underset{\in P}{p}$

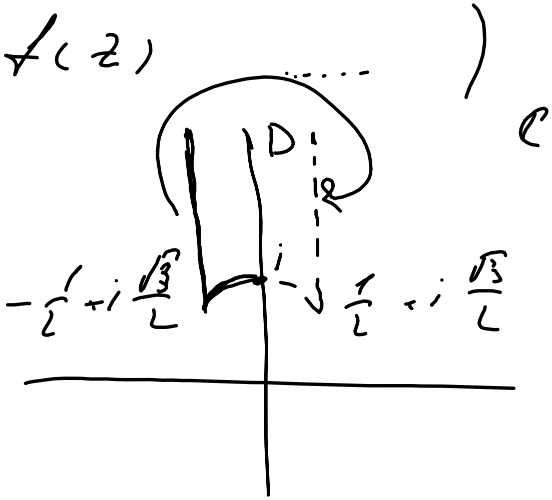
мод L

А – II : $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{l} ad-bc=1, \\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$

действует на $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$:

$$\gamma \cdot z = \gamma z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

((мф : $f(\gamma z) = (cz \pm d)^k f(z)$ ......))



$\mathbb{H}/\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H} \simeq D$

$(\mathbb{C}/L, \ L \subset \mathbb{C})$

мод род 0

$\Gamma' < \Gamma, \quad \mathbb{H}/\Gamma'$ – род $g \geq 0$

А – I : Кр-я / $\mathbb{F}_q \qquad q = p^n$

$f(x,y) \in \mathbb{F}_q[x,y]$

N_m = число точек на $f=0$ в $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{q^m})$

Оценка Хассе Вейля:

$$|N_m - (q^m+1)| \le 2g\, q^{m/2}$$

g — род (алгебр.) кривой $f=0$

Д - III:

$\boxed{\text{1. Расслоение пучков (РП) вложение}}$

Опр: Пусть X — мн-во, тогда говорят, что на X задано стр. топ. пр-ва (ТП), если $\forall x \in X$ задано мн-во подмн-в X $\mathcal{U}(x) \ne 0$

1) $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ $x \in U$

2) $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$

3) $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \subset X$ $x \in V$, $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$

4) $U \in \mathcal{U}(x)$ $\mathring{U} = \{z \in U : U \in \mathcal{U}(z)\} \in \mathcal{U}(x)$

Опр: ТП (X, T), T - мн-во подмн. в X

1) $\emptyset, X \subset T$

2) $\forall (U_\alpha) \in T$ $\bigcup U_\alpha \in T$

3) $\forall (U_i)_{i=1}^{n}$ $U_i \in T$ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in T$

T - семейство откр. мн-в

Примеры: 1) $\mathbb{C}$ - ТП, окр $|z| < \varepsilon$

2) $\mathbb{R}^2$ - ТП, $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$

Опр: X, Y - ТП, $f: X \to Y$ - отобр

f наз. непрер. если $\forall x \in X$ $\forall V \in \mathcal{U}_{\text{топ } Y}(f(x))$

$\exists U \in \mathcal{U}_{\text{топ } X}(x)$: $f(U) \subset V$

Опр.: f наз. откр., если $\forall$ откр. U $f(U)$ откр. (в Y)

Опр.: $f: X \to Y$ — непрер. и вз.-одн., то f наз. гомеоморфизмом

Опр.: X — ТП, $U \subset X$ — откр., $V \subset \mathbb{C}$ — откр. Гомеоморфизм $\varphi: U \to V$ наз. комплексной картой. Если для $p \in U$ $\varphi(p) = 0$, то p наз. центром карты, карта = «локальн. коорд.»

Пример: $X \in \mathbb{R}^2$, $U \subset X$ — откр.

$\varphi_1(x,y) = x + iy$ — компл. карта

$\varphi_2(x,y) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + i\dfrac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ — тоже карта

Опр.: Две карты на X $\varphi_1: U_1 \to V_1$, $\varphi_2: U_2 \to V_2$ наз. совместимыми, если

Если $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, тогда $T = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$

$T: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ — голоморфная

ф-я (комплекс. диффер. в окр. любой

точки рассм. обл.)

$T = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ наз. ф-ей склейки (перехода)

Если $\varphi : \underset{\subset X}{U} \to \underset{\subset \mathbb{C}}{V}$, $\psi : \underset{\subset \mathbb{C}}{V} \to \underset{\subset \mathbb{C}}{W}$ — голом. ф-

то $\psi \circ \varphi$ — голом. на U

ψ — ф. замены коорд.

Лемма: T — гол. биек. $T' = \dfrac{dT}{dz} \neq 0$ в

обл. опр. T

□ T — голом. $\Rightarrow$ $\exists\ S = T^{-1}$ $S \circ T = id$

$\forall z \in$ обл. опр. T $S(T(z)) = z$ $\Rightarrow$

$S'(T(z))\, T'(z) = 1$ $\Rightarrow$ $T'(z) \neq 0$ ■

Следствие: Если φ, ψ — две карты, $p \in X$, $z_0 = \varphi(p)$, $w_0 = \psi(p)$. Тогда ряд Тейлора

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

$a_1 \neq 0$.

Зам: Для карт $\varphi_1(x, y) = x + iy$.

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не согласованы

Опр: (Комплексный) атлас $\mathcal{A}$ на X наз. набор $\mathcal{A} = \{ \varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \}$:

1) $\forall \alpha, \beta$ $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ — согласованы

2) $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$

($T_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ — склейки)

Пример. Сфера в $\mathbb{R}^3$

$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$

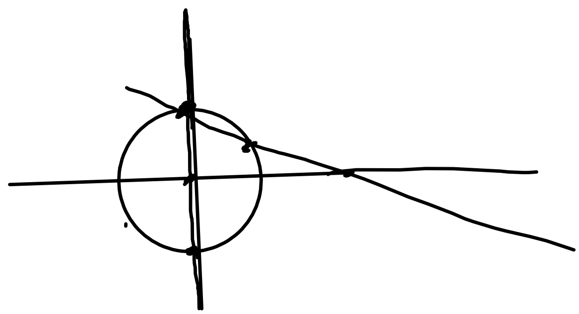
Также $\mathbb{R}^2$ как $\{ (x_1, x_2, 0) \}$ как $\mathbb{C}$

Опр проекция из $(0,0,1)$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}$$

$\varphi : S^2 \setminus \{0,0,1\} \to \mathbb{C}$

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \frac{|z^2|-1}{|z^2|+1} \right)$$



Аналогично проекция из $(0, 0, -1)$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} - i\,\frac{x_2}{1+x_3}$$

$$\psi^{-1}(z) = \ldots$$

$$T = \psi \circ \varphi = \frac{1}{z}$$

Т.о. $\{\varphi, \psi\}$ задает комплекс. атлас на S^2

Опр.: Два атласа A_1, A_2 наз. эквив., если $\forall\, \varphi_\alpha \in A_1$, $\forall\, \psi_\beta \in A_2$

φ_α, ψ_β согласованы

Опр.: Класс эквив. комплекс. атласа наз. комплекс. структ.

Опр. ТП X наз. Хаусдорфовым, если

$\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \exists\, U, V$ − окр. x, y :
$U \cap V = \emptyset$

Опр: ТП X наз. пр-вом со счетной базой, если у системы открыт. мн-в $((X, T))$ можно выбрать счетн. число множеств, которые порождают T

Опр: ТП X наз. связн. если нельзя представить $X = U_1 \cup U_2$, $U_i \neq \emptyset$ − откр.
$U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Опр: X наз. Римановой пов. (РП):
1) X − связн. хаусд. ТП со счетной базой
2) На X задана комплексн. стр.

Пример: $X = S^2$ с картами $\{\varphi, \psi\}$ − РП на сфере Римана $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$

Замечание: Как задать РП на X

1) Откр. покр. (U_α) : $\bigcup U_\alpha = X$

2) $\forall \alpha$ откр. отображение $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$,

$V_\alpha \in \mathbb{C}$ — откр. множество.

2.1) $\forall \alpha, \beta$ $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ — откр. в V_α

2.2) $\forall \alpha, \beta$ $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ — согл.

2.3) Топ. на X связн. хаусд.

Проективные пр-ва

Есть $\mathbb{C}^{n+1}$ — компл. лин. пр-во, можно опр. отн. эквив.

$(z_0, \dots, z_n) \sim (z_0', \dots, z_n')$, если $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ $(\lambda \neq 0)$:

$\forall i$ $z_i = \lambda z_i'$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^{n+1} / \sim$

(Иногда $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$)

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n$

Эл-ты $\mathbb{P}^n$ обознач. $[z_0 : z_1 : \dots : z_n] =$

$= [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \dots : \lambda z_n]$

На $\mathbb{P}^1$ можно опр. стр. РП :

$U_0 = \{ [z_0 : z_1] : z_0 \neq 0 \}$

$U_1 = \{ [z_0 : z_1] : z_1 \neq 0 \}$

$\{U_0, U_1\}$ — покр. $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$.

$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C} : [z_0 : z_1] = \dfrac{z_1}{z_0}$

$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C} : [z_0 : z_1] = \dfrac{z_0}{z_1}$

$\varphi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$ — откр. в $\mathbb{C}$

$T = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : z \mapsto \dfrac{1}{z} \Rightarrow \varphi_0, \varphi_1$ — согл.

Т.о. $\{U_0, U_1\}$ — атлас

Связность. U_0, U_1 — связн. $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$ —
связн $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ — связн.

Хаусдорфовость: $p, q \in \mathbb{P}^1$,
если $p, q \in U_i$, то очевид. следует
из отдел. $\mathbb{C}$
иначе $p \in U_0 \setminus U_1$, $q = U_1 \setminus U_0$, т.е.

$p = [1:0]$, $q = [0:1]$

возьмем $D = \{|z|<1, z \in \mathbb{C}\}$, то

$p \in \varphi_0^{-1}(D)$, $q \in \varphi_1^{-1}(D)$

$\varphi_0^{-1}(D) \cap \varphi_1^{-1}(D) = \emptyset$ ($T(D) = \{|z|>1\}$

Заметим, если $\bar{D} = \{|z| \le 1\}$

$\mathbb{P}^1 = \varphi_0^{-1}(\bar{D}) \cup \varphi_1^{-1}(\bar{D})$

Опр.: X наз. компактной, если $\forall$ покр. (U_α) можно выб. конечн. подпокр.

Т.е. см. зам. выше $\mathbb{P}^1$ — компакт.

Замечание: РП обобщ. на n-мерн. комп. многообр.: ТП X, карты $\varphi : U \to V$, $U \in X$, $V \subset \mathbb{C}^n$.

$\mathbb{P}^n$ — n-мерн. компл. многообр.

$U_i = \{(z_0 : \ldots z_n) : z_i \neq 0\}$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n : (z_0 : \ldots : z_n) \to \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots \hat{i}, \ldots \frac{z_n}{z_i}\right)$

Комплексные торы

$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ — реш. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$. лин. незав.

$P = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid 0 \le \lambda_i < 1\}$ — осн. паралл.

Замеч. $X = \mathbb{C}/L$: $\forall z \in \mathbb{C}$: $z = \underset{\in P}{p} + \underset{\in L}{w}$

$[z] = p = z \bmod L = \pi(z)$

Естеств. топ. на X — топ. фактор-пр-а, т.е. $U \subset X$ — открыто $(=)$ $\pi^{-1}(U)$ — откр. в $\mathbb{C}$

π — непрерывно в этой топ.

X — связно, т.к. $\mathbb{C}$ — связно.

<u>Лемма</u>: <u>1)</u> $\forall$ откр. $U \subset X$ $\exists$ откр. $V \subset \mathbb{C}$: $\pi(V) = U$

2) π — откр. отобр.

$\square$ <u>Упр.</u> $\blacksquare$

т.к. $\pi : P \to X$ — откр. „на",

P — компакт $\Rightarrow$ X — компакт.

L — дискр. мн-во (А-II), т.е.

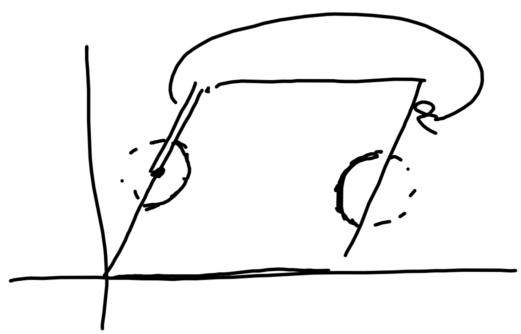
$\exists\, \varepsilon \quad \forall\, w \in L \setminus \{0\} \quad |w| > 2\varepsilon$

Возьмем $D_{z_0} = D(z_0, \varepsilon) = \{ |z - z_0| < \varepsilon \}$

$\forall\, z_1, z_2 \in D_{z_0} \quad z_1 \not\equiv z_2 \ (L)$

Карты: $\forall\, z_0 \in \mathbb{C} \quad \varphi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \to D_{z_0}$

$\varphi_{z_0} = (\pi|_{D_{z_0}})^{-1}$



Совместимость: $\varphi_1 = \varphi_{z_1}$, $\varphi_2 = \varphi_{z_2}$ — две карты

$U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2}) \neq \emptyset$

$T = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(z)) = \varphi_2(\pi(z))$

$\pi(T(z)) = \pi(z) \Rightarrow T(z) \equiv z \ (L)$

$T(z) - z = \underset{\in L}{w} = w(z)$

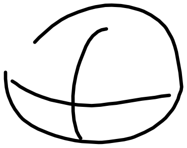
$w : \varphi_1(U) \to L$ — непр. ф. т.к. непр. φ_1, T

Но L — дискр. $\Rightarrow$ $w(z)$ — лок. пост., т.е. на $\varphi_1(U)$ $T(z) = z + \underset{\equiv const}{w}$

т.е. T — сдвиг на w

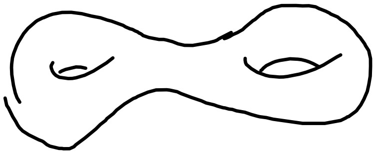
$\Rightarrow$ голом.

Род и число Эйлера



$g = 0$

$g = 1$



$g = 2$

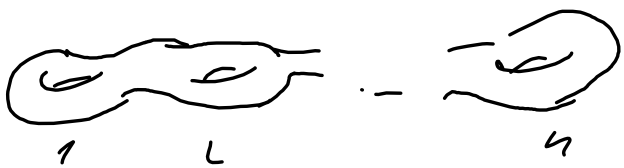
Опр. Пусть X — компакт. двумерн. многообр. Триангуляцией X наз. разбиение $X = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$: $\forall i$ T_i — замкн., T_i гомеом. треугольнику $\forall i \neq j$ $T_i \cap T_j = \varnothing$, вершина, ребро (одно целое ребро)

Опр. Пусть T — триангул. X. Эйлеровой хар. наз. $\chi(T) = v - e + t$, где v, e, t — число верш., ребер, треуг.

Лемма (без д-ва, следует из ТОП): $\chi(T)$ не зав. от T, т.е. $\chi = \chi(X)$

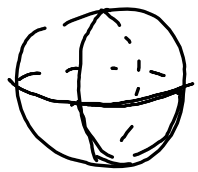
Опр: Топ. род X называется число $g(X) = \frac{1}{2}(2 - \chi(X))$.

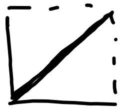
Теорема (без д-ва, сложно!). Всякое компакт. ориентируемое* многообр. X гомеом. сфере с g ручками, где g - топ. род.

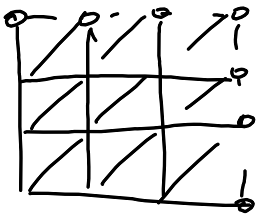


$g = n$

Пример: $g = 0$, сфера



 — не бывает



$V = 9$

$e = 9 \cdot 3$ $\qquad g = \underline{1}$

$t = 18$

__Теорема__ (без что нужно знать):

Если X — РП, что X — замкнутая ориент. пов-ть рода $g \geq 0$.

__Аффинные кривые__

__Опр.__: Пусть $f \in \mathbb{C}[z,w]$. Мн-во $X_f = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 : f(z,w) = 0 \}$ наз. аффинной кривой $/ \mathbb{C}$

__Опр.__: X_f или f наз. невырожд (неособенной, , в $p \in X$, если $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ или $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$

Если X неособая: $\forall p \in X$, то

X наз. гладкой аналитич. кривой (нег. д-ла)

<u>Теорема</u>: Если f — неприв. многочл., то

X — РП

(Набросок: $\forall p = (z_0, w_0) \in X$

Т. о неявн. ф-ции: $\exists$ голом. ф-я

g: в окр. z_0 X: $w = g(z)$

$X|_{U_{z_0}} = \{(z, g(z)) : z \in U_{z_0}\}$

$\pi: (z, g(z)) \to z$ — карта

Согл., связн., Хаусд. — <u>упр.</u>

Сложности — неприв. рез.!

Сложности — неприв. рез.!)

Пример: $f = w^2 - h(z)$,

$w^2 = h(z)$, f — неприв./$\mathbb{C}[z]$, h не явл. полн. квадр.

$\deg h = 3$ — ЭК

$\deg h > 3$ — ГЭК

Проективн. кривые:

Опр. 1 Пусть $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ — однор. многоч. степ. d (обозн. $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z)$)

Тогда $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ наз. проективная кривой

Опр. X_F. F — неособый, если система уравнений $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial t}=0$

не имеет решений.

Теорема (без док-ва) Если F — неприводим, X — компл. РП.

(нетривиальный рез.!)

Теорема (без д-ва): F — неособый, $X_F=\{F=0\}$ — РП одномер., и, если $\deg F = d$, то $g(X_F)=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

□ Сложная [КАП], но нужно позже ■

Пример: ∃ $\deg F = 3$, $g = 1$