Листок 15
Тема 15 (4.2). Арифметика колец целых алгебраических чисел

Упражнения и задачи

1. Докажите, что $r \in \mathbb{Q}$ — целое алгебраическое число $\iff r \in \mathbb{Z}$.

2. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_l$ — целые алгебраические числа, $W = \{\sum_{i=1}^{l} r_i\omega_i : r_i \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что
   - W — конечно порождённый модуль над $\mathbb{Z}$;
   - если для $\omega \in \mathbb{C}$ верно $\forall \gamma \in W\ \gamma\omega \in W$, то ω — целое алгебраическое число;
   - множество целых алгебраических чисел является кольцом.

3. Докажите, что если α — целое алгебраическое, то $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$.

4. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — числовое поле, $\mathcal{D}_K$ — кольцо целых. Докажите, что
   - $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha), \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \mathcal{D}_K$;
   - если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{D}_K$ — базис расширения, то $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}$.

5. Пусть $I \subset \mathcal{D}_K$ — идеал. Докажите, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ — базис расширения $K/\mathbb{Q}$ такой, что $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ минимален, то $I = \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n$.

6. Покажите, что 3, 7, $1+2\sqrt{-5}$, $1-2\sqrt{-5}$ являются простыми в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (т.о. $21 = 3\cdot 7 = (1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$ — пример неоднозначного разложения на простые множители).

7. Докажите, что кольцо целых $\mathcal{D}_K$ является нётеровым, и что всякий простой идеал $P \subset \mathcal{D}_K$ является максимальным.

8. Докажите, что $h_K = 1 \iff \mathcal{D}_K$ — кольцо главных идеалов.

9. Докажите следующие свойства идеалов $\mathcal{D}_K$:
   - $AB = AC \implies B = C$;
   - $A \subset B \implies \exists C$: $A = BC$.

10. Докажите следующие свойства функции показателя:
    - $\nu_P(P) = 1$;
    - $P_1 \neq P_2 \implies \nu_{P_1}(P_2) = 0$;
    - $\nu_P(AB) = \nu_P(A)\nu_P(B)$.

11. Завершите доказательство теоремы об однозначности разложения идеалов кольца $\mathcal{D}_K$.

12. Пусть P — простой идеал $\mathcal{D}_K$. Докажите, что $\mathcal{D}_K/P$ является конечным полем.

13. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $A_1, \dots, A_g \subset R$ — идеалы такие, что $A = A_1 \cdot \dots \cdot A_g$ и $\forall i \neq j\ A_i + A_j = R$. Докажите, что $R/A \cong R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_g$.

14. Пусть $P, Q \subset \mathcal{D}_K$ — простые идеалы. Докажите, что $\forall m, n \in \mathbb{Z}_+\ P^m + Q^n = \mathcal{D}_K$.

Темы для самостоятельного изучения

- Теория Галуа для случая числовых полей, [Marc], Appendix B.