§ Алгебраические кр-ие и многообразия

В пред. главе: X — РП

голом. мер. ф-ии через интеграл

T: $\forall$ мер. ф-я на $\mathbb{C}_\infty$ $f = \frac{p}{q}$,

$p, q \in \mathbb{C}[z]$

Аналогично для $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$\mathcal{O}_p$ — кольцо голом. ф-ий в точке $p \in X$

$$\mathcal{O}_{p, \mathbb{C}_\infty} = \left\{ \frac{p(z)}{q(z)} \mid p, q \in \mathbb{C}[z],\ q(p) \neq 0 \right\}$$

T: X — гладкая плоская аффин. кривая:

$f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — неприводим.

$h = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$, $f \nmid q$ — мер. ф-ия на X

I (Теорема Гильберта о нулях). Если $f \in \mathbb{C}[x,y]$ — непр. $g \in \mathbb{C}[x,y]$:

$g(x,y) = 0$ $\forall (x,y)$: $f(x,y) = 0$.

Тогда $f \mid g$.

Пусть k — произв. поле.

$\mathbb{P}^n(k) = \{[a_0:\ldots:a_n] = [\lambda a_0:\ldots:\lambda a_n],\ \lambda \in k^*\}$

$k^n = \{(a_1,\ldots,a_n),\ a_i \in k\} = \mathbb{A}^n(k)$

Опр: Пусть $S \subset k[x_1,\ldots,x_n]$. Мн-во вида $V(S) = \{p = (a_1,\ldots,a_n) \in k^n \mid f(p) = 0\ \forall f \in S\}$, наз. аффинные алгебр. мн-вом

Аналогично $S \subset k[x_0,\ldots,x_n]$ — однор. многоч.

$V(S) = V_{\mathbb{P}}(S) = \{p = [a_0:\ldots:a_n] : f(p) = 0\ \forall f \in S\}$

[illegible] [illegible] мн. [illegible]

Если $f, g \in \mathfrak{I}$ $p \in V(S)$ $(f+g)(p) = 0$

Если $f \in \mathfrak{I}$, h — многочлен. $p \in V(\mathfrak{I})$

$(hf)(p) = 0$

т.е. естеств. рассм. идеалы в $k[x_1, \dots, x_n]$

Напоминание $A : I$

Пусть R — коммут. кольцо с ед.

Опр.: $I \subset R$ наз. идеалом, если 1) $\forall f, g \in I$ $f + g \in I$ 2) $\forall f \in I\ \forall h \in R$ $hf \in I$

Опр.: Идеал вида $I = \{hf : h \in R\} = (f)$ наз. главным.

Опр.: R наз. КГИ если $\forall$ ид. I : $I = (f)$

Обозн.: $f \mid g \iff \exists h \in R : g = fh$

Опр: $f, g \in R$ наз. ассоц. $\Leftrightarrow f = ug$, $u \in R^*$ — ед. кольца R или обр. эл-т

Опр: $f \in R$ наз. неприв. $\Leftrightarrow$ $g \mid f \Rightarrow g \in R^* \vee f, g$ ассоц.

Опр: $f \in R$ наз. простым $\Leftrightarrow f \notin R^*$ $f \mid gh \Rightarrow f \mid g \vee f \mid h$

<u>Лемма</u> (на языке идеалов):

1) $f \mid g \Leftrightarrow (g) \subset (f)$

2) $f \in R^* \Leftrightarrow (f) = (1) = R$

3) f, g — ассоц. $\Leftrightarrow (f) = (g)$

4) f — простой $\Leftrightarrow$ $gh \in (f) \Rightarrow g \in (f) \vee h \in (f)$

5) f — неприв $\Leftrightarrow (f) \subset (g) \Rightarrow (g) = (1) = R \vee (g) = (f)$

□ А-Т, <u>упр</u> ■

Лемма: R — КГИ $\quad f$ — пр. $\iff f$ — непр.

$\square$ А.I, 5ч $\boxtimes$

Опр: I — иg. R $\quad I$ наз.

- простым $\iff gh \in I \iff g \in I \vee h \in I$
- максимальным $\iff I \subset J \Rightarrow J = I \vee J = (1) = R$

Лемма: I — макс $\Rightarrow I$ — пр.

$\square$ А.I, 5ч $\boxtimes$

Опр: R наз. кольцом с одн. разл. $\iff \forall f \in R$ одн. разлож. на на множ. множ.

Лемма: R — КГИ $\Rightarrow R$ — одн. разл.

Пример: $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\omega]$ — одн. разл.

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $\quad 21 = 3 \cdot 7 = \underline{(1+2\sqrt{-5})}\,\underline{(1-2\sqrt{-5})}$

неп.

и мы имеем $(2I) = A \cdot B$.

Опр.: R — обл. целостности, если $f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0 \vee g = 0$

Опр.: $I \subset R$ — идеал, то $a \equiv b \ (I) \Leftrightarrow a - b \in I$ — отнош. эквив., R/I — кольцо

Лемма:

1) I — пр. $\Leftrightarrow$ R/I — обл. цел.

2) I — макс. $\Leftrightarrow$ R/I — поле

$\square$ $A - I$, упр. $\blacksquare$

Опр.: R наз. нётеровым, если $\forall$ возр. посл. из $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ $\exists N : \forall n \geq N \ I_n = I_{n+1}$

Лемма: R — нётер. $\Leftrightarrow$ $\forall$ из I конечно порожд., т.е. $\exists f_1, \ldots, f_r$ $I = (f_1, \ldots, f_r)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftarrow$) $\forall$ цеп-ка ид. $A = \{I\}$ $\exists$ макс.
ид m. (по Цорну).

<u>Пример</u>: КГИ — нетер.
$\mathbb{Z}$. $F[x]$ — нетер.
(кольцо многочл.
над полем F)

D_K — кольцо целых числ. поля K
— нётерово.

<u>Лемма</u> (Теорема Гильберта о базисе).
R — нётер. $\Rightarrow$ $R[X]$ — нётер.
□ Пусть J — ид $R[X]$
Опр. $I_n = \{a \in R : \exists f \in J : f = ax^n + \dots\}$
I_n — идеал R
$I_n \subset I_{n+1}$ $\Big(\underbrace{x(ax^n + \dots)}_{\in J} = ax^{n+1} + \dots \in J \Big)$

R - нётер. $\Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N \ I_n = I_{n+1}$

$\forall I_n$ — кон. порожд., т.е.

$I_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nm_n})$

Пусть $f_{ij} = a_{ij}x^i + \ldots$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq m(i)$

— соотв. многоч. $\in J$

$J' = ((f_{ij}))$, то $J' = J$ (упр.) ■

Следствие: R — нётер $\Rightarrow R[x_1, \ldots, x_n]$ — нётер.

Алгебр. мн-ва (афф.)

$I = (S)$, $V(S) = V(I)$

$I = (f)$. $V(I) = V(f)$

Лемма: 1) $V(\cup I_\alpha) = \cap V(I_\alpha)$

2) $I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$

3) $V(fg) = V(f) \cup V(g)$

4) $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$

5) $V(0) = K^n$, $V(1) = \emptyset$,

$V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$

□ 2) $p \in V(J) \Leftrightarrow \forall f \in J \; f(p) = 0$

$\Rightarrow \forall f \in I \; f(p) = 0 \Leftrightarrow p \in V(I)$

.... Ук ■

Зам: можна [illegible] на K^n [illegible]

Загальною: [illegible] мн-на = алг. мн-на.

ідеали $\xrightarrow{V}$ алг. мн-на

$K[x_1, \dots, x_n] \qquad X \subset \mathbb{A}^n$

$I \mapsto X = V(I)$

Опр: Пусть $X \subset k^n$. Идеал $I(X)$

$I(X) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0$
$\forall\, p = (a_1, \dots, a_n) \in X \}$

Утв: $I(X)$ — идеал.

Лемма: 1) $X \subset Y \Rightarrow I(X) \supset I(Y)$

2) $I(\varnothing) = (1) = k[x_1, \dots, x_n]$, $I(k^n) = (0)$
(если k — бесконечное поле)

$I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ — макс. ид.

3) $\forall\, X \subset k^n \quad X \subset V(I(X))$,
$X = V(I(X)) \Leftrightarrow X$ — алг. мн-во

4) $\forall\, J$ — ид. $k[x_1, \dots, x_n] \quad J \subset I(V(J))$

$\square$ 1): $f \in I(Y) \Leftrightarrow \forall\, p \in Y \quad f(p) = 0$

$X \subset Y \Rightarrow \forall p \in X \ f(p) = 0 \Rightarrow f \in I(X)$

.... <u>Упр</u>

<u>Замечание</u>: $J \subsetneq I(V(J))$ — бывает больше

(f), (f^n) $V(f) = V(f^n)$.

и, вообще, может $f \notin (f^n)$.

Т.о.

$$\text{идеалы } k[x_1, \ldots, x_n] \xleftarrow{I} \text{мн-ва } X \subset k^n$$

$$I(X) \longmapsfrom X.$$

<u>Неприводимые мн.-ва и компоненты</u>

<u>Опр</u>: Алг. мн-во $X \subset k^n$ наз. неприв. если не $\exists$ представл. $X = X_1 \cup X_2$. X_1, X_2 — алг. $X_1, X_2 \subsetneq X$

Теорема: X — неприв. $\Leftrightarrow$ $I(X)$ — пр.

$\square$ $\Leftrightarrow$ X — привод. $\Leftrightarrow$ $I(X)$ — не пр.

($\Rightarrow$) пусть $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \subsetneq X$ — алг.

$X_1 \subsetneq X \Rightarrow f_1 \in I(X_1) \setminus I(X)$ $\quad f_1, f_2 \notin I(X)$

— " — $\Rightarrow f_2 \in I(X_2) \setminus I(X)$

Но $f_1 f_2 \in I(X)$

($\Leftarrow$) $I(X)$ — не пр. $\exists\, f_1, f_2 \notin I(X)$

$f_1 f_2 \in I(X)$

Возьмём $I_1 = (I(X), f_1)$, $I_2 = (I(X), f_2)$

$V(I_i) = X_i$.

$I(X) \subsetneq I_i$, $X = V(I(X)) \supsetneq V(I_i) = X_i$

$X_i \subsetneq X$

$\forall p \in X \quad f_1 f_2 \in I(X) \Rightarrow (f_1 f_2)(p) = 0$

$\Rightarrow f_1(p) = 0 \ \vee \ f_2(p) = 0$

$\Rightarrow X \subset X_1 \cup X_2$

Т.о. $X = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2)$ — противор.

собств. алг.

Теорема: $\forall$ алг. мн-во X $\exists$ представл. $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$, X_i — непр., $X_i \not\subset X_j$, $i \neq j$, причём единств. образом.

$\square$ Пусть — неединств., $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ — убыв. цепочка алг. мн-в, то

$I(X_1) \subset I(X_2) \subset \ldots$ — возр. цепочка идеалов в $k[x_1, \ldots, x_n]$

Т.к. нельзя бескон. цепочка мн.

стаб. $\Rightarrow \exists\, n : X_n = X_{n+1} = \dots$

Т.о. $\forall\, \mathcal{X}$ — мн-ва алг. мн-в в K^n

$\exists$ мин. эл-т X; т.е. такой что

если $Y \subset X$, $Y \in \mathcal{X} \Rightarrow Y = X$, $Y \neq \emptyset$.

Д-во от противн.:

Пусть $\mathcal{X}$ — мн-во алг. мн-в

которые не раскл. на непр.

компон.

Если $\mathcal{X} \neq \emptyset$ $\exists$ мин. эл-т $X \in \mathcal{X}$

X — привод. $X = X_1 \cup X_2$,

$X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, т.к. X — мин.

$\Rightarrow X_1 = X_{11} \cup \dots \cup X_{1s}$, $X_2 = X_{21} \cup \dots \cup X_{2t}$

$X = X_{11} \cup \dots \cup X_{1s} \cup X_{21} \cup \dots \cup X_{1t}$ — неприв.

— >< с $X \in \mathcal{X}$.

Т.о. разлож. $\exists$

Единств.: Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_r =$
$= Y_1 \cup \dots \cup Y_s$

$X_{i_0} = X_{i_0} \cap X = \bigcup_{j=1}^{s} (X_{i_0} \cap Y_j) \Rightarrow X_{i_0} \subset X_{i_0} \cap Y_{j_0} = Y_{j_0}$

аналогично $Y_{j_0} \subset X_{k_0}$,

$\Rightarrow X_{i_0} \subset X_{k_0} \Rightarrow i_0 = k_0 \quad Y_{j_0} = X_{i_0}$

$\Rightarrow r = s$ ∎

<u>Алгебр. мн-ва на плоскости</u>

<u>Лемма</u>: Если $f, g \in k[x, y]$ не имеют

Отсюда докажем, что

$V(f)\cap V(g) = V(f,g)$ — конечно

□ $k[x,y] = k[x][y] \subset k(x)[y]$,

$k(x) = \mathrm{Frac}\, k[x]$

f, g не имеют общих делителей в $k[x,y]$

$\Rightarrow$ f, g — и — в $k(x)[y]$ (Гаусс)

в $k(x)[y]$ $(f,g) = 1$ $\Rightarrow$ $\exists\, r, s \in k(x)[y]$

$rf + sg = 1$.

Возьмём $h \in k[x]$: $hr, hs \in k[x][y]$

$hrf + hsg = h$

Если $p \in V(f,g)$, $p = (x_0, y_0)$

$h(x_0) = (hrf + hsg)(x_0, y_0) = 0$

т.е. x_0 — корень h, каких всего $\le \deg h$

т.к. если только конечн. число x_0

Аналогично, если конечн. число y_0

$\Rightarrow |V(f,g)| < \infty$ ■

<u>Следствие</u>:

1) Если $f \in k[x,y]$ — непр., $V(f)$ — беск., то $I(V(f)) = (f)$

2) Если k — беск. поле, непр. алг. мн-ва k^2: $\varnothing$, k^2, точки, непр. кривые $f = 0$, f — непр.

3) Если k — алг. замкн. поле, $f \in k[x,y]$, $f = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i^{a_i}$, f_i — непр.

Тогда $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_n)$

$I(V(f)) = (\prod f_i)$

□ 1) пусть $g \in I(V(f))$

$V(g) \supset V(I(f)) = V(f)$

$V(f, g) = V(f) \cap V(g) = V(g) \supset V(f)$

— беск.

2) f, g имеют общ. дел.

f — непр. $\Rightarrow f \mid g \Rightarrow g \in (f)$

2), 3) — упр ☒

Примеры: 1) $x^2 - y^2 = 0$ $\quad (x-y)(x+y) = 0$

— прив. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$

2) $y - x^2 = 0$ — непр.

3) $(x-1)(y-x^2) = 0$

4) $y^2 = x(x^2-1)$ — непр. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$

5) $y^2 + x^2(x-1)^2 = 0$ в $\mathbb{R}^2$

непр.

$y^2 + (x(x-1))^2 = 0 \iff y = 0 \quad x(x-1) = 0$

$V(f) = \{(0,0),(1,1)\}$ — прив.

<u>Теорема Гильберта о нулях</u>

Опр: $I \subset R$ — ид., радикалом I наз. мн-во $\sqrt{I} = \operatorname{rad} I = \{f \in R : f^n \in I\}$

<u>Лемма</u>: $\sqrt{I}$ — идеал

□ $f \in \sqrt{I}$, $\forall h \in R$ $h^n f^n \in I$.

$f, g \in \sqrt{I} \iff f^n, g^m \in I$

$(f+g)^l = \sum \binom{l}{k} g^k g^{l-k}$ где $l \geq n+m-1$

$\in I$ ■

Опр: $I \subset R$ наз. радикальным ид.

если $I = \sqrt{I}$

Пример: $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ $f = \prod f_i^{a_i}$, f_i - непр.

$\sqrt{I} = (\prod f_i)$

□ упр. ■

Теорема (Т. о нулях, Nullstellensatz).

k — алг. замкн. поле, $R = k[x_1, \dots, x_n]$

1) $\forall$ макс. ид. $I \subset R$ имеет вид

$I = m_p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

2) $\forall J \subset R$, ид, $J \neq (1) = R$ $V(J) \neq \emptyset$

3) $\forall J \subset R$ — ид. $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

□ 1) $I \subset R$ — макс. ид. $\Leftrightarrow$ R/I - поле

$\varphi : R \to R/I$ — естеств. проекц.

Факт из алгебры. k — алг. замкн. поле

L/k — расш. и $\exists$ сюр. гомом.

$\varphi: k[x_1, \dots, x_n] \to L$, тогда $k = L$.

$\square$ Следствие [Fult], [Reid] $\boxtimes$

$k \to R \xrightarrow{\varphi} R/I = L$ — изом.

$k[x_1, \dots, x_n]$

$\psi: k \to L$ — изом. полей

$b_i = \varphi(x_i) \in L$, $a_i = \psi^{-1}(b_i) \in k$

$x_i - a_i \in \ker \varphi = I$

$\Rightarrow (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset I$

по макс. ид. $\Rightarrow I = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

2) $J \neq R = I(\varnothing)$ $\exists$ макс. ид. m: $J \subset m$

1) $\Rightarrow m = m_p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \Rightarrow$

$p = (a_1, \ldots, a_n) = V(m_p) \subset V(J) \Rightarrow V(J) \neq \varnothing$

3) $\sqrt{J} \subset I(V(J))$ — ясно

Обратно. Пусть $g \in I(V(J))$

$J = (f_1, \ldots, f_r)$, т.к. $k[x_1, \ldots, x_n]$ — нётер.

Рассм. $J_1 = (f_1, \ldots, f_r, x_0 g - 1) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$

$p \in V(J_1) \subset k^{n+1} \Rightarrow f_i(p) = 0 \Rightarrow g(p) = 0$

$\Rightarrow 0 = -1 \Rightarrow V(J_1) = \varnothing$

$\Rightarrow$ (по 2)) $J_1 = (1) = k[x_0, \ldots, x_n]$

$\exists\, h_i \in k[x_0, \ldots, x_n] : \sum h_i f_i + h_0(x_0 g - 1) = 1$

домножим на g^μ

Возьмём $\mu = \max\limits_{0 \le i \le n} \deg_{x_0} h_i$,

$$g^\mu = \sum \underbrace{g^\mu h_i}_{H_i = H_i(g x_0, x_1, \ldots, x_n)} f_i + g^\mu h_0(x_0 g - 1)$$

Поэтому $g^{\mu} x_0^{j_0} \cdots x_n^{j_n} = (g x_0)^{j_0} g^{\mu - j_0} \cdots$
$\in k[x_1, \dots, x_n]$

т.о.

$$g^{\mu} = \sum H_i f_i + H_0 (x_0 g - 1)$$

Возьмём всё $\bmod (x_0 g - 1)$, т.е.

$$x_0 g \mapsto 1$$

$$G_i \equiv H_i \bmod (x_0 g - 1) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

$$g^{\mu} \equiv \sum G_i f_i \pmod{(x_0 g - 1)}$$

$\in k[x_1, \dots, x_n]$ $\qquad$ $\in k[x_1, \dots, x_n]$

$\Rightarrow$ в $k[x_1, \dots, x_n]$ $\quad g^{\mu} = \sum G_i f_i$

$\Rightarrow \quad g^{\mu} \in J \quad \Rightarrow \quad g \in \sqrt{J}$ ∎

Следствие: $f \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприв. $g \in \mathbb{C}[x, y]$

$g \in I(V(f))$. Тогда $f \mid g$

□ $g^n \in (f)$, т.е. $g^n = hf \Rightarrow$

$f \mid g^n \Rightarrow f \mid g$, т.к. f – неприв. ■

Т.о. идеалы $k[x_1, \dots, x_n]$ $\xrightarrow{V}$ подмн-ва $X \subset k^n$

$\xleftarrow{I}$

$\cup$ $\cup$

рад. ид. $\xleftrightarrow{\text{вз. одн.}}$ алг. мн-ва

$\cup$ $\cup$

пр. ид. $\xleftrightarrow{\text{вз. одн.}}$ неприв. алг. мн-ва

$\cup$ $\cup$

макс ид. $\xleftrightarrow{\text{вз. одн.}}$ точки

вида $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$

Алг. многообр.

Опр.: Неприв. алг. мн-во $\subset k^n$ наз. афф. многообразием.

Есть $X \subset k^n$ — афф. многообр. Рассм. ф-ции $f : X \to k$

Опр.: $f : X \to k$ наз. регулярной / алг. / полиномиальной, если $\forall\, p = (a_1, \dots, a_n) \in X$ $\exists\, F \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_n)$

$F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$ опр. одну и ту же ф-цию $f : X \to k \iff \forall\, p \in X$ $(F - G)(P) = 0$, т.е. $F - G \in I(X)$

Опр.: $\mathcal{O}_X = \Gamma(X) = k[X] = k[x_1, \dots, x_n] / I(X)$ наз. алг. коорд. кольцом (кольцо рег. ф-ций)

Если X — неприводимо, т.е. $I(X)$ — пр.

$k[X] = \mathcal{O}_X$ — обл. целостн.

$\Rightarrow$ можем вложить $k[X] \hookrightarrow \operatorname{frac} k[X]$

Опр.: $k(X) = \operatorname{frac} k[X]$ — поле рац. ф-ий на X

Если $f \in k(X)$, $p \in X$, гов. что f опр. в p, если $\exists\, p, q \in k[X]$

$$f = \frac{p}{q}, \quad q(p) \neq 0$$

$\mathcal{O}_{p,X} = \mathcal{O}_p$ — кольцо рац. ф-ий в точке p

Опр.: $p \in X$ наз. полюсом ф-и $f \in k(X)$, если f не опр. в p.

Лемма: 1) мн-во полюсов f явл. алгебр.

2) $k[X] = \bigcap_{p \in X} \mathcal{O}_p$

$\Box$ $f \in k(X)$

Опр. $J_f = \{ g \in k[x_1, \dots, x_n] : \bar{g} f \in k[X]$

$\bar{g} = g \bmod I(X) \}$

J_f — идеал $\quad$ $\supseteq$ упр.

$I(X) \subset J$

$V(J_f)$ — мн-во точек, в которых

f не опр.

2) $f \in \bigcap_{p} \mathcal{O}_p \Rightarrow V(J_f) = \varnothing \Rightarrow J_f = (1)$

т.е. $f \in k[X]$

Обр. включение очевидно $\blacksquare$

Теорема: X — алг. многообр., $p \in X$

1) $\mathcal{O}_p$ — нётер., лок. кольцо.

2) $m_p = \{ f \in \mathcal{O}_p : f(p) = 0 \}$ — макс. ид. $\mathcal{O}_p$, причём единств.

Проективные многообразия

$\forall$ мног. $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ представим в виде $f = F_1 + \ldots + F_d$, F_i — форма $\deg F_i = i$

Опр: Ид. $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ наз. однор. если $\forall f \in I$ $F_i \in I$, где $f = F_1 + \ldots + F_d$.

Аналогично,

$$\text{однор. ид } k[x_0, \ldots x_n] \;\underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}}\; \text{подмн-ва } X \subset \mathbb{P}^n(k)$$

Теорема (Гильберта о нулях): k — алг. замк.

1) $V(J) \neq \emptyset \iff \sqrt{J} \not\supset (x_0, \dots, x_n)$

2) $V(J) \neq \emptyset \Rightarrow I(V(J)) = \sqrt{J}$

□ Док. см. [Fulton], [Reid] ■

Замечание: в афф. k^{n+1}

$(x_0, \dots, x_n) \longleftrightarrow (0, \dots, 0) \in k^{n+1}$

это $\emptyset \subset \mathbb{P}^n(k)$

Следствие: вз. одн. соотв.

однор. рад. ид. $\longleftrightarrow$ алг. мн-ва $\mathbb{P}^n(k)$

однор. пр. ид. $\longleftrightarrow$ неприв. алг. мн-ва

Аналогично опр.

$k[X]$, $k(X)$, $\mathcal{O}_p$, m_p, ...