

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Aga Patro

pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji.....	2
2. Temat ćwiczenia.....	2
2.1 Zadanie 1.....	2
2.2 Zadanie 2.....	2
2.3 Zadanie 3.....	3
3. Realizacja ćwiczenia.....	3
4. Wyniki.....	4
4.1 Zadanie 1.....	4
4.1.1 Wyliczone błędy.....	4
4.2 Zadanie 2.....	5
4.2.1 Wyliczone błędy.....	5
4.2.2 Wskaźnik uwarunkowania.....	6
4.3 Zadanie 3.....	7
4.3.1 Przechowywanie i wykorzystanie macierzy A w metodzie Thomasa.....	7
4.3.2 Porównanie metod Gaussa oraz Thomasa.....	7
5. Wnioski.....	8
6. Bibliografia.....	9
7. Wprowadzone poprawki.....	9

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

System: Debian Linux Parrot OS x64

Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz

Pamięć RAM: 16 GB

Środowisko: Jupyter Notebook

Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$

2.1 Zadanie 1

Elementy macierzy A o wymiarze $n \times n$ są określone wzorem:

$$\begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad \text{dla } i \neq 1 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

Przyjmij wektor x jako dowolną n -elementową permutację ze zbioru $\{1, -1\}$ i oblicz wektor b . Następnie metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$ (przyjmując jako niewiadomą wektor x). Przyjmij różną precyzję dla znanych wartości macierzy A i wektora b . Sprawdź, jak błędy zaokrągleń zaburzają rozwiązanie dla różnych rozmiarów układu (porównaj – zgodnie z wybraną normą – wektory x obliczony z x zadany). Przeprowadź eksperymenty dla różnych rozmiarów układu.

2.2 Zadanie 2

Powtórz eksperyment dla macierzy zadanej wzorem:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{2i}{j} \quad \text{dla } j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} \quad \text{dla } j < i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.2.1)$$

Porównaj wyniki z tym, co otrzymano w przypadku układu z punktu 1). Spróbuj uzasadnić, skąd biorą się różnice w wynikach. Sprawdź uwarunkowanie obu układów.

2.3 Zadanie 3

Powtórz eksperyment dla macierzy zadanej wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = -m \cdot i - k \\ a_{i,i+1} = i \\ a_{i,i-1} = \frac{m}{i} \quad \text{dla } i > 1 \\ a_{i,j} = 0 \quad \text{dla } j < i-1 \quad \text{oraz } j > i+1 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.3.1)$$

gdzie $k = 7$ i $m = 3$

Następnie rozwiąż układ metodą przeznaczoną do rozwiązywania układów z macierzą trójdziagonalną. Porównaj wyniki otrzymane dwoma metodami (czas, dokładność obliczeń) dla różnych rozmiarów układu. Przy porównywaniu czasów należy pominąć czas tworzenia układu. Opisz, jak w metodzie dla układów z macierzą trójdziagonalną przechowywano i wykorzystywano macierz A .

3. Realizacja ćwiczenia

W celu realizacji ćwiczenia 1 i 2 napisałam funkcję *gauss*, która rozwiązuje zadany układ metodą eliminacji Gaussa. Wartości wektora X są "wylosowane" ze zbioru $\{-1, 1\}$. Eksperymenty przeprowadziłam dla różnych macierzy A , dla różnych rozmiarów układów z zakresu od 1 do 300 oraz dla dwóch typów precyzji - float32 oraz float64. Wyniki eksperymentów zapisałam w tabelach poniżej. Obliczyłam błąd znalezionego rozwiązania dla każdej niewiadomej.

Następnie policzyłam wskaźnik uwarunkowania ze wzoru: $k = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ dla każdej macierzy A .

W celu realizacji ćwiczenia 3, napisałam funkcję *thomas*, która rozwiązuje układ metodą przeznaczoną do rozwiązywania układów z macierzą trójdziagonalną. Następnie porównałam wyniki oraz czas wykonania dla obu metod (Thomasa oraz Gaussa).

4. Wyniki

Wartości błędów w poniższych tabelach to wartości bezwzględne z różnicy X oczekiwanego z X obliczonym.

4.1 Zadanie 1

4.1.1 Wyliczone błędy

Rozmiar macierzy	Błąd	
	Float32	Float64
3	3.345e-06	0.000e+00
4	6.647e-15	3.019e-13
5	2.184e-03	9.229e-12
6	9.070e-02	3.638e-10
7	2.787e+00	1.361e-08
8	6.104e-03	1.203e-07
9	4.948e+01	5.401e-07
10	1.816e+01	1.662e-04
11	1.378e+01	1.223e-02
12	4.693e+00	1.214e+00
13	8.387e+00	2.122e+01
14	5.707e+00	2.112e+01
15	1.354e+01	1.505e+01
16	4.894e+01	2.594e+01
17	8.208e+01	2.298e+01
18	7.338e+01	2.220e+01
19	9.489e+01	8.537e+01
20	2.653e+02	8.714e+02
100	3.355e+03	3.777e+03
150	9.340e+02	5.531e+03
300	3.147e+03	2.111e+04

Tabela 4.1.1.1 Wyniki dla zadania 1

Analizując powyższą tabelę można zauważyć, że w miarę wzrostu rozmiaru macierzy, błędy również się zwiększają. Mimo że oba typy zmiennoprzecinkowe wykazują wzrost błędów i zmniejszoną dokładność w miarę wzrostu rozmiaru macierzy, typ Float64 oferuje większą precyzję niż typ Float32. Jest to zauważalne w wynikach, szczególnie gdy rozmiar macierzy zawiera się w n od 7 do 12.

4.2 Zadanie 2

4.2.1 Wyliczone błędy

Rozmiar macierzy	Błąd	
	Float32	Float64
3	6.862e-08	3.140e-16
4	4.443e-08	2.483e-16
5	1.075e-07	4.154e-16
6	1.774e-07	9.742e-16
7	1.921e-07	1.695e-15
8	1.791e-07	4.672e-15
9	1.397e-06	3.310e-15
10	1.402e-06	3.083e-15
11	1.583e-06	4.421e-15
12	4.880e-06	1.980e-14
13	5.415e-06	2.201e-14
14	5.456e-06	2.277e-14
15	5.683e-06	2.836e-14
16	8.617e-06	3.801e-14
17	8.617e-06	3.716e-14
18	8.766e-06	3.652e-14
19	8.956e-06	3.889e-14
20	1.263e-05	3.809e-14
100	7.468e-04	2.288e-12
150	3.427e-03	1.182e-11
300	2.224e-02	1.024e-10

Tabela 4.2.1.1 Wyniki dla zadania 2

Wyniki w powyższej tabeli wskazują, że wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy błędy obliczeniowe rosną, a dokładność maleje dla obu typów zmiennoprzecinkowych. Jednak typ Float64 oferuje zdecydowanie większą precyzję i mniejsze błędy w porównaniu do typu Float32.

Zarówno w tabeli 4.1.1.1, jak i w tabeli 4.2.1.1, błędy rosną wraz z rozmiarem macierzy, a dla większych rozmiarów błędy są większe dla typu Float32 niż dla Float64. Jednak ogólnie rzecz biorąc, oba typy zmiennoprzecinkowe (Float32 i Float64) zapewniają względnie dokładne wyniki dla większości rozmiarów macierzy, jednak to Float64 zapewnia dokładniejszą precyzję.

4.2.2 Wskaźnik uwarunkowania

Wskaźnikiem uwarunkowania nazywamy miarę czułości macierzy A na małe zmiany wejściowe. Wskaźnik uwarunkowania informuje, jak bardzo wynik obliczeń może się zmienić w odpowiedzi na małe zmiany w danych wejściowych. Im większa wartość wskaźnika uwarunkowania, tym większa jest czułość macierzy A . Zatem wysoki wskaźnik uwarunkowania może wskazywać na potencjalne problemy numeryczne, takie jak utrata precyzji, niestabilność obliczeń lub trudności w rozwiązaniu układu równań.

Wskaźnik uwarunkowania został policzony ze wzoru:

$$k = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \quad (4.2.2.1)$$

Rozmiar macierzy	Wskaźnik uwarunkowania	
	Zadanie 1	Zadanie 2
3	2.160e+02	1.444e+00
4	2.880e+03	1.833e+00
5	2.800e+04	2.233e+00
6	2.268e+05	2.644e+00
7	1.630e+06	3.032e+00
8	1.286e+07	3.448e+00
9	1.120e+08	3.849e+00
10	8.841e+08	4.249e+00
11	6.463e+09	4.659e+00
12	4.142e+10	5.055e+00
13	6.770e+10	5.465e+00
14	1.314e+11	5.869e+00
15	1.282e+11	6.269e+00
16	1.242e+11	6.678e+00
17	6.184e+12	7.078e+00
18	4.288e+11	7.485e+00
19	1.046e+12	7.890e+00
20	8.421e+11	8.290e+00
100	1.683e+14	4.064e+01

Tabela 4.2.2.1 Wskaźnik uwarunkowania macierzy w zależności od zadania dla formatu *float64*

Analizując powyższą tabelę można zauważyć, że wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, wartości wskaźnika uwarunkowania rosną zarówno w Zadaniu 1, jak i Zadaniu 2. Oznacza to, że większe macierze są bardziej podatne na błędy numeryczne i mają większą czułość na małe zmiany wejściowe. Ponadto wartości wskaźnika uwarunkowania rosną wykładniczo wraz z rozmiarem macierzy.

Wartości wskaźnika uwarunkowania w Zadaniu 1 wydają się być nieco większe niż w Zadaniu 2 dla tego samego rozmiaru macierzy. Oznacza to, że Zadanie 1 ma większą czułość na małe zmiany wejściowe w porównaniu do Zadania 2.

4.3 Zadanie 3

4.3.1 Przechowywanie i wykorzystanie macierzy A w metodzie Thomasa

W metodzie dla układów z macierzą trójdagonalną, macierz A jest przechowywana jako dwuwymiarowa tablica, gdzie większość elementów macierzy ma wartość zero. Zamiast przechowywać całą macierz A, przechowuje się jedynie trzy diagonale: główną diagonalę oraz górną i dolną diagonalę. Podczas wykorzystywania macierzy A w metodzie dla układów trójdogonalnych, operacje są wykonywane na elementach znajdujących się na diagonalach

Przechowywanie i wykorzystywanie macierzy A w opisany sposób umożliwia efektywne operacje na macierzy trójdogonalnej.

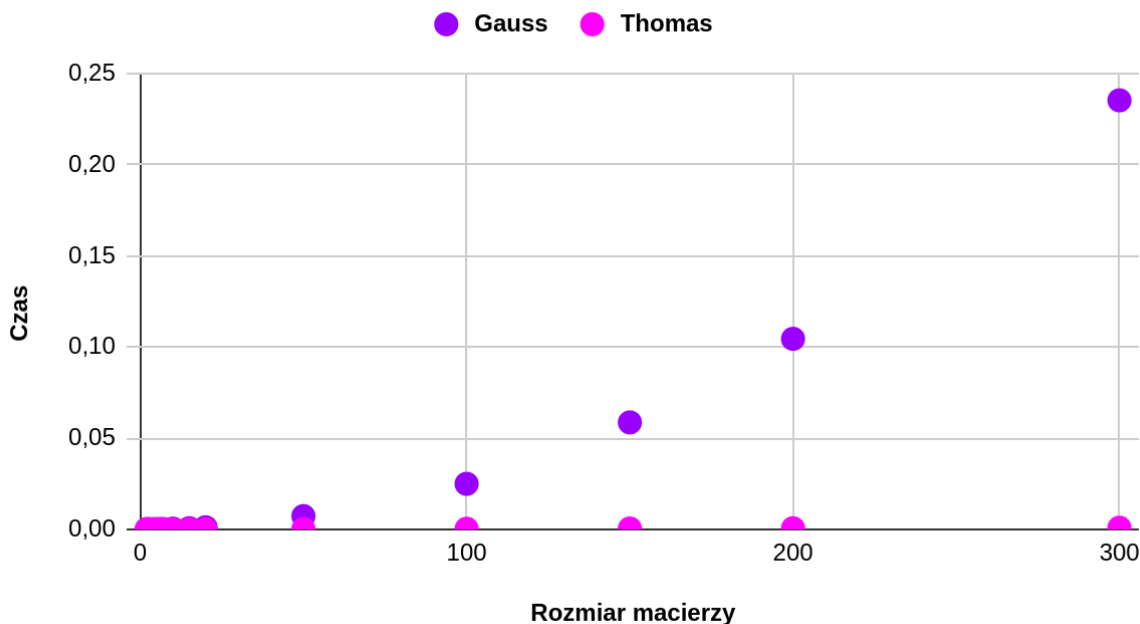
4.3.2 Porównanie metod Gaussa oraz Thomasa

Mierząc czas wykonania pominięto czas tworzenia układów.

R. macierzy	Błąd		Czas wykonania [s]	
	Metoda Gaussa	Metoda Thomasa	Metoda Gaussa	Metoda Thomasa
2	0.00e+00	0.00e+00	0.000151	0.000038
3	0.00e+00	0.00e+00	0.000105	0.000014
4	0.00e+00	0.00e+00	0.000078	0.000016
5	0.00e+00	0.00e+00	0.000104	0.000017
6	0.00e+00	0.00e+00	0.000133	0.000021
7	0.00e+00	0.00e+00	0.000169	0.000024
10	2.48e-16	2.48e-16	0.000393	0.000033
15	2.48e-16	2.48e-16	0.000628	0.000046
20	4.84e-16	4.84e-16	0.001143	0.000061
50	8.16e-16	8.16e-16	0.007279	0.000171
100	1.21e-15	1.21e-15	0.024943	0.000333
150	1.57e-15	1.57e-15	0.058606	0.000455
200	1.83e-15	1.83e-15	0.104426	0.000591
300	2.18e-15	2.18e-15	0.235127	0.000882

Tabela 4.3.1.1 Porównanie wyniku oraz czasu wykonania dla metod Gaussa oraz Thomasa dla formatu *float64*

Czas wykonania



Wykres 4.3.1.1 Porównanie czasu wykonania

Analizując powyższą tabelę możemy zauważyć, że dla wszystkich rozmiarów macierzy, błąd dla obu metod jest bardzo bliski zeru. Oznacza to, że obie metody dają dokładne rozwiązania układu równań. Można również zauważyć, że w obu metodach, w miarę wzrostu rozmiaru danych (n), czasy wykonania rosną. Jednak tempo wzrostu jest znacznie większe dla metody Gaussa. Oznacza to, że metoda Gaussa jest bardziej kosztowna obliczeniowo dla większych rozmiarów macierzy.

5. Wnioski

- Dla małych i średnich rozmiarów macierzy oba typy zmiennoprzecinkowe (Float32 i Float64) zapewniają dokładne wyniki obliczeń (Tabela 4.1.1.1 i 4.2.1.1)
- Dla większych rozmiarów macierzy, Float32 może dawać wyniki o większych błędach (Tabela 4.1.1.1)
- Macierz A z zadania 1 daje gorsze wyniki niż macierz z zadania 2
- Większe macierze mają większą czułość na błędy numeryczne i mogą być bardziej trudne do obliczeń numerycznych oraz może nastąpić utrata precyzji (Tabela 4.2.2.1)
- Zarówno metoda Gaussa, jak i metoda Thomasa są dokładnymi metodami rozwiązywania układów równań (Tabela 4.3.1.1)
- Metoda Thomasa wydaje się być bardziej efektywna pod względem czasu wykonania (Tabela 4.3.1.1)

6. Bibliografia

- [1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu “Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice”
- [2] mgr Wałaszek Jerzy, “Eliminacja Gaussa”
https://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/0076.php
- [3] Wikipedia, “Metoda eliminacji Gaussa”
https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_eliminacji_Gaussa

7. Wprowadzone poprawki

Po konsultacjach w sprawozdaniu zmieniono:

- w zadaniu 1 i 2 eksperymenty przeprowadzono dla n należącego zbioru 3, 4, 5 ... 20 (ze wzrostem n o 1)
- w zadaniu 1 i 2 poprawiono rzutowanie wektora x na odpowiedni format (*float32* i *float64*)
- w zadaniu 3 w tabeli 4.3.1.1 dodano jednostkę czasu