4.2 Аналитические свойства $\mathbb{Q}_p$. Неархимедовы поля

- $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu$: $\frac{a}{b} = p^{\nu}\frac{a'}{b'}$, $p \nmid a', b'$

$$\varphi_p\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ \rho^{\nu_p\left(\frac{a}{b}\right)}, & a \neq 0 \end{cases} \qquad 0 < \rho < 1$$

- φ_p — нат. абс. значение, т.е.

$$\varphi_p(xy) = \varphi_p(x)\varphi_p(y)$$

$$\varphi_p(x+y) \leq \max(\varphi_p(x), \varphi_p(y)) \leq \varphi_p(x) + \varphi_p(y)$$

$$\varphi_p(x) \geq 0$$

$$x = 0 \in \mathbb{Q}$$

- $\mathbb{Z}_p = \{(x_n)_{n\geq 0}^{\infty} : x_n \equiv x_{n-1}\ (p^n)$
$\iff \nu_p(x_n - x_{n-1}) \geq n$
$\iff \varphi_p(x_n - x_{n-1}) \leq \rho^n \}$

$x_n \in \mathbb{Z}$, $x_n \bmod p^{n+1}$

$\mathbb{Q}_p = \operatorname{Frac} \mathbb{Z}_p$

- T: $\forall \xi \in \mathbb{Q}_p$, $\xi \neq 0$ одн. запись

$$\xi = p^{\nu_p(\xi)}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots)$$

$$0 \leq a_i \leq p-1, \quad a_0 \neq 0$$

-

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr] & \{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}_{n\geq 1}^{\infty} \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & \mathbb{Q}_p \\
& \mathbb{Q} \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\
& & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

K — произв. поле

Опр: $\varphi : K \to \mathbb{R}$: $\alpha, \beta \in K$

1) $\varphi(\alpha) > 0$, $\alpha \neq 0$, $\varphi(0) = 0$,

2) $\varphi(\alpha + \beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

3) $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$

наз. абс. значением / нормой / нормированием*

Опр: φ — абс. значение, то $d(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - \beta)$ — расст. / метрика

$(d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma))$

Опр: K — поле с заданным нормир. φ наз. нормированным полем т.е. (K, φ)

Примеры: 1) $|x|$ — норма на $x \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

2) $|z|$, $z \in \mathbb{C}$. норма на $\mathbb{C}$

3) Тривиальная норма $\varphi(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ 1, & \alpha \neq 0 \end{cases}$

4) $\varphi_p(\alpha)$ — p-адическая норма на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$

<u>Свойства</u>: (K, φ) — нормированное поле

1) $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(-\alpha) = \varphi(\alpha)$

2) $\varphi(\alpha - \beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

3) $\varphi(\alpha \pm \beta) \geq |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)|$

4) $\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}$, $\beta \neq 0$

$\square$ <u>Упр</u> ■

<u>Опр</u>: Последовательность $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, $\alpha_n \in K$ наз. сх. к α, если $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(\alpha_n - \alpha) = 0$

Обозн: $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$, $\alpha_n \to \alpha$, $n \to \infty$

Опр.: $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ наз. фундам. (Коши), если $\varphi(\alpha_n - \alpha_m) \to 0$, $n, m \to \infty$

Опр.: (K, φ) наз. полным нормир., если $\forall$ фундам. посл. $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ $\exists \lim \alpha_n \in K$

Пример: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ — полное поле

$(\mathbb{Q}, \varphi_p(\cdot))$ — нормир., но неполн.

Опр.: Подмн-во $A \subset (K, \varphi)$ наз. всюду плотным, если $\forall \alpha \in K$ $\exists (\alpha_n)$, $\alpha_n \in A$: $\alpha_n \xrightarrow[\varphi]{} \alpha$, $n \to \infty$.

Опр.: (K, φ), (K_0, φ_0) — нормир. поля, K_0 — подполе K (K/K_0 — расш. полей), $\varphi|_{K_0} = \varphi_0$. Пример: $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Q}$ — норм. расшир.

Опр.: (K_1, φ_1), (K_2, φ_2), $\sigma: K_1 \to K_2$ — изоморфизм нор. нор. (топологический), если $\forall (\alpha_n)$ $\alpha_n \in K_1$, $\alpha_n \xrightarrow{\varphi_1} \alpha \in K_1$ $(\Leftrightarrow)$ $\sigma(\alpha_n) \xrightarrow{\varphi_2} \sigma(\alpha)$, и $+$, $\cdot$ непрерыв. и нормы φ_1, φ_2.

Теорема: $\forall$ норм. поле (K, φ) $\exists$ $(\bar{K}, \bar{\varphi})$: $\bar{K} / K$ — расш., полное норм. поле, $\bar{\varphi}|_K = \varphi$, K всюду плотно в $\bar{K}$. Это расш. единств. с точностью до непрер. изом.

□ $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ — аналогично [Б.-Ш.] ■

Опр.: $(\bar{K}, \bar{\varphi})$ наз. пополнение (K, φ).

Зам: $\varphi_\rho(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ \rho^{\nu_\rho(\alpha)}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$ $\quad 0 \leq \rho < 1$

Опр: (K, φ) — неарх. поле, $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Откр. шар $B(\alpha, r) = \{x \in K : d(x, \alpha) < r\}$

Замкн. шар $\overline{B}(\alpha, r) = \{x \in K : d(x, \alpha) \leq r\}$

Опр: • $U \subset K$ наз. откр., если $\forall \alpha \in U \; \exists r > 0 \;\; B(\alpha, r) \subset U$

• S наз. замкн., если $K \setminus S$ откр.

• $\alpha \in S$ наз. граничной, если $\forall r$ $\exists x, y \in B(\alpha, r)$: $x \in S$, $y \in K \setminus S$. | обозн. ∂S — мн-во гр. точек

Лемма. S — замкн. $\Leftrightarrow \partial S \subset S$

Опр.: Для норм. φ_1, φ_2 наз. эквивал. если они опр. одну и ту же топологию, т.е. U откр. по $\varphi_1 \iff U$ откр. по φ_2.

Теорема: K - произв.(?) поле, φ_1, φ_2 — нетрив.(?) нормы(?). След. эквив.:

1) φ_1, φ_2 — эквив.

2) $(x_n)_{n \geq 1}$ - посл., $x_n \in K$

$\lim_{\varphi_1} x_n = x \iff \lim_{\varphi_2} x_n = x$

3) $\varphi_1(x) < 1 \iff \varphi_2(x) < 1$, $x \in K$

4) $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in K \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\alpha$

□ $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $4 \Rightarrow 1$ — просто, упр.

Д-ем $\underline{3 \Rightarrow 4}$; т.к. $\varphi_1(x) < 1 \Leftrightarrow \varphi_2(x) < 1$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\varphi_1(x_0) < 1$
$\Rightarrow \varphi_2(x_0) < 1$, тогда $\alpha = \dfrac{\log \varphi_1(x_0)}{\log \varphi_2(x_0)}$,

т.е. $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)^\alpha$

Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, x_0\}$.

Если $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_0) \Rightarrow \varphi_2(x) = \varphi_2(x_0)$

(если $\ne$ $\quad \varphi_2\left(\dfrac{x}{x_0}\right) < 1 \Leftrightarrow \varphi_1\left(\dfrac{x}{x_0}\right) < 1$

$\varphi_2\left(\dfrac{x}{x_0}\right) > 1 \Leftrightarrow \varphi_2\left(\dfrac{x_0}{x}\right) < 1 \quad \ldots$)

И $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\alpha$

Иначе $\varphi_2(x) = \varphi_2(x_0)$, ...

Если $\varphi_1(x) = 1$, то $\varphi_2(x) = 1$.

Т.о. предположим, что $\varphi_1(x) \ne 1$, $\varphi_2(x) \ne 1$

$\varphi_1(x) \ne \varphi_1(x_0)$ $\varphi_2(x) \ne \varphi_2(x_0)$

$\exists \ \beta \in \mathbb{R}_{>0} \ : \quad \varphi_1(X) = \varphi_2(X)^{\beta}.$

[illegible] $\varphi_1(X) < 1$ ([illegible] [illegible] $X \ll \frac{1}{X}$)

$\Leftrightarrow \ \varphi_2(X) < 1.$

[illegible] : $\varphi_1(X^n) = \varphi_1(X)^n = \varphi_2(X)^{\beta n} = \varphi_2(X^n)^{\beta}$

$$\varphi_1(X_0^m) = \varphi_2(X_0^m)^{\alpha}$$

$$\varphi_1(X)^n < \varphi_1(X_0)^m \Leftrightarrow \varphi_1\left(\frac{X^n}{X_0^m}\right) < 1 \Leftrightarrow \varphi_2\left(\frac{X^n}{X_0^m}\right) < 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi_2(X)^n < \varphi_2(X_0)^m$$

$$n \log \varphi_1(X) < m \log \varphi_1(X_0) \Leftrightarrow n \log \varphi_2(X) < m \log \varphi_2(X_0)$$

$$\frac{n}{m} < \frac{\log \varphi_1(X_0)}{\log \varphi_1(X)} \Leftrightarrow \frac{n}{m} < \frac{\log \varphi_2(X_0)}{\log \varphi_2(X)}$$

— [illegible] $\forall \ n, m$

$$\Rightarrow \frac{\log \varphi_1(X_0)}{\log \varphi_1(X)} = \frac{\log \varphi_2(X_0)}{\log \varphi_2(X)} \Rightarrow \alpha = \beta \quad \blacksquare$$

$\varphi_\rho(x) = \rho^{\nu_p(x)}$, $x \neq 0$, $0 < \rho < 1$, $\rho = \frac{1}{p}$

$\varphi_p(x) = p^{-\nu_p(x)}$

Это мы обозн. $\varphi_p(x) = |x|_p$, p - пр.

<u>Теорема</u> (Островского): нормы $|\cdot|$ и $|\cdot|_p$ исчерпывают все неэкв. нетрив. нормы $\mathbb{Q}$ с точн. до экв.

$\square$ φ - норма на $\mathbb{Q}$.

Рассм. 2 случая:

1) $\exists\, a \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : \varphi(a) > 1$

2) $\forall\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : \varphi(n) \leq 1$

<u>Случай 1</u>: $\exists\, a : \varphi(a) > 1$

$\forall\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $\varphi(n) = \varphi(1 + \ldots + 1) \leq \varphi(1) + \ldots \varphi(1) = n$

$$\text{Оц} \quad \alpha : \quad \varphi(a) = a^{\alpha} \qquad 0 < \alpha \le 1 .$$

$$\forall \mu \in \mathbb{Z}_{\ge 1} \qquad \mu = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \ldots + x_{k-1} a^{k-1}$$

$$0 \le x_i \le a-1 . \qquad 0 \le i \le k-1 \qquad \varphi(x_i) \le \varphi(a-1) \le a-1$$

$$a^{k-1} \le \mu < a^k \qquad \varphi(a)^{k-1} \le \varphi(\mu) \le \varphi(a)^k$$

$$\varphi(\mu) \le \varphi(x_0) + \varphi(x_1)\varphi(a) + \ldots + \varphi(x_{k-1})\varphi(a)^{k-1} \le$$

$$\le (a-1)\left(1 + a^{\alpha} + a^{2\alpha} + \ldots + a^{(k-1)\alpha}\right) =$$

$$= (a-1)\frac{a^{k\alpha}-1}{a^{\alpha}-1} < (a-1)\frac{a^{k\alpha}}{a^{\alpha}-1} = \underbrace{\frac{(a-1)a^{\alpha}}{a^{\alpha}-1}}_{C=C(a)} a^{(k-1)\alpha} \le$$

$$\le C \mu^{\alpha}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ \qquad \varphi(\mu^m) < C \mu^{m\alpha}$$

$$\varphi(\mu)^m \qquad \Rightarrow \varphi(\mu) < \sqrt[m]{C}\, \mu^{\alpha}$$

При $n \to \infty$: $\varphi(\nu) \le \nu^{\alpha}$ $\forall \nu$.

$a^{k-1} \le \nu < a^{k}$, т.е. $\nu = a^{k} - b$,

$0 < b \le a^{k} - a^{k-1}$

$\Rightarrow$ $\varphi(\nu) \ge \varphi(a^{k}) - \varphi(b) = a^{\alpha k} - \varphi(b)$

$\varphi(b) \le b^{\alpha} \le (a^{k} - a^{k-1})^{\alpha}$

$$\varphi(\nu) \ge a^{\alpha k} - (a^{k} - a^{k-1})^{\alpha} = a^{\alpha k} \underbrace{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\alpha}\right)}_{C_1 = C_1(a)} =$$

$= C_1 a^{\alpha k} > C_1 \nu^{\alpha}$

Т.е. $\varphi(\nu) > C_1 \nu^{\alpha}$

Аналогично $\varphi(\nu)^{m} \ge C_1 \nu^{\alpha m}$

$\Rightarrow$ $\varphi(\nu) \ge \nu^{\alpha}$

Т.о. $\varphi(\nu) = \nu^{\alpha}$ $\forall \nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$

$x \in \mathbb{Q}$ $\quad x = \pm \frac{m}{n}$, $\quad \frac{m}{n} = |x|$

$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\varphi(m)}{\varphi(n)} = \frac{m^\alpha}{n^\alpha} = |x|^\alpha$

Т.е. φ эквив $|\cdot|$.

<u>Случай</u> 2) $\forall n \quad \varphi(n) \le 1$ (φ – неархим.)

Если $\forall$ пр. p $\quad \varphi(p) = 1 \Rightarrow \forall n \quad \varphi(n) = 1$

т.е. φ – тривиальна – $><$.

$\exists\, p : \quad \varphi(p) < 1$.

Пусть $\exists\, q \ne p : \quad \varphi(q) < 1$

$\exists\, k, l : \quad \varphi(p)^k < \frac{1}{2}, \quad \varphi(q)^l < \frac{1}{2}$

p^k, q^l — вз. пр. $\Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z}$:

$u p^k + v q^l = 1$

$$1 = \varphi(1) = \varphi(up^n + vq^l) \le \underbrace{\varphi(u)}_{\le 1}\underbrace{\varphi(p)^n}_{<\frac{1}{2}} + \underbrace{\varphi(v)}_{\le 1}\underbrace{\varphi(q)^l}_{<\frac{1}{2}} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad - \quad ><$$

$\Rightarrow$ $\exists!$ пр. p, $\underbrace{\varphi(p)}_{=\rho} < 1$, $0<\rho<1$

$\forall a \in \mathbb{Z}$: $\underset{p \nmid a}{(a, p) = 1}$ $\quad \varphi(a) = 1$

$\forall x \in \mathbb{Q}$ $\quad x = p^n \frac{a}{b}$, $\quad p \nmid a, b$

$$\varphi(x) = \rho^n = \rho^{\nu_p(x)}$$

т.е. φ — p-адич. норма ∎

$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\quad \prod_{p \le \infty} |x|_p = 1$ (формула произв.)

$(|\cdot|_\infty = |\cdot|)$

$|\cdot|_\infty \neq |\cdot|$ $\qquad\qquad$ $p \leq \infty$

$$n = \pm 1 \; p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} \qquad |\cdot| = |\cdot|_{-1}$$

$\pm 1 \to |\cdot|$, $\quad p_1^{a_1} \to \nu_{p_1}$, $\quad p_r^{a_r} \to \nu_{p_r}$

φ : норма, K – поле

1) $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

3) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ $\qquad$ 3') $\varphi(x+y) \leq \max(\varphi(x), \varphi(y))$

Опр.: Если φ – норма : вып. 3') то φ наз. неарх.

Лемма: φ – неарх. $\Leftrightarrow$ $\forall z \in K$:

$\varphi(z+1) \leq \max(\varphi(z), 1)$ $\quad \square \quad$ Док-во $\boxtimes$

Лемма: $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — н.з.:

1) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

3) $\varphi(x) \leq 1 \Rightarrow \varphi(x-1) \leq 1$

($\varphi(x) \leq 1 \Rightarrow \varphi(x+1) \leq 1$)

То φ — неарх. нормирование

Теорема: (K, φ) — норм. поле,

$\mathbb{Z} \to A \subset K$ $(n \mapsto n \cdot 1 = 1 + \ldots + 1)$.

φ — неарх. норм. $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ $\varphi(a) \leq 1$

$\square$ $\overline{\ldots}$ $\boxed{\Leftarrow}$

(Сл. к акс. Арх.: $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists n$:

$|nx| > |y|$).