

## Листок 10

### Тема 10 (3.1). $p$ -адические числа: элементарное определение и свойства

#### Упражнения и задачи

1. Докажите, что различные канонические последовательности определяют различные целые  $p$ -адические числа.
2. Докажите, что для целых  $p$ -адических чисел  $\alpha$  и  $\beta$  заданные в лекции операции  $\alpha\beta$ ,  $\alpha+\beta$  корректно определены (то есть результат не зависит от выбора последовательностей-представителей  $\alpha \sim (x_n)$ ,  $\beta \sim (y_n)$ ) и  $\mathbb{Z}_p$  — действительно коммутативное кольцо.
3. Пусть  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ . Какой будет иметь вид разложение числа  $-\alpha$ ?
4. Докажите, что уравнение  $x^2 = 2$  не имеет решений в  $\mathbb{Q}_5$ .
5. Докажите, что  $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p \exists a \in \mathbb{Z} : \alpha \equiv a \pmod{p^n}$ . Для  $a, b \in \mathbb{Z} a \equiv b \pmod{p^n}$  как сравнение в  $\mathbb{Z}_p \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{p^n}$  как сравнение в  $\mathbb{Z}$ .
6. Пусть  $p \neq 2$ ,  $(m, p) = 1$ . Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения  $x^2 = m$  в  $\mathbb{Q}_p$ . Сделайте вывод, что  $\mathbb{Q}_p$  не является алгебраически замкнутым.
7. Докажите, что если  $\xi_n \rightarrow \xi$  в  $\mathbb{Q}_p$  и  $\xi \neq 0$ , то  $1/\xi_n \rightarrow 1/\xi$  в  $\mathbb{Q}_p$ .
8. Докажите  $p$ -адический аналог утверждения из анализа: из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
9. Докажите  $p$ -адический критерий Коши: последовательность  $(\xi_n)$  сходится  $\Leftrightarrow \nu_p(\xi_m - \xi_n) \rightarrow \infty$ , при  $m, n \rightarrow \infty$ .
10. Пусть последовательность  $(x_n)$  определена как  $x_n = 1 + p + \dots + p^{n-1}$ . Докажите, что в  $\mathbb{Q}_p$   $x_n \rightarrow 1/(1-p)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .
11. Докажите, что для  $0 \neq \xi \in \mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}$  представление  $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ ,  $0 \leq a_n \leq p-1$  имеет периодические коэффициенты (начиная с некоторого номера  $k_0$ , т.е.  $\exists m : \forall k \geq k_0 a_{m+k} = a_k$ ). Обратно всякий такой ряд представляет рациональное число.

#### SageMath

- Исследуйте основные функции SageMath связанные с арифметикой  $p$ -адических чисел. Определение кольца и поле  $p$ -адических чисел:  $\mathbb{Z}_p(n)$ ,  $\mathbb{Q}_p(n)$ . Рассмотрите примеры уравнения  $x^2 = m$  (используйте функцию `sqrt()`).

#### Темы для самостоятельного изучения

- Элементы  $p$ -адического анализа: последовательности, ряды, дифференцирование, интегрирование. [Gouv], §§5.1–5.4.