Metody obliczeniowe w nauce i technice

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Aga Patro
pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

System: Debian Linux Parrot OS x64
Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz
Pamięć RAM: 16 GB
Środowisko: Jupyter Notebook
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$

2.1 Zadanie 1

Elementy macierzy A o wymiarze $n \times n$ są określone wzorem:

$$\begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1} \quad dla \;\; i \neq 1 \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n \tag{2.1.1}$$

Przyjmij wektor x jako dowolną n−elementową permutację ze zbioru $\{1, \; -1\}$ i oblicz wektor b. Następnie metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$ (przyjmując jako niewiadomą wektor x). Przyjmij różną precyzję dla znanych wartości macierzy A i wektora b. Sprawdź, jak błędy zaokrągleń zaburzają rozwiązanie dla różnych rozmiarów układu (porównaj – zgodnie z wybraną normą – wektory x obliczony z x zadany). Przeprowadź eksperymenty dla różnych rozmiarów układu.

2.2 Zadanie 2

Powtórz eksperyment dla macierzy zadanej wzorem:

$$\begin{cases} a_{ij} = \dfrac{2i}{j} \quad dla \;\; j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} \quad dla \;\; j < i \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n \tag{2.2.1}$$

Porównaj wyniki z tym, co otrzymano w przypadku układu z punktu 1). Spróbuj uzasadnić, skąd biorą się różnice w wynikach. Sprawdź uwarunkowanie obu układów.

3. Realizacja tematu

W celu realizacji ćwiczenia 1 i 2 napisałam funkcje *gauss,* która rozwiązuje zadany układ metodą eliminacji Gaussa. Wartości wektora X są "wylosowane" ze zbioru $\{-1, 1\}$. Eksperymenty przeprowadziłam dla różnych macierzy A, dla różnych rozmiarów układów z zakresu od 1 do 300 oraz dla dwóch typów precyzji - float32 oraz float64. Wyniki eksperymentów zapisałam w tabelach poniżej. Obliczyłam błąd znalezionego rozwiązania dla każdej niewiadomej.

Następnie policzyłam wskaźnik uwarunkowania ze wzoru: $k = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$ dla każdej macierzy A.

4. Wyniki

Wartości błędów w poniższych tabelach to wartości bezwzględne z różnicy X oczekiwanego z X obliczonym.

4.1 Zadanie 1

	Błąd	
Rozmiar macierzy	**Float32**	**Float64**
2	0.000000e+00	0.000000e+00
3	0.000000e+00	0.000000e+00
4	6.646519e-15	3.018715e-13
5	7.282637e-13	9.229383e-12
6	5.440998e-11	3.637978e-10
7	3.695169e-09	1.360925e-08
10	6.730517e-09	1.662034e-04
15	2.391005e-08	1.504852e+01
20	1.779323e-08	8.714011e+02
50	1.471070e-07	2.460859e+02
100	2.777684e-06	3.777059e+03
150	2.460796e-07	7.514367e+03
200	3.305097e-07	3.318148e+03
300	5.895989e-07	1.135721e+04

Tabela 4.1.1 Wyniki dla zadania 1

Analizując powyższą tabele można zauważyć, że w miarę wzrostu rozmiaru macierzy, błędy również zwiększają się, a dokładność zmniejsza się dla obu typów zmiennoprzecinkowych, chociaż Float64 utrzymuje większą precyzję niż Float32.

4.2 Zadanie 2

	Błąd	
Rozmiar macierzy	**Float32**	**Float64**
2	0.000000e+00	0.000000e+00
3	0.000000e+00	3.140185e-16
4	0.000000e+00	2.482534e-16
5	2.482534e-16	4.154074e-16
6	3.140185e-16	9.742168e-16
7	2.482534e-16	1.694682e-15
10	2.991428e-15	3.082744e-15
15	3.612919e-15	2.836115e-14
20	1.971889e-14	3.809004e-14
50	1.362741e-13	3.460566e-13
100	1.210416e-12	2.287690e-12
150	3.111324e-12	9.660957e-12
200	5.853948e-12	2.560319e-11
300	1.731398e-11	8.854572e-11

Tabela 4.2.1 Wyniki dla zadania 2

Wyniki w powyższej tabeli wskazują na to, że dla małych i średnich rozmiarów macierzy oba typy zmiennoprzecinkowe (Float32 i Float64) zapewniają dokładne wyniki obliczeń. Jednak dla większych rozmiarów macierzy Float64, oferujący większą precyzję, może dawać wyniki o mniejszych błędach.

Zarówno w tabeli 4.1.1, jak i w tabeli 4.2.1, błędy rosną wraz z rozmiarem macierzy, a dla większych rozmiarów błędy są większe dla typu Float32 niż dla Float64. Jednak ogólnie rzecz biorąc, oba typy zmiennoprzecinkowe (Float32 i Float64) zapewniają względnie dokładne wyniki dla większości rozmiarów macierzy, z Float64 oferującym większą precyzję w przypadku większych rozmiarów.

4.3 Wskaźnik uwarunkowania

Wskaźnikiem uwarunkowania nazywamy miarę czułości macierzy A na małe zmiany wejściowe. Wskaźnik uwarunkowania informuje, jak bardzo wynik obliczeń może się zmienić w odpowiedzi na małe zmiany w danych wejściowych. Im większa wartość wskaźnika uwarunkowania, tym większa jest czułość macierzy A. Zatem wysoki wskaźnik uwarunkowania może wskazywać na potencjalne problemy numeryczne, takie jak utrata precyzji, niestabilność obliczeń lub trudności w rozwiązaniu układu równań.

Wskaźnik uwarunkowania został policzony ze wzoru:

$$k = ||A^{-1}|| \cdot ||A|| \tag{4.3.1}$$

	Wskaźnik uwarunkowania	
Rozmiar macierzy	**Zadanie 1**	**Zadanie 2**
2	8.000000e+00	1.000000
3	2.160000e+02	1.444444
4	2.880000e+03	1.833333
5	2.800000e+04	2.233333
6	2.268000e+05	2.644444
7	1.629936e+06	3.031746
10	8.841438e+08	4.249206
15	1.733309e+11	6.268898
20	4.003898e+11	8.289565
50	1.764101e+12	20.420510
100	2.071001e+14	40.638622
150	3.938158e+15	60.855672
200	3.498706e+16	81.073053
300	1.050694e+17	121.508544

Tabela 4.3.1 Wskaźnik uwarunkowania macierzy w zależności od zadania

Analizując powyższą tabelę można zauważyć, że wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, wartości wskaźnika uwarunkowania rosną zarówno w Zadaniu 1, jak i Zadaniu 2. Oznacza to, że większe macierze są bardziej podatne na błędy numeryczne i mają większą czułość na małe zmiany wejściowe. Ponadto wartości wskaźnika uwarunkowania rosną wykładniczo wraz z rozmiarem macierzy.

Wartości wskaźnika uwarunkowania w Zadaniu 1 wydają się być nieco większe niż w Zadaniu 2 dla tego samego rozmiaru macierzy. Oznacza to, że Zadanie 1 ma większą czułość na małe zmiany wejściowe w porównaniu do Zadania 2.

5. Wnioski

- Dla małych i średnich rozmiarów macierzy oba typy zmiennoprzecinkowe (Float32 i Float64) zapewniają dokładne wyniki obliczeń (Tabele 4.1.1 i 4.2.1)
- Dla większych rozmiarów macierzy, Float32 może dawać wyniki o mniejszych błędach (Tabela 4.1.1)
- Macierz A z zadania 1 daje gorsze wyniki niż macierz z zadania 2
- Większe macierze mają większą czułość na błędy numeryczne i mogą być bardziej trudne do obliczeń numerycznych oraz może nastąpić utrata precyzji (Tabela 4.3.1)

6. Bibliografia

[1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu “Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice”

[2] mgr Wałaszek Jerzy, “Eliminacja Gaussa” https://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/0076.php

[3] Wikipedia, “Metoda eliminacji Gaussa” https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_eliminacji_Gaussa