Конспект лекции 6:
«Дифференциальные формы. Дивизоры»

Иванов Егор Романович, 503 группа

Осень 2025

Содержание

1 Дифференциальные формы

1.1 Перенос определений

Определение. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – голоморфна на открытом множестве $V \subset \mathbb{C}$. Выражение $\omega = f(z)dz$ называют *голоморфной дифференциальной 1-формой (голоморфным дифференциалом)*.

Распространим данное определение из курса ТФКП на римановы поверхности. Сделать это можно с помощью карт. Если $z = \varphi(x)$, $w = \psi(x)$ – карты, а T – функция склейки, то есть $z = T(w)$, то $dz = T'(w)dw$.

Определение. Пусть имеются две голоморфные дифференциальные 1-формы

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f(z)dz \\ \omega_2 &= g(w)dw \end{aligned} \tag{1}$$

Если $g(w) = f(T(w))T'(w)$, где T – голоморфная функция, то будем говорить, что ω_1 *переходит* в ω_2.

Определение. Пусть X – риманова поверхность. *Голоморфной 1-формой* над X называется такое семейство (ω_φ), что для любых карт φ_1, φ_2 верно, что ω_{φ_1} переходит в ω_{φ_2} под действием функции склейки $T = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$.

Замечание 1. Достаточно задать на картах одного атласа $\mathcal{A}$.
Замечание 2. Множество голоморфных форм обозначается буквой Ω.
Замечание 3. Определения и замечание 1 аналогичны в случае мероморфной функции f. Обозначение: $\mathcal{M}^{(1)}$.

Определение. Пусть $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, $p \in X$. Если $z = \varphi(\cdot)$ – локальная координата, в которой форма имеет вид $\omega = f(z)dz$, $f \in \mathcal{M}_p$, то число $\nu_p(\omega) = \nu_p(f)$ называется *порядком* формы ω.

Замечание. Аналогично можно показать, что порядок формы корректно определен, то есть не зависит от выбора карты.

Лемма 1.1.

1. Пусть $\omega \in \Omega$ – голоморфная форма, $h \in \mathcal{O}$ – голоморфная функция, тогда $h\omega \in \Omega$.
2. Аналогично, если $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$, $h \in \mathcal{M}$, то $h\omega \in \mathcal{M}^{(1)}$.
3. Если $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, $h \in \mathcal{M}$, то $\nu_p(h\omega) = \nu_p(h) + \nu_p(\omega)$.

Определение. Рассмотрим отображение $d : f \mapsto f'(z)dz$, действующее из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}^{(1)}$. Если форма ω содержится в d, то есть $\omega = df$, то она называется *точной*.

Рассмотрим **примеры**: $\mathbb{C}_\infty$ – риманова сфера

- Пусть $\omega = dz$. В любой конечной точке $p \in \mathbb{C}$ верно, что $\nu_p(\omega) > 0$. В окрестности ∞:

$$z = \frac{1}{w} \Rightarrow dz = -\frac{1}{w^2}dw,$$

  откуда $\nu_\infty(dz) = -2$.

- Пусть $\omega = f\, dz$. Если f голоморфна на $\mathbb{C}$ и не является тождественной константой, то $\nu_\infty(f) < 0$. В окрестности нуля верно, что

$$\omega = -f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw \Rightarrow \nu_\infty(w) = -2 \tag{2}$$

- Пусть $\omega = \frac{1}{z}dz$. Эта форма не является точной, так как все мероморфные функции на сфере – рациональные функции.

1.2 Интегрирование 1-форм

В комплексном анализе дифференциальные формы – инструмент для контурного интегрирования, поэтому определим соответствующие понятия и для случая римановых поверхностей.
В $\mathbb{R}^2$ 1-формы имеют вид $f(x,y)dx + g(x,y)dy$. В этой модели можно смотреть на $\mathbb{C}$ как на плоскость $\mathbb{R}^2$:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \tag{3}$$

В данных обозначениях условия Коши-Римана можно записать, как

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4}$$

При их выполнении функция $f(z) = f(x,y) = f(z,\bar{z})$ является бесконечно-дифференцируемой как отображение на плоскости. Будем обозначать класс таких функций C^∞.

Определение. C^∞-1-формы $\omega = f(z,\bar z)dz + g(z,\bar z)d\bar z$, где $f, g \in C^\infty$.

Аналогично данное понятие распространяется на римановы поверхности с помощью карт.

Определение. C^∞-формы это семейство форм (ω_φ) в каждой карте таких, что для любых карт φ, ψ ω_φ переходит в ω_ψ. Под этим понимается, что $f_2(w,\bar w) = f_1(T(w), \overline{T(w)})T'(w)$. Аналогично для g_2.

Определение. Пусть X – риманова поверхность. *Путь* на X – C^∞ функция $\gamma : [a,b] \to X$.

Так как путь может пролегать по нескольким картам, необходим аппарат для перехода между ними.

Определение. $\mathcal{A}$ – атлас на римановой поверхности X, γ - путь на X. *Разбиением* γ называется $(\gamma_i)_{i=1}^n$: $[a,b] = \sqcup_i [a_i, b_i]$, $\gamma([a_i,b_i]) \subset U_i$, где U_i – область определения некоторой карты.

Определение. Пусть ω – C^∞-форма такая, что в локальных координатах $(\varphi_i)_{i=1}^n$ она имеет вид $\omega = f_i(z,\bar z)dz + g_i(z,\bar z)d\bar z$, а $z = \varphi_i \circ \gamma_i : [a_i,b_i] \to V_i \subset \mathbb{C}$. Тогда *интегралом формы ω по пути γ* называется:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t)\, dt \tag{5}$$

Лемма 1.2. Интеграл $\int_\gamma \omega$ не зависит от параметризации и разбиения γ.

Лемма 1.3. Если f – C^∞-форма, то $\int_\gamma f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Лемма 1.4. Интеграл аддитивен по пути, то есть если $\gamma = \sqcup_{i=1}^n \gamma_i$, то $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega$

Лемма 1.5. $\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$, где γ^- – это кривая γ с обратным направлением обхода.

Определение. Пусть $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, $z = \varphi$ – локальная координата с центром в точке p. Если $\nu_p(\omega) = -N < 0$, то есть если $\omega = f dz$, то f раскладывается в ряд Лорана со старшей отрицательной степенью $-N$, то c_{-1} – коэффициент при $1/z$ – называется вычетом и обозначается $\mathrm{Res}_p(\omega)$.

Лемма 1.6. Вычет корректно определен и верно следующее представление:

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \omega, \tag{6}$$

где γ – замкнутый контур вокруг p, внутри которого нет полюсов, кроме, быть может, самой точки p.

Перейдем к рассмотрению формулы Стокса, которая использует 2-формы. В случае C^∞ они имеют вид $h(x,y)dxdy$, в комплексном анализе – $f(z,\bar z)\, dz \wedge d\bar z$. Данное определение по аналогии так же распространяется на римановы поверхности.

Теорема 1.7 (Формула Стокса)**.**

$$\iint\limits_D d\omega = \int_{\partial D} \omega, \tag{7}$$

где

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z \tag{8}$$

Теорема 1.8 (о вычетах)**.** Пусть X – компактная риманова поверхность, $\omega \in \mathcal{M}_p^{(1)}$, тогда

$$\sum_{p\in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0 \tag{9}$$

Доказательство. Так как X – компактно, то множество нулей и полюсов конечно. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ – полюса. Возьмем для каждого полюса p_i контур γ_i, не содержащий другие полюса p_j, $j \neq i$, обозначим за U_i внутренности γ_i, то есть $\partial U_i = \gamma_i$. Положим $D = X \setminus \sqcup_{i=1}^n U_i$, которое так же будет компактно, причем верно, что $\partial D = (\sqcup_i \gamma_i)^-$. Тогда

$$\sum_p \mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} \omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sqcup\gamma_i)^-} \omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \omega = -\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \omega = 0 \tag{10}$$

□

Лемма 1.9. Если $f \in \mathcal{M}_p$, $\omega = df/f$, то

$$\mathrm{Res}_p\left(\frac{df}{f}\right) = \nu_p(f) \tag{11}$$

Теорема 1.10. Пусть X – компактная риманова поверхность, $f \in \mathcal{M}_X$. Тогда $\sum_p \nu_p(f) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим форму $df/f \in \mathcal{M}_X^{(1)}$. Тогда

$$0 = \sum_p \mathrm{Res}_p \frac{df}{f} = \sum_p \nu_p(f) \tag{12}$$

□

Лемма 1.11. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}_X^{(1)}$, $\omega_1 \neq 0$, тогда существует $f \in \mathcal{M}_X$ такая, что $\omega_2 = f\omega_1$.

2 Дивизоры

Пусть X – компактная риманова поверхность.

Определение. *Группой дивизоров* $\mathrm{Div}(X)$ называется свободная абелева группа, порожденная всеми точками X. Иными словами, если $D \in \mathrm{Div}(X)$, то D представим в следующем виде:

$$D = \sum_{p\in X} n_p \cdot p, \tag{13}$$

где $n_p \neq 0$ для конечного числа слагаемых. *Носителем* дивизора называется множество:

$$\mathrm{supp}\, D = \{p \in X : n_p \neq 0\} \tag{14}$$

Степенью дивизора

$$\mathrm{deg} D = \sum_{p\in D} n_p \tag{15}$$

Замечание. По сути D – это функция $X \to \mathbb{Z}$ с конечным носителем, а выражение $\sum n_p p$ это удобная запись для $\sum D(p)\, p$.

Определение. В пространстве функций можно задать *отношение частичного порядка*: $D_1 \leq D_2$ тогда и только тогда, когда $D_1(p) \leq D_2(p)$ для всех p.

Определение. Дивизор вида $D = p$ называется *простым* дивизором.

Определение. Если f – некоторая мероморфная функция, то ее дивизор можно определить следующим образом:

$$\operatorname{div}(f) = (f) = \sum_p \nu_p(f)\, p \tag{16}$$

Обратно, всякий дивизор вида $D = (f)$ для некоторой f называется *главным* дивизором. *Дивизором нулей* будем называть

$$(f)_0 = \sum_{\nu_p(f)>0} \nu_p(f)\, p \tag{17}$$

Аналогично *дивизор полюсов*

$$(f)_\infty = \sum_{\nu_p(f)<0} (-\nu_p(f))\, p \tag{18}$$

Несложно убедиться в том, что $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.

Лемма 2.1.

1. $(fg) = (f) + (g)$, $(f/g) = (f) - (g)$
2. $\deg{(f)} = \sum \nu_p(f) = 0$

Определение можем распространить на формы.

Определение. Если $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$, то ее *дивизором* будем называть

$$(\omega) = \operatorname{div}(\omega) = \sum \nu_p(\omega)\, p \tag{19}$$

Рассмотрим **примеры**. Пусть $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$. Тогда f – рациональная функция, то есть она представима в виде

$$f(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_i)^{e_i},\ e_i \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

Тогда для ее дивизора верно

$$(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\infty \tag{21}$$

Если дополнительно рассмотреть форму $\omega = f dz$, то

$$(\omega) = (f) + (dz) = \sum e_i\lambda_i - \left(\sum e_i - 2\right)\infty, \tag{22}$$

откуда $\deg(\omega) = -2$.
Введем дополнительные обозначения:

1. $\operatorname{Div}_0(X) = \{D \in \operatorname{Div}(X) : \deg D = 0\}$

2. $\mathrm{PDiv}(X) = \{D \in \mathrm{Div}(X) : D = (f)\}$

3. $\mathrm{KDiv}(X) = \{D \in \mathrm{Div}(X) : D = (\omega)\}$

Определение. Фактор-группа $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$ называется *группой классов дивизоров* и обозначается $\mathrm{Cl}(X)$. Это соответствует отношению эквивалентности $D_1 \sim D_2$, если $(D_1) - (D_2) = (f)$.

Лемма 2.2. Степени эквивалентных дивизоров равны.

Доказательство. Верно в силу аддитивности степени и равенства нулю степени любого главного дизизора. □

Лемма 2.3. Дивизоры любых форм эквивалентны.

Доказательство. По ранее доказанной лемме, существует такая f, что $\omega_2 = f\omega_1$, откуда и следует утверждение леммы. □

Определение. Дивизоры D вида (ω) называются *каноническими.*

Теорема 2.4. Пусть $X = \mathbb{C}_\infty$, тогда $D \in \mathrm{PDiv}(X) \Leftrightarrow \deg D = 0$.

Доказательство. Необходимость была доказана ранее, покажем достаточность. Представим дивизор в следующем виде

$$D = \sum e_i\lambda_i + e_\infty\infty \tag{23}$$

Степень дивизора равна 0 тогда и только тогда, когда $e_\infty = -\sum e_i$. В таком случае искомой будет мероморфная функция

$$f = \prod_i (z_i - \lambda_i)^{e_i} \tag{24}$$

□

Рассмотрим аналогичную теорему для тора $X = \mathbb{C}/L$. Для этого введем

Определение. Отображение $A : \mathrm{Div}(\mathbb{C}/L) \to \mathbb{C}/L$, ставящее в соответствие формальной сумме сумму комплексных чисел по модулю решетки, являющееся гомоморфизмом этих групп, называется *отображением Абеля(-Якоби).*

Теорема 2.5. Пусть $X = \mathbb{C}/L$, тогда $D \in \mathrm{PDiv}(X) \Leftrightarrow \deg D = 0$ и $A(D) = 0$.

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть тор L задается решеткой $\langle 1, \tau\rangle$, где $\tau \in \mathbb{H}$ – число из верхней комплексной полуплоскости, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ – естественная проекция. Введем $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, как $h \circ \pi = f$. Для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ мы можем рассмотреть следующий контур γ_{z_0} – фундаментальный параллелепипед решетки на точках $z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + \tau, z_0 + \tau$. Обозначим его внутренность D. Так как множество нулей и полюсов дискретно, то можно выбрать γ_{z_0} так, что внутри контура нет нулей и полюсов.

$$L \ni \int_\gamma z\frac{h'(z)}{h(z)}dz = \sum_{z\in D} \nu_z(h)z, \tag{25}$$

что и означает, что (f) лежит в ядре отображения Абеля.
Покажем достаточность. Запишем дивизор D в следующем виде: $D = \sum_i (p_i - q_i)$, возьмем прообразы

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(p_i) = z_i \\ \pi^{-1}(q_i) = w_i \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда искомой функцией будет

$$f = \frac{\prod_i \Theta^{(z_i)}(z)}{\prod_i \Theta^{(w_i)}(z)} \tag{27}$$

$\square$