Równania różniczkowe i różnicowe
Zadanie Domowe
Aga Patro

Równanie transportu ciepła - rozwiązanie metodą różnic skończonych

$$-\,k(x)\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0, \qquad k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\,1] \\ 2, & x \in (1,\,2] \end{cases}$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$[0,\,2] \ni x \to u(x) \to R$$

1. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego:

$$-\,k(x)\,u''(x) = 0 \;/ : k(x)$$
$$u'(0) + u(0) = 20$$
$$u(2) = 0$$

$$-\,u''(x) = 0 \;/ \;*\; v(x), \qquad \text{gdzie } v(2) = 0$$

$$-\,u''(x)\,v(x) = 0 \;/ \int_0^2$$

$$-\int_0^2 u''(x)\,v(x)\,dx = 0$$

$$\left[-\,u'(x)v(x)\right]_0^2 + \int_0^2 u'(x)v'(x)dx = 0$$

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)dx - u'(2)v(2) + u'(0)v(0) = 0, \qquad u'(0)v(0) = 20 - u(0)$$

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)dx - v(0)u(0) = -\,20v(0)$$

$$B(u,\,v) = \int_0^2 u'(x)v'(x) - v(0)u(0)$$

$$L(v) = -\,20v(0)$$

2. Generowanie i rozwiązanie układu liniowego

Kod programu napisałam za pomocą programu MATLAB. W pliku fem_solver.m znajdują się wszystkie niezbędne funkcje potrzebne do wyliczenia problemu. Całki rozwiązuje korzystając z kwadratury Gaussa przyjmując $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ jako wartości pomiarowe. Program wylicza rozwiązania oraz rysuje wykres.

3. Przykładowe rozwiązanie dla n = 5:

macierz $B(u,\ v)$ * macierz $L(v)$:

```
>> fem_solver
    1.5000   -2.5000         0         0         0         0  -20.0000
   -2.5000    5.0000   -2.5000         0         0         0         0
         0   -2.5000    5.0000   -2.5000         0         0         0
         0         0   -2.5000    5.0000   -2.5000         0         0
         0         0         0   -2.5000    5.0000   -2.5000         0
         0         0         0         0         0    1.0000         0
```

rozwiązanie układu równań:

```
   40.0000
   32.0000
   24.0000
   16.0000
    8.0000
         0
```

wykres: