Листок 12
Тема 12 (3.2). Аксиоматическое определение поля p-адических чисел, метризованные поля

Упражнения и задачи

1. Пусть (k, φ) — метризованное поле. Докажите следующие свойства:
   - $\varphi(\pm 1) = 1$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
   - $\varphi(x - y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$;
   - $\varphi(x \pm y) \geqslant |\varphi(x) - \varphi(y)|$;
   - $\varphi(x/y) = \varphi(x)/\varphi(y)$, $y \neq 0$.

2. Пусть (k, φ) — метризованное поле, d — индуцированное расстояние: $d(x, y) = \varphi(x - y)$. Докажите, что операции поля $(+, -, \cdot, /)$ являются непрерывными по отношению к d (то есть k — топологическое поле).

3. Пусть (k, φ) — метризованное поле. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow$ каждое открытое множество содержащее x содержит все кроме конечного числа элементы последовательности x_n.

4. Пусть k — поле, на котором заданы две метрики (абсолютные величины) φ_1, φ_2. Докажите следующие импликации теоремы о критериях эквивалентности:
   - φ_1, φ_2 — эквивалентны $\implies$ для любой сходящейся последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{(\varphi_1)} x_n = x$ если и только если $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{(\varphi_2)} x_n = x$ ($\lim^{(\varphi)}$ означает предел по метрике φ);
   - $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{(\varphi_1)} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}{}^{(\varphi_2)} x_n = x \implies \forall x \in k\ \varphi_1(x) < 1$ если и только если $\varphi_2(x) < 1$;
   - $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $\forall x \in k\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\alpha \implies \varphi_1$, φ_2 эквивалентны.

5. Пусть k — поле, φ — функция $k \to \mathbb{R}_{>0}$ такая что:
   - $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   - $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$,
   - $\varphi(x) \leqslant 1 \Rightarrow \varphi(x - 1) \leqslant 1$.

   Докажите, что φ является неархимедовой метрикой на k.

6. Пусть (k, φ) — метризованное поле , φ — неархимедова метрика. Докажите, что $\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x + y) = \max(\varphi(x), \varphi(y))$.

7. Пусть (k, φ) — метризованное поле, A — образ $\mathbb{Z}$ в k. Докажите, что φ — неархимедова метрика $\Leftrightarrow \forall a \in A\ \varphi(a) \leqslant 1$. (Подсказка: сведите к утверждению φ — неархимедова метрика $\Leftrightarrow \varphi(x + 1) \leqslant \max(\varphi(x), 1)$; рассмотрите $\varphi(x + 1)$).

8. Пусть (k, φ) — метризованное поле, φ — неархимедова метрика, $B(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в x. Докажите следующие свойства:
   - $\forall y \in B(x, r)\ B(x, r) = B(y, r)$;
   - $\partial B(x, r) = \varnothing$ ($\partial B(x, r)$ обозначает множество граничных точек);
   - $B(x, r) \cap B(y, s) \neq \varnothing \Leftrightarrow B(x, r) \subset B(y, s)$ или $B(y, s) \subset B(x, r)$.

   Рассмотрите аналогичные утверждения для замкнутых шаров $\bar{B}(x, r)$.

9. Пусть $\operatorname{char} k = p$. Докажите, что всякая метрика φ поля k неархимедова.

10. Пусть k — поле, $k(t) = \{f(t)/g(t) : f, g \in k[t], g \neq 0\}$ — поле рациональных функций над k. $\forall r \in k(t)^*$ определим $\varphi(r) = \rho^m$, где m такое, что $r = f/g = t^m(f_0/g_0)$, где f_0, g_0 не делятся на t как многочлены, $0 < \rho < 1$; для $r = 0$ положим $\varphi(0) = 0$. Докажите, что ϕ — метрика поля $k(t)$.

    Докажите, что множество 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$ с 2-адической метрикой $|\cdot|_2$ гомеоморфно Канторову множеству C с обычным модулем $|\cdot| = |\cdot|_\infty$.

SageMath

- В контексте задач 11 и 12 ознакомьтесь с функцией `Zp(n).plot()`.

Темы для самостоятельного изучения

- Единственность пополнения поля по метрике. [БШ] §I.4.

- $\forall$ простого p множество целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно множеству 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$. [Kat], глава 2.