Metody obliczeniowe w nauce i technice

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Aga Patro
pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

System: Debian Linux Parrot OS x64
Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz
Pamięć RAM: 16 GB
Środowisko: Jupyter Notebook
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$. Elementy macierzy A są zadane wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \dfrac{1}{|i-j|+m} \quad dla \;\; i \neq j \end{cases}$$

gdzie $m = 2, k = 6$

Przyjmij wektor x jako dowolną n-elementową permutację ze zbioru $\{1, \; -1\}$ i oblicz wektor b.

2.1 Zadanie 1

Metodą Jacobiego rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$ (przyjmując jako niewiadomą wektor x), przyjmując kolejno kryterium stopu:

1. $\left\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right\| < \rho$
2. $\left\|Ax^{(i)} - b\right\| < \rho$

Obliczenia wykonaj dla różnych rozmiarów układu n, dla różnych wektorów początkowych, a także różnych wartości ρ w kryteriach stopu. (Podaj, jak liczono normę.) Wyznacz liczbę iteracji oraz sprawdź różnicę w czasie obliczeń dla obu kryteriów stopu. Sprawdź dokładność obliczeń.

2.2 Zadanie 2

Dowolną metodą znajdź promień spektralny macierzy iteracji (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu). Sprawdź, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu. Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego.

3. Realizacja ćwiczenia

3.1 Zadanie 1

W celu realizacji ćwiczenia 1 napisałam funkcje *jakobi,* która rozwiązuje zadany układ metodą Jacobiego. Wartości wektora zadanego X są "wylosowane" ze zbioru $\{-1, 1\}$. Eksperymenty przeprowadziłam dla różnych macierzy A, dla różnych rozmiarów układów z zakresu od 1 do 20 oraz 100, 150 i 200, dla różnych kryteriów stopu oraz różnych wartości ρ tj. (10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-3}). Jako wektor początkowy dla każdej wartości ρ przyjęłam wektor $V_0 = [0, 0, \dots 0]$, a dla $\rho = 10^{-4}$ dodatkowo wektor $V_0 = [100, 100, \dots 100]$.
Norma została policzona używając maksimum bezwzględnej różnicy X oczekiwanego z X obliczonym.

Wyniki eksperymentów zapisałam w tabelach poniżej.

Czas policzony w tabelach odnosi się do samego czasu wykonywania metody Jacobiego (bez tworzenia macierzy A, X oraz b).

3.2 Zadanie 2

W celu realizacji zadania 2 napisałam funkcję *spectral_radius* która oblicza promień spektralny macierzy. Aby wyliczyć ten promień znalazłam maksymalną wartość z wartości własnych macierzy, wyrażanych wzorem:

$$w_A(\lambda) = det(A) - \lambda I \tag{3.2.1}$$

Do obliczania wartości własnych użyłam funkcji *linalg.eigvals* z biblioteki *numpy*.

Ponadto dla każdego układu sprawdziłam, czy są spełnione założenia o zbieżności metody, sprawdzając czy promień spektralny jest mniejszy od 1.

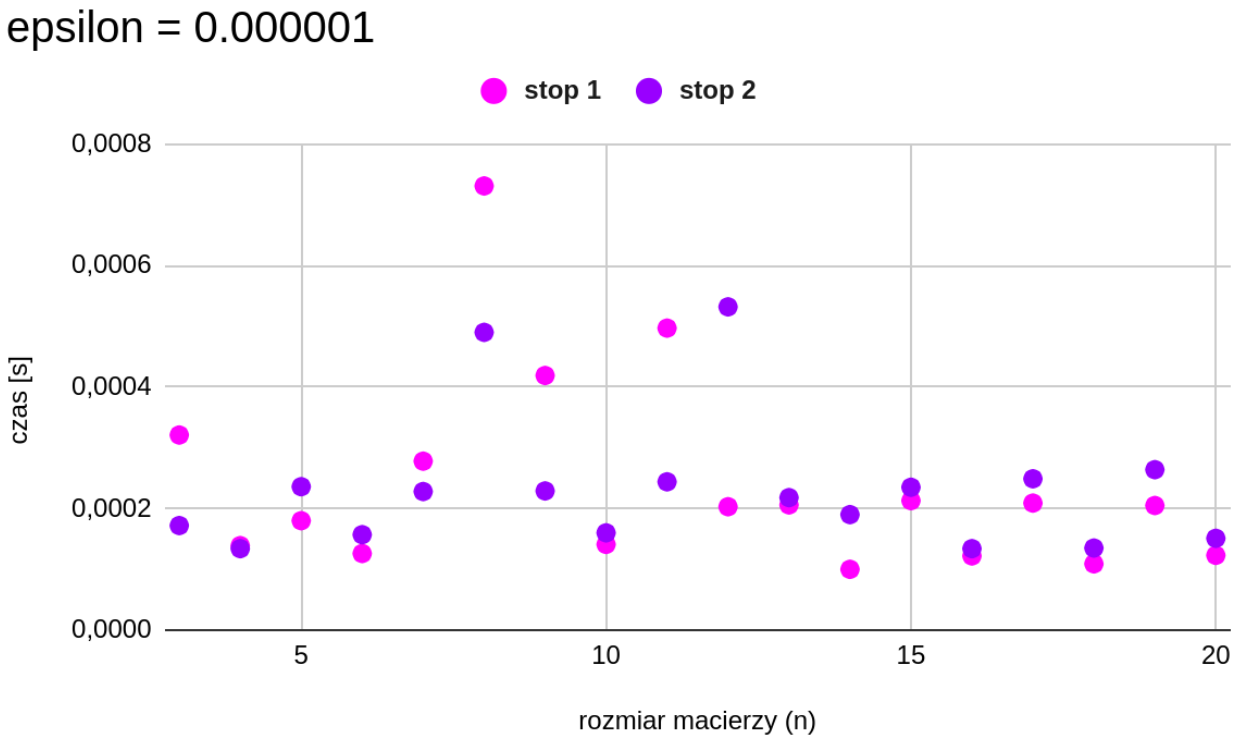
4. Wyniki ćwiczenia

4.1 Zadanie 1

4.1.1 $\rho = 10^{-6}$ i $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$

n	l. iteracji stopu 1	l. iteracji stopu 2	czas stopu 1 [s]	czas stopu 2 [s]	norma stopu 1	norma stopu 2
3	7	8	0.001683	0.000467	5.851e-07	5.937e-08
4	7	7	0.000185	0.000211	1.096e-07	1.096e-07
5	9	10	0.000195	0.000240	3.705e-07	6.584e-08
6	7	7	0.000161	0.000182	1.487e-07	1.487e-07
7	10	12	0.000220	0.000549	7.426e-07	4.212e-08
8	7	8	0.000173	0.000200	1.796e-07	1.143e-08
9	12	13	0.000237	0.000298	2.980e-07	8.602e-08
10	7	8	0.000167	0.000222	2.064e-07	1.317e-08
11	13	15	0.000257	0.000338	4.076e-07	4.495e-08
12	7	8	0.000163	0.000210	2.544e-07	1.741e-08
13	14	16	0.000324	0.000423	5.010e-07	6.869e-08
14	7	8	0.000186	0.000216	4.998e-07	4.979e-08
15	15	17	0.000360	0.000453	5.809e-07	9.500e-08
16	8	9	0.000185	0.000222	1.583e-07	2.067e-08
17	16	19	0.000310	0.000420	6.521e-07	5.375e-08
18	8	9	0.000205	0.000286	4.077e-07	6.193e-08
19	18	20	0.000345	0.000440	3.332e-07	7.152e-08
20	9	10	0.000201	0.000249	1.521e-07	2.612e-08
100	22	25	0.00282	0.006912	4.473e-07	8.142e-08
150	32	36	0.003737	0.031311	4.396e-07	9.747e-08
200	45	52	0.000619	0.000784	5.389e-07	8.951e-08

Tabela 4.1.1.1 Wyniki metody Jacobiego dla $\rho = 0.000001$ i $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$



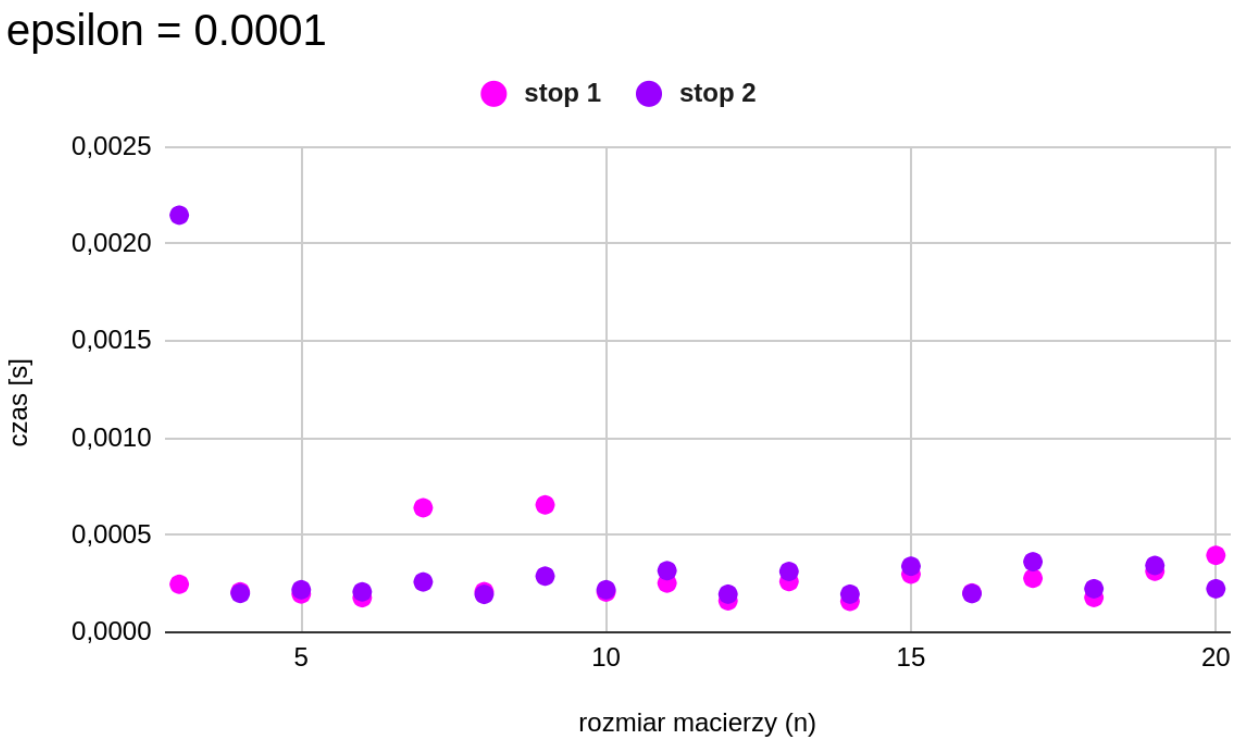
Wykres 4.1.1.1 Porównanie czasu wykonanania algorytmów w zależności od rodzaju stopu

Analizując powyższą tabelę 4.1.1.1 możemy zauważyć, że liczba iteracji stopu jest różna w zależności od rozmiaru macierzy. Ponadto dla większości przypadków, liczba iteracji dla stopu 2 jest minimalnie większa od liczby iteracji dla stopu 1, a dla liczby iteracji są większe na nieparzystego n. Wyniki błędów są mniejsze dla kryterium stopu 2.
Opierając się o wykres 4.1.1.1 możemy zauważyć, że czas wykonania algorytmów dla obu stopów jest podobny.

4.1.2 $\rho = 10^{-4}$ i $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$

n	l. iteracji stopu 1	l. iteracji stopu 2	czas stopu 1 [s]	czas stopu 2 [s]	norma stopu 1	norma stopu 2
3	5	6	0.000247	0.002148	5.980e-05	5.830e-06
4	5	6	0.000208	0.000200	2.831e-05	1.761e-06
5	6	7	0.000197	0.000219	6.604e-05	1.173e-05
6	5	6	0.000178	0.000208	3.723e-05	2.351e-06
7	7	8	0.000641	0.000259	5.499e-05	1.309e-05
8	5	6	0.000209	0.000195	4.445e-05	2.824e-06
9	8	9	0.000656	0.000289	4.293e-05	1.239e-05
10	5	6	0.000207	0.000219	5.083e-05	3.238e-06
11	9	10	0.000253	0.000317	3.350e-05	1.113e-05
12	5	6	0.000162	0.000196	5.820e-05	3.814e-06
13	9	11	0.000261	0.000313	7.195e-05	9.866e-06
14	5	6	0.000159	0.000196	7.123e-05	5.574e-06
15	10	12	0.000299	0.000340	5.372e-05	8.785e-06
16	6	6	0.000202	0.000199	1.007e-05	1.007e-05
17	11	13	0.000278	0.000363	4.178e-05	7.912e-06
18	6	7	0.000179	0.000224	1.818e-05	2.694e-06
19	12	14	0.000314	0.000344	3.370e-05	7.233e-06
20	6	7	0.000396	0.000224	3.043e-05	5.169e-06
100	14	17	0.000739	0.000639	4.202e-05	7.650e-06
150	19	24	0.002366	0.001311	5.880e-05	8.945e-06
200	27	34	0.001555	0.000603	5.449e-05	9.050e-06

Tabela 4.1.2.1 Wyniki metody Jacobiego dla $\rho = 0.0001$ **i** $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$



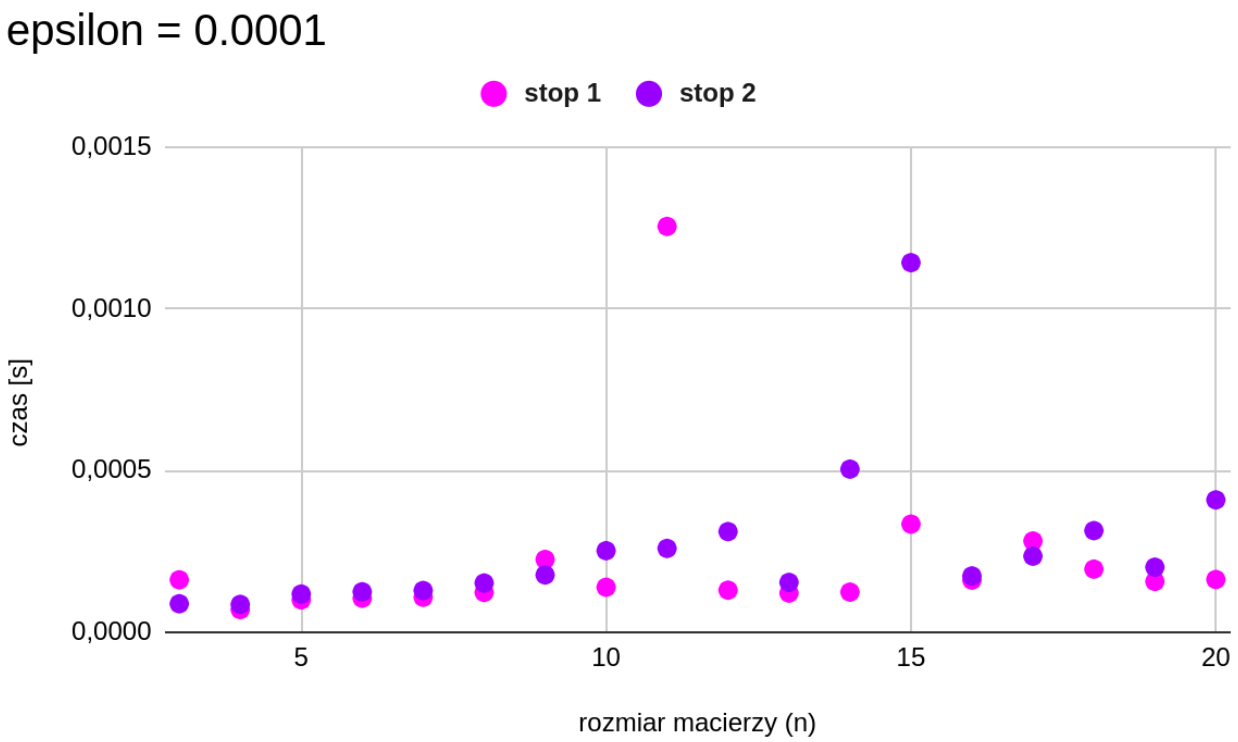
Wykres 4.1.2.1 Porównanie czasu wykonanania algorytmów w zależności od rodzaju stopu

Analizując powyższą tabelę 4.1.2.1 możemy zauważyć, że tak jak w przypadku $\rho = 0.000001$, liczba iteracji stopu jest różna w zależności od rozmiaru macierzy. Ponadto dla większości przypadków, liczba iteracji dla stopu 2 jest minimalnie większa od liczby iteracji dla stopu 1, a dla liczby iteracji są większe na nieparzystego n. Wyniki błędów są mniejsze dla kryterium stopu 2.
Opierając się o wykres 4.1.2.1 możemy zauważyć, że czas wykonania algorytmów dla obu stopów jest podobny.

4.1.3 $\rho = 10^{-4}$ i $V_0 = [100, 100, \ldots 100]$

n	l. iteracji stopu 1	l. iteracji stopu 2	czas stopu 1 [s]	czas stopu 2 [s]	norma stopu 1	norma stopu 2
3	8	9	0.000162	0.000088	1.998e-05	2.040e-06
4	9	10	0.000070	0.000086	3.357e-05	4.777e-06
5	10	11	0.000100	0.000118	3.938e-05	6.998e-06
6	11	12	0.000105	0.000125	3.962e-05	8.297e-06
7	12	13	0.000108	0.000129	3.679e-05	8.760e-06
8	13	14	0.000123	0.000152	3.290e-05	8.701e-06
9	14	15	0.000225	0.000177	2.881e-05	8.315e-06
10	15	16	0.000139	0.000252	2.506e-05	7.796e-06
11	15	17	0.001254	0.000259	6.545e-05	7.219e-06
12	16	18	0.000130	0.000311	5.384e-05	6.663e-06
13	17	19	0.000121	0.000154	4.476e-05	6.138e-06
14	18	20	0.000124	0.000504	3.772e-05	5.673e-06
15	19	21	0.000334	0.001142	3.216e-05	5.259e-06
16	19	21	0.000161	0.000174	6.613e-05	1.167e-05
17	20	22	0.000282	0.000235	5.581e-05	1.057e-05
18	21	23	0.000195	0.000314	4.784e-05	9.668e-06
19	22	24	0.000157	0.000201	4.156e-05	8.920e-06
20	23	25	0.000163	0.000409	3.662e-05	8.314e-06
100	285	315	0.010089	0.019201	4.964e-05	8.411e-06
150	1000	1000	0.037470	0.032069	4.080e+32	4.080e+32
200	1000	1000	0.018979	0.036090	3.197e+68	3.197e+68

Tabela 4.1.3.1 Wyniki metody Jacobiego dla $\rho = 0.0001$ **i** $V_0 = [100, 100, \ldots 100]$



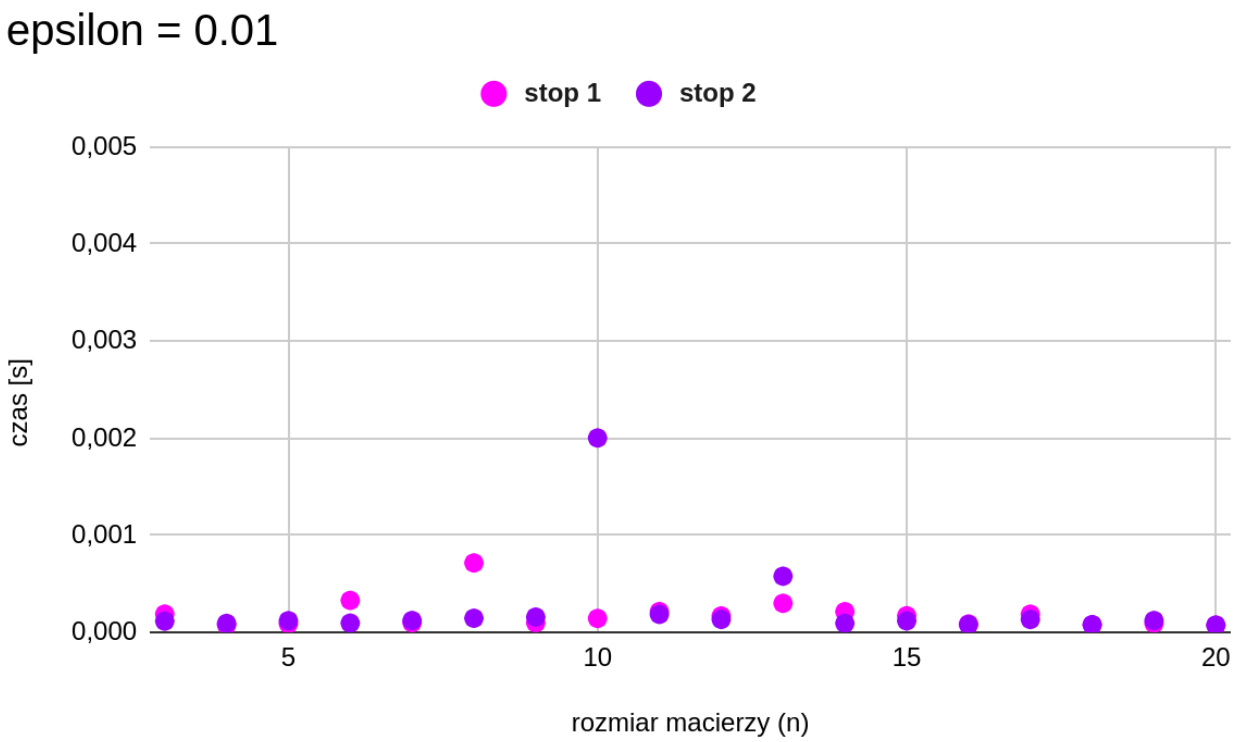
Wykres 4.1.3.1 Porównanie czasu wykonanania algorytmów w zależności od rodzaju stopu

Analizując powyższą tabele oraz wykres możemy zauważyć, że czas dla obu stopów jest taki sam. Ponadto, tak jak w przypadku $V_0 = [0, 0, ..., 0]$ norma jest mniejsza dla stopu 2. Natomiast porównując tabelę 4.1.3.1 do tabeli 4.1.2.1 widzimy, że dla obu stopów liczba iteracji potrzebnych do osiągnięcia zadowalającego wyniku jest zdecydowanie większa dla wektora początkowego $V_0 = [100, 100, ..., 100]$.

4.1.4 $\rho = 10^{-2}$ i $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$

n	l. iteracji stopu 1	l. iteracji stopu 2	czas stopu 1 [s]	czas stopu 2 [s]	norma stopu 1	norma stopu 2
3	3	4	0.000187	0.000114	8.060e-03	6.556e-04
4	3	4	0.000074	0.000091	7.324e-03	4.550e-04
5	4	5	0.000087	0.000119	2.155e-03	3.729e-04
6	3	4	0.000328	0.000094	9.392e-03	5.906e-04
7	4	5	0.000097	0.000121	4.123e-03	9.705e-04
8	4	4	0.000714	0.000144	7.007e-04	7.007e-04
9	4	6	0.000097	0.000156	6.230e-03	5.153e-04
10	4	4	0.000142	0.002001	7.989e-04	7.989e-04
11	5	6	0.000213	0.000184	2.755e-03	9.146e-04
12	4	4	0.000168	0.000132	8.986e-04	8.986e-04
13	5	7	0.000298	0.000577	3.827e-03	5.247e-04
14	4	4	0.000212	0.000092	1.015e-03	1.015e-03
15	5	7	0.000170	0.000117	4.968e-03	8.123e-04
16	4	4	0.000085	0.000078	1.159e-03	1.159e-03
17	5	8	0.000186	0.000131	6.151e-03	5.069e-04
18	4	4	0.000076	0.000078	1.335e-03	1.335e-03
19	6	8	0.000090	0.000121	3.409e-03	7.316e-04
20	4	4	0.000071	0.000074	1.544e-03	1.544e-03
100	6	9	0.000223	0.000289	3.962e-03	7.188e-04
150	7	12	0.000371	0.000678	5.414e-03	8.209e-04
200	9	16	0.004918	0.000517	5.515e-03	9.150e-04

Tabela 4.1.4.1 Wyniki metody Jacobiego dla $\rho = 0.01$ i $V_0 = [0, 0, \ldots 0]$



Wykres 4.1.4.1 Porównanie czasu wykonanania algorytmów w zależności od rodzaju stopu

Analizując powyższą tabelę 4.1.4.1 możemy zauważyć, że liczba iteracji stopu jest różna w zależności od rozmiaru macierzy. Ponadto dla parzystej liczby n liczba iteracji dla obu stopów jest równa 4. Wyniki błędów są mniejsze dla kryterium stopu 2.
Opierając się o wykres 4.1.4.1 możemy zauważyć, że czas wykonania algorytmów dla obu stopów jest podobny.

4.2 Zadanie 2

n	promień spektralny	czy zbieżny
3	0.102116	TRUE
4	0.142300	TRUE
5	0.177715	TRUE
6	0.209418	TRUE
7	0.238142	TRUE
8	0.264418	TRUE
9	0.288644	TRUE
10	0.311127	TRUE
11	0.332107	TRUE
12	0.351778	TRUE
13	0.370299	TRUE
14	0.387798	TRUE
15	0.404387	TRUE
16	0.420156	TRUE
17	0.435185	TRUE
18	0.449542	TRUE
19	0.463284	TRUE
20	0.476464	TRUE
100	0.942543	TRUE
150	1.070357	FALSE
300	1.293587	FALSE

Tabela 4.2.1 Wartości promienia spektralnego w zależności od rodzaju macierzy

Analizując powyższe wyniki możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy wzrasta wartość promienia spektralnego. Wszystkie wartości z wyjątkiem $n = 150$ oraz $n = 300$ są mniejsze od 1, więc prawie wszystkie układy spełniają warunek zbieżności metody Jacobiego.

5. Wnioski

- Czas wykonania algorytmu jest taki sam niezależnie od rodzaju stopu
- Im większy epsilon tym mniej iteracji potrzebujemy aby uzyskać wynik zadowalający wynik
- Im mniejszy epsilon tym mniejszą normę otrzymujemy
- Liczba iteracji jest większa dla stopu 2-giego, oraz dla nieparzystej liczby n
- Mniejszy błąd otrzymujemy dla 2-giego kryterium stopu
- Dla macierzy o rozmiarze mniejszym od 150, układy są zbieżne
- Im bardziej oddalony wektor początkowy od wektora zadanego, tym większa liczba iteracji, ale podobne wyniki norm

6. Bibliografia

[1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu “Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice”, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

[2] Wykład VI, Metody numeryczne 1, Uniwersytet Wrocławski 2010/11
http://www.math.uni.wroc.pl/~tabisz/MetNum1/wyk07.pdf

[3] Wikipedia, Promień spektralny
https://pl.wikipedia.org/wiki/Promie%C5%84_spektralny

7. Wprowadzone poprawki

Po konsultacjach w sprawozdaniu zmieniono:

- Dodałam eksperymenty dla dodatkowego wektora początkowego $V_0 = [100, \ldots, 100]$
- Opisałam jak policzony został czas