

Листок 8

Тема 8(2.4). Тригонометрические суммы. Уравнения над конечными полями

Упражнения и задачи

1. Пусть $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)$ — многочлены с целыми коэффициентами степеней r_1, \dots, r_m . Докажите, что если $r_1 + \dots + r_m < n$, то число решений системы сравнений $F_i(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq i \leq m$, делится на p .
2. Пусть p — простое, $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ — многочлен с целыми коэффициентами, $\deg F = r < n(p-1)$. Докажите, что $p^a \mid \sum' F(x_1, \dots, x_n)$, где в сумме x_i пробегают независимо друг от друга полную систему вычетов $\bmod p$, и $a = n - [r/(p-1)]$.

3. Пусть m — натуральное, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $S_a = \sum_{x \bmod m} e^{2\pi i \frac{af(x)}{m}}$. Докажите, что

$$\sum_{a \bmod m} |S_a|^2 = m \sum_{c \bmod m} N(c)^2,$$

где $N(c) = N_m(f(x) \equiv c \pmod{m})$ — число решений сравнения $f(x) \equiv c \pmod{m}$.

4. Пусть p — простое, $S_a = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} e^{2\pi i \frac{ax^r}{p}}$, $d = (r, p-1)$. Докажите, что

- $\sum_{a \in \mathbb{F}_p^*} |S_a|^2 = p(p-1)(d-1)$;
- $|S_a| < d\sqrt{p}$, при $a \neq 0$;
- и более точная оценка: $|S_a| \leq (d-1)\sqrt{p}$, при $a \neq 0$.

5. Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ — мультипликативные характеры, ε — главный характер $\bmod p$, $J = J(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l) = \sum_{t_1 + \dots + t_l = 1} \chi_1(t_1) \cdots \chi_l(t_l)$ — обобщенная сумма Якоби, $J_0 = J_0(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l) = \sum_{t_1 + \dots + t_l = 0} \chi_1(t_1) \cdots \chi_l(t_l)$. Докажите следующие свойства J и J_0 :

- $J_0(\varepsilon, \dots, \varepsilon) = J(\varepsilon, \dots, \varepsilon) = p^{l-1}$;
- если некоторые, но не все, среди характеров χ_i являются главными, то $J_0 = 0$, $J = 0$;
- пусть $\chi_l \neq \varepsilon$, тогда если $\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_l \neq \varepsilon$, то $J_0 = 0$, а если $\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_l = \varepsilon$, то $J_0(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l) = \chi_l(-1(p-1))J(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{l-1})$.

6. Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ — неглавные характеры $\bmod p$ такие что $\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_l$ тоже неглавный, τ — сумма Гаусса, J — обобщенная сумма Якоби. Докажите, что

- $\tau(\chi_1) \cdots \tau(\chi_l) = J(\chi_1, \dots, \chi_l) \tau(\chi_1 \cdots \chi_l)$;
- $|J(\chi_1, \dots, \chi_l)| = p^{(l-1)/2}$.

7. Пусть $m > 1$ — целое, $K(a, b; m) = \sum'_{xy \equiv 1 \pmod{m}} e^{2\pi i \frac{ax+by}{m}}$, где x пробегает приведенную систему вычетов $\bmod m$. $K(a, b; m)$ называется суммой Клоостермана, удобно также использовать запись $K(a, b; m) = \sum'_{x \bmod m} e^{2\pi i \frac{ax+bx^*}{m}}$, где x^* обозначает вычет обратный к x . Докажите следующие свойства сумм Клоостермана:

- $K(a, b; m) = K(b, a; m)$;
- если $(m, c) = 1$, то $K(ac, b; m) = K(a, bc; m)$;

- если $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) = 1$, то $K(a, b; m) = K(n_2 a, n_2 b; m_1) K(n_1 a, n_1 b; m_2)$, где n_1, n_2 определены из $m_1 n_1 \equiv 1 \pmod{m_2}$, $m_2 n_2 \equiv 1 \pmod{m_1}$;
 - если $m = p^{2\alpha}$, $(m, 2a) = 1$, то $K(a, a; m) = \sqrt{m} (e^{2\pi i \frac{2a}{m}} + e^{-2\pi i \frac{2a}{m}})$.
8. Пусть p — простое, $(k, p) = 1$, $S = \sum'_x \sum'_y \left(\frac{xy+k}{p} \right)$, где x, y пробегает возрастающие последовательности из X и Y вычетов полной системы вычетов $\bmod p$. Докажите, что $|S| < \sqrt{XYp}$.
9. Пусть $m > 1$ — целое, $(a, m) = 1$, $S = \sum_{x \bmod m} \sum_{y \bmod m} \xi(x) \eta(y) e^{2\pi i \frac{axy}{m}}$, где ξ, η — такие, что $\sum_{x \bmod m} |\xi(x)|^2 = X$, $\sum_{y \bmod m} |\eta(y)|^2 = Y$. Докажите, что $|S| < \sqrt{XYm}$.
10. Пусть p — простое, $(a, p) = (b, p) = 1$, n — целое $0 < n < p$, $S = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} e^{2\pi i \frac{ax^n + bx}{p}}$. Докажите, что $|S| < \frac{3}{2} n^{1/4} p^{3/4}$.
11. Пусть $p > 60$ — простое, M, Q — целые, $0 < M < M+Q \leq p$, χ — неглавный характер $\bmod p$, $S = \sum_{x=M}^{M+Q-1} \chi(x)$. Докажите, что $|S| < \sqrt{p} (\log p - 1)$.