

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Aga Patro

pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji.....	2
2. Temat ćwiczenia.....	2
3. Dane.....	2
4. Realizacja i wyniki ćwiczenia.....	3
4.1 Tabele błędów.....	4
4.2 Aproksymacja dla różnego stopnia wielomianu.....	5
4.3 Aproksymacja dla różnej liczby punktów dyskretyzacji.....	6
5. Wnioski.....	7
6. Bibliografia.....	7
7. Wprowadzone poprawki.....	7

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

System: Debian Linux Parrot OS x64

Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz

Pamięć RAM: 16 GB

Środowisko: Jupyter Notebook

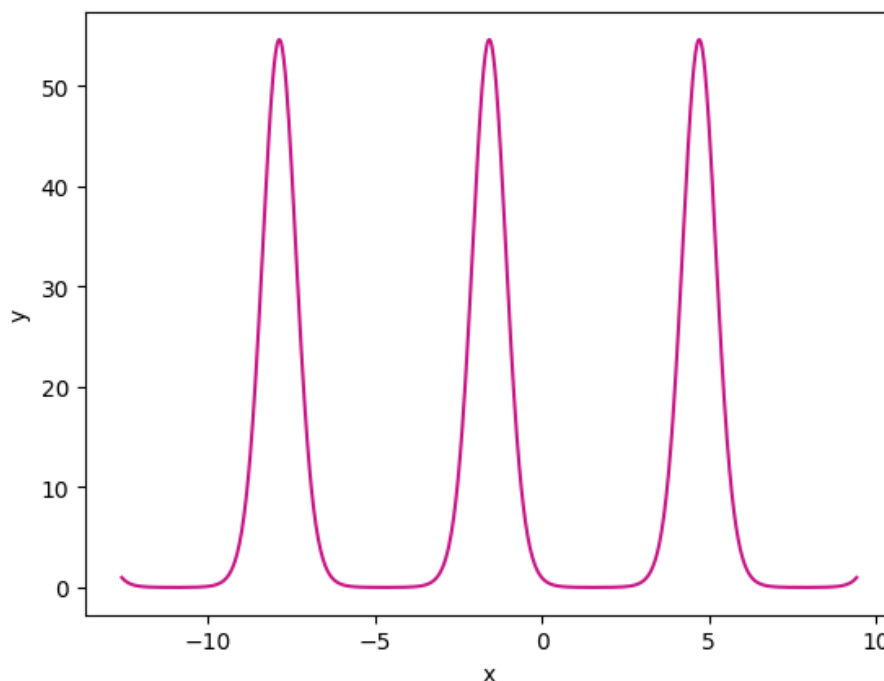
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Celem ćwiczenia było, by dla zadanej funkcji $e^{-4\sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową trygonometryczną. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

3. Dane

Mamy zadaną funkcję $e^{-4\sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π .



Wykres 3.1. Wykres funkcji $e^{(-4\sin(x))}$

4. Realizacja i wyniki ćwiczenia

W ramach realizacji ćwiczenia stworzono funkcję *approximation_func*, która odpowiada za aproksymację określonego zagadnienia. Do przeprowadzenia aproksymacji wykorzystano wzory:

$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_1(x_i) \cdot \cos(j \cdot x_i) \quad (4.1)$$

$$b_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_1(x_i) \cdot \sin(j \cdot x_i) \quad (4.2)$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cdot \cos(j \cdot x) + b_j \cdot \sin(j \cdot x)) \quad (4.3)$$

Podane wzory (4.1), (4.2) oraz (4.3) zostały wykorzystane w programie po przeskalowaniu punktów z przedziału $[-4\pi, 3\pi]$ na przedział $[0, 2\pi]$, według wzoru:

$$x_{new} = \frac{-2\pi}{b-a} x_{old} + \frac{2\pi a}{b-a} \quad (4.4)$$

gdzie x_{new} oznacza punkt po przeskalowaniu a x_{old} oznacza punkt przed przeskalowaniem.

Eksperymenty zostały wykonane dla różnej liczby punktów dyskretyzacji (n) oraz stopnia wielomianu (m), przy zachowaniu warunku $m \leq \frac{n-1}{2}$.

Błędy maksymalne obliczono korzystając ze wzoru: $\max_{i=0, \dots, 1000} |f_1(x_i) - f_2(x_i)|$, a błędy

średniokwadratowe ze wzoru: $\frac{1}{1000} \sqrt{\sum_{i=0}^{1000} (f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}$, gdzie f_1 to funkcja aproksymowana a f_2 to funkcja aproksymująca. Punkty x_i zostały równolegle rozmieszczone na określonym przedziale.

Dodatkowo, przeprowadzono badanie aproksymacji dla różnych stopni funkcji przy stałej liczbie punktów dyskretyzacji (80). W tabelach 4.1.1 oraz 4.1.2 tym eksperymentom odpowiadają wiersze wyróżnione kolorem **różowym**.

Następnie przeprowadzono badanie aproksymacji dla różnej liczby punktów i stopnia wielomianów równemu 3. W tabelach 4.1.1 oraz 4.1.2 tym eksperymentom odpowiadają kolumny wyróżnione kolorem **zielonym**.

Na zamieszczonych wykresach kolorem **fioletowym** zaznaczona jest funkcja aproksymująca, a **różowym** funkcja aproksymowana.

4.1 Tabele błędów

Max stopień	Liczba punktów							
	5	7	10	20	30	50	80	100
2	47.39	36.41	27.81	14.73	14.18	14.5	14.68	14.72
3	—	55.64	33.15	22.29	22.75	23.33	23.53	23.63
5	—	—	—	33.86	30.74	31.58	32.07	32.06
10	—	—	—	—	45.78	45.31	46.64	47.10
14	—	—	—	—	—	47.94	52.32	52.34
20	—	—	—	—	—	48.37	53.49	53.45
24	—	—	—	—	—	—	53.82	53.76

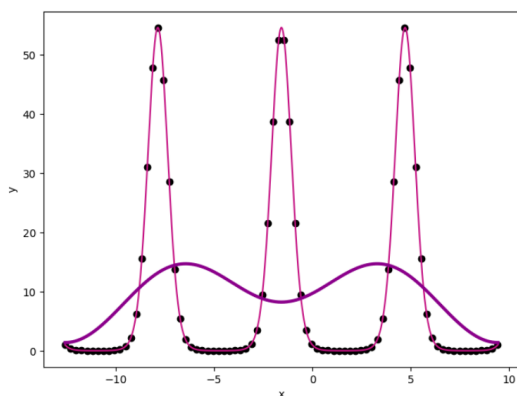
Tabela 4.1.1 Tabela błędów maksymalnych otrzymanych dla funkcji aproksymującej w zależności od liczby punktów oraz stopnia wielomianu

Max stopień	Liczba punktów							
	5	7	10	20	30	50	80	100
2	2434.8	1738.54	2471.63	1874.55	2866.66	5109.36	8495.86	10751.34
3	—	3922.87	3196.52	3493.09	5251.83	9191.35	15128.79	19087.35
5	—	—	—	4972.13	7338.75	12864.3	21178.73	26721.36
10	—	—	—	—	9471.96	16555.73	27218.81	34328.49
14	—	—	—	—	—	17049.07	28042.8	35372.75
20	—	—	—	—	—	17073.54	28084.2	35425.47
24	—	—	—	—	—	—	28087.05	35428.96

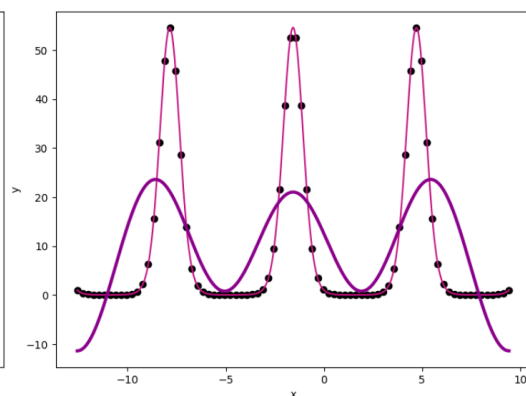
Tabela 4.1.2 Tabela błędów średniokwadratowych otrzymanych dla funkcji aproksymującej w zależności od liczby punktów oraz stopnia wielomianu

Analizując przedstawione powyżej tabele, można zauważyć, że dla ustalonej liczby punktów danych, wartości błędów rosną wraz ze zwiększeniem stopnia wielomianu. Ponadto, wynika z nich również, że dla ustalonego stopnia wielomianu, wartości błędów pozostają niezmiennie, chyba że stosunek liczby punktów danych do stopnia wielomianu zbliża się do granicy $m = \frac{n-1}{2}$ wtedy mogą być one wyższe.

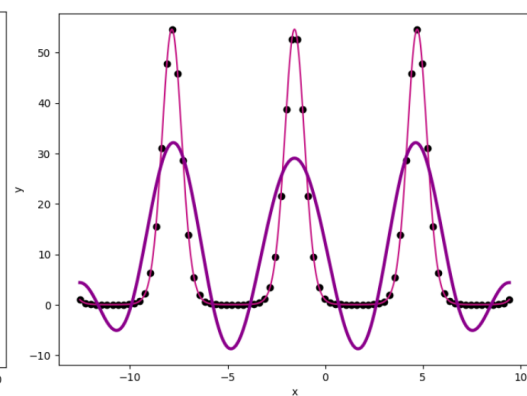
4.2 Aproksymacja dla różnego stopnia wielomianu



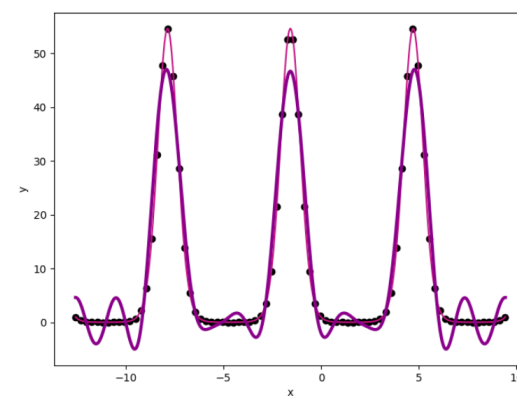
Wykres 4.2.1 Wykres dla 80 punktów i 2 wielomianów bazowych



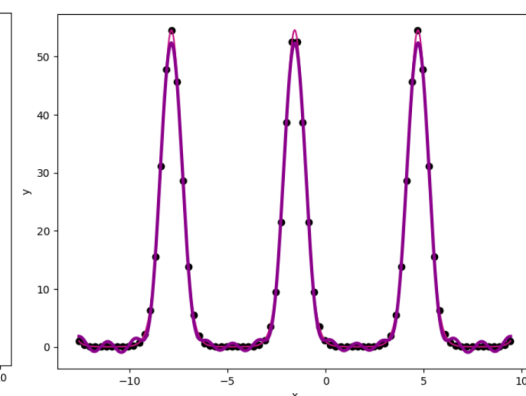
Wykres 4.2.2 Wykres dla 80 punktów i 3 wielomianów bazowych



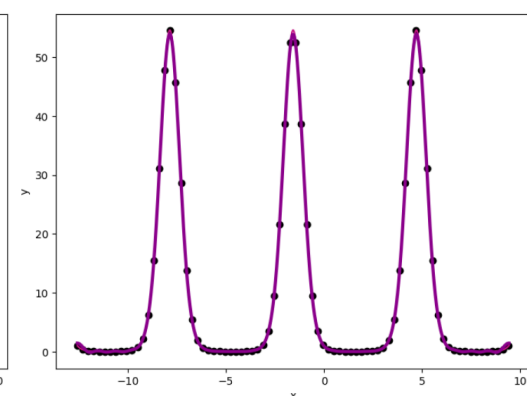
Wykres 4.2.3 Wykres dla 80 punktów i 5 wielomianów bazowych



Wykres 4.2.4 Wykres dla 80 punktów i 10 wielomianów bazowych



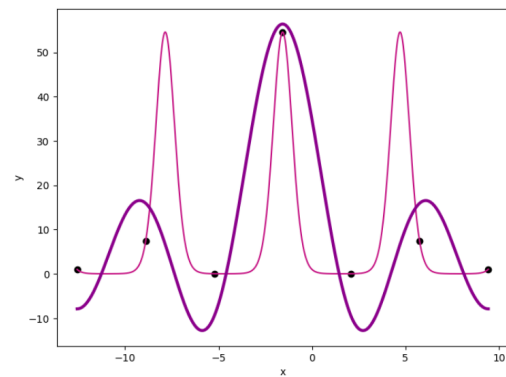
Wykres 4.2.5 Wykres dla 80 punktów i 14 wielomianów bazowych



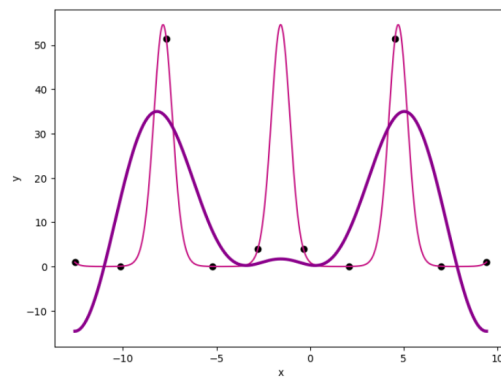
Wykres 4.2.6 Wykres dla 80 punktów i 24 wielomianów bazowych

Po analizie powyższych wykresów można zauważyć, że wartości odchylenia funkcji są większe dla większego stopnia wielomianu. Nie jest również widoczny efekt Rungego, co jest korzystne dla dokładności aproksymacji. Im większy stopień wielomianu, tym lepsza dokładność aproksymacji.

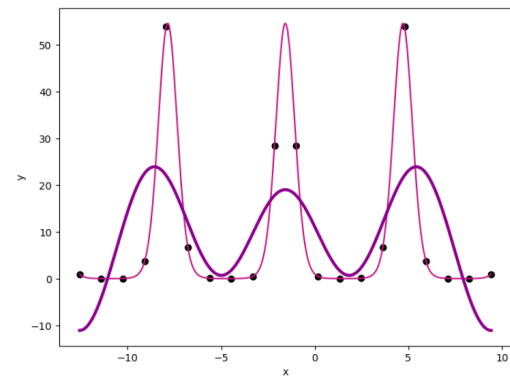
4.3 Aproksymacja dla różnej liczby punktów dyskretyzacji



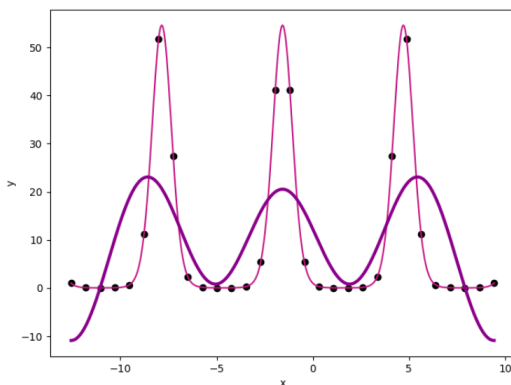
Wykres 4.3.1 Wykres dla 7 punktów i 3 wielomianów bazowych



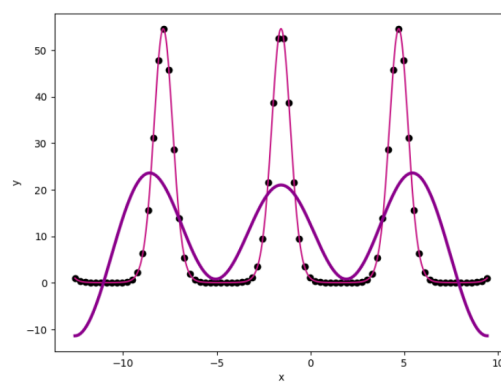
Wykres 4.3.2 Wykres dla 10 punktów i 3 wielomianów bazowych



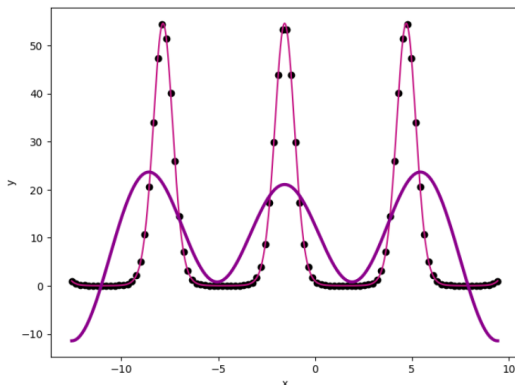
Wykres 4.3.3 Wykres dla 20 punktów i 3 wielomianów bazowych



Wykres 4.3.4 Wykres dla 50 punktów i 3 wielomianów bazowych



Wykres 4.3.5 Wykres dla 80 punktów i 3 wielomianów bazowych



Wykres 4.3.6 Wykres dla 100 punktów i 3 wielomianów bazowych

Na powyższych wykresach można zauważyć, że dla małej ilości punktów wykresy różnią się od siebie (wykresy 4.3.1 i 4.3.2). Jednak już od 20 punktów dyskretyzacji, wykresy oraz wartości błędów maksymalnych (tabela 4.1.1) nie zmieniają się wraz ze wzrostem liczby punktów, co oznacza że liczba punktów nie ma wpływu na postać otrzymanej funkcji aproksymującej.

5. Wnioski

Dla dużego stopnia wielomianu, aproksymacja trygonometryczna spełnia swoją funkcję i dobrze przybliża zadaną funkcję aproksymowaną (wykres 4.2.6).

W przypadku aproksymacji trygonometrycznej efekt Rungego nie występuje.

Liczba punktów dyskretyzacji nie ma wpływu na postać otrzymanej funkcji aproksymującej. (podpunkt 4.3) Natomiast wpływ ma stopień wielomianu, dlatego od jego wyboru zależy rezultat aproksymacji (podpunkt 4.2).

6. Bibliografia

- [1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu "Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"
- [2] Wykład 4 "Aproksymacja", Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej
https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_3.pdf

7. Wprowadzone poprawki

Po konsultacjach, w sprawozdaniu zmieniono:

- w podpunkcie 4 poprawiono zgodność oznaczeń
- w podpunkcie 4 dodano opis przeskalowania punktów na odpowiedni przedział