$$\boxed{\text{2 Функции на РП}}$$

<u>Прошлый раз</u>: X — РП — связн. Хаусд. ТП со счетн. базой и компл. стр.

Компл. стр. — атласом

$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ $\quad U_\alpha \subset X$, $V_\alpha \subset \mathbb{C}$:

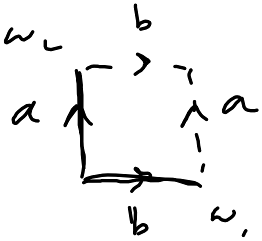
1) $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = X$

2) φ_α — согл.: $\forall\, \alpha, \beta$. $T_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ — голом. на $U_\alpha \cap U_\beta$ (если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$)

<u>Примеры</u>:

1) Сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. $\mathbb{C}_\infty$

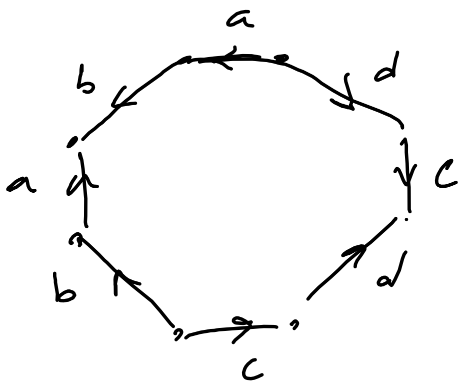
2) Тор. $\mathbb{C}/L$, где $L \subset \mathbb{C}$ — реш. $L = \langle w_1, w_2 \rangle$

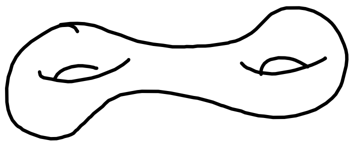


$g = 1$

(Каждая 1 обл. связн. $g > 0$ — склейка многоуг. с $4g$ сторонами

$g = 2$





)

3) $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

4) гладкие проективные кривые :

$X = \{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0 \}$ гладкая

$F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ — однор. многоч.

Опр: X – РП, $p \in X$, $W \subset X$ – окр p, $f: W \to \mathbb{C}$ – ф-я наз. голоморфной в p, если $\exists$ карта $\varphi: U \to V$, $p \in U$: $f \circ \varphi^{-1}$ голом в $\varphi(p)$.

f – голом на W, если голом. $\forall q \in W$.

Лемма: X, $p \in X$, $W \subset X$, $f: W \to \mathbb{C}$ – как выше. Тогда

1) f голом в p $\Leftrightarrow$ $\forall$ карты $\psi: U \to V$, $p \in U$: $f \circ \psi^{-1}$ голом в $\psi(p)$

2) f голом на W $\Leftrightarrow$ $\exists$ $(\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha)$ $W \subset \bigcup U_\alpha$ $\forall \alpha$ $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голом на $\varphi_\alpha(W \cap U_\alpha)$

3) f голом в p $\Leftrightarrow$ f голом в окр p

□ 1) ψ — карта из опр.

$f\circ\psi^{-1} = \underbrace{(f\circ\varphi^{-1})}_{\text{голом}}\circ\underbrace{(\varphi\circ\psi^{-1})}_{\text{голом.}}$ — голом.

Упр: 1) ⇒ 2), 3) ☒

Лемма: Если f, g — голом в p (на W) то $f \pm g$, fg — голом в p (W)

□ Упр ☒

Опр: $\mathcal{O}_{X,W} = \mathcal{O}_W = \{ f : W \to \mathbb{C}$ — голом $\}$ пучок голом. ф-й.

Примеры.

1) $\varphi : U \to V$ — карта. То это и голом ф-ция

2) $X = \mathbb{C}_\infty$ $\quad f(z)$ — голом в окр ∞ ⇔

$(\Leftrightarrow)$ $f(\frac{1}{z})$ голом. в окр. 0.

Если $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ — рац. ф-я ($p, q \in \mathbb{C}[z]$)

f голом. в ∞ $(\Leftrightarrow)$ $\deg p \le \deg q$

3) $X = \mathbb{P}^1$. $p(z,w), q(z,w) \in \mathbb{C}[w,z]_d$

$p = [z_0 : w_0]$, $q(z_0, w_0) \neq 0$, тогда

$f([z:w]) = \dfrac{p(z,w)}{q(z,w)}$ — голом. в окр.

$p = [z_0 : w_0]$.

4) $X = \mathbb{C}/L$, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$; $z \to z \bmod L$

f голом в p $(\Leftrightarrow)$ $\exists$ прообр. z

точки p: $f \circ \pi^{-1}$ голом в z

5) $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая проективная кривая

$F(x,y,z)=0$, $p=[x_0,y_0,z_0] \in U_0 = \{x \neq 0\}$

$\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ — голом. ф-ии

$\forall$ g — голом. $g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ голом.

$f = \frac{G}{H}$ $\quad G, H \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$, $H(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

— голом. ф-ия.

<u>Теор. Лорана и особые точки</u>

Если $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голом. в кольце $r < |z - z_0| < R$, $0 \leq r < R$, то $\exists!$ разлож. в ряд Лорана (РЛ).

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \left(c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \right)$$

Типы (изолир.) особых точек

1) Устранимая: $\forall n<0 \quad c_n = 0$

2) Полюс: $c_n \neq 0$ для конечн. числа $n<0$

т.е. $f(z) = \sum\limits_{n \geq -N} c_n (z-z_0)^n$

3) Существ. особая точка: $\exists$ беск. много $n<0$: $c_n \neq 0$

<u>Опр</u>: X − РП, $p \in X$, w − окр. p.

1) p − устр. особ., если $\exists$ карта φ: $\varphi(p)$ − устр. особ. для $f \circ \varphi^{-1}$

2) p − полюс, если $\exists\, \varphi$: $\varphi(p)$ − полюс $f \circ \varphi^{-1}$

3) p − сущ. особ., если −"− $\varphi(p)$ − сущ. особ.

Лемма: f имеет свойст. в т. выпол.
1, 2, 3 (2) $\forall$ карты φ, $\varphi(p)$ — локальн.
коорд. тогда $f \circ \varphi^{-1}$ имеет 1, 2, 3

!) Опр ☒

Опр: X — РП, $f : X \to \mathbb{C}$, $p \in X$
f наз. мероморфной в p, если
м.б. f — голом. в p, либо имеет
устран. ос. или полюс в p
f наз. мер. на W, если f мер.
в q $\forall q \in W$

Лемма: f, g — мер. в p (на W),
то $f \pm g$, fg — мер.; если $g \not\equiv 0$
то $\frac{f}{g}$ — мер. в p (на W).

1) Упр. Про $\frac{f}{g}$: Теорема из полных анал.:
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ мер. на $W \subset \mathbb{C}$ — откр. множ.
то множество нулей и полюсов дискр. $\boxed{}$

Опр: $\mathcal{M}_{X,W} = \mathcal{M}_W = \{ f : W \to \mathbb{C}$ — мер $\}$
наз. полем мер. ф-ий

Примеры:

1) $X = \mathbb{C}$ — опр. мер. поля с полн. алг.

2) $X = \mathbb{C}_\infty$: f мер. в ∞ (z)
$f(\frac{1}{z})$ мер. в 0
Если $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ — рац. ф-ия
то мер. в ∞
Т.о. рац. ф-ии $\in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$

3) $X = \mathbb{P}^1$ $\quad f([z:w]) = \dfrac{p(z,w)}{q(z,w)}$, $p, q \in \mathbb{C}[z,w]_d$

— мер. ф-я:

($\varphi = \varphi_1 : \underset{\{w \neq 0\}}{U_1} \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi([z:w]) = \dfrac{z}{w}$

$\varphi^{-1}(u) = [u:1]$

$(f \circ \varphi^{-1})(u) = f(\varphi^{-1}(u)) = \dfrac{p(u,1)}{q(u,1)}$ рац. ф-я мер.

$z \neq 0$ — аналогично)

4) $X = \mathbb{C}/L$ $\quad \pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ $\quad f$ мер. на V

$\Leftrightarrow$ $\quad g = f \circ \pi$ мер. на $\pi^{-1}(V)$

$g(z+w) = g(z)$ $\quad \forall w \in L$

5) $X : F(x,y,z) = 0$, $\quad G, H \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$,

$H \not\equiv 0$ $\quad \dfrac{G(x,y,z)}{H(x,y,z)}$ — мер. на F

Опр. X — РП, f мер. в $p \in X$

$z = \varphi(X)$ — карта, $\varphi(p) = z_0$

$$f(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^n \text{ — РЛ}, \quad c_k \neq 0$$

k наз. порядком ф-ии f в p

$\nu_p(f) = k$ — обозн.

Лемма: $\nu_p(f)$ корр. опр.

□ Пусть ψ — др. карта $w = \psi(X)$

$\psi(p) = w_0$, ф-я склейки $T = \varphi \circ \psi^{-1}$

$$T(w) = z : \quad z = T(w) = z_0 + \underbrace{\sum_{k \geq 1} a_k (w - w_0)^k}_{= z - z_0},$$

$a_1 \neq 0$ (в прошлый раз). Тогда

$$\sum_{m \geq k'} c_m' (w - w_0)^m = f(\psi^{-1}(w)) = f(\varphi^{-1}(T(w))) =$$

$$= \sum_{n \ge \nu} c_n \Big(\underbrace{\sum_{k \ge 1} a_k (w - w_0)^k}_{z - z_0} \Big)^n = c_\nu (a_1 (w - w_0))^\nu$$

$\Rightarrow \mu = \nu$, $c'_\mu = c_\nu a_1^\nu \neq 0$ ■

Лемма: Пусть f — мер. в $p \in X$

1) f голом. в p $\Leftrightarrow$ $\nu_p \ge 0$

2) $f(p) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\nu_p(f) > 0$

3) p — полюс f $(f(p) = \infty)$ $\Leftrightarrow$ $\nu_p(f) < 0$

4) p не нуль и не полюс $\Leftrightarrow$ $\nu_p(f) = 0$

□ Упр ■

Лемма. 1) $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$

2) $\nu_p\left(\frac{1}{f}\right) = -\nu_p(f)$, $\nu_p\left(\frac{f}{g}\right) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$

3) $\nu_p(f \pm g) \ge \min(\nu_p(f), \nu_p(g))$

□ Упр ■

Т.о. W — окр. p, $0 < \rho < 1$

$\varphi_p(f) = \rho^{\nu_p(f)}$ — неарх. норм. поля $\mathcal{M}_W$

Пример: $X = \mathbb{C}_\infty$ $\quad f = \dfrac{p}{q}$

$f = c \prod (z-\lambda_i)^{e_i}$, λ_i — корни p и q

$\nu_{\lambda_i}(f) = e_i$, $\quad \nu_\infty(f) = \deg q - \deg p = -\sum e_i$

$\Rightarrow \sum\limits_{p \in X} \nu_p(f) = \sum e_i - \sum e_i = 0$.

<u>сфера $\mathbb{C}_\infty$</u>.

<u>Теорема</u>: $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$ $\quad f = \dfrac{p}{q}$ — рац. ф-я

□ мн-во нулей и полюсов f дискр.
а $\mathbb{C}_\infty$ — компактно, т.к. замкн. огр.
$\Rightarrow f$ имеет конечное
число $\{0, \infty\}$ $(\lambda_i)_{1 \le i \le k}$.

$\nu_{\lambda_i}(f) = e_i$, тогда $r(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\lambda_i)^{e_i}$

r — рац. ф-я, (нулей 0 и ∞ и ν

столько c — и — f на $\mathbb{C}_\infty \setminus \infty = \mathbb{C}$)

Тогда $g(z) = \dfrac{f(z)}{r(z)}$ — мер. ф-я

без 0 и ∞ в $\mathbb{C}_\infty \setminus \infty = \mathbb{C}$, т.е.

$\Rightarrow$ g — голом. на $\mathbb{C}$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

g мер. в ∞ $\quad g\left(\frac{1}{z}\right) = g(w)$, $w = \frac{1}{z}$

$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$ — мер. $\Rightarrow$ $\exists N :$
$\forall n \geq N \;\; c_n = 0$

$\Rightarrow$ $g \in \mathbb{C}[z]$.

Если $g \not\equiv const$ $\exists z_0 :$ $g(z_0) = 0$ — ✗

2) $g(z) = c$ — const. $\quad f = c \cdot \nu$ ⊠

Следствие: $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty} \quad \sum\limits_{p \in \mathbb{C}_\infty} \nu_p(f) = 0$

Рациональн. функции $\mathbb{P}^1$

Если $p, q \in \mathbb{C}[z,w]_d$, $q \neq 0$

$$f = \frac{p}{q} : \quad f(z,w) = w^d f\left(\frac{z}{w}, 1\right) =$$

$$= w^d c \prod \left(\frac{z}{w} - \lambda_i\right)^{e_i} = \prod (b_i z - a_i w)^{e_i}$$

Теорема. $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} \quad f = \frac{p}{q}$,

$p, q \in \mathbb{C}[z,w]_d$

□ Упр., аналогично $\mathbb{C}_\infty$ ⊠

Следствие: $\forall f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} \quad \sum \nu_p(f) = 0$

Тэта $\mathbb{C}/L$

$L = L(1,\omega) = L_\omega$, $\omega \in \mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$,

$$\Theta(\omega, z) = \Theta_\omega(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(2lz + l^2\omega)}$$

$\Theta(\omega) = \Theta(\omega, 0)$

$\Theta_\omega(z+1) = \Theta_\omega(z)$, $\Theta_\omega(z+\omega) = e^{-\pi i(2z+\omega)}\Theta_\omega(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(Упр)

Лемма: 1) Θ_ω — голом. на $\mathbb{C}$

2) $\Theta_\omega(z_0) = 0 \Leftrightarrow \Theta_\omega(z_0 + m + n\omega) = 0 \ \forall m,n \in \mathbb{Z}$

3) $\nu_{z_0}(\Theta_\omega) = \nu_{z_0+m+n\omega}(\Theta_\omega)$

4) Нули имеют вид

$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} + m + n\omega$, $\nu_{z_0}(\Theta_\omega) = 1$

□ Упр: $\displaystyle\int_{p(1,\omega)} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz$ ⊠

Обозн.

$$\Theta_\omega^{(x)}(z) = \Theta_\omega\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} - x\right)$$

Лемма: $\Theta_\omega^{(x)}(z+1) = \Theta_\omega^{(x)}(z)$

$$\Theta_\omega^{(x)}(z+\omega) = -e^{-2\pi i(z-x)}\,\Theta_\omega^{(x)}(z)$$

Теорема: $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le d$:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i - \sum_{i=1}^{d} y_i \in \mathbb{Z}$$

Тогда $f = \prod_{i=1}^{d} \Theta_\omega^{(x_i)}(z) \Big/ \prod_{i=1}^{d} \Theta_\omega^{(y_i)}(z) \in \mathcal{M}_{ell}$

(Или f мер. на $\mathbb{C}$ и L-инвариантна)

□ f — мер. т.к. $\Theta_\omega^{(x)}$ голом.

$f(z+1) = f(z)$ — из св. Θ_ω

$$f(z+w) = \prod_i \theta_w^{(x_i)}(z+w) \prod_j \left(\theta_w^{(y_j)}(z+w)\right)^{-1} =$$

$$= \prod_i \left(-e^{-2\pi i (z - x_i)} \theta_w^{(x_i)}(z)\right) \prod_j \left(-e^{-2\pi i (z - y_j)} \theta_w^{(y_j)}(z)\right)^{-1} =$$

$$= \underbrace{e^{-2\pi i \overbrace{(\sum y_j - \sum x_i)}^{\in \mathbb{Z}}}}_{=1} f(z) = f(z) \qquad \blacksquare$$

<u>Замечание</u>: Мы знаем функции на $\mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1 = \{ [z : w] = [\lambda z : \lambda w] \} = \mathbb{C}^2_{\neq (0,0)} / \mathbb{C}^*$

т.е. $\mathbb{C}^*$ действ. на $\mathbb{C}^2_{\neq(0,0)}$ умнож.

$(z, w) \to (\lambda z, \lambda w)$

$f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}$ $\quad f = \dfrac{p(z,w)}{q(z,w)}$ — однор. одинаковой степени.

$$f(\lambda z, \lambda w) = \frac{\lambda^d p(z,w)}{\lambda^d q(z,w)} = f(z,w)$$

Плоские кривые

Теорема: X — плоская алгебр. кривая, $f(x,y)=0$, $f \in \mathbb{C}[x,y]$ — неприводим. $p, q \in \mathbb{C}[x,y]$, $f \nmid q$. Тогда $h = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}_X$

Теорема: X — [illegible] поверхность [illegible] $F(x,y,z)=0$, $P, Q \in \mathbb{C}[x,y,z]$: $F \nmid Q$, тогда $H = \frac{P}{Q} \in \mathcal{M}_X$

Теорема (Гильберта о нулях): Пусть $f \in \mathbb{C}[x,y]$ — неприв. $g \in \mathbb{C}[x,y]$: $g(x,y) \equiv 0$ $\forall (x,y)$: $f(x,y)=0$, тогда $f \mid g$ (в следующий раз).