Листок 16
Тема 16 (4.3). Квадратичное поле и круговое поле

Упражнения и задачи

1. Пусть $\mathcal{D}$ — кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Докажите, что $\mathcal{D} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ при $d \equiv 2, 3\,(4)$ и $\mathcal{D} = \mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right]$ при $d \equiv 1\,(4)$.

2. Пусть ζ — примитивные корень степени m из единицы. Докажите, что $\Delta(1, \zeta, \ldots, \zeta^{\varphi(m)-1}) | m^{\varphi(m)}$.

3. Докажите, что числовое поле нечетной степени не может содержать примитивных корней из единицы степени $n > 2$

4. Пусть K — вещественное квадратичное поле (т.е. $K \subset \mathbb{R}$). Докажите, что если $\exists \alpha \in K$: $\mathrm{N}(\alpha) = -1$, то простые $p \equiv 3\,(4)$ не разветвляются.

5. Пусть K — вещественное квадратичное поле такое что $\zeta_n \in K$ для некоторого $n \geqslant 3$. Докажите, что $\forall \alpha \in F^*$ $\mathrm{N}(\alpha) > 0$.

6. Докажите, что квадратичное поле K не может одновременно содержать $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ для двух различных простых p, q.

7. Пусть K — вещественное квадратичное поле. Докажите, что $\forall M > 0$ $\exists \beta \in \mathcal{D}_K$: $|1 - \beta| > M$, а также что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha \in \mathcal{D}_K$: $|1 - \alpha| < \varepsilon$.

8. Пусть $p > 2$ — простое, $\zeta = \zeta_p$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Докажите следующие свойства:
   - $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(1 + \zeta) = 1$;
   - $A = \prod_{(s/p)=1}(1 + \zeta^s) \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$;
   - если $p \equiv 1\,(4)$, то $A = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{p})$, где $t \equiv u\,(2)$;
   - $\left(\dfrac{t^2 - pu^2}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}} = 1$; $t^2 - pu^2 = \pm 4$;
   - $A > 0$.

9. Для каких d квадратичное поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеет базис вида α, α'?

10. Пусть $\zeta = e^{2\pi i/5}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. Покажите, что $-(\zeta^3 + \zeta^2) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}$.

11. Пусть $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Покажите, что $\frac{\sin(\pi j/p)}{\sin(\pi/p)} \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}$.

12. Пусть $p \equiv 1\,(4)$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Докажите, что группа единиц $\mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}$ бесконечна

13. Докажите, что всякое квадратичное поле содержится в некотором круговом поле.

Темы для самостоятельного изучения

- Арифметика кольца целых кругового поля, приложения к доказательству квадратичного закона взаимности, [IR], §§13.2–13.3.

- Порядки числовых полей, [БШ]; [Cox].