Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Лекция №4. Отображение Римановых поверхностей.

Москва, 2025

1 Введение

Было рассмотрено:

Определение 4.1 X – **РП** – связные хаусдорфовы топологические пространства со счетной базой, на которых задана комплексная структура атласом $A : \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, где $U_\alpha \subset X$ – открытое множество пространства РП, $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ – открытое множество на комплексной плоскости, ϕ_α – гомеоморфизм.

Определение 4.2 Функция склейки: $T_{\alpha_\beta} = \phi_\alpha \circ {\phi_\alpha}^{-1}$ – голоморфны на $U_\alpha \cap U_\beta$.

Определение 4.3 Комплекснозначная функция на РП – $f : X \to \mathbb{C}-$ голоморфна в точке $p \in X$, если $\exists$ карта $\phi : U \to V, p \in U, f \circ \phi^{-1}$ голоморфна.

Определение 4.4 Функция $f : X \to \mathbb{C} - -$ **мероморфна**, если она либо голоморфна, либо имеет устранимую особую точку, либо полюс.

Определение 4.5 Пусть $X, Y-$ РП, отображение$F : X \to Y$ называется голоморфным в точке $p \in X \rightleftharpoons \exists$ карта $\phi_1 : U_1 \to V_1, U_1 \subset X, p \in U_1$ и $\exists$ карта $\phi_2 : U_2 \to V_2, U_2 \subset Y, F(p) \in U_2$ такие что $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ голоморфна в точке $\phi_1(p)$.

Свойство 4.1 $F-$ голоморфна на $W \subset X-$ открытое множество $\rightleftharpoons F$ голоморфно в $p \in W\ \forall p \in W$. $F : X \to Y-$ голоморф. отображение, если голоморф. $\forall p \in X$.

Лемма 4.1

1. F голоформф. в $p \Leftrightarrow$ вместо "$\exists$ "можно поставить квантер "$\forall$"
2. F голоморфна на $W \Leftrightarrow \exists \left\{\varphi_1^{(i)} : u_1^{(i)} \to v_1^{(i)}\right\}, \left\{\varphi_2^{(j)} : u_2^{(j)} \to v_2^{(j)}\right\}-$ набор карт на XY, такие что $W \subset \bigcup_i u_1^{(i)},\ F(w) \subset \bigcup_i u_2^{(j)},\ \varphi_2^{(j)} \circ F \circ (\varphi_1^{(i)})^{-1}-$ голоморф. в области определения.

Лемма 4.2

1. $F : X \to Y, GY \to Z-$ голоморф. $\Rightarrow G \circ F : X \to Z-$ голоморф.
2. $F : X \to Y-$ голоморф., $g : Y \to \mathbb{C}-$ голоморф. на $W \subset Y \Rightarrow g \circ F-$ голоморф. функция на $F^{-1}(W)$.
3. $F : X \to Y-$ голоморф., $g-$ мераморф. на $W \in Y F(X) \nsubseteq \{$полюсам $g\} \Rightarrow g \circ F-$ мераморф.

Пусть o_x, μ_x полюс/поле голоморф./мераморф. функций. **Замечание** Свойство 2.3 эквивалентно: $g \in O_{W,Y} \to g \circ F \in O_{F^{-1}(W),X}$ то есть $F^*(g) = g \circ F$

Есть $F : X \to Y$ можем построить $F^* : O_{W,Y} \to O_{F^{-1}(W),X}$

Аналогично можно построить отображение мераформфных функций.

Определение 4.6 $f : x \to Y-$ **изоморфизм** РП $\rightleftharpoons f-$ голоморф. вз. однознач. отображение $f^{-1} : Y \to X$ голоморф. Если $Y = X$ то f называется **автоморфизм.**

Теорема 4.1 $_\infty\ \mathbb{P}' = \mathbb{P}'(\mathbb{C})$ эти поверхности как РП изоморфны.

Доказательство: $F : \mathbb{P}' \to {}_\infty : \{z : w\} = (2Rez\bar{w}/, 2Im(z\bar{w}))\,, \frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2}$

Аналоги следствия из ТФКП

Лемма 4.3 $F : X \to Y-$ непостоянное, голоморф. отображение, то $F-$ открытое отображение.

Лемма 4.4 $F : X \to Y-$ голоморф., инъективное отображение, то $F : X \to F(X)-$ изоморфизм.

Лемма 4.5 $F, G: X \to Y-$ голоморф., $S \subset X$ множество имеющее предельную точку и $\forall p \in SF(p) = G(p)$. Тогда $F = G$.

Лемма 4.6 $F: X \to Y-$ непостоянное, голоморф. отображение $X-$ компакт $\Rightarrow F-$ сюръекция на $Y-$ компакт.

Лемма 4.7 $F : X \to Y-$ непостоянное, голоморф. $\forall y \in Y$, $F^{-1}(y)-$ дискретное множество. Если $X-$ компакт $\Rightarrow F^{-1}(y)-$ конечно

Доказательство: $w = g(z, 2\psi(F(\varphi^{-1}(z))))$ голоморф. Пусть $y \in Y, x \in F^{-1}(Y)$. Карты выбираем с центром в $x, y \Rightarrow \varphi(x) = 0, \psi(y) = 0$. Тогда прообразу $x \in F^{-1}(y)$ будет соответствовать $z : g(z) = 0$ множества нудей голоморф. функций дискретно.

Замечание: $F : X \to \mathbb{C} = Y-$ голоморф. функция, то она голоморфна, как отображение. Пусть $f : X \to \mathbb{C}$ мераморф., рассмотрим ее как функцию $F : x \to {}_{\infty} = \cup \{\infty\}$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{не полюс} f \\ \infty, & x - \text{полюс} f \end{cases}$$

Тогда $F-$ голоморф. отображение РП. Таким образом мераморф. функциям $f : X \to \mathbb{C} \longleftarrow$ голоморф. отображение $F : x \to {}_{\infty}$

Для комплексного тора $\mathbb{C}\text{Ł}, L-$ решетка.

Теорема 4.2 Пусть $\forall f \in \mu_{\mathbb{C}/L}$ — непостоян.

Тогда

$$\sum_p \nu_p(f) = 0$$

Доказательство.

Пусть

$$L = L_\omega = L(1, \omega), \qquad \omega \in \mathbb{H} \quad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Утверждение равносильно с условием кратности одно число нулей и полюсов. Предположим, что число нудей и полюсов различны: $(p_i), i = 1, ..., n-$ нули с повторениями. $(q_j), j = 1, ..., n-$ полюса с повторениями.

Пусть $n < m$, то есть $n \neq m$, если вдруг иначе заменяем f на $\frac{1}{f}$.

$$\exists p_{n+1}, ..., pm : \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=n+1}^{m} pi = \sum_{j=1}^{m} q_j$$

$p_i,\ q_j \in \mathbb{C}/L$.

$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L :\ z \mapsto z \bmod L$.

Поднимим $p_i,\ q_j$. до

$$x_i \in \pi^{-1}(p_i), \qquad y_j \in \pi^{-1}(q_j).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j \qquad (\text{в } \mathbb{C}).$$

(возможно, так как L — решётка)

Напомним:

$$\Theta_\omega(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (\ell^2 l z + l^2 w)}.$$

$$\Theta_\omega^{(x)}(z) = \Theta_\omega\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} - x\right).$$

Т: Если $x_i,\ y_j$:

$$\sum_i x_i - \sum_j y_j \in \mathbb{Z},$$

то

$$\prod_i \Theta_\omega^{(x_i)} \Big/ \prod_j \Theta_\omega^{(y_j)} \in \mu_{\mathbb{C}/L}.$$

x_i — нули, $\qquad y_j$ — полюса.

$$\sum x_i - \sum y_j = 0 \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \quad R = \prod \Theta_\omega^{(x_i)} \Big/ \prod \Theta_\omega^{(y_j)}, \qquad R = R(z).$$

$$R \in \mu_{\mathbb{C}/L)}.$$

Рассмотрим

$$g = \frac{R}{f}.$$

g не имеет полюсов, т.е. может иметь только нули.
Нули: $p_{n+1}, \ldots, p_m$, и т.е. g — голоморф.
$\mathbb{C}/L$ — компакт,

$$\Rightarrow \quad g = \mathrm{const} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad R \equiv 0, \qquad \text{но } R \not\equiv \mathrm{const} \text{ (противоречие)}$$

$$\Rightarrow \quad m = n.$$

$$\Rightarrow \quad \sum \nu_p(f) = 0.$$

Теорема (о локальной нормальной форме).
$F : X \to Y$ — непотоянное голоморф отображение, $p \in X$.
F определено в p.

$$\exists\ !m \in \mathbb{Z}_{>1} :$$

$$\forall\, \varphi_2 : u_2 \to v_2 : \varphi_2(F(p)) = 0,$$

$$\exists\, \varphi_1 : u_1 \to v_1 : \varphi_1(p) = 0 :$$

$$\varphi_2\big(F\big(\varphi_1^{-1}(z)\big)\big) = z^m.$$

Доказательство.
Пусть

$$\varphi_2 : u_2 \to v_2 : \varphi_2(F(p)) = 0.$$

$$\forall\, \psi : U \to V \text{ — карта на } X, \quad \psi(p) = 0.$$

т.к.

$$\varphi_2\big(F(\psi^{-1}(z))\big) \text{ — голоморфна.}$$

$$T(w) = \varphi_2\big(F\big(\psi_1^{-1}(z)\big)\big) = \sum_{i \geq m} c_i w^i.$$

где

$$m \geq 0, \quad \text{если } m \geq 1, \quad \text{то } T(0) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad T(w) = w^m\,\xi(w), \qquad \xi - \text{голоморфна в окр,} \quad w = 0, \quad \xi(0) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, R(w) : \ \xi(w) = R(w)^m, \qquad R - \text{голоморфна.}$$

$$T(w) = (wR(w))^m = (\eta(w))^m, \qquad \eta - \text{голоморфна.}$$

$$\eta' = R + wR', \qquad \eta'(0) = R(0) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \eta - \text{будет. в окр. } 0.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \eta \circ \psi - \text{карта}$$

$$\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = \varphi_2(F(\psi^{-1}(\eta_1^{-1}(z)))) = T\big(\eta^{-1}(z)\big) = T(w).$$

$$T(w) = \eta(w)^m \ \Rightarrow \ \text{локально } z \mapsto z^m.$$

Определение 4.7 Число m называется кратности F в точке p, обозн. $m_p(F)$.

Лемма 4.7 Пусть $F : X \to Y$ — голоморф.отображение в окрестности $p \in X$, φ, ψ — карты.

$$w = h(z) = \psi(F(\varphi^{-1}(z)))$$

Тогда

$$m_p(F) = 1 + \nu_{z_0}\big(h'(z)\big), \qquad h' = \frac{dh}{dz}.$$

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{i > m_p(F)} c_i (z - z_0)^i.$$

Замечание $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$.

Лемма 4.8 $F : X \to Y$ — голоморфно.

$\{\forall\, p \in X : F$ — опр. в p, $m_p(F) \geq 2\}$ дичкретное множество.

Доказательство

Следует из того что соответвует нулям $h(z)$ h — голоморфна, $\Rightarrow$ нулей дискретно.

Определение 4.8 $p \in X$ — называется точкой ветвления $F : X \to Y$, если $m_p(F) \geq 2$.

Лемма 4.9 Пусть $f : X \to \mathbb{C}$ — мераморф. $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ — соответствующее голоморфное отображение.

$$1)\ p \in X - \text{нуль } f \ \Rightarrow \ m_p(f) = \nu_p(f).$$

$$2)\ p \in X - \text{полюс} \ \Rightarrow \ m_p(f) = -\nu_p(f).$$

$$3)\ p \text{ — не нуль и не полюс } \Rightarrow\ m_p(f) = \nu_p\big(f - f(p)\big).$$

Для кривых(без док.)

Теорема 4.3 Пусть $X : f(x, y) = 0$ — гладкая аффинная кривая, p — точка ветвления

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0, \qquad \pi : X \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto x.$$

Теорема 4.4 $X : F(x, y, z) = 0$ — гладкая проективная кривая, $\pi : X \to \mathbb{P}'$ — проекция на $y = 0$, т.е.

$$\pi : (x, y, z) \mapsto (x : z).$$

$p \in X$ — точка ветвления $\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$

Лемма 4.10 X, Y — компактные РП.

$F : X \to Y$ — голоморф., непостоян.

$$\forall\, y \in Y \quad \text{определим } d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} m_p(F).$$

Тогда $d_y(F)$ не зависит от y.

$\forall\, y \in Y \quad d_y(F) = d.$

Доказательство(идея)

- $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное, т.к. Y — компакт.

  $\forall$ окр. x_i $\exists$ лок. координата $z_i, (z_i = \varphi(x),\ x \in$ окр. $x_i)$,

$$F : z_i \mapsto z_i^{m_i}.$$

- $w = z^m$ – рассмотрим, $f : D \to D, D = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \,\}$.

$$z = 0 \ \text{ – точка ветвл.,} \qquad f^{-1}(0) = \{0\}.$$

$$m_0(f) = m.$$

$$\forall\, w \in D \setminus \{0\}, \qquad f^{-1}(w) = \{\, \sqrt[m]{w}\}.$$

$$|f^{-1}(w)| = m, \qquad \forall\, p \in f^{-1}(w), \quad m_p(f) = 1.$$

$$d_w(f) = \begin{cases} m, & w = 0, \\ \sum_{i=1}^m 1 = m, & w \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{т.е. } f : D \to D, \quad z \mapsto z^m \text{верно.}$$

- Из компактности и связности:

$$y \mapsto d_y(f) = m_i, \quad \text{— лок. постоянна} \Rightarrow \quad m_i = m = \text{const}.$$

Определение 4.9 $F : X \to Y$ — голоморфное, непостоян. отображение, X, Y — компакты. $d(F) = d_y(F)$ называется степенью отображения $d(F) = \deg(F)$.

Лемма 4.11 $F : X \to Y$ — - —

$$F \text{ — изомарфизм } \iff \deg F = 1.$$

Теорема 4.5 X — компактная РП, $\exists\, f \in \mu_X$: f имеет единственный полюс $p \in X, \nu_p(f) = -1$. Тогда X изоморфно $\mathbb{C}_\infty$.

Доказательство.

Пусть

$$F : X \to \mathbb{C}_\infty.$$

$$m_p(F) = 1, \qquad F^{-1}(\infty) = \{p\}, \quad \text{и т.к. единственный полюс.}$$

$$\deg F = d_\infty(F) = 1 \iff F \text{ — изом.}$$

Теорема 4.6 X — компактная РП, $f \in \mu_X \Rightarrow \quad \sum_{p\in X} \nu_p(f) = 0$.

Доказательство

$F : X \to \mathbb{C}_\infty$ — соответствующее f голоморф. отображение. Если (x_i) — нули $f, (y_j)$ — полюса f.

$$F : x_i \mapsto 0, \qquad y_j \mapsto \infty.$$

$$\sum m_{x_i}(F) = \deg F = \sum m_{y_j}(F),$$

$$\text{т.е.} \quad \nu_{x_i}(f) = -\nu_{y_j}(f).$$

$$\Rightarrow \quad 0 = d - d = \sum \nu_{x_i}(f) + \sum \nu_{y_j}(f).$$

Теорема 4.7 $\forall\, f \in \mu_{\mathbb{C}/L}$, f — такого вида $f = \prod \Theta_\omega^{(x_i)} \Big/ \prod \Theta_\omega^{(y_j)} \in \mu_{\mathbb{C}/L}$.

$$\Theta_\omega^{(x)}(z) = \Theta_\omega\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} - x\right),$$

$$\Theta_\omega(z) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(2lz + l^2 w)}.$$

Доказательство

$$\sum \nu_p(f) = 0 \iff \text{число нулей совп. с числом полюсов.}$$

$(p_i)_{i=1}^n$ — нули (с повторениями).
$(q_j)_{j=1}^n$ — полюса (с повторениями).
Предположим, что $\sum p_i \neq \sum q_j$
Дополним до равенства $\exists\, p_0,\ q_0 \in \mathbb{C}/L$.

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{j=0}^n q_j.$$

Поднимим $p_i,\ q_j$ в $\mathbb{C}$ относительно $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L, x_i \in \pi^{-1}(p_i), \quad y_j \in \pi^{-1}(q_j)$.

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{j=0}^{n} y_j.$$

Рассмотрим

$$R = \prod_{i=0}^{n} \Theta_\omega^{(x_i)} \Big/ \prod_{j=0}^{n} \Theta_\omega^{(y_j)}.$$

$$g = \frac{R}{f}, \qquad g \text{ по построению один нуль } p_0,\ \text{по построению один полюс } q_0,$$

и они кратности 1. Соответсвующее голоморф. отображение$G : X \to \mathbb{C}_\infty$.

$$\deg g = 1 \ \Rightarrow\ X = \mathbb{C}/L - \text{изоморф.}\mathbb{C}_\infty.$$

Но

$$g(x) = 1, \qquad g(\mathbb{C}_\infty) = 0.$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

(Аналогично)

$$\exists\, x_i,\ y_i : \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

$$R_1 = \prod \Theta_\omega^{(x_i)} \Big/ \prod \Theta_\omega^{(y_i)}.$$

$$g_1 = \frac{R_1}{f}, \qquad g_1 \text{ не имеет нулей и полюсов.}$$

$$\Rightarrow\ g_1 = \text{const}\ \Rightarrow\ f = c\, R_1.$$

Теорема 4.8 (формула Гурвица)

$$F : X \to Y \text{ голоморфное непостоян. отображение,} \quad X, Y - \text{компактн. РП.}$$

$$2g(x) - 2 = \deg F\,(2g(y) - 2) + \sum_{p \in X} (k_p(F) - 1).$$

Теорема 4.9
$X = \mathbb{C}/L, \quad Y = \mathbb{C}/M.$
$F : X \to Y$ — голоморфное.
Пусть F имеет вид

$$G(z) = \gamma z + a.$$

$$\gamma : \gamma L \subset M. \quad a = 0 \iff F - \text{гомом. групп},\ (F(0) = 0).$$

$$\deg F = [\,M : \gamma L\,].$$

$$F \text{ — изом.} \iff \gamma L = M.$$

Теорема 4.10
$X = \mathbb{C}/L, \quad F : X \to X$ — автоморфизм.$\iff$ одно из

$$1)\ L \text{ — квадр. реш.,} \quad \gamma \in \sqrt[4]{1}.$$

$$2)\ L \text{ гексоганальная реш.,} \quad \gamma \in \sqrt[6]{1}.$$

$$3)\ L \text{ — не квадратная, не гексогональная реш.,} \quad \gamma = \pm 1.$$

Или$Aut(X)$

$$1)\ Aut(X) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

$$2)\ Aut(X) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

$$3)\ Aut(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Следствие: L — квадратная, M — гексагональная, то $X/L, \quad X/M$ — не изоморф.

Теорема 4.11

$$L_{\omega_1} = L(1, \omega_1), \qquad L_{\omega_2} = L(1, \omega_2).$$

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{H}.$$

$$X_{\omega_1} \text{изоморф.} X_{\omega_2} \;\Leftrightarrow\; \exists\, g \in SL_2(\mathbb{Z}) : \omega_1 = \frac{a\omega_2 + b}{c\omega_2 + d}.$$

т.е. классы изоморфизмов торов $\Leftrightarrow$ точки фактор пространств.