§ Тр. Римана-Роха. Линейные системы

- X — РП, X — компакт.
- $\mathrm{Div}\, X = \{ D = \sum\limits_{p \in X} n_p \cdot p$, $\mathrm{supp}\, D$ — конечен $\}$

  $n_p = D(p)$, $D : X \to \mathbb{Z}$

  $\deg D = \sum n_p$

- $D = p$ — простой

  $D = (f) = \sum \nu_p(f) \cdot p$ — главный

  $D = (\omega) = \sum \nu_p(\omega) \cdot p$ — канонический

- $Cl\, X = \mathrm{Div}\, X \,/\, P\mathrm{Div}\, X$, $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow$
  $D_1 - D_2 = (f) \in P\mathrm{Div}$

Опр.: $f, g \in \mathcal{M}_X$, D — див. на X. $f \geq g \, (D) \Leftrightarrow$
$(f - g) \geq D \Leftrightarrow \forall p \in X \;\; \nu_p(f-g) \geq n_p = D(p)$

Зам.: $D = \prod\limits_p p^{n_p}$ $\qquad D_1 \leq D_2 \sim D_1 \mid D_2$

Опр.: $L(D) = \{ f \in \mathcal{M}_X : f \geq 0 \, (-D) \}$

т.е. f: $(f) \geq -D$ или $\nu_p(f) \geq -n_p$

$L(D)$ — мн. (вект. пр.) ф-ий с полюсами огр. див. D или пр-во Римана-Роха

($D(p) = n_p = n > 0$ $\quad f \in L(D) \Leftrightarrow \nu_p(f) \geq -n$
т.е. полюс в p пор. $\leq n$)

По опр. $L(0) = \mathcal{O}_X$ — пр-во голом. ф-ий

Лемма: $D_1 \leq D_2 \Rightarrow L(D_1) \subseteq L(D_2)$

$\square$ ...

Лемма: X — комп РП:

1) $L(0) = \mathbb{C}$

2) $\deg D < 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$

□ 1) ...

2) $f \in L(D)$, $D_1 = (f) + D \geq 0$

$(\nu_P(f) + n_P \geq 0)$

$\Rightarrow \deg D_1 \geq 0$

но $\deg D_1 = \underbrace{\deg(f)}_{=0} + \deg D < 0$

т.к. $f \not\equiv 0$ $><$ $\blacksquare$

Лемма: X — комп. $\deg D = 0$

1) $D \sim 0 \Rightarrow \dim L(D) = 1$

2) $D \not\sim 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$

Pf: 1) $D \sim 0 \Leftrightarrow D = (f)$

$$L(D) = \{ g : \underbrace{(g) + (f)}_{=(gf)} \geq 0 \}$$

$(gf) \geq 0 \Rightarrow gf \in \mathcal{O}_X \Rightarrow gf = c \in \mathbb{C}$ w.l.o.g.

d.h. $L(D) = \{ c\frac{1}{f},\ c \in \mathbb{C} \} = \langle \frac{1}{f} \rangle \Rightarrow \dim = 1$

2) $D \not\sim 0$, $\deg D = 0$

$$g \in L(D) \Leftrightarrow \underbrace{(g) + D}_{E} \geq 0$$

$\deg E = \deg(g) + \deg D = 0$

$= \sum n_p$, $n_p \geq 0 \Rightarrow n_p = 0 \Rightarrow E = 0$ ∎

Лемма: $D_1 \sim D_2 \Rightarrow L(D_1) \cong L(D_2)$

□ $D_1 = D_2 + (h)$ $\quad f \in L(D_1) \Leftrightarrow (f) \geq -D_1$

$(hf) = (h) + (f) \geq (h) - D_1 = -D_2 \Leftrightarrow hf \in L(D_2)$

обр. $f \in L(D_2) \Rightarrow \frac{f}{h} \in L(D_1)$

т.е. умнож. на h задаёт $\cong$ ■

Опр: $L^{(1)}(D) = \{ \omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} : (\omega) \geq -D \}$

$L^{(1)}(0)$ — пр-во голом. форм

Лемма: $D_1 \sim D_2 \Rightarrow L^{(1)}(D_1) \cong L^{(1)}(D_2)$

□ ... (аналогично) ■

Лемма: $L^{(1)}(D) \cong L(D+K)$, $K = (\omega)$ канонич. див.

$\square$ $f \in L(D+K) \Leftrightarrow (f) + D + K \geq 0$

$f\omega \in M_X^{(1)}$ $\quad (f\omega) = (f) + K \geq -D$

$\Rightarrow f\omega \in L^{(1)}(D)$

Обр.. $\omega' \in L^{(1)}(D)$ $\quad \exists f \in M_X : \omega' = f\omega$
(лемма лекция 7)

$\underset{(\omega)}{(f) + D + \overset{''}{K}} = (f\omega) + D = (\omega') + D \geq 0$

$\Rightarrow f \in L(D+K)$ $\blacksquare$

Теорема: $X = \mathbb{C}_\infty$, $D \in \operatorname{Div} \mathbb{C}_\infty$, $\deg D \geq 0$,
$\lambda_i \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}$

$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$

$f_D(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{-e_i}$

Тогда $L(D) = \{ g(z) f_D(z),$
$g \in \mathbb{C}[z], \deg g \leq \deg D \}$.

$$\mathcal{L}' = \{ g(z) f_D(z),\ \deg g \le \deg D \} \qquad f_D = \prod (z-\lambda_i)^{-e_i}$$

$g \in \mathbb{C}[z]$, $\deg g = d$

$$(g f_D) + D = \underbrace{(g)}_{\geq -d\cdot\infty} + \underbrace{(f_D)}_{=\sum(-e_i)\lambda_i + (\sum e_i)\cdot\infty} + D = \sum e_i\cdot\lambda_i + e_\infty\cdot\infty \geq$$

$$\geq (-d + \underbrace{\sum e_i + e_\infty}_{\deg D})\cdot\infty \geq 0 \iff d \le \deg D$$

Т.о. $d \le \deg D \Rightarrow g f_D \in \mathcal{L}(D) \Rightarrow \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}(D)$.

Пусть $h \in \mathcal{L}(D)\setminus\{0\}$, $g = \dfrac{h}{f_D}$

$$(g) = (h) - (f_D) \geq -D - (f_D) = -(D + (f_D)) =$$

$$= -(\underbrace{\sum e_i + e_\infty}_{\deg D \geq 0})\cdot\infty \iff$$ g нет полюсов кроме полюса пор. $\le \deg D$ в ∞ $\Rightarrow g \in \mathbb{C}[z]$ ∎

Следствие: $D \in \operatorname{Div} C_\infty$

$$\dim L(D) = \begin{cases} 0, & \deg D < 0 \\ 1+\deg D, & \deg D \geq 0 \end{cases}$$

$\square$ ... $\blacksquare$

Теорема: $X = \mathbb{C}/L$

1) $\deg D < 0 \Rightarrow L(D) = \{0\}$

2) $\deg D > 0 \Rightarrow \dim L(D) = \deg D$

3) $\deg D = 0$

3.1) $D \sim 0$ $\quad \dim L(D) = 1$

3.2) $D \nsim 0$ $\quad L(D) = \{0\}$

$\square$ ... [Mir] $\blacksquare$

Лемма: $D \in \operatorname{Div} X$. $p \in X$

– либо $L(D-p) = L(D)$

– надо $\dim L(D)/L(D-p) = 1$

$(\operatorname{codim}_{L(D)} L(D-p) = 1)$

$(D-p \leq D \Rightarrow L(D-p) \subseteq L(D))$

(знаем $\dim L(D)/L(D-p) \leq 1$)

$\square$ $n = -D(p)$

$f \in L(D) \Leftrightarrow$ в нуле в окр. p f есть

$c z^{m} + \dots$

Тогда $\alpha : L(D) \to \mathbb{C} : f \mapsto c$

– лин. отобр..

$\ker \alpha = \{ f : c = 0$ т.е. $\nu_p(f) > m \} = L(D-p)$

если α нулевое $0 \Rightarrow L(D) = \ker \alpha = L(D-p)$

иначе $L(D)/L(D-p) \simeq \mathbb{C}$ $\blacksquare$

Теорема: X - комп. $D \in \operatorname{Div} X$.

Тогда $\dim_{\mathbb{C}} L(D) < \infty$. Более того, если

$D = P - \mu$, $P, \mu \geq 0$. тогда

$$\dim L(D) \leq 1 + \deg P$$

$\square$ Индукция по $\deg P$

$\deg P = 0 \iff P = 0$, $L(P) = L(0) = \mathcal{O}_X \simeq \mathbb{C}$

т.е. $\dim L(P) = 1$

$D \leq P \Rightarrow L(D) \subseteq L(P) \Rightarrow \dim L(D) \leq \underset{=1}{\dim L(P)}$

$= 1 + 0 = 1 + \deg P$.

Пусть верно для $\deg P \leq k-1$.

Пусть $\deg P = k \geq 1$

$\exists\, p \in \operatorname{supp} P : P(p) \geq 1$

$$D - p = \underbrace{P - p}_{\geq 0} - \mu \qquad \deg(P-p) = k-1$$

$\Rightarrow$ (инд.) $\quad \dim L(D-p) \leq 1 + \deg(P-p) = k =$

$= \deg P$

$$\dim L(D)/L(D-p) \leq 1$$

$$= \dim L(D) - \dim L(D-p)$$

$\Rightarrow \quad \dim L(D) \leq 1 + \dim L(D-p) \leq 1 + \deg P$ ■

<u>Следствие</u>: X - норм. $D \in \mathrm{Div}\, X$,

$$\dim L^{(1)}(D) < \infty$$

□ $\quad L^{(1)}(D) \sim L(D+K)$ ■

Линейные системы

Опр: $D \in \mathrm{Div}\, X$. Полная лин. система

$$|D| = \{ E \in \mathrm{Div}\, X : E \sim D,\ E \geq 0 \}$$

Лемма: 1) $E \in |D| \Rightarrow |D| = |E|$

2) X — полн., $\deg D < 0 \Rightarrow |D| = \varnothing$

D .... D

Опр: V — конечн. вект. пр-во, проективизация V: $\mathbb{P}(V) = \{$ лин. подпр. $W \subset V$, $\dim W = 1 \}$

$L(D)$, $\mathbb{P}(L(D))$

Лемма: X — полн., $S : \mathbb{P}(L(D)) \to |D|$:
$\langle f \rangle \mapsto (f) + D$ — 1-1

П. $E \in |D|$, $E \sim D \Leftrightarrow E = (f) + D$

$E \geq 0 \Rightarrow f \in L(D)$, $\xi(f) = E$

т. е. ξ - сюрък.

Пусть $\xi(f) = \xi(g) \Leftrightarrow (f) + D = (g) + D$

$\Rightarrow (f) = (g) \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right) = 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \equiv const = \lambda$

$\Rightarrow f = \lambda g \Leftrightarrow \langle f \rangle = \langle g \rangle$

Опр: лин. сист. Λ наз. $\Lambda \subset |D|$:

$\xi(\Lambda)$ - лин. подпр-во $\mathbb{P}(L(D))$.

Опр: X - РП, отобр. $\varphi: X \to \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

наз. голом. в $p \in X$, если $\exists$

$g_0, \dots, g_n \in \mathcal{O}_{X,p}$: $\varphi(x) = [g_0(x) : \dots : g_n(x)]$

и одн. $p \in X$.

φ голом. $\Leftrightarrow$ голом. $\forall p \in X$

Лемма: $f = (f_0, \dots, f_n)$: $f_i \in \mathcal{M}_X$:

не все $f_i \equiv 0$. $\varphi_f : X \to \mathbb{P}^n$:

$p \longmapsto [f_0(p) : \dots : f_n(p)]$.

φ_f продолжается до голом. на всё

рп X.

□ φ_f не опр. в p если

1) $\exists i$: p — полюс f_i

2) $\forall i$: p — нуль. f_i

т.е. $n = \min\limits_{1 \le i \le n} \nu_p(f_i)$ $n < 0 \Rightarrow 1)$

$n > 0 \Rightarrow 2)$

$n = 0$ — все хорошо

Пусть p : $n = \min \nu_p(f_i) = 0$

z — локал. координата в p, в окр.

p без других нулей и полюсов

$g_i(z) = z^{-n} f_i(z)$, $z \neq 0$ (на $X \neq p$)

$\varphi_f(z) = [f_0(z) : \ldots] = [z^n g_0(z), \ldots] =$

$= [g_0(z) ; \ldots ; g_n(z)]$ при $z \neq 0$

Пр. в $z = 0$ $[g_0(0) : \ldots : g_n(0)]$

— голом. отобр., более того

$m = \min \nu_p(g_i)$ $m \neq 0$ $\boxtimes$

Лемма: $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ — голом. отобр.

$\exists\ f = (f_0, \ldots f_n)$ $f_i \in \mathcal{M}_X$: $\varphi = \varphi_f$

Тогда отобр. в проек. $\mathbb{P}^n$ т.е.

если $g = (g_0, \dots, g_n)$: $\varphi = \varphi_g$

то $\exists\, h \in \mathcal{M}_X$: $\forall i$: $g_i = h f_i$.

Д. Идея: $z_0 \neq 0$ $\quad e_i = \dfrac{z_i}{z_0}$

$(z_0 : \dots : z_n)$ — проек. коорд.

$f_i = \varphi^* e_i$ — мер. ... $\boxtimes$

Опр.: Пусть $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ — голом.

$\varphi = (f_0 : \dots : f_n)$, $\quad D = -\min_i (f_i)$,

т.е. D : $\forall i$ $\quad f_i \in L(D) \iff -D \leq (f_i)$

$V = \langle f_0, \dots, f_n \rangle$ — мин. подпр.

Лин. система отобр. φ наз.

$|\varphi| = \{ (g) + D : g \in V \}$ $\quad (|\varphi| \subset |D|)$.

Лемма 1 $|\varphi|$ непуст. опр.

□ ... ⊠

Лемма: $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ задан

$\forall p \in X \quad \exists E \in |\varphi| : \quad p \notin \operatorname{supp} E$

□ $\varphi = [f_0 : \ldots : f_n] \qquad D = -\min(f_i)$

$D(p) = -k$, где $k = \min\limits_i \nu_p(f_i)$,

пусть j — достигается $\min$. т.е.

$\nu_p(f_j) = k$

$E = (f_j) + D \qquad E \in |\varphi|$

$E(p) = \nu_p(f_j) + D(p) = k - k = 0$

$\Rightarrow p \notin \operatorname{supp} E$ ⊠

Опр.: Λ — лин. сист., $p \in X$ наз. базисной (особой) т. Λ, если $\forall\, \Xi \in \Lambda$ $p \in \operatorname{supp} \Xi$

Λ наз. без базисн. точек если не $\exists$ базисн. точек

Следствие: $|\varphi|$ — без б.т.

Лемма: X — компл. $D \in \operatorname{Div} X$

$p \in X$ — б.т. $|D| \iff \dim L(D-p) = \dim L(D)$

$|D|$ — без. б.т. $\iff \forall\, p$ $\dim L(D-p) = \dim L(D) - 1$

$\square$ ... $\boxtimes$

Примеры: 1) $\mathbb{C}_\infty$ $\forall D$ $\deg D \geq 0$

$|D|$ без б. т.

2) $\forall D \in \mathrm{Div}\, \mathbb{C}/L$, $\deg D \geq 2 \Rightarrow$

$|D|$ без б. т.

Теорема: $\Lambda \subset |D|$ — без б. т. $\dim \Lambda = n$

$\exists\ \varphi : X \to \mathbb{P}^n : |\varphi| = \Lambda$

Д: ... $\{$min$\}$ $\boxtimes$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{лин. сист.} \\ \text{без б. т.} \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{класс отобр.} \\ \varphi : X \to \mathbb{P}^n \\ Y = \varphi(X) \end{matrix} \right\}$$

Теорема: $|D|$ — без б. т. $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^n$

голом. вложен., т.е. $\varphi_D(X) = Y$ — гладкая кривая

Exemple : 1) C_α deg $D \geq 0$, φ_D [illegible]

[illegible] C_α

2) C/L deg $D \geq 3$ $\Rightarrow$ [illegible] [illegible]..