Листок 9
Тема 9 (2.5). Тригонометрические суммы. Уравнения над конечными полями

Упражнения и задачи

1. Пусть $F_1(x_1,\dots,x_n),\dots,F_m(x_1,\dots,x_n)$ — многочлены с целыми коэффициентами степеней $r_1,\dots,r_m$. Докажите, что если $r_1+\dots+r_m<n$, то число решений системы сравнений $F_i(x_1,\dots,x_n)\equiv 0\ (p), 1\leqslant i\leqslant m$, делится на p.

2. Пусть p — простое, $F(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ — многочлен с целыми коэффициентами, $\deg F=r<n(p-1)$. Докажите, что $p^a\mid\sum' F(x_1,\dots,x_n)$, где в сумме x_i пробегают независимо друг от друга полную систему вычетов $\bmod p$, и $a=n-[r/(p-1)]$.

3. Пусть m — натуральное, $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $S_a=\sum\limits_{x \bmod m} e^{2\pi i\frac{af(x)}{m}}$. Докажите, что
$$\sum_{a \bmod m}|S_a|^2=m\sum_{c \bmod m}N(c)^2,$$
где $N(c)=N_m\left(f(x)\equiv c\ (m)\right)$ — число решений сравнения $f(x)\equiv c\ (m)$.

4. Пусть p — простое, $S_a=\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p} e^{2\pi i\frac{ax^r}{p}}$, $d=(r,p-1)$. Докажите, что
   - $\sum\limits_{a\in\mathbb{F}_p^*}|S_a|^2=p(p-1)(d-1)$;
   - $|S_a|<d\sqrt{p}$, при $a\neq 0$;
   - и более точная оценка: $|S_a|\leqslant(d-1)\sqrt{p}$, при $a\neq 0$.

5. Пусть χ,λ — неглавные мультипликативные характеры $\mathbb{F}_p$, ϵ — главный, $\tau(\chi)$ — сумма Гаусса. Докажите свойства сумм Якоби:
   - $J(\epsilon,\epsilon)=p$;
   - $J(\epsilon,\chi)=0$;
   - $J(\chi,\chi^{-1})=-\chi(-1)$;
   - $J(\chi,\lambda)=\tau(\chi)\tau(\lambda)/\tau(\chi\lambda)$ при $\chi\lambda\neq\epsilon$.

6. Пусть χ,ρ — мультипликативные характеры $\mathbb{F}_p^*$, χ — неглавный, ρ — порядка 2. Докажите следующие утверждения:
   - $\sum_t\chi(1-t^2)=J(\chi,\rho)$;
   - $\sum_t\chi(t(k-t))=\chi(k^2/4)J(\chi,\rho)$, $k\in\mathbb{F}_p^*$;
   - $G(\chi)^2=\chi(2)^{-2}J(\chi,\rho)G(\chi^2)$ если χ^2 — неглавный;
   - $J(\chi,\chi)=\chi(2)^{-2}J(\chi,\rho)$;
   - если $p\equiv 1\,(4)$, χ — порядка 4, то $\chi^2=\rho$ и $J(\chi,\chi)=\chi(-1)^{-2}J(\chi,\rho)$;
   - $\sum_t\chi(1-t^m)=\sum_{\lambda^m=\epsilon}J(\chi,\lambda)$;
   - $|\sum_t\chi(1-t^m)|\leqslant(m-1)\sqrt{p}$.

7. Пусть $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_l$ — мультипликативные характеры, ε — главный характер $\bmod p$, $J=J(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_l)=\sum\limits_{t_1+\dots+t_l=1}\chi_1(t_1)\cdots\chi_l(t_l)$ — обобщенная сумма Якоби, $J_0=J_0(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_l)=\sum\limits_{t_1+\dots+t_l=0}\chi_1(t_1)\cdots\chi_l(t_l)$. Докажите следующие свойства J и J_0:

- $J_0(\varepsilon,\dots,\varepsilon)=J(\varepsilon,\dots,\varepsilon)=p^{l-1}$;
- если некоторые, но не все, среди характеров χ_i являются главными, то $J_0=0$, $J=0$;
- пусть $\chi_l\neq\varepsilon$, тогда если $\chi_1\chi_2\cdots\chi_l\neq\varepsilon$, то $J_0=0$, а если $\chi_1\chi_2\cdots\chi_l=\varepsilon$, то $J_0(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_l)=\chi_l(-1(p-1))J(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_{l-1})$.

8. Пусть $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_l$ — неглавные характеры $\bmod p$ такие что $\chi_1\chi_2\cdots\chi_l$ тоже неглавный, τ — сумма Гаусса, J — обобщенная сумма Якоби. Докажите, что
   - $\tau(\chi_1)\cdots\tau(\chi_l)=J(\chi_1,\dots,\chi_l)\tau(\chi_1\cdots\chi_l)$;
   - $|J(\chi_1,\dots,\chi_l)|=p^{(l-1)/2}$.

9. Путь $m>1$ — целое, $K(a,b;m)=\sum'_{xy\equiv1(m)}e^{2\pi i\frac{ax+by}{m}}$, где x пробегает приведеную систему вычетов $\bmod m$. $K(a,b;m)$ называется суммой Клоостермана, удобно также использовать запись $K(a,b;m)=\sum'_{x \bmod m}e^{2\pi i\frac{ax+bx^*}{m}}$, где x^* обозначает вычет обратный к x. Докажите следующие свойства сумм Клоостермана:
   - $K(a,b;m)=K(b,a;m)$;
   - если $(m,c)=1$, то $K(ac,b;m)=K(a,bc;m)$;
   - если $m=m_1m_2$, $(m_1,m_2)=1$, то $K(a,b;m)=K(n_2a,n_2b;m_1)K(n_1a,n_1b;m_2)$, где n_1,n_2 определены из $m_1n_1\equiv1\ (m_2)$, $m_2n_2\equiv1\ (m_1)$;
   - если $m=p^{2\alpha}$, $(m,2a)=1$, то $K(a,a;m)=\sqrt{m}(e^{2\pi i\frac{2a}{m}}+e^{-2\pi i\frac{2a}{m}})$.

10. Пусть p — простое, $(k,p)=1$, $S=\sum'_x\sum'_y\left(\frac{xy+k}{p}\right)$, где x,y пробегают возрастающие последовательности из X и Y вычетов полной системы вычетов $\bmod p$. Докажите, что $|S|<\sqrt{XYp}$.

11. Пусть $m>1$ — целое, $(a,m)=1$, $S=\sum\limits_{x \bmod m}\sum\limits_{y \bmod m}\xi(x)\eta(y)e^{2\pi i\frac{axy}{m}}$, где ξ,η — такие, что $\sum\limits_{x \bmod m}|\xi(x)|^2=X$, $\sum\limits_{y \bmod m}|\eta(x)|^2=Y$. Докажите, что $|S|<\sqrt{XYm}$.

12. Пусть p — простое, $(a,p)=(b,p)=1$, n — целое $0<n<p$, $S=\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p^*}e^{2\pi i\frac{ax^n+bx}{p}}$. Докажите, что $|S|<\frac{3}{2}n^{1/4}p^{3/4}$.

13. Пусть $p>60$ — простое, M,Q — целые, $0<M<M+Q\leqslant p$, χ — неглавный характер $\bmod p$, $S=\sum\limits_{x=M}^{M+Q-1}\chi(x)$. Докажите, что $|S|<\sqrt{p}\,(\log p-1)$.

SageMath

- Сопроводите оценки тригонометрических сумм полученные в лекции и упражденииях экспериментальными оценками с помощью SageMath.

Темы для самостоятельного изучения

- Вывод числа решений уравнения $a_1x_1^{l_1}+\dots+a_rx_r^{l_r}=b$ через суммы Якоби. [IR], глава 8.

- Теорема Бёрджесса. [Степ], §II.1.