Лекция №5 «Группы, действующие на римановых поверхностях». Курс А-III

Иванова Ксения Юрьевна 619/1

11 октября 2025

X - РП, G - группа

Определение 1. *G циклическая на $X \Leftrightarrow \exists$ отображение*
$G \times X \to X$: $(g,p) \mapsto gp$:
1) если $e \in G$ – единичный элемент $\forall p \in X$: единица группы
2) $\forall g, h \in G \quad \forall p \in X (gh)p = g(hp)$

Определение 2. *Орбита точки $p \in X$: $Gp = \{gp : g \in G\}$*
- *фактор множество $X/G = \{Gp\}$ $(G \setminus X)$*
- *стабилизатор точки $p \in X$: $G_p = \{g \in G : gp = p\}$*
- *Ядро действия $K = \bigcap_{p \in X} G_p = \{g \in G : \forall p \in X \quad gp = p\}$*

Лемма 1. *1) $G_{gp} = gG_pg^{-1}$*
2) если $|G| < \infty$, то $|Gp||G_p| = |G|$
3) K – нормальная подгруппа G, G/K действует с тривиальным ядром
$\square$ *Упр* $\blacksquare$

Определение 3. *G действует на X эффективно, если ядро действия K тривиально*

Определение 4. *G действует на X непрерывно/голоморфно, если $\forall g \in G \quad p \mapsto gp$ – непрерывно/голоморфно*

Определение 5. *Если X - ТП, G действует непрерывно*
$\pi : X \to X/G$: $p \mapsto Gp$ индуцирует топологию на X/G: $U \subset X/G$ – открыто $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ – открыто

Когда X/G является РП, если X – РП?

Лемма 2. *Пусть G – циклич на РП X голоморфно и эффективно, $p \in X$: $|G_p| < \infty$*
Тогда G_p – циклическая группа
$\square$ *$z = \varphi(x)$, $\varphi(p) = 0$ – локальная координата*
$gz = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g) z^n$
для $g \in G_p \quad gp = p$ то есть в координате z
$g(0) = 0$, $a_0(g) = 0$
$g(z)$, $g^{-1}(z)$ – голоморфные функции $g \circ g^{-1} = e \Rightarrow m_0 g(z) = 1 \Rightarrow a_1(g) \neq 0$
Пусть $h \in G_p \quad g(h(z)) = \sum_n a_n(g) (\sum_m a_m(h))^n = a_1(g)a_1(h)z + \dots \Rightarrow a_1(gh) = a_1(g)a_1(h)$

то есть $a_1 : G_p \to \mathbb{C}^*$ *– гомоморфизм групп* $\operatorname{Ker} a_1$ *– ? Пусть* $g \in \ker a_1$
$g(z) = z + \dots = z + az^m + \dots \equiv z + az^m(z) \quad (z^{m+1})$
Предположим что $a \neq 0$. *Тогда*
$g^k z \equiv z + kaz^m \quad (z^{m+1})$
G_p *– конечно* $\Rightarrow \exists k : g^k = e \quad g^k z = z \Rightarrow z = g^k z \equiv z + kaz^m \quad (z^{m+1}) \Rightarrow ka = 0 \Rightarrow$
$a = 0 \Rightarrow g(z) = z \Rightarrow g = e$
Таким образом $\ker a_1 = \langle e \rangle$
$\Rightarrow$ *то есть гомоморфизм* $a_1 : G_p \to \mathbb{C}^*$
Но все конечные подгруппы $\mathbb{C}^*$ *– циклические* $\Rightarrow G_p$ *– циклическая группа* ■

Следствие. $|G| < \infty \Rightarrow \forall p \in X \quad G_p$ *– циклическая группа*

Рассмотрим случай когда G – конечная группа

Лемма 3. G *– конечная группа действует на РП* X *голоморфно и эффективно. Тогда* $\{p \in X : G_p \neq \{e\}\}$ *– дискретно*
$\square$ *Пусть* (p_n) *– последовательность* $p_n \to p$*:* $\forall n \exists g_n \in G_p \setminus \{e\}$*:* $g_n p_n = p_n$
$|G| < \infty \quad \exists$ *подпоследовательность* $g_{n_k} = g$*:*
g *– голоморфна* $\Rightarrow gp_n \to gp, \quad gp = p$
$\Rightarrow g = e$ ■

Лемма 4. G *– конечная группа действующая голоморфно и эффективно на* X, $p \in X$. $\exists$ *открытая окрестность* U *точки* p*:*
1) $\forall g \in G_p \quad \forall u \in U \quad gu \in U$
2) $U \cap gU \neq \emptyset \quad \forall g \notin G_p \quad (U \cap gU \neq \emptyset = \emptyset \quad g \in G_p)$
3) $\alpha : U/G_p \to W \subset X/G$ *– гомеоморфное*
4) $\forall x \in U \setminus \{p\} \quad \forall g \in G_p \quad gx \neq x$
$\square$ $G \setminus G_p = \{g_1, \dots, g_n\}$, $\forall i : g_i p \neq p$
X *– Хаусдорфово* $\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n \quad \exists$ *окрестности:*
V_i *– точки* p, W_i *– точки* $g_i p \quad (V_i \cap W_i = \emptyset)$
$\forall i \quad g_i^{-1} W_i$ *– открытая окрестность* p
Рассмотрим $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} W_i)$, $R = \bigcap_i R_i$, $U = \bigcap_{g \in G_p} gR$*;* R_i, R, U *– открыт окр* p
$\forall h \in G_p \quad hU = \bigcap_{g \in G_p} ghR = \bigcap_{g \in G_p} gR \in U$ *(первое утверждение леммы доказано)*
$R_i \cap (g_i R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset \Rightarrow R_i \cap g_i R_i = \emptyset \quad (R_i \subset V_i, \quad g_i R_i \subset W_i)$
$\Rightarrow U \cap g_i U = \emptyset \quad (g_i \in G \setminus G_p) \Rightarrow 2)$
3) $\alpha : U/G_p \to X/G \quad (x \mapsto Gx)$
$\alpha : U/G_p \to \sum u\alpha = W$ *– взаимно однозначное соответствие*
$\beta : U \to U/G_p$, $\pi : X \to X/G$
$\pi|_\alpha = \beta \circ \alpha$, $\pi|_\alpha, \beta$ *– непрерывные открытые отображения*
α *– непрерывное отображение*
4) следует из дискретности точек с $|G_p| \neq 1$ ■

Теорема 1. G *– конечная группа действующая голоморфно и эффективно на РП* X. *Тогда* X/G *– РП. Проекция* $\pi : X \to X/G$ *– голоморфное отображение.*
$\deg \pi = |G|$, $\forall p \in X \quad m_p(\pi) = |G_p|$
$\square$ *Если* $|G_p| = 1$, *то по лемме* $\exists$ *открытая окрестность* U *точки* p*:*
$U \to U/G_p \to W \subset X/G$ *– гомеоморфизм*
$\overline{p} = \pi(r) = Gp \qquad \pi^{-1}|_u : W \to V \subset U$
Если $m = |G_p| > 1$
$z = \varphi(.)$ *– карта с центром в* p

$g(z)$ – *голоморфная функция соответствующая* gp
$f(z) = \prod_{g \in G_p} g(z), \quad m_0(g(z)) = 1$
$h \in G_p \quad f(h(z)) = \prod (gh)(z) = \prod g(z) = f(z)$
$m_0(f) = m = |G_p|$
то есть $\exists$ *окрестность у точки* p*: в координате* z*:* $\quad f(z) = z^m$
$\overline{f} : U/G_p \to V \in \mathbb{C}$
f – *открытое отображение* $\Rightarrow \overline{f}$ – *открытое*
В $\quad U \setminus \{p\} \quad f$ – *отображение* $m:1$
$\forall q \in U \setminus \{p\} \quad |G_p q| = m$
$\overline{f} : U/G_p \to V - 1:1$
α – *из предыдущей леммы* $\alpha : U/G_p \to W \subset X/G$ – *гомеоморфное*
$\varphi : W \to U/G_p \to V \subset \mathbb{C}$ – *искомая карта*
Совместимость карт – техническое рассуждение $\blacksquare$

Теорема 2 (Гурвиц)**.** X – *компактная РП,* $g(x) = g \geq 2$*.* G – *конечная группа, действующая голоморфно и эффективно. Тогда* $|G| \leq 42(2g - 2)$
$\square$ $\pi : X \to X/G = Y$, $\deg \pi = |G|$
$m_p(\pi) = |G_p|$*. Пусть* $g' = g(Y)$
формула Гурвица
$2g - 2 = (2g' - 2)\deg\pi + \sum_{p \in X}(m_p(\pi) - 1) = |G|(2g' - 2) + \sum(|a_p| - 1) = |G|((2g' - 2) + \sum(1 - \frac{1}{r_i}))$
случай для g'*:*
1) $g' \geq 2$*:* $2g - 2 \geq |G|(4 - 2 + R) \geq 2|G|$
$|G| \leq g - 1 \leq 84(g-1)$
2) $g' = 1$ $2g - 2 = |G|\sum_p(1 - \frac{1}{|G_p|})$
если $\forall p$*:* $|G_p| = 1 \Rightarrow 2g - 2 = 0 \Rightarrow g = 1$ *получаем противоречие*
$\exists p$*:* $|G_p| \geq 2 \quad 1 - \frac{1}{|G_p|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2g - 2 \geq |G|\frac{1}{2}$, $|G| \leq 4(g-1) \leq 84(g-1)$
3) $g' = 0$*:* $2g - 2 = |G|(\sum(1 - \frac{1}{|G_p|}) - 2) \quad (1 - \frac{1}{|G_p|} = R)$
$R = \sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{r_i})$, $r_i \geq 2$
$r_i \geq 2 \quad \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{r_i} < 1$
если $n = 1, 2$*, то* $R - 2 < 0 \Rightarrow 2g - 2 < 0 \Rightarrow g = 0$ *(получаем противоречие)*
таким образом $n \geq 3$
Если $n \geq 5$ $R = \sum(1 - \frac{1}{r_i}) \geq \frac{5}{2}$
$2g - 2 \geq |G|(\frac{5}{2} - 2) = \frac{|G|}{2} \quad |G| < 4(g-1)$
если $n = 4$*, если* $r_i = 2\ \forall i$*:* $R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow g = 1$ *(получаем противоречие)*
$\exists r_i > 2 \quad r_i \geq 3$
$2g - 2 \geq |G|(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{3}) - 2) = \frac{1}{12}|G|$
$|G| \leq 24(g-1)$
$n = 3$ $R = 3 - (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}) > 2$
$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} < 1$, $2 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \Rightarrow r_2 \geq 3$, $r_3 > 3$
Случай
$r_3 = 4$, $r_2 \geq 3$, $r_1 \geq 2 \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$
$2g - 2 \geq |G|(1 - \frac{13}{12})$
$|G| \leq 12(g-1)$
$r_3 \geq 7$, $r_1 \geq 2$, $r_2 \geq 3$
$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$

$2g-2 \geq |G|(1-\frac{41}{42})$
$|G| \leq 84(g-1)$
$|G| = 84(g-1)$ *будет достигаться при* $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 7$ ∎

Определение 6. *Положим, что* G *имеет тип действия* $(r_1, \dots, r_n)$

Теорема 3. $X = e_\infty$ *есть только следующие типы действия* G: $(2,2,r)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$,
$(2,3,5)$ *(последние три давали решетки* E_6, E_7, E_8*)*

Некоторые случаи бесконечных групп

Определение 7. X *– отделимое Хаусдорфово топологическое пространство* G *действует вполне разрывно на* X*, если* $\forall x, y \in X \quad \exists U, V$ *– окрестности:*
$|\{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}| < \infty$

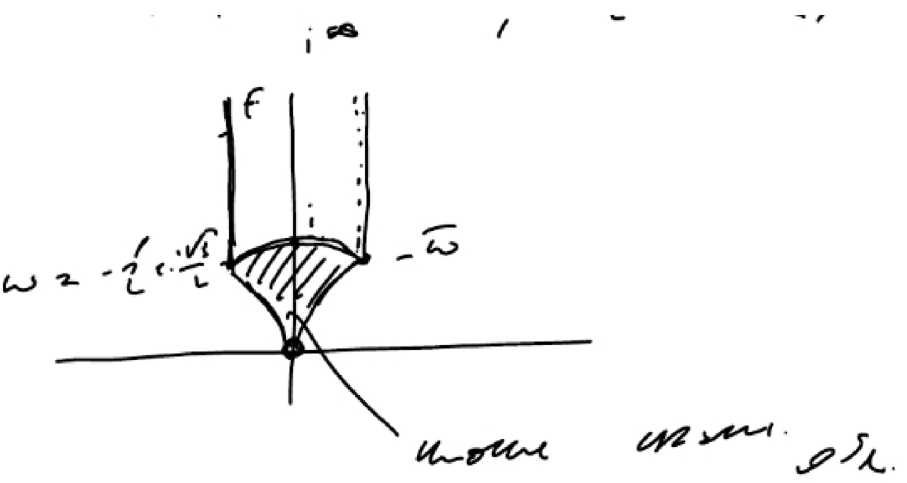
Пример. $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *действует на* $\mathbb{C}$ $(m,n) \in \mathbb{Z} : z \mapsto mz+n.$ $\mathbb{C}/G$ *– комплексный тор*

Модулярные группы. Напоминание

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ действует на верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$
$gz = \frac{az+b}{cz+d}$, голоморфно $(cz+d=0,\ z = -\frac{d}{c} \notin \mathbb{H})$
$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{I}z = z \quad (-\mathbb{I})z = \frac{-z}{-1} = z$
$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm\mathbb{I}\}$
Как задать структуру РП на $\mathbb{H}/\Gamma = Y(\Gamma)$
из А-II

Теорема 4. *1)* $F = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$
– фундаментальная область для Γ*, то есть:*
- $\forall z \in \mathbb{H} \quad \exists z_0 \in F \quad \exists g \in \Gamma$: $gz = z_0$
- $\forall z_1, z_2 \in F \setminus \gamma F \quad z_1 \neq gz_2 \quad \forall g \in \Gamma$
- $\forall z_1, z_2 \in F \quad z_1 \neq z_2, z_1 = gz_2 \Rightarrow z_1, z_2 \in \gamma F$ *либо* $\operatorname{Re} z_1 = \pm\frac{1}{2}$ *и* $z_2 = z_1 \pm 1$, *либо* $|z_1| = |z_2|$, $z_2 = -\frac{1}{z_1}$



2) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Tz = z+1$

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Sz = -\frac{1}{z}$

стабилизатор Γ_z *тривиален, кроме двух случаев*

- $z = i$*:* $\Gamma_i = \{\mathbb{I}, S\} \quad (\{\pm\mathbb{I}, \pm S\})$
- $z = \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Gamma_\omega = \{\mathbb{I}, ST, (ST)^2\}$

Определение 8. $n_z = |\Gamma_z|$ *называется периодом* z*, если* $h_z > 1$*, то тогда* z *называется эллиптической точкой.*

Определение 9. $i\infty$ *называется параболической точкой*

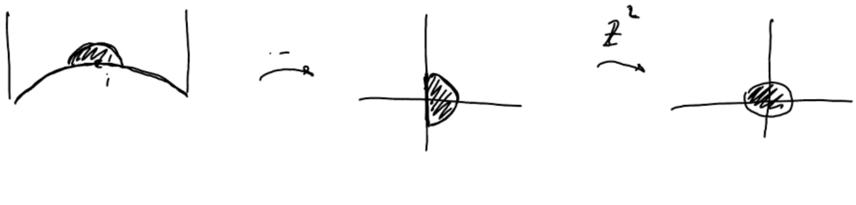
То есть у $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm\mathbb{I}\}$ если z – эллиптические точки $i, \omega \quad h_i = 2, h_\omega = 3$ образы в $\mathbb{H}/\Gamma = Y(\Gamma)$ также называются эллиптическими точками $(h_z = h_{gz})$

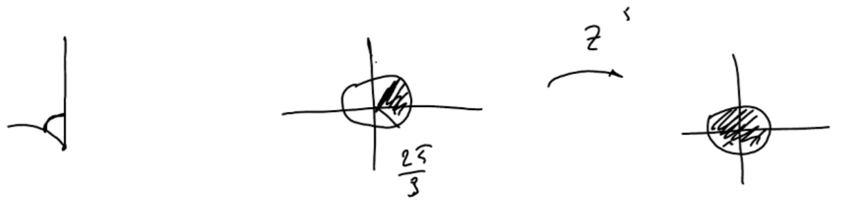
Лемма 5. Γ *действует вполне разрывно на* $\mathbb{H}$ *(то есть* $\forall U, V$ *– компактных множеств* $|\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\}| < \infty$*)*

$\square$ *Упр* $\blacksquare$

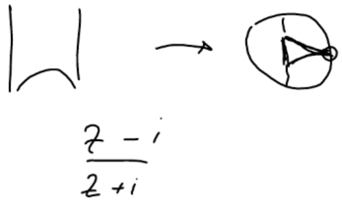
Следствие. $Y(\Gamma) = \mathbb{H}/\Gamma$ *– Хаусдорфово*

Комплексная структура на $Y(\Gamma)$
z – не эллиптическая точка
$\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$
$\exists$ окрестность $U \subset F \setminus \gamma F$
$\pi^{-1}|_U$ – иском





$g(\Gamma)$ – род



Более общий случай

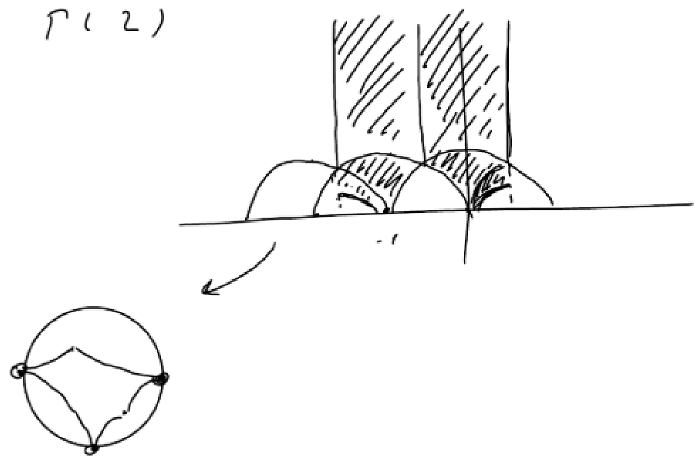
Определение 10. $\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \textit{где}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\}$ *– главной конг*

$\Gamma(1) = \Gamma$
$\Gamma' < SL_2(\mathbb{Z})$ называется конгруэнц подгруппой, если $\exists N\colon \Gamma(N) \subset \Gamma'$
$Y(\Gamma') = \mathbb{H}/\Gamma'$

Лемма 6. • Γ' *– конгруэнц подгруппа* $SL_2(\mathbb{Z})$ Γ' *действует вполне разрывно и* $Y(\Gamma')$ *– Хаусдорфово*
• $Y(\Gamma')$ *имеет конечное число эллиптических точек.* Γ_t *– конечные циклические группы.*
□ *идея:* $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma'] = N^3 \prod_{p|N}(1 - \frac{1}{p^2})$
$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{j=1}^{d} \Gamma' g_j \Rightarrow$ *эллиптические точки* $\Gamma' \in \{\Gamma g_j i, \Gamma g_j \omega\}$ ■

F' – фундаментальная область Γ'
$F' = \bigcup_{j=1}^{d} g_j F$, F – фундаментальная область Γ

Exmp: $\Gamma(2)$



$SL_2(\mathbb{Z})$ действует на множестве $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$
$\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ $(a, c) = 1$ $\exists b, d\colon ad - bc = 1$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(i\infty) = \frac{a}{c}$
$\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$
$\Gamma' \subset SL_2(\mathbb{Z})$ действует на $\overline{\mathbb{H}}$
$\overline{\mathbb{H}}/\Gamma' = X(\Gamma')$

Определение 11. *Параболическими точками называются элементы из* $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ *и их образы в* $(\mathbb{Q} \cup \{i\infty\})/\Gamma'$

$\Gamma_{i\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Gamma' \subset SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$

$\exists g \in SL_2(\mathbb{Z}) : gz = i\infty$

$h_z = h_{z,\Gamma'} = |\Gamma_{i\infty}/(g(\{\pm \mathbb{I}\}\Gamma')g^{-1})_{i\infty}|$

$X(\Gamma')$ – РП?

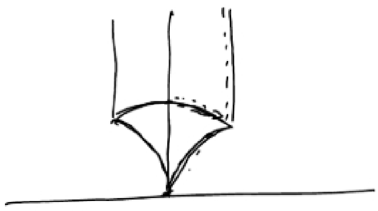
$\varphi(z) = e^{\frac{2\pi i z}{h}}$

$X(\Gamma)$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ $\quad z \mapsto e^{2\pi i z}$

Теорема 5. Γ' *– конгруэнц подгруппа* $X(\Gamma')$ *– компактная РП*

Теорема 6. $g(X(\Gamma')) = 1 + \frac{d}{12} - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{3} - \frac{e_\infty}{2}$

$d = \deg f, \quad f : X(\Gamma') \to X(\Gamma)$



$g(X(\Gamma)) = 0$

Теорема 7. E: $y^2 = x^3 + ax + b$ *– эллиптическая кривая* $/\,\mathbb{C}$

$(a, b \in \mathbb{Q})$ *– РП*

Γ' *– конгруэнц подгруппа* $X(\Gamma')$ *– РП*

$\forall E : \exists \Gamma' \quad \exists f : X(\Gamma') \to E$ *– сюръективное, голоморфное отображение РП*

(Теорема о модулярности)