Спецкурс Арифметика III: Римановы поверхности и алгебраические кривые

Содержание

1 О курсе

Осенний семестр, 15–16 недель

Курс состоит из двух частей. В первой части (лекции 1–10) излагается теория римановых поверхностей с уклоном в приложения для современной теории чисел. Развивается необходимый для доказательства теоремы Римана–Роха аппарат, сама теорема Римана-Роха доказывается используя двойственность Серра. Общие результаты сопровождаются примерами для случаев римановой сферы, комплексного тора (эллиптической кривой), а также римановых поверхностей, возникающих при изучении пространств модулярных форм (модулярных кривых). В частности затрагиваются вопросы компактификации модулярных кривых, а также оценка размерности пространств модулярных форм для конгруэнц-подгрупп (эти вопросы поднимались в конце курса Арифметика II: Решётки и формы).

Вторая часть (лекции 11–15) посвящена общему случаю алгебраических функциональных полей (над алгебраически замкнутым полем). Теорема Римана–Роха доказывается в более общем случае. Вводится понятие дзета-функции алгебраической кривой. Рассматривается идея доказательства теоремы Хассе–Вейля об оценке числа точек алгебраической кривой над конечным полем.

По сути курс является введением в алгебраическую и арифметическую геометрию (по крайней мере в случай плоских алгебраических кривых). Изложение через римановы поверхности и случай над полем $\mathbb{C}$ позволяет развить аналитическую и геометрическую интуицию стоящую за понятиями дифференциалов, дивизоров, линейных пространств и теоремой Римана-Роха, и используя эту интуицию перейти к более общему случаю алгебраических функциональных полей.

2 Содержание лекций и примеры задач

2.1 Римановы поверхности: определения и примеры

Аннотация: Повторение определений и необходимых фактов из топологии: топологические пространства, связность, хаусдорфовость, род, число Эйлера. Определения комплексных карт, атласов, структуры двумерного многообразия и римановой поверхности. Примеры: комплексная плоскость, риманова сфера, комплексный тор, афинные кривые, проективная прямая, проективная плоскость, проективные кривые.

Источники: [Mir], глава I.

Примеры задач:

1. Пусть X — топологическое пространство, $\phi : U \to V$ — комплексная карта на X, $\psi : V \to W$ — взаимно-однозначное голоморфное отображение на подмножествах $\mathbb{C}$. Докажите, что $\psi \circ \phi : U \to W$ также является комплексной картой на X и что $\psi \circ \phi$ совместима с любой картой на X, с которой совместима ϕ.
2. Докажите, что определенная в лекции эквивалентность комплексных атласов действительно является отношением эквивалентности.
3. Проверьте, что отображение $\mathbb{P}^1 \to S^2$ проективной прямой над $\mathbb{C}$ в сферу единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$, заданное
$$[z : w] \mapsto (2\,\mathrm{Re}(w\overline{z}), 2\,\mathrm{Im}(w\overline{z}), |w|^2 - |z|^2)/|w|^2 + |z|^2,$$
является гомеоморфизмом. (Поэтому проективная прямая является компактной римановой поверхностью рода 0).
4. Докажите, что группа сложения точек комплексного тора X является делимой, то есть, что $\forall p \in X\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists q \in X : n \cdot q = p$.
5. Пусть многочлен от двух переменных имеет вид $f(z, w) = w^2 - h(z)$.
    - Докажите, что $f(z, w)$ является неприводимым $\Leftrightarrow$ $h(z)$ не является точным квадратом.
    - Докажите, что $f(z, w)$ является невырожденным $\Leftrightarrow$ все корни $h(z)$ различны.

6. Пусть $f(z,w)$ — многочленом второй степени. Афинная кривая X заданная $f(z,w)=0$ называется афинной коникой.
   - Докажите, что если $f(z,w)$ — вырожденный, то $f(z,w)$ раскладывается в произведение двух линейных множителей. Что в этом случае можно сказать про X?
   - Приведите примеры гладких афинных коник.
7. Пусть $F(x,y,z)$ — однородный многочлен степени d. Докажите, что F невырожденный $\Leftrightarrow$ в каждой афинной карте F задаёт гладкую афинную кривую.
8. Докажите, что любые две проективные прямые в $\mathbb{P}^2$ пересекаются в единственной точке.

2.2 Функции на римановых поверхностях

Аннотация: Голоморфные и мероморыне функции, ряды Лорана, порядки нулей и полюсов. Повторение необходимых результатов из комплексного анализа от одной переменной. Кольцо голоморфных функций и поле мероморфных функций. Мероморфные функции на римановой сфере, равенство числа нулей и полюсов с учетом кратностей. Мероморфные функции на торе, проективной прямой и гладкой алгебраической кривой (приложение теоремы Гильберта о нулях).

Источники: [Mir] §II.1–II.2.

Примеры задач:

1. Пусть f — комплексно-значная функция определенная на римановой сфере $\mathbb{C}_\infty$ в окрестности ∞. Докажите, что f голоморфна в $\infty \Leftrightarrow f(1/z)$ голоморфна в 0.
2. Пусть $p(z,w), q(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ — однородные многочлены одинаковой степени, $q(z_0,w_0) \neq 0$. Покажите, что $f([z:w]) = p(z,w)/q(z,w)$ — корректно определенная на $\mathbb{P}^1$ функция голоморфная функция в окрестности $[z_0:w_0]$.
3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — проективная кривая заданная невырожденным многочленом $F(x,y,z)=0$, $F(x,y,z), G(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ — однородные многочлены одинаковой степени, причем H не равен тождественно нулю на X. Покажите, что $G(x,y,z)/H(x,y,z)$ — мероморфная функция на X.
4. Пусть U — окрестность точки $p \in X$ $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Докажите следующие свойства порядка ν_p:
   - $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$;
   - $\nu_p(1/f) = -\nu_p(f)$, $\nu_p(f/g) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$;
   - $\nu_p(f \pm g) \geqslant \min(\nu_p(f), \nu_p(g))$.
5. Докажите, что ряд определяющий тета-функцию $\theta_\tau(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)}$ сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$.
6. Докажите, что z_0 — нуль $\theta_\tau(z) \Leftrightarrow \forall m,n \in \mathbb{Z}$ точка $z_0+m+n\tau$ является нулём $\theta_\tau(z)$.
7. Докажите, что $(1/2)+(\tau/2)+m+n\tau, m,n \in \mathbb{Z}$ — единственные нули θ_τ, причём эти нули простые.
8. Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}/L$ — комплексный тор, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, и пусть заданы два набора $\{p_i\}_{i=1}^d, \{q_i\}_{i=1}^d \subset X$. Покажите, что существуют два набора $\{x_i\}_{i=1}^d, \{y_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{C}$: $\pi(x_i)=p_i, \pi(y_i)=q_i$, $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ $\Leftrightarrow \sum_i p_i = \sum_i q_i$, где последнее суммирование выполняется в групповом законе тора.

2.3 Теорема Гильберта о нулях

Аннотация: Повторение определений и необходимых фактов из алгебры: идеалы, модули, кольца главных идеалов, максимальный идеал, радикальный идеал. Идеал множества точек кривой. Неприводимые компоненты алгебраических множеств. Лемма Зарисского, теорема Гильберта о базисе, теорема Гильберта о нулях.

Источники: [Fult] глава 1; [Mir] §III.5.

Примеры задач:

1. Пусть k — произвольное поле. Докажите, что алгебраические подмножества $\mathbb{A}^1(k)$ исчерпываются конечными подмножествами и самим $\mathbb{A}^1(k)$.
2. Пусть k — произвольное поле. Докажите следующие свойства алгебраических множеств в $\mathbb{A}^n(k)$ и их идеалов:
   - $X \subset Y \Rightarrow I(X) \supset I(Y)$;
   - $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $I(\emptyset) = k[x_1, \dots x_n]$, $I(\mathbb{A}^n(k)) = (0)$ (при не конечном k);
   - $I(V(S)) \supset S$, $V(I(X)) \supset X$, где $S \subset k[x_1, \dots x_n]$, $X \subset \mathbb{A}^n(k)$;
   - $V(I(V(S))) = V(S)$, $I(V(I(X))) = I(X)$, где S и X как выше;
   - $\forall X \subset \mathbb{A}^n(k)$ $I(X)$ — радикальный идеал;
   - $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$, где $V, W \subset \mathbb{A}^n(k)$ — алгебраические.
   - $V(I) = V(\sqrt{I})$, $\sqrt{I} \subset I(V(I))$, где I — идеал в $k[x_1, \dots x_n]$.
3. Докажите, что $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ является максимальным идеалом в $k[x_1, \dots x_n]$.
4. Докажите, что $I = (x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$ — радикальный идеал, но при этом I не является идеалом никакого множества $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$.
5. Докажите, что $V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ неприводимо и $I(V(y - x^2)) = (y - x^2)$.
6. Разложите $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3)$ $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ на неприводимые компоненты.

2.4 Отображения римановых поверхностей

Аннотация: Голоморфные отображения римановых поверхностей, индуцирование гомоморфизмов колец голоморфных и полей мероморфных функций. Изоморфизм римановой сферы и проективной прямой. Мероморфные функции как голоморфные отображения на риманову сферу. Теорема о локальной нормальная форме, кратность отображения. Степень отображения. Теорема о сумме порядков мероморфных функций. Формула Гурвица. Точки ветвления для афинных и проективных кривых. Мероморфные функции на торе как отношения тета-функций. Изоморфизмы комплексных торов

Источники: [Mir] §§II.3–II.4, §III.1

Примеры задач:

1. Докажите следующие свойства голоморфных отображений:
   - Если $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ — голоморфные отображения, то $G \circ F : X \to Z$ — голоморфное отображение;
   - Если $F : X \to Y$ — голоморфное отображение, g — голоморфная функция, определенная на открытом подмножестве $W \subset Y$, то $g \circ F$ — голоморфная функция, определенная на $F^{-1}(W)$;
   - Если $F : X \to Y$ — голоморфное отображение, g — мероморфная функция,

определенная на открытом подмножестве $W \subset Y$, то $g \circ F$ — мероморфная функция, определенная на $F^{-1}(W)$.
2. Покажите, что при изоморфизме между комплексной проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и римановой сферой $\mathbb{C}_\infty$ точки $[z:1]$ соответствуют конечным точкам $z \in \mathbb{C}$, а точка $[1:0]$ соответствует ∞.
3. Пусть $f(z,w), g(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ — ненулевые, однородные многочлены одинаковой степени, не имеющие общих множителей. Докажите, что отображение $F : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 : [z:w] \mapsto [f(z,w):g(z,w)]$ корректно определено и голоморфно. Что можно сказать про случай, когда f и g имеют общие множители?
4. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, докажите следующие свойства:
    - $F_A : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 : [z:w] \mapsto [az+b : cz+d]$ — автоморфизм $\mathbb{P}^1$, $F_{AB} = F_A \circ F_B$;
    - При отождествлении $\mathbb{P}^1$ с $\mathbb{C}_\infty$ отображение F_A соответствует преобразованию $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$.
5. Пусть X — компактная риманова поверхность, f — мероморфная непостоянная функция на X. Докажите что f имеет хотя бы один нуль и хотя бы один полюс.
6. Обозначим через $L = L(\omega_1, \omega_2) \subset \mathbb{C}$ решётку на комплексной плоскости с базисом $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$. Докажите следующие свойства:
    - Пусть $L \subseteq L'$, докажите, что естественная проекция $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ голоморфно, и что голоморфное отображение $\mathbb{C}/L' \to \mathbb{C}/L$ существует $\Leftrightarrow$ $L = L'$;
    - Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Покажите, что αL — также решётка, и что отображение $\phi : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/(\alpha L) : z + L \mapsto \alpha z + \alpha L$ — корректно определенное биголоморфное отображение.
    - Покажите, что всякий тор $\mathbb{C}/L$ изоморфен тору вида $\mathbb{C}/L(1,\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$.
7. Пусть f — непостоянная мероморфная функция на торе $X = \mathbb{C}/L$. Докажите, что $\sum_p \nu_p(f) = 0$.
8. Пусть $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ — два непостоянных голоморфных отображения, f — мероморфная функция на Y, $p \in X$. Докажите, что $e_p(F \circ G) = e_p(F) e_p(G)$, $\nu_p(f \circ F) = e_p(F) \nu_{F(p)}(f)$.
9. Докажите, что всякая прямая в $\mathbb{P}^2$ невырождена и изоморфна $\mathbb{P}_1$.
10. Докажите, что в $\mathbb{P}^2$ всякая гладкая кривая второго порядка (коника) изоморфна кривой вида $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. (В частности в $\mathbb{P}^2$ все гладкие коники изоморфны между собой).

2.5 Группы, действующие на римановых поверхностях

Аннотация: Действие группы, орбита, стабилизатор. Фактор-пространство как риманова поверхность, степень отображения факторизации. Теорема Гурвица о действии конечной группы. Действие полной модулярной группы и её конгруэнц подгрупп Γ на верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$. Структура римановой поверхности на $Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$. Эллиптические и параболические точки. Компактификация $Y(\Gamma)$ в $X(\Gamma)$, род $X(\Gamma)$.

Источники: [Mir] §III.3; [DS] §2.3.1.

Примеры задач:

1. Пусть G — конечная группа действующая на множестве X, $p \in X$. Докажите, что $|G \cdot p||G_p| = |G|$.

2. Пусть K — ядро действия G на X. Докажите, что K — нормальная подгруппа G, и что ядро действия G/K на X тривиально, а орбиты совпадают с орбитами действия G.
3. Пусть G — конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ порядка n. Покажите что $G = \{e^{2\pi i/k} : 0 \leqslant k \leqslant n\}$.
4. Покажите, что группа действий на римановой сферы $\mathbb{C}_\infty$ порожденная двумя элементами $z \mapsto e^{2\pi i/r}$ и $z \mapsto 1/z$ есть диэдральная группа порядка $2r$. Докажите также, что действие этой группы голоморфно и эффективно. Определите точки ветвления и их индексы ветвления.
5. Докажите, что кривая определенная уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ (кривая Клейна) является гладкой проективной кривой. Покажите, что на этой кривой достигается граница теоремы Гурвица.
6. Пусть $\pi : \mathbb{H} \to Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma : z \mapsto \Gamma z$ — естественная проекция. Докажите, что для открытых множеств $U_1, U_2 \subset \mathbb{H}$ справедливо $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
7. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Докажите, что существуют окрестности U_1 и U_2 точек z_1 и z_2 обладающие следующим свойством: $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ $\gamma(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(z_1) = z_2$.

2.6 Дифференциальные формы и дивизоры

Аннотация: Голоморфные и мероморфные дифференциальные формы на римановых поверхностях. Интегрирование дифференциальных форм. Вычеты, теорема о сумме вычетов. Дивизоры функций, степень дивизора, главные дивизоры. Дивизоры дифференциальных форм, канонические дивизор. Степень канонического дивизора на компактной римановой поверхности. Линейная эквивалентность дивизоров. Свойства дивизоров на римановой сфере и торе. Теорема Абеля для тора. Понятие степени гладкой проективной кривой, теорема Безу.

Источники: [Mir] глава IV, §§V.1–V.2.

Примеры задач:

1. Пусть на римановой сфере $X = \mathbb{C}_\infty$ заданы две карты с локальными координатами z и $w = 1/z$ и пусть $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Докажите, что если $\omega = f(z)dz$ (в локальной координате z), то f — рациональная функция от z. Докажите также, что $\Omega^1(X) = \{0\}$. Какие точки являются нулями и полюсами форм $dz, dz/z$.
2. Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}/L$ — тор, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция. Покажите, что для формы dz в каждой карте X локальная формула корректно определена и задаёт голоморфную 1-форму на X, и что эта форма не имеет нулей.
3. Пусть X — гладкая плоская афинная кривая заданная уравнением $f(u, v) = 0$. Покажите, что du, dv — корректно определенные голоморфные 1-формы на X, также как и $p(u, v)du$, $p(u, v)dv$ для любого $p(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$. Покажите что если $r(u, v)$ — рациональная функция, то $r(u, v)du$, $r(u, v)dv$ — корректно определенные мероморфные 1-формы.
4. Пусть X — риманова поверхность определенная уравнением $y^2 = h(x)$, где $h \in \mathbb{C}[x]$, $\deg h = 2g+1, 2g+2$ (то есть X — гиперэллиптическая кривая, поверхность рода g). Покажите, что dx/y — голоморфная 1-форма при $g \geqslant 1$. Покажите также, что если $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(p) \leqslant g - 1$, то $p(x)dx/y$ — голоморфная 1-

форма.

5. Пусть X — гиперэллиптическая кривая $y^2 = x^5 - x$, тогда $x, y \in \mathcal{M}(X)$. Определите $\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y)$.
6. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — тор. Покажите, что форма dz — корректно определённая голоморфная 1-форма всюду отличная от нуля. Что в этом случае можно сказать о главных и канонических дивизорах?
7. Пусть X — плоская проективная кривая $y^2z = x^3 - xz^2$. Определите дивизоры пересечений X с прямыми $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
8. Докажите следующие свойства дивизоров на римановой сфере $X = \mathbb{C}_\infty$
   - $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \deg(D_1) = \deg(D_2)$;
   - Если $\deg(D) \geqslant 0$, то $D \sim D_0$, $D_0 \geqslant 0$.

2.7 Пространства функций дивизоров и линейные системы

Аннотация: Линейное пространство мероморфных функций $L(D)$ и полная линейная система $|D|$. Базовые свойства линейных пространств и линейных систем. Линейное пространство мероморфных форм $L^{(1)}(D)$, изоморфизм между простнствами L и $L^{(1)}$. Линейные пространства $L(D)$ для случаев римановой сферы и тора. Оценка размерности $L(D)$. Голоморфные отображения римановых поверхностей в проективные пространства. Базовые точки линейных систем. Обратные образы (пуллбэки) дивизоров и форм. Гиперплоскостные дивизоры.

Источники: [Mir] §§V.3–V.4.

Примеры задач:

1. Пусть X — компактна, D — дивизор на X, $\deg D = 0$. Докажите, что если $D \sim 0$, то $\dim L(D) = 1$, и что если $D \not\sim 0$, то $L(D) = \{0\}$.
2. Пусть X — компактна рода g, $\mathcal{M}(X) \neq \mathbb{C}$, докажите, что если $\deg D < 2 - 2g$, то $L^{(1)}(D) = 0$.
3. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — тор, $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $\pi : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, $p_0 = \pi(0)$. Докажите следующие свойства:
   - Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $h \in L(np_0)$. Тогда $\operatorname{Res}_{p_0}(h\,dz) = 0$.
   - Пусть z — локальная координата в окрестности p_0, $h(z) = \sum_{i=-n}^{\infty} c_i z^i$ — разложение в ряд Лорана функции $h \in L(np_0)$. Тогда если $\forall i \leqslant 0$ $c_i = 0$, то h тождественно равна 0.
   - Пусть $f \in L(2p_0)$, тогда $\forall x \in X$ $f(x) = f(-x)$.
   - $\exists! f \in L(2p_0)$ такая что разложение в ряд Лорана имеет вид: $f(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots$.
   - Пусть $g \in L(3p_0)$, тогда $\forall x \in X$ $g(x) = -g(-x)$.
   - $\exists! g \in L(3p_0)$ такая что разложение в ряд Лорана имеет вид: $g(z) = z^{-3} + b_1 z + b_1 z^3 + \ldots$.
   - $\exists A, B \in \mathbb{C} : g^2 = f^3 + Af + B$, где $f \in L(2p_0), g \in L(3p_0)$ определены как выше. При этом многочлен $w^3 + Aw + B$ не имеет кратных корней.
4. Докажите, что $\forall f, g \in \mathcal{M}(X)$ $\exists$ дивизор D: $f, g \in L(D)$
5. Пусть X — компакнтая, и пусть $D > 0$ — дивизор такой, что $\dim L(D) = 1 + \deg(D)$. Докажите, что $\exists p \in X$: $\dim L(p) = 2$, и что X изоморфна римановой сфере $\mathbb{C}_\infty$.
6. Докажите, что на римановой сфере полная линейная система дивизор неотри-

цательной степени не содержит базовых точек.

7. Докажите, что на комплексном торе полная линейная система дивизора степени $\geqslant 2$ не содержит базовых точек.
8. Пусть X — кривая в $\mathbb{P}^3$ определенная уравнениями $xw = yz$, $xz = y^2$, $yw = z^2$ (скрученная кубика). Используя степень гиперплоскостного дивизора $\mathrm{div}(x)$ докажите, что степень кривой X равна 3. Определите также $\mathrm{div}(y)$.

2.8 Алгебраические кривые, слабая аппроксимация

Аннотация: Понятие алгебраической кривой. Примеры римановых поверхностей являющихся алгебраическими кривыми. Функции с заданными порядками в точке и функции с заданными отрезками рядов Лорана. Теорема о слабой аппроксимации. Конечная порождённость поля рациональных функций алгебраической кривой. Степень поля функций и степень кривой.

Источники: [Mir], §VI.1.

Примеры задач:

1. Докажите, что следующие римановы поверхности являются алгебраическими кривыми:
   - риманова сфера $\mathbb{C}_\infty$;
   - комплексный тор $\mathbb{C}/L$;
   - гиперэллиптическая кривая;
   - гладкая проективная кривая.
2. Пусть X — алгебраическая кривая. Используя компактность X докажите, что в $\mathcal{M}(X)$ существует конечное число глобальных мероморфных функций отделяющих точки и касательные.
3. Пусть X — компактная риманова поверхность. Докажите, что если $\forall p_1, \dots, p_n \in X$ $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ $\exists f \in \mathcal{M}(X) : \nu_{p_i}(f) = m_i$, то X — алгебраическая кривая.
4. Пусть G — конечная группа, действующая эффективно на алгебраической кривой X.
   - Покажите, что можно задать действие G на $\mathcal{M}(X)$.
   - Докажите, что $\mathcal{M}(X/G) = \mathcal{M}(X)^G$.
   - Докажите, что X/G является алгебраической кривой.
5. Докажите следующие утверждения:
   - $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ порождается локальной координатой z.
   - $\mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ порождается отношениями тета-функций.
   - Если X — гиперэллиптическая кривая $y^2 = h(x)$, то $\mathcal{M}(X)$ порождается x и y.
   - Если X — гладкая проективная кривая, то $\mathcal{M}(X)$ — поле рациональных функций.

2.9 Сильная аппроксимация, теорема Римана–Роха

Аннотация: Дивизоры отрезков рядов Лорана. Задача Миттаг–Леффлера. Пространство $H^1(D)$. Теорема Римана–Роха, двойственность Серра. Замечание про три определения рода. Замечание про язык аделей.

Источники: [Mir] §§VI.2–VI.3

Примеры задач:

1. Пусть f — мероморфная функция, D — дивизор. Докажите, что определенный в лекции оператор умножения $\mu_f^D : \mathcal{T}[D](X) \to \mathcal{T}[D - \mathrm{div}(f)](X)$ является изоморфизмом с обратным отображением $\mu_{1/f}^{D-\mathrm{div}(f)}$.
2. Пусть D — дивизор, f, g — глобальные мероморфные функции на X, $\alpha_D : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{T}[D](X)$ — отображение, определенное в лекции. Докажите, что $\mu_f^D(\alpha_D(g)) = \alpha_{D-\mathrm{div}(f)}(fg)$.
3. Докажите, что $D_1 \leqslant D_2 \Rightarrow \alpha_{D_2} = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1}$
4. Пусть $X = \mathbb{C}_\infty$ — риманова сфера. Докажите, что $H^1(0) = 0$ явным образом используя прообраз α_0.
5. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — комплексный тор, p — тождественный элемент группового закона на X, z — локальная координата в окрестности p, $Z = z^{-1} \cdot p \in \mathcal{T}[0](X)$. Докажите, что Z не лежит в прообразе α_0 (то есть $H^1(0) \neq 0$)
6. Пусть $f \in \mathcal{M}(X)$, $\omega \in L^{(1)}(-D)$. Докажите, что $f\omega \in L^{(1)}(-D - \mathrm{div}(f))$, и что $\mathrm{Res}_\omega \circ \mu_f^D = \mathrm{Res}_{f\omega}$ в $\mathcal{T}[D + \mathrm{div}(f)](X)$.
7. Докажите, что если D — положительный дивизор, $\deg D \geqslant g + 1$, то в $L(D)$ существует по крайней мере одна непостоянная функция.
8. Пусть X — алгебраическая кривая, K — канонический дивизор, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что $H^1(K + D) = 0$.
9. Докажите, что если $g \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то $\dim L(mK) = (g - 1)(2m - 1)$.

2.10 Некоторые приложения теоремы Римана–Роха

Аннотация: Первые приложения теоремы Римана Роха: алгебраические кривые являются проективными, кривые рода 0 изоморфны римановой сфере, кривые рода 1 изоморфны комплексным торам, кривые рода 2 изоморфны гиперэллиптическим кривым. Теорема Клиффорда. Существование мероморфных 1-форм. Автоморфные формы и мероморфные 1-формы на модулярной кривой, размерность пространств модулярных форм конгруэнц подгрупп (обзорно).

Источники: [Mir] §VII.1 ; [DS] глава 3.

Примеры задач:

1. Пусть X — алгебраическая кривая, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что $\dim L(D) = 1 + \deg D \Leftrightarrow g(X) = 0$.
2. Пусть X — алгебраическая кривая рода $g(X) = g \geqslant 2$, D — дивизор степени $\deg D > 0$. Докажите, что если $\deg D \leqslant 2g - 3$, то $\dim L(D) \leqslant g$.
3. Пусть X — компактная Риманова поверхность, D_1, D_2 — дивизоры. Докажите, что $\dim L(D_1) + \dim L(D_2) \leqslant \dim L(\min(D_1, D_2)) + \dim L(\max(D_1, D_2))$.
4. Пусть X — алгебраическая кривая рода $g(X) = g$, K — канонический дивизор, D — дивизор такой, что $\dim L(D) \geqslant 1$ и $\dim L(K - D) \geqslant 1$. Докажите, что $\dim L(D) + \dim L(K - D) \leqslant 1 + g$.
5. Пусть X — алгебраическая кривая $g(X) \geqslant 1$, K — канонический дивизор, D — дивизор, такой что пространства $L(D)$, $L(K - D)$ ненулевые и $2\dim L(D) \leqslant \deg D + 2$. Докажите, что тогда D — либо главный, либо канонический.
6. Покажите, что разложение в ряд Лорана модулярного инварианта имеет вид: $j(z) = 1/q + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$, $q = e^{2\pi i z}$.
7. Докажите, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ если $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$, $f \neq 0$, то $\mathcal{A}_k(\Gamma) = \mathcal{M}(X(\Gamma)) \cdot f$.

8. Докажите, что $\mathcal{S}_2(\Gamma) \cong \Omega^1(X(\Gamma))$.

2.11 Нормирования функциональных полей

Аннотация: Алгебраические функциональные поля. Дискретные нормирования алгебраических функциональных полей и их свойства. Точки функциональных полей, степень точек. Теорема о слабой аппроксимации Поле рациональных функций.

Источники: [Stich] §§1.1–1.3; [Степ] §IV.2.1-IV.2.2.

Примеры задач:

1. Пусть $K(x)/K$ — поле рациональных функций, $z \in K(x) \setminus K$, $z = f(x)/g(x)$, где $f, g \in K[x]$ взаимно просты, $\deg z = \max(\deg f, \deg g)$. Докажите, что
   - $[K(x) : K(z)] = \deg z$;
   - $K(x) = K(z) \Leftrightarrow z = (ax+b)/(cx+d)$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$.
2. Пусть $\mathrm{Aut}(L/M)$ обозначает группу автоморфизмов расширения L/M и пусть $K(x)/K$ — поле рациональных функций. Докажите, что
   - $\forall\, \sigma \in \mathrm{Aut}(K(x)/K)\ \exists\, a, b, c, d \in K$: $ad - bc \neq 0$ $\sigma(x) = (ax+b)/(cx+d)$;
   - $\forall\, a, b, c, d \in K$: $ad - bc \neq 0$ $\exists\, \sigma \in \mathrm{Aut}(K(x)/K)$: $\sigma(x) = (ax+b)/(cx+d)$;
   - $\mathrm{Aut}(K(x)/K) \cong \mathrm{GL}_2(K)/K^*$.
3. Пусть $L^G = \{z \in L : \sigma(z) = z\ \forall\, \sigma \in G\}$ обозначает неподвижное поле подгруппы $G < \mathrm{Aut}(L/M)$, L/L^G является конечным расширением и $[L : L^G] = |G|$. Пусть $G < \mathrm{Aut}(K(x)/K)$ — конечная подгруппа, $u = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$, $v = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$. Докажите, что
   - либо $v \in K$, либо $K(v) = K(x)^G$;
   - либо $u \in K$, либо $K(u) = K(x)^G$.
4. Пусть $K(x)/K$ — поле рациональных функций. Докажите $\forall\, z \in K(x)$ существует единственное представление вида $z = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}(x)}{p_i(x)^j} + h(x)$, где
   - $p_1(x), \ldots, p_r(x) \in K[x]$ — различны и неприводимы,
   - $k_i \geqslant 1$,
   - $c_{ij}(x) \in K[x]$, $\deg(c_{ij}(x)) < \deg(p_i(x))$,
   - $c_{ik_i} \neq 0$,
   - $h(x) \in K[x]$.
5. Пусть $K(x)/K$ — поле рациональных функций, $P_\infty = \{f(x)/g(x) : f, g \in K[x], \deg(f) < \deg(g)\}$ — точка $K(x)$. Докажите, что $\deg P_\infty = 1$, $t = 1/x$ — соответствующий простой элемент, и $\nu_\infty = \deg(g) - \deg(f)$ — соответствующее нормирование.

2.12 Дивизоры и линейные пространства

Аннотация: Дивизоры, группа классов дивизоров. Линейные пространства $L(D)$. Теорема о равенстве числа нулей и полюсов. Алгебраический род. Теорема Римана.

Источники: [Stich] §1.4; [Степ] §IV.2.3, §IV.3.1.

Примеры задач:

1. Пусть F — функциональное поле, $D \in \mathrm{Div}(F)$. Докажите, что
   - $x \in L(D) \Leftrightarrow \nu_P(x) \geqslant -\nu_P(D)\ \forall P \in \mathcal{P}_F$.
   - $L(D) \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists\, D' \in \mathrm{Div}(F)$, $D' \geqslant 0$: $D' \sim D$.
2. Докажите, что оценка $l(D) \leqslant \deg D + 1$ справедлива $\forall\, D \in \mathrm{Div}(F)$, $\deg D \geqslant 0$.

3. Пусть $F = K(x)$ — поле рациональных функций. найдите базисы следующих линейных пространств: $L(rP_\infty), L(rP_\alpha), L(P_{p(x)})$.
4. Пусть $g(F) > 0$, $D \in \mathrm{Div}(F)$, $l(D) > 0$. Докажите, что $l(D) = \deg D + 1 \Leftrightarrow D$ — главный.
5. Пусть F/K — функциональное поле. Докажите, что следующие условия эквиваленты:
    - $g(F) = 0$;
    - $\exists\, D \in \mathrm{Div}(F)$: $\deg D = 2$, $l(D) = 3$;
    - $\exists\, D \in \mathrm{Div}(F)$: $\deg D \geqslant 1$, $l(D) > \deg D$;
    - $\exists\, D \in \mathrm{Div}(F)$: $\deg D \geqslant 1$, $l(D) = \deg D + 1$;
    - при условии, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$: $\exists\, x, y \in F$: $F = K(x, y)$, $y^2 = ax^2 + b$ $(a, b \in K^*)$.
6. Пусть $\mathbb{R}(x)$ — поле рациональных функций над $\mathbb{R}$. Докажите следующие утверждения:
    - Многочлен $f(T) = T^2 + (x^2 + 1) \in \mathbb{R}(x)[T]$ неприводим над $\mathbb{R}(x)$. Пусть $F = \mathbb{R}(x, y)$, $y^2 + x^2 + 1 = 0$.
    - $\mathbb{R}$ — поле констант для F, $g(F) = 0$.
    - $F/\mathbb{R}$ не является полем рациональных функций.
    - Все точки F имеют степень 2.
7. Пусть E — проективная эллиптическая кривая над полем F: $zy^2 = x^3 + azx^2 + bz^3$, $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, $P, P' \in E$.
    - Докажите, что сопоставление $E \to \mathrm{Cl}^0(E) : P \mapsto C_P = [P - P']$ задаёт взаимно-однозначное отображение между E и $\mathrm{Cl}^0(E)$.
    - Докажите, что $C_P + C_Q + C_R = 0 \Leftrightarrow$ точки P, Q, R лежат на одной проективной прямой.
    - Опишите закон сложения классов C_P, C_Q в группе $\mathrm{Cl}^0(E)$ в терминах точек P, Q кривой E.
    - Покажите, что группа $\mathrm{Cl}^0(E)$ имеет ровно четыре элемента второго порядка. Какие точки кривой E соответствуют этим элементам?

2.13 Теорема Римана–Роха для функциональных полей

Аннотация: Кольцо аделей (распределений). Дифференциалы Вейля, канонический класс. Теорема Римана–Роха, двойственность Серра. Теорема о сильной аппроксимации. Теорема Вейерштрасса о пропусках.

Источники: [Stich] §§1.5–1.6; [Степ] §IV.3.2–IV.3.4.

Примеры задач:

1. Пусть $F = K(x)$ — поле рациональных функций, $\mathcal{A}_F$ — кольцо аделей (распределений). Докажите, что $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_F(0) + F$.
2. Пусть $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $F = K(x, y)$, $y^2 = f(x)$, $f \in K[x]$, $\deg f = 2m + 1 \geqslant 3$. Докажите, что
    - K — поле констант для F.
    - $\exists!$ точка $P \in \mathcal{P}_F$ являющаяся полюсом x и единственным полюсом y.
    - $\forall\, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant s < r - m$ $1, x, x^2, \ldots, x^r, y, xy, \ldots, x^s y \in L(2rP)$.
    - $g(F) \leqslant m$.

3. Пусть $F = \mathbb{F}_3(x)$ — поле рациональных функций над конечным полем $\mathbb{F}_3$. Докажите, что
   - $f(T) = T^2 + x^4 - x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3(x)[T]$ неприводим.
   - если $F = \mathbb{F}_3(x, y)$, $y^2 + x^4 - x^2 + 1 = 0$, K — поле констант F, то $|K| = 9$, $F = K(x)$.
4. Пусть F/K — функциональное поле, $g = g(F)$, $\exists\, P \in \mathcal{P}_F$: $\deg P = 1$. Докажите, что $\exists\, x, y \in F$: $[F : K(x)] = [F : K(y) = 2g + 1]$ и $F = K[x, y]$.
5. Пусть F/K — функциональное поле, $D \in \mathrm{Div}(F)$, $\omega \in \Omega_F$ — ненулевой дифференциал Вейля, $W = (\omega)$. Докажите, что отображение $s : L(W - D) \times \mathcal{A}_F/(\mathcal{A}_F(D) + F) \to K : (x, \alpha) \mapsto \omega(x\alpha)$ задаёт невырожденное спаривание. (Невырожденное спаривание — это билинейное отображение векторных пространств $s : V \times U \to K$ такое, что $\forall\, v \in V \setminus \{0\}$ $\exists\, u \in U : s(v, u) \neq 0$ и $\forall\, u \in U \setminus \{0\}$ $\exists\, v \in V : s(v, u) \neq 0$.)
6. Пусть K — алгебраически замкнутое поле, F/K — функциональное поле $g(F) = g$. Докажите, что $\forall\, d \in \mathbb{Z}_+$, $d \geqslant g$ $\exists\, D \in Div(F)$ такой, что $\deg D = d$ и $l(D) = \deg D + 1 - g$.
7. Пусть $D \in \mathrm{Div}(F)$. Докажите, что
   - $i(D) \leqslant \max(0, 2g(F) - 1 - \deg D)$;
   - если $i(D) > 0$, то $\forall\, D' \in \mathrm{Div}(F)$ $l(D - D') \leqslant i(D')$.
8. Пусть $C \in \mathrm{Div}(F)$, $|D|$ — линейная система. Класс дивизора $[C] \in \mathrm{Cl}(F)$ называется примитивным, если $\neg\exists\, B \in \mathrm{Div}(F)$: $B > 0 \wedge \forall\, A \in [C]$ $B \leqslant A$. Докажите, что
   - $\forall\, D \in \mathrm{Div}(F)$ $\deg D \geqslant 2g(F)$ класс $[D]$ — примитивный;
   - если $g(F) \geqslant 1$, то канонический класс является примитивным;
   - если $g(F) \geqslant 1$, $K \in \mathrm{Div}(F)$ — канонический, $P \in \mathcal{P}_F$ — точка степени 1, то класс $[K + P]$ не может быть примитивным.

2.14 Дзета функция алгебраической кривой

Аннотация: Рациональные точки алгебраических кривых, рациональные дивизоры. Конечность числа классов дивизоров нулевой степени. Дзета функция алгебраической кривой. Рациональность дзета-функции, произведение Эйлера и функциональное уравнение.

Источники: [Степ] §§V.1.1–V.1.3; [Stich] §5.1; [ВНЦ] §3.1.

Примеры задач:

1. Пусть $X = \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$ — проективная прямая. Покажите, что
   - $Z_X(t) = (1 - t)^{-1}(1 - qt)^{-1}$;
   - $Z_X(1/(qt)) = qt^2 Z_X(t)$.
2. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ — проективная кривая $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Покажите, что $Z_X(t) = (1 - t)^{-1}(1 - qt)^{-1}$.
3. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$, $X \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ — афинная кривая, N_{q^s} — число $\mathbb{F}_{q^s}$- рациональных точек этой кривой, $Z_X(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_{q^s}}{s} t^s\right)$ — дзета функция. Докажите следующие утверждения:
   - $Z_{\mathbb{A}^1}(t) = (1 - qt)^{-1}$;
   - $Z_{\mathbb{A}^n}(t) = (1 - q^n t)^{-1}$;
   - для X: $x^2 + y^2 = 1$ $Z_X(t) = (1 - t)(1 - qt)^{-1}$ при $q \equiv 1\,(4)$ и $Z_X(t) =$

$(1+t)(1-qt)^{-1}$ при $q \equiv 3\,(4)$;
- для X: $y^2 = x^3$ $Z_X(t) = (1-qt)^{-1}$;
- для X: $y^2 = x^3 + x^2$ $Z_X(t) = (1-t)(1-qt)^{-1}$.

4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ — эллиптическая кривая. Докажите, что
   - $Z_X(t) = (1 + \alpha t + qt^2)(1-t)^{-1}(1-qt)^{-1}$;
   - $Z_X(1/(qt)) = Z_X(t)$.
5. Докажите по определению, что $Z_{\mathbb{P}^n}(t) = (1-t)^{-1}(1-qt)^{-1}\dots(1-q^n t)^{-1}$.
6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие размерности r, $Z_X(t) = \prod_{i=1}^{a}(1-\omega_i t)/\prod_{j=1}^{b}(1-\omega'_j t)$. Докажите, что функциональное уравнение для $Z_X(t)$ равносильно выполнению соотношений $\omega_i\omega_{a-i+1} = q^r$, $\omega'_j\omega'_{b-j+1} = q^r$.
7. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$ — афинная гиперповерхность, N_{q^s} — число $\mathbb{F}_{q^s}$ рациональных точек, $Z_X(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_{q^s}}{s}t^s\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m$. Докажите, что
   - $\forall m\ a_m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
   - $\forall m\ a_m \leqslant q^{mn}$.

2.15 Теорема Хассе–Вейля

Аннотация: Связь дзета функции с числом точек на кривой над конечным полем. Оценка числа точек на кривой. Теорема Вейля (аналог гипотезы Римана для нулей дзета функции алгебраической кривой). Оценка Хассе–Вейля. Обзор некоторых других приложений (оценки тригонометрических сумм, гипотеза Рамануджана).

Источники: [Степ] §§V.1.3-V.2; [Stich] §5.2; [ВНЦ] §3.1.

Примеры задач:

1. Пусть X — кривая над $\mathbb{F}_q$, $g(X) = g$. Докажите, что $N_q, N_{q^2}, \dots, N_{q^g}$ однозначно определяют N_{q^s} для $s \geqslant g+1$.
2. Пусть $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, N_{q^s} — число решений системы уравнений $y^n = f(x)$, $z^q - z = g(x)$ в элементах $x, y, z \in \mathbb{F}_{q^s}$, χ, ψ обозначают мультипликативный и аддитивный характеры поля $\mathbb{F}_q$. Докажите, что $N_{q^s} = \sum_{\chi^n=\epsilon}\sum_{\psi}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^s}}\chi_s(f(x))\psi_s(g(x))$.
3. Пусть $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, $\deg f = m$, $\deg g = l$, $(m,n) = 1$, $(l,q) = 1$. Докажите, что уравнения $y^n = f(x)$, $z^q - z = g(x)$ определяют абсолютную кривую в афинном пространстве $\mathbb{A}^3(\overline{\mathbb{F}}_q)$.
4. Пусть $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, $\deg f = l$, $\deg g = n$, $f = f_1^{k_1}\dots f_r^{k_r}$ — разложение на неприводимые множители, $m = \deg(f_1\dots f_r)$, χ — нетривиальный мультипликативный характер порядка N, ψ — нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{F}_q$. Докажите, что если $(l,N) = 1$, $(n,q) = 1$, то $\left|\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^s}}\chi_s(f(x))\psi_s(g(x))\right| \leqslant (m+n-1)q^{s/2}$.

Список литературы

[Mir] R. Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces, AMS, 1995.

[Stich] H. Stichtenoth, Algebraic Function Fields and Codes, 2nd edition, Springer, 2009.

[Степ] С.А. Степанов, Арифметика алгебраических кривых, Наука, 1991.

[Fult] W. Fulton, Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry, 3rd edition, AMS, 2008.

[DS] F. Diamond, J. Shurman, A First Course in Modular Forms, Springer, 2005.

[ВНЦ] С.Г. Влэдуц, Д.Ю. Ногин, М.А. Цфасман, Алгеброгеометрические коды. Основные понятия, МЦНМО, 2003.

[Шаф] И.Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии, 3-е изд., МЦНМО, 2007.

[FK] H.M. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces, 2nd edition, Springer, 1992.

[КЛП] М.Э. Казарян, С.К. Ландо, В.В. Прасолов, Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей, МЦНМО, 2019.