Метризованные поля. p-адические числа

Пусть p — простое число. Для рационального числа $x = \dfrac{a}{b}$ определена функция порядка

$$\nu_p(x) = \nu,$$

где ν — показатель степени p, с которой p входит в разложение дроби a/b, то есть

$$x = p^{\nu} \frac{a'}{b'}, \qquad p \nmid a',\ p \nmid b'.$$

На основе этого определена функция

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \rho^{\nu_p(x)}, & x \neq 0, \end{cases}$$

где ρ — фиксированное действительное число, $0 < \rho < 1$.

Функция φ_p обладает свойствами абсолютного значения:

$$\varphi_p(xy) = \varphi_p(x)\varphi_p(y),$$

$$\varphi_p(x+y) \leq \max\{\varphi_p(x), \varphi_p(y)\},$$
$$\varphi_p(x) \geq 0,$$

для всех $x, y \in \mathbb{Q}$.

Целые p-адические числа $\mathbb{Z}_p$ определяются как множество последовательностей

$$(x_n)_{n \geq 0},$$

где $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и выполнено условие согласованности:

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^{n-1}}.$$

Эквивалентно:

$$\nu_p(x_n - x_{n-1}) \geq n, \quad \text{или} \quad \varphi_p(x_n - x_{n-1}) \leq \rho^n.$$

На $\mathbb{Z}_p$ определяются операции сложения и умножения, и это кольцо без делителей нуля. Его поле частных — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Всякое ненулевое p-адическое число единственным образом представляется в виде

$$x = p^{\nu_p(x)} u,$$

где u — обратимый элемент в $\mathbb{Z}_p$, который имеет разложение

$$u = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 \leq a_i \leq p-1.$$

Абсолютное значение на поле K — это отображение

$$\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

такое что:

$$\varphi(x) = 0 \iff x = 0, \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

Соответствующая метрика:

$$d(x,y) = \varphi(x-y).$$

Пару (K, φ) называют *метризованным полем.*

Примеры:

- обычный модуль на $\mathbb{R}$;
- модуль комплексного числа;
- тривиальная метрика: $\varphi(x) = 1$ при $x \neq 0$;
- p-адическая метрика.

Свойства:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(x-y) \geq \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right|, \quad \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}.$$

Последовательность (x_n) сходится к x, если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n - x) = 0.$$

Последовательность называется *фундаментальной (Коши)*, если

$$\varphi(x_n - x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Метризованное поле называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность имеет предел в этом поле.

Поле $\mathbb{R}$ полно относительно обычного модуля. Поле $\mathbb{Q}_p$ полно относительно p-адической метрики.

Пусть $K_0 \subset K$ — расширение полей с метриками φ_0, φ. Расширение называется метризованным, если ограничение φ на K_0 совпадает с φ_0.

Теорема (о пополнении). Для любого метризованного поля (K, φ) существует полное метризованное поле $(\overline{K}, \overline{\varphi})$ такое, что:

- K плотно в $\overline{K}$;
- $\overline{\varphi}|_K = \varphi$;

- пополнение единственно с точностью до топологического изоморфизма.

$\triangleright$Доказательство аналогично построению $\mathbb{R}$ как пополнения $\mathbb{Q}$. $\blacksquare$

Метрики φ_1, φ_2 называются *эквивалентными*, если они задают одну и ту же топологию.

Теорема. Для метризованного поля $(K, \varphi_1, \varphi_2)$ эквивалентны:

1. φ_1 и φ_2 эквивалентны;
2. сходящиеся последовательности совпадают;
3. $\varphi_1(x) < 1 \iff \varphi_2(x) < 1$;
4. существует $\alpha > 0$ такое, что
$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\alpha.$$

$\triangleright$Основной шаг: (3) $\Rightarrow$ (4) через логарифмы и плотность $\mathbb{Q}$. $\blacksquare$

Следовательно, все метрики вида $\rho^{\nu_p(x)}$ эквивалентны. Обычно берут $\rho = p^{-1}$:

$$|x|_p = p^{-\nu_p(x)}.$$

Теорема Островского. Всякая нетривиальная абсолютная величина на $\mathbb{Q}$ эквивалентна либо обычному модулю, либо p-адическому модулю для некоторого простого p.

Следствие. Все пополнения поля $\mathbb{Q}$ — это либо $\mathbb{R}$, либо поля $\mathbb{Q}_p$.

Метрика называется *неархимедовой*, если

$$\varphi(x+y) \le \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}.$$

p-адические метрики — неархимедовы. Для них верно:

$$\varphi(z+1) \le \max\{\varphi(z), 1\}.$$

Формула произведения:

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1, \quad x \in \mathbb{Q}^\times.$$