6 Диф. формы. Дивизоры

ТФКП:

Опр: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голом. на $V \subset \mathbb{C}$

$\omega = f(z)\,dz$ — голом. диф. 1-форма

(голом. диф.)

$z = \varphi(x)$, $w = \psi(x)$ — карты

$z = T(w)$ — склейка

$dz = T'(w)\,dw$

Опр: $\omega_1 = f(z)\,dz$, $\omega_2 = g(w)\,dw$, T — голом.

если $g(w) = f(T(w))\,T'(w)$. Говорят ω_1 переходит в ω_2

Опр.: X — РП. Тогда 1-формой на X наз. $(\omega_\varphi)_{\varphi: U\to V}$: $\forall\ \varphi_1, \varphi_2$ ω_{φ_1} переходит в ω_{φ_2} под $T = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$

Лемма: Достаточно указать на картах атласа $\mathcal{A}$.

Обозн. Ω, $\Omega_{V,X}$, Ω_P, ...

Опр.: — " — f — мер. ф-я

— " — $\omega = f(z)\,dz$ — мер. 1-форма.

Опр.: — " —

Опр.: — " —

Лемма: — " —

} аналогично для мер. 1-форм.

Обозн. $\mathcal{M}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(1)}_{V,X}$, $\mathcal{M}^{(1)}_P$, ...

Опр.: $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, $p \in X$, $z = \varphi(\cdot)$ — лок. коорд.; $\omega = f(z)\,dz$, $f \in \mathcal{M}_p$

$\nu_p(\omega) = \nu_p(f)$ — порядок ω

p — нуль пор. n формы ω $\Leftrightarrow$ $\nu_p(\omega) = n > 0$

p — полюс — " — $\Leftrightarrow$ $\nu_p(\omega) = -n < 0$

__Лемма:__ $\nu_p(\omega)$ корр. опр., т.е. не зав. от выбора карты.

__Лемма:__ 1) $\omega \in \Omega$, $h \in \mathcal{O}$ — голом. функция $\Rightarrow$ $h\omega \in \Omega$

2) $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$, $h \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $h\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$

3) $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, $h \in \mathcal{M}_p$ $\Rightarrow$ $\nu_p(h\omega) = \nu_p(h) + \nu_p(\omega)$

$\square$ ... $\blacksquare$

Опр. $d : f \mapsto f'(z)\,dz : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{(1)}$

Опр.: $\omega \in d(\mathcal{M})$ ($\omega = df$) наз. точной.

Пример. $\mathbb{C}_\infty$

- $\omega = dz$. $\forall p \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$ $\nu_p(\omega) > 0$

в окр. ∞ $z = \frac{1}{w}$ $dz = -\frac{1}{w^2}\,dw$

$\Rightarrow \nu_\infty(dz) = -2$

- $\omega = f\,dz$, $f \in \mathcal{M}$, f - непост., если f - голом. на $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \nu_\infty(f) < 0$

$\omega = -f(\frac{1}{w})\frac{1}{w^2}\,dw$, $\nu_\infty(\omega) = \nu_0(f(\frac{1}{w})\frac{1}{w^2}) \leq -2$

Т.о. $\Omega_{\mathbb{C}_\infty} = \{0\}$.

• $\omega = \frac{1}{z}\,dz$ — не точна

(не $\exists\, f \in M_{\mathbb{C}_\infty}$: $df = \omega$).

<u>Интегрирование 1-форм</u>

$\mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

в $\mathbb{R}^2$ 1-форма $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$, $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$

$dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$

f — голом. $\Rightarrow$ (Коши-Римана) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

$f(z) = f(x,y) = f(z,\bar{z})$

$\Rightarrow$ $f = f(x,y)$ — веществ. функц., или

$f \in C^\infty$ — как веществ. дифф. функц.

Опр. C^∞ – 1 – формы:

$$\omega = f(z,\bar z)\,dz + g(z,\bar z)\,d\bar z,$$

$f, g \in C^\infty$

Аналогично, распростр. на РП:

C^∞ - формы: (ω_φ): $\forall\ \varphi_1, \varphi_2$

ω_{φ_1} переход в ω_{φ_2}:

$$\omega_{\varphi_i} = f_i(z,\bar z)\,dz + g_i(z,\bar z)\,d\bar z$$

$$f_2(w,\bar w) = f_1(T(w), \overline{T(w)})\, T'(w)$$

$$g_2(w,\bar w) = g_2(\ldots)\, T'(w)$$

Опр.: X – РП. Путь на X:

C^∞ - ф-я $\gamma : [a, b] \to X$.

$\gamma(a)$, $\gamma(b)$ — начало и конец.

Опр.: $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}$ — атлас на РП X

γ — путь на X. Разбиение γ — это $(\gamma_i)_{i=1}^{n}$: $[a,b] = \bigsqcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $\forall i$ $\gamma|_{[a_i,b_i]} = \gamma_i$, $\gamma([a_i,b_i]) \subset U_i$

Опр.: ω — C^∞-форма : $(\varphi_i)_{i=1}^{n}$ | $\varphi_i : U_i \to V_i$

$$\omega = f_i(z,\bar z)\,dz + g_i(z,\bar z)\,d\bar z$$

$(\varphi_i \circ \gamma_i) = z(t) : [a_i, b_i] \to V_i \subset \mathbb{C}$

Инт. ω по γ

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \Big(f_i(z(t), \overline{z(t)})\, z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})\, z'(t) \Big)\, dt$$

Лемма. 1) $\int_\gamma \omega$ не зав. от парам. γ и разб. γ

2) $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, f — C^∞-функция

3) $\gamma = \bigsqcup_{i=1}^{n} \gamma_i$ — разб. $\int_\gamma \omega = \sum \int_{\gamma_i} \omega$

4) $\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$

$\square$ ...

Опр: $\omega \in \Omega^{(1)}_p$, $z = \varphi(\cdot)$ — коорд. в p;

$\nu_p(\omega) = -\mu < 0$, $\omega = f\,dt$.

$f = \sum_{n \geq -\mu} c_n z^n$. $c_{-\mu} \neq 0$

$c_{-1} = \mathrm{Res}_p(\omega)$

Лемма: $\mathrm{Res}_p(\omega)$ корр. опр. и

$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \omega$, γ — замкн. контур, лежащий p и

внутри γ нет никаких других особых точек p

$\blacksquare$

□ Если $\gamma \subset U$ – одн. связ. нечто

$\varphi : U \to V$, что

$$\operatorname{Res}_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$$

$\omega = f\,dz$

Если $\gamma \not\subset U$ $\quad \gamma = \bigsqcup \gamma_i \quad \ldots$ ☒

2-формы:

C^∞: $\quad h(x,y)\,dx\,dy$

2-форма — " — $\quad f(z,\bar z)\,dz \wedge d\bar z$

ω – 1-форма $\quad d\omega$ – 2-форма

Теорема (ф. Стокса)! $\displaystyle\iint_D d\omega = \int_{\partial D}\omega$

($d\omega$: $\quad \omega = f(z,\bar z)\,dz + g(z,\bar z)\,d\bar z$

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z$$)

Теорема (о вычетах). X — комп. РП

$\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} \Rightarrow \sum_{p \in X} \operatorname{Res}_p(\omega) = 0$

□ X — комп $\Rightarrow$ конечн. число 0, ∞

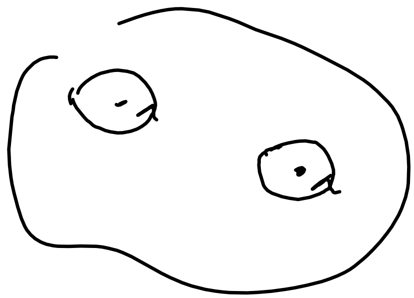
$p_1, \dots, p_n$ — полюса $\omega = f\,dz$

$\forall\, i$ γ_i — замкн. контур вокруг p_i,

не окруж. p_j, $j \neq i$.

U_i — внутр. γ_i : $\partial U_i = \gamma_i$

(граница)



$D = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$

$\partial D = \left(\bigcup \gamma_i\right)^{-}$

$$\sum \mathrm{Res}_{p_i} \omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} \omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{(\cup \gamma_i)^-} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

$d\omega$ – Lohon ∎

Lemma: $f \in \mathcal{M}_p$, $\omega = \frac{df}{f}$

$$\mathrm{Res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = \nu_p(f)$$

□ $f = cz^n + \dots$, $df = cnz^{n-1} + \dots$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{cz^n} + \dots \qquad \frac{df}{f} = n \cdot \frac{1}{z} + \dots$$ ∎

Теорема X - компакт $f \in \mathcal{M}_X$

$\sum \nu_p(f) = 0$

□ $\frac{df}{f} \in \mathcal{M}_X^{(1)}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_p \operatorname{Res}_p \frac{df}{f} = \sum_p \nu_p(f) \quad ∎$$

Лемма: $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}_X^{(1)}$ $\omega_1 \not\equiv 0$

$\exists f \in \mathcal{M}_X : \omega_2 = f \omega_1$

□ Карта $z = \varphi(\cdot)$ $\omega_i = g_i(z)\, dz$

тогда $\frac{g_2}{g_1} \in \mathcal{M}_X$.

Корр. опр. и независ. от φ ... ∎

Дивизоры.

X — комп. РП

Опр.: Группа дивизоров $\mathrm{Div}(X)$ наз. свободная абелева группа, порожд. всеми точками X.

$D \in \mathrm{Div}(X)$ $\quad D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p \quad$ ($n_p \neq 0$ для конечн. числа)

$\mathrm{supp}\, D = \{ p \in X : n_p \neq 0 \}$

$\deg D = \sum_{p \in D} n_p$.

Зам.: $D : X \to \mathbb{Z}$ с конечным носителем

запись $\sum n_p \cdot p = \sum D(p) \cdot p$ — удобная запись.

Опр: $D_1 \le D_2 \Leftrightarrow D_1(p) \le D_2(p) \quad \forall p$

($D > 0 \Leftrightarrow \forall p \quad D(p) = n_p > 0$)

Опр: $D = p$ наз. простым див.

Опр: Если $f \in \mathcal{M}_X$ $\quad \operatorname{div}(f) = \sum_p \nu_p(f) \cdot p \in \operatorname{Div}(X)$

$$\operatorname{div}(f) = (f)$$

Если $D \in \operatorname{Div}(X)$ имеет вид $D = (f)$, то наз. главным див..

Опр: Див. нулей $(f)_0 = \sum_{\nu_p(f) > 0} \nu_p(f) \cdot p$

Див. полюсов $(f)_\infty = \sum_{\nu_p(f) < 0} (-\nu_p(f)) \cdot p$

($(f) = (f)_0 - (f)_\infty$)

Свойства: 1) $(fg) = (f) + (g)$

$\left(\frac{1}{f}\right) = -(f)$, $\quad \left(\frac{f}{g}\right) = (f) - (g)$

2) $\deg(f) = \sum \nu_p(f) = 0$

Опр: $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$ $\quad (\omega) = \mathrm{div}(\omega) = \sum \nu_p(\omega) \cdot p$

Пример: $X = \mathbb{C}_\infty$ $\quad f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$

$$f = c \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{e_i}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

$$\nu_{\lambda_i}(f) = e_i, \quad \nu_\infty(f) = -\sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \cdot \infty$$

$\omega = f\,dz$, $\quad (\omega) = (f\,dz) = (f) + (dz) =$

$= \sum e_i \cdot \lambda_i - \left(\sum e_i - 2\right) \cdot \infty$, $\quad \deg(\omega) = -2$

Обозн.:

$\mathrm{Div}_0(X) = \{ D \in \mathrm{Div}\, X \quad \deg D = 0 \}$

$\mathrm{PDiv}(X) = \{ D : D = (f) \}$

$\mathrm{KDiv}(X) = \{ D : D = (\omega) \}$ наз. канонич.

$\mathrm{PDiv} \subset \mathrm{Div}_0 \subset \mathrm{Div}$ — подгр.

Опр: фактор группы $\mathrm{Div}(X) / \mathrm{PDiv}(X) = Cl(X)$ наз. группой классов див.

Обозн. эквив.: $D_1 \sim D_2$, $[D_1] = [D_2]$ если $(D_1) - (D_2) = (f)$

Лемма: $\deg [D] = \deg D$ — не зав. от класса

$\square$ $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow D_1 = D_2 + (f) \Rightarrow \deg D_1 = \deg D_2 + 0$ $\blacksquare$

Лемма: $\forall\ \omega_1, \omega_2$ $(\omega_1) \sim (\omega_2)$, т.е.
$K\,\mathrm{Div}(X) = K$ — один класс в $Cl(X)$

□ $\forall\ \omega_1, \omega_2$ $\omega_2 = f\,\omega_1 \Rightarrow$

$(\omega_2) = (\omega_1) + (f)$ ∎

Опр.: $D = (\omega)$ наз. канонический.

Теорема: $X = \mathbb{C}_\infty$ $D \in P\mathrm{Div} \iff \deg D = 0$

□ $(\Rightarrow)$ — упр

$(\Leftarrow)$ $D = \sum e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ $\quad e_i \in \mathbb{Z}$

точка $\mathbb{C}$ $\quad$ точка ∞

$\deg D = 0 \iff e_\infty = -\sum e_i$

$f = \prod (z - \lambda_i)^{e_i} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$

$D = (f)$ ∎

$X = \mathbb{C}/L$ — тор.

Опр.: Отобр. $A : \mathrm{Div}(\mathbb{C}/L) \to \mathbb{C}/L$:

$\sum n_i p_i \longmapsto \sum n_i p_i$

форм. сум — сум в $\mathbb{C}/L$

A — гомом. групп

A наз. отобр. Абеля (-Якоби)

<u>Теорема</u>: $X = \mathbb{C}/L$, $D \in \mathrm{PDiv}(X)$, $\deg D = 0$ и $A(D) = 0$

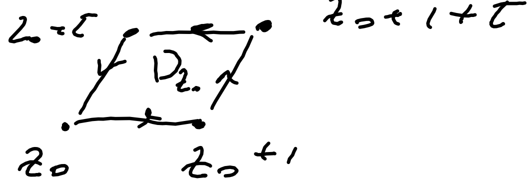
$\square$ ($\Rightarrow$) $L = \langle 1, \tau \rangle$, $\tau \in \mathbb{H}$,

$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$

$D = (f)$, $\deg D = 0$ — знаем

Будем $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h \circ \pi = f$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$



$\gamma = \gamma_{z_0}$ возьмём

$D = \partial D_{z_0}$

p - [illegible] [illegible] : γ не [illegible] p, ∞

нули и полюсы f $\longleftrightarrow$ нули и полюсы h в D

$$\int_\gamma z \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = \sum_{z \in D} \nu_z(h)\, z$$

$$\in L \quad (\dots)$$

$$\sum_{z \in D} \nu_z(h)\, z \equiv 0 \ (L) \Rightarrow A((f)) = 0$$

$$\sum_{z\in D} \nu_z(h)\, z = \sum \nu_p(f) \cdot p$$

$\Leftarrow$ $\quad \deg D = 0, \quad A(D) = 0$.

$D = \sum (p_i - q_i)$, $\quad \pi^{-1}(p_i) = z_i$, $\pi^{-1}(q_i) = w_i$

$\Sigma(z_i - w_i) \in L$ $\qquad$ $\Sigma(z_i - w_i) = 0$

2) $\quad f = \prod \Theta^{(z_i)}(z) \,/\, \prod \Theta^{(w_i)}(z)$

$D = (f)$ $\qquad \blacksquare$