

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Funkcje sklejjane

Aga Patro

pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji.....	2
2. Temat ćwiczzenia.....	2
3. Dane.....	2
4. Realizacja i wyniki ćwiczzenia.....	3
4.1 Funkcja sklejjana 2-ego stopnia.....	3
4.1.1 Obliczenia.....	3
4.1.2 Wyniki.....	6
4.2 Funkcja sklejjana 3-ego stopnia.....	9
4.2.1 Obliczenia.....	9
4.2.2 Wyniki.....	13
5. Wnioski.....	15
6. Bibliografia.....	16

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

System: Debian Linux Parrot OS x64

Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz

Pamięć RAM: 16 GB

Środowisko: Jupyter Notebook

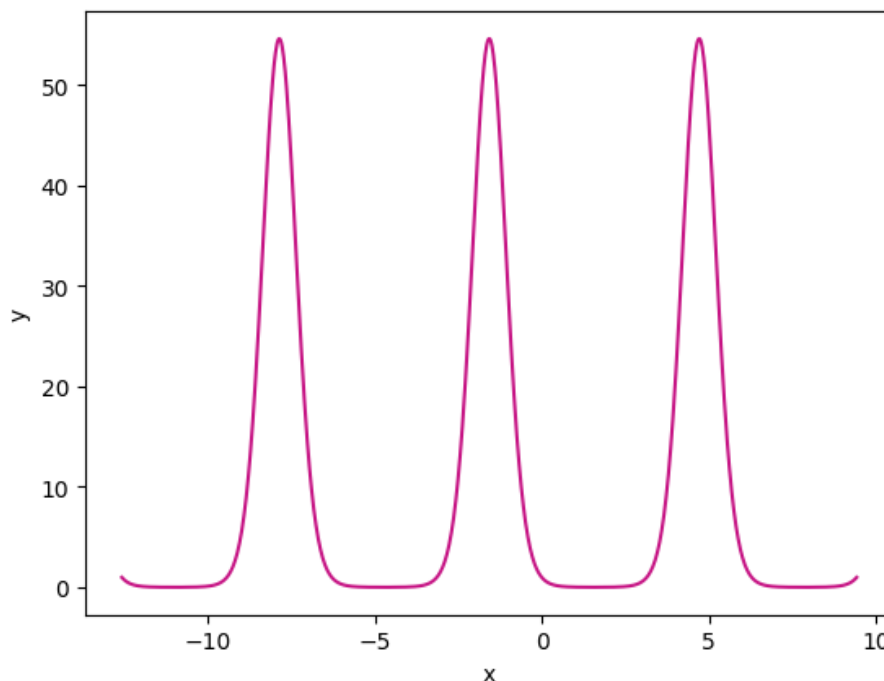
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Celem ćwiczenia było, by dla zadanej funkcji $e^{-4\sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należało wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Podobnie jak poprzednio należało określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki. Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

3. Dane

Mamy zadaną funkcję $e^{-4\sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π .



Wykres 3.1. Wykres funkcji $e^{(-4\sin(x))}$

4. Realizacja i wyniki ćwiczenia

4.1 Funkcja sklejana 2-ego stopnia

Jest to funkcja $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$ zdefiniowana na przedziale $[a, b]$ za pomocą kilku funkcji kwadratowych, z których każda określona jest na jednym z określonych podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ to węzły interpolacyjne. Funkcje te łączone są w taki sposób, że wartość funkcji sklejaney w każdym węźle x_i jest równa wartości funkcji interpolującej dla tego węzła, oraz funkcja sklejana jest ciągła w klasie C^1 . Współczynniki a_i, b_i, c_i możemy wyznaczyć za pomocą funkcji interpolowanej i jej pochodnych.

Dopełnieniem funkcji sklejaney są warunki brzegowe, które określają jak ma się zachować funkcja sklejana na końcach przedziałów. W moich eksperymentach wykorzystałam warunek naturalny oraz warunek zaciskany (*ang. clamped*).

Warunek naturalny wymaga, aby pierwsza pochodna funkcji sklejaney na końcach przedziału interpolacji była równa zero. To oznacza, że funkcja na końcach przedziału ma być "płaska" lub posiadać ekstremum w tych punktach, ale nie może mieć punktu przegięcia.

Warunek zaciskany narzuca na funkcję sklejaną drugiego stopnia określone wartości w pierwszym lub ostatnim węźle przedziału interpolacji.

W moim przypadku, warunki brzegowe przyjmuję na początku przedziału.

4.1.1 Obliczenia

Do interpolacji funkcją sklejaną 2-ego stopnia został użyty wzór:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2, \quad i \in [1, \dots, n - 1] \quad (4.1.1.1)$$

gdzie każdy segment $S_i(x)$ jest interpolującym wielomianem drugiego rzędu w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Poniższe obliczenia przyjmuje dla $i \in [1, \dots, n - 1]$

Odpowiednie pierwsze pochodne względem x mają wzór:

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) \quad (4.1.1.2)$$

Funkcja jest funkcją sklejaną 2-ego stopnia, gdy spełnia następujące warunki:

- a) $S_i(x_i) = f(x_i), \quad i \in [1, \dots, n - 1]$
- b) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 2]$
- c) $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 2]$

z warunku a) oraz (4.1.1.1) dla współczynnika a_i :

$$S_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = f(x_i) \quad (4.1.1.3)$$

$$S_i(x_i) = a_i = f(x_i) \quad (4.1.1.4)$$

Wiedząc, że $y_i = f(x_i)$ to:

$$y_i = a_i \quad (4.1.1.5)$$

z warunku c) oraz (4.1.1.2):

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) \quad (4.1.1.6)$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad (4.1.1.7)$$

z warunków a) i b) oraz (4.1.1.1) i (4.1.1.5):

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (4.1.1.8)$$

Zatem z (4.1.1.7) i (4.1.1.8):

$$\Rightarrow b_i + b_{i+1} = 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (4.1.1.9)$$

gdy przesuniemy indeksy $i \rightarrow i - 1$ otrzymujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i \quad (4.1.1.10)$$

Przyjmujemy oznaczenie:

$$\gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.1.1.11)$$

Teraz jedyne niewiadome w równaniu to wartości współczynników b_i . Aby rozwiązać równanie zapisujemy je w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 \\ \vdots \\ 2\gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.1.1.12)$$

Jest to układ o n niewiadomych i $n - 1$ równaniach. Brakujące równanie wstawimy korzystając z warunku brzegowego.

Warunki brzegowe:

1) Splajn naturalny

$$S'_1(x_1) = 0 \quad (4.1.1.13)$$

Korzystając z różniczki obliczonej względem x (4.1.1.2):

$$S'_i(x_i) = 2c_i(x - x_i) + b_i \quad (4.1.1.14)$$

$$S'_1(x_1) = 2c_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0 \quad (4.1.1.15)$$

$$b_1 = 0 \quad (4.1.1.16)$$

Podstawiając wyliczony warunek brzegowy do wcześniej wyznaczonego równania otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\gamma_2 \\ \vdots \\ 2\gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.1.1.17)$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wcześniej wyznaczonych wzorów.

2) Splajn zaciskany (*ang. clamped boundary*)

Przyjmujemy, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana:

$$S'_1(x_1) = f'_1(x_1) \quad (4.1.1.18)$$

Przybliżamy wartość $f'_1(x_1)$ za pomocą ilorazu różnicowego:

$$f'_1(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1.1.19)$$

Z (4.1.1.18) i (4.1.1.19):

$$S'_1(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1.1.20)$$

Z (4.1.1.2) oraz (4.1.1.10):

$$2c_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1.1.21)$$

Zatem:

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1.1.22)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ 2\gamma_2 \\ \vdots \\ 2\gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.1.1.23)$$

W celu realizacji ćwiczenia, została zaimplementowana funkcja interpolująca 2-ego stopnia *quadratic_spline* zgodnie z powyżej wyprowadzonymi wzorami.

4.1.2 Wyniki

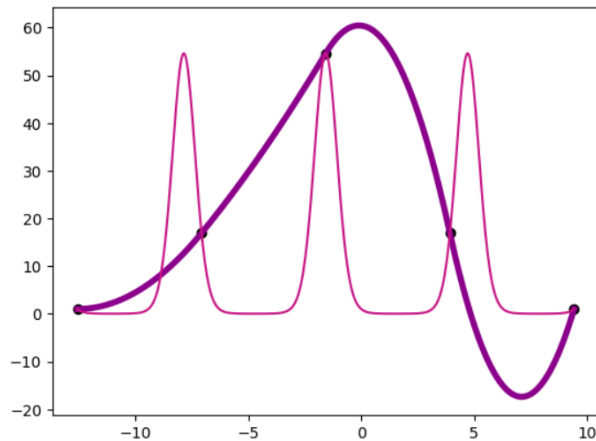
Poniżej przedstawiłam wyniki eksperymentu funkcji skleianej drugiego stopnia. Błąd średniokwadratowy liczony jest dla 500 punktów. Na wykresach kolorem różowym przedstawiony jest wykres funkcji początkowej, natomiast kolorem fioletowym przedstawiony jest wykres wielomianu otrzymanego w wyniku eksperymentu. Można zauważyć że wykres wielomianu jest grubszy od wykresu funkcji początkowej. Jest to spowodowane tym, by dla większej liczby węzłów, gdy wykresy bardzo na siebie nachodzą, można było zauważyć otrzymany wielomian.

Liczba Węzłów	Splajn naturalny		Splajn zaciskany	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny
5	942.8394	59.74138	997.3640	63.2720
7	1741.4356	102.9394	1684.7152	101.5431
10	786.5889	63.6321	780.0241	63.4051
15	4866.2093	157.5437	4886.7329	157.7891
20	589.2111	56.3949	582.5262	56.1516
30	84.8815	18.3264	82.3960	18.0931
60	0.06346	0.9112	0.02573	0.7250
100	0.0235	0.2596	0.0023	0.1157
150	0.0110	0.1538	0.00058	0.04365
250	0.0040	0.0875	9.2747e(-05)	0.0146
400	0.0016	0.0550	1.5942e(-05)	0.0056
1000	0.0002	0.022	4.6018e(-07)	0.0009

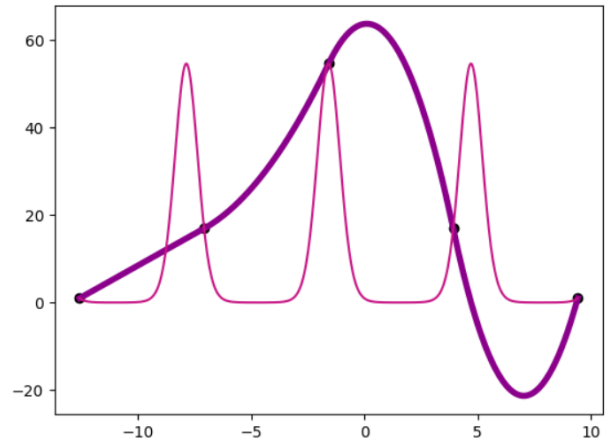
Tabela 4.1.2.1 Tabela błędów otrzymanych dla funkcji skleianej 2-ego stopnia w zależności od liczby węzłów oraz typu warunku brzegowego

W powyższej tabeli (4.1.2.1) możemy zauważyć że im większa liczba węzłów, tym mniejszy jest błąd maksymalny. Porównując warunki brzegowe, mniejsze błędy otrzymujemy dla warunku splajn zaciskany.

Największe różnice w wykresach w zależności od użytego warunku brzegowego otrzymujemy dla 5 węzłów.



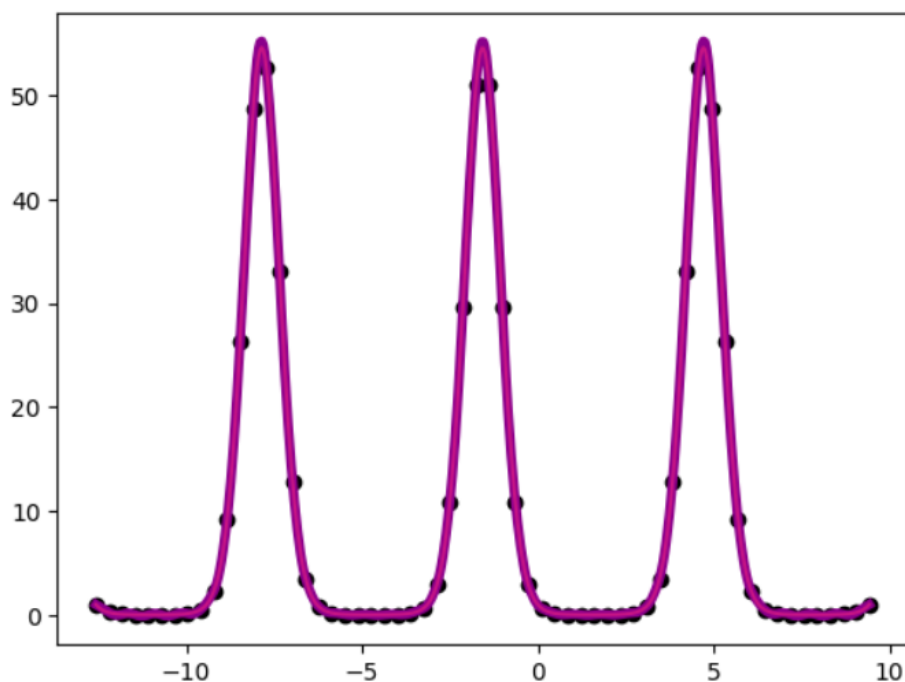
Wykres 4.1.2.1 Wykres dla 5 węzłów dla splajnu naturalnego



Wykres 4.1.2.2 Wykres dla 5 węzłów dla splajnu zaciskowego

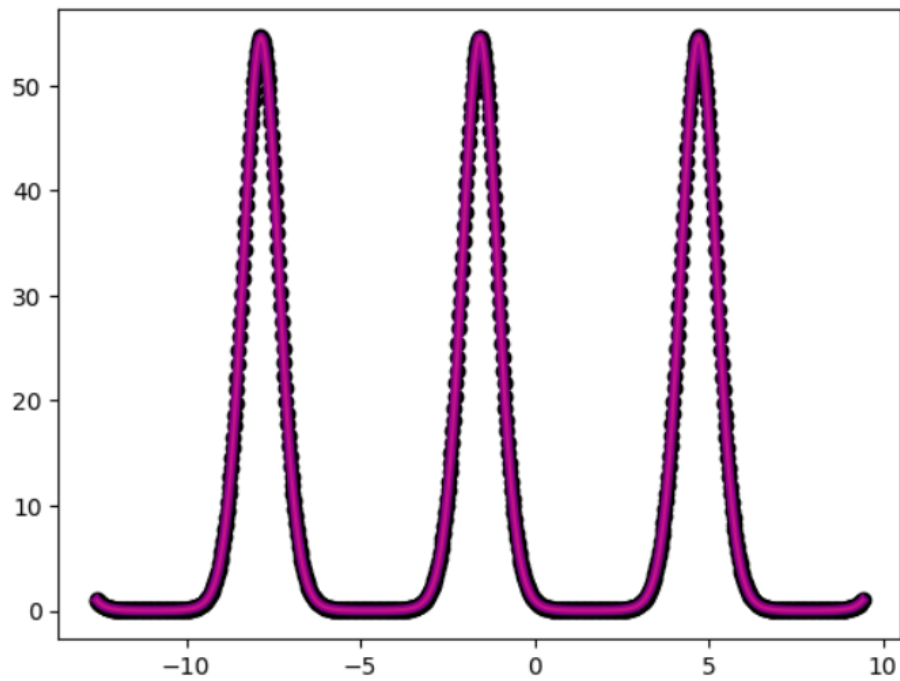
Jak widać powyżej, wykresy różnią się na pierwszym przedziale.

Wykres otrzymanego wielomianu zaczyna pokrywać się z wykresem podanej funkcji dla liczby 60 węzłów, dla obu warunków brzegowych.



Wykres 4.1.2.3 Wykres dla liczby 60 węzłów, dla splajnu zaciskanego

Najmniejszy błąd maksymalny otrzymujemy dla liczby 1000 węzłów dla splajnu zaciskanego.



Wykres 4.1.2.4 Wykres dla liczby 1000 węzłów, dla splajnu zaciskanego

4.2 Funkcja sklejana 3-ego stopnia

Jest to funkcja $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ zdefiniowana na przedziale $[a, b]$ za pomocą kilku funkcji 3-ego stopnia, z których każda określona jest na jednym z określonych podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ to węzły interpolacyjne. Funkcje te łączone są w taki sposób, że wartość funkcji sklejaney w każdym węźle x_i jest równa wartości funkcji interpolującej dla tego węzła, oraz funkcja sklejana jest ciągła w klasie C^2 . Współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i możemy wyznaczyć za pomocą funkcji interpolowanej i jej pochodnych.

Dopełnieniem funkcji sklejaney są warunki brzegowe, które określają jak ma się zachować funkcja sklejana na końcach przedziałów. W moich eksperymentach wykorzystałam warunek naturalny oraz warunek sześcienny (*ang. cube*)

Warunek naturalny polega na ustawieniu drugiej pochodnej funkcji sklejaney na końcach przedziału interpolacji równą zero. Funkcja sklejana z warunkiem naturalnym jest gładka na całym przedziale interpolacji.

Warunek sześcienny polega na ustawieniu trzeciej pochodnej funkcji sklejaney na końcach przedziału równą trzeciej pochodnej funkcji przechodzącej przez 4 pierwsze/ostatnie punkty.

4.2.1 Obliczenia

Do interpolacji funkcją sklejaną 3-ego stopnia został użyty wzór:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i \in [1, \dots, n - 1] \quad (4.2.1.1)$$

gdzie każdy segment $S_i(x)$ jest interpolującym wielomianem drugiego rzędu w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Poniższe obliczenia wykonywane są dla $i \in [1, \dots, n - 1]$.

Funkcja jest funkcją sklejaną 3-ego stopnia, gdy spełnia następujące warunki:

$$d) S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 1]$$

$$e) S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 2]$$

$$f) S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 2]$$

$$g) S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), \quad i \in [1, \dots, n - 2]$$

Funkcja $S_i(x)$ jest funkcją sześcienną, więc $S''_i(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

Niech

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (4.2.1.2)$$

Więc funkcję $S''_i(x)$ możemy zapisać w postaci liniowej zależności:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} + S''_i(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (4.2.1.3)$$

Całkujemy dwukrotnie funkcję (4.2.1.3) i otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} x^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x) \quad (4.2.1.4)$$

gdzie C i D to stałe całkowania, które wyliczamy z warunków interpolacji.

Po wyliczeniu C i D otrzymujemy:

$$C = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6} \quad (4.2.1.5)$$

$$D = \frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \quad (4.2.1.6)$$

Wstawiając (4.2.1.5) i (4.2.1.6) do (4.2.1.4):

$$\begin{aligned} S_i(x) = & \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \\ & + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) \end{aligned} \quad (4.2.1.7)$$

Wyliczamy $S''_i(x)$ z warunku ciągłości pierwszej pochodnej f , więc różniczkujemy $S_i(x_i)$:

$$S'_i(x_i) = -\frac{h_i}{3} S''_i(x_i) - \frac{h_i}{3} S''_i(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \quad (4.2.1.8)$$

Niech

$$\sigma_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i) \quad (4.2.1.9)$$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad (4.2.1.10)$$

z (4.2.1.8) otrzymujemy:

$$S'_i(x_i) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (4.2.1.11)$$

$$S'_{i-1}(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) \quad (4.2.1.12)$$

Z warunku ciągłości e oraz (4.2.1.11) i (4.2.1.12):

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (4.2.1.13)$$

Po przekształceniach (4.2.1.13) otrzymujemy:

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.2.1.14)$$

Czyli:

$$\begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{bmatrix} \quad (4.2.1.15)$$

Po wyliczeniu wartości σ_i wyliczamy współczynniki:

$$\begin{aligned} d_i &= f(x_i) \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \\ b_i &= 3\sigma_i \\ a_i &= \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i} \end{aligned} \quad (4.2.1.16)$$

Warunki brzegowe:

1) Splajn naturalny

$$S''(x_i) = S''(x_n) = 0 \quad (4.2.1.17)$$

Z (4.2.1.9) i (4.2.1.17):

$$S''(x_1) = S_1''(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0 \quad (4.2.1.18)$$

$$S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0 \quad (4.2.1.19)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.1.20)$$

2) Splajn sześcienny

$C_1(x)$ - funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty

$C_n(x)$ - funkcja sześcienna przechodząca przez ostatnie 4 punkty

Więc:

$$S'''(x_1) = C'''_1(x_1) \wedge (14) S'''(x_n) = C'''_n(x_n) \quad (4.2.1.21)$$

Jako że $C(x)$ jest funkcją sześcienną, to C'''_1 i C'''_n są stałymi i mogą być określone bez znajomości $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i} \quad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i} \quad (4.2.1.22)$$

Różniczkując wzór na $S''(x)$ w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ i korzystając z (4.2.1.21):

$$S'''(x_1) = C'''_1(x_1) = \frac{6}{h_1} (\sigma_2 - \sigma_1) = 6\Delta_1^{(3)} \quad (4.2.1.23)$$

$$S'''(x_n) = C'''_n(x_n) = \frac{6}{h_{n-1}} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}^{(3)} \quad (4.2.1.24)$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2 \Delta_1^{(3)} \quad (4.2.1.25)$$

$$h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2 \Delta_1^{(3)} \quad (4.2.1.26)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2 \Delta_1^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.2.1.27)$$

W celu realizacji ćwiczenia, została zaimplementowana funkcja interpolująca 3-ego stopnia *cubic_spline* zgodnie z powyżej wyprowadzonymi wzorami.

4.2.2 Wyniki

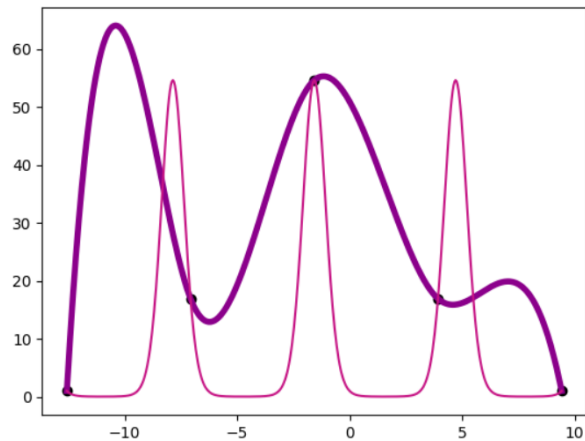
Poniżej przedstawiłam wyniki eksperymentu funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Błąd średniokwadratowy liczony jest dla 500 punktów. Na wykresach kolorem różowym przedstawiony jest wykres funkcji początkowej, natomiast kolorem fioletowym przedstawiony jest wykres wielomianu otrzymanego w wyniku eksperymentu. Można zauważyć że wykres wielomianu jest grubszy od wykresu funkcji początkowej. Jest to spowodowane tym, by dla większej liczby węzłów, gdy wykresy bardzo na siebie nachodzą, można było zauważyć otrzymany wielomian.

Liczba Węzłów	Splajn naturalny		Splajn sześcienny	
	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny
5	734.2822	48.7152	1035.3324	63.984
7	465.3677	53.7763	424.7301	51.3450
10	250.9903	46.3960	269.5197	46.0792
15	55.2474	16.6546	55.5333	16.5959
20	23.0571	20.5367	23.0505	20.5367
30	2.7971	6.5626	2.7987	6.5626
60	0.0030	0.2836	0.0031	0.2836
100	2.117e(-05)	0.0222	3.551e(-05)	0.0474
150	7.255e(-07)	0.0054	2.717e(-06)	0.0201
250	1.368e(-08)	0.0012	1.560e(-07)	0.0067
400	2.547e(-10)	0.0001	4.936e(-09)	0.0010
1000	1.110e(-13)	1.731e(-06)	1.114e(-13)	1.731e(-06)

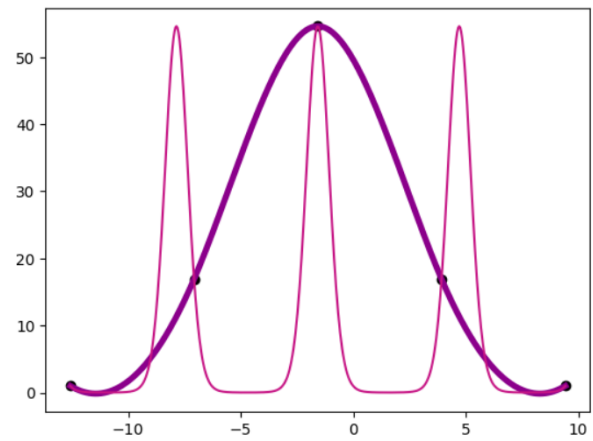
Tabela 4.2.2.1 Tabela błędów otrzymanych dla funkcji sklejanej 3-ego stopnia w zależności od liczby węzłów oraz typu warunku brzegowego

W powyższej tabeli (4.2.2.1) możemy zauważyć że im większa liczba węzłów, tym mniejszy jest błąd maksymalny. Porównując warunki brzegowe, mniejsze błędy otrzymujemy dla warunku splajn naturalny dla liczby węzłów większej od 100.

Największe różnice w wykresach w zależności od użytego warunku brzegowego otrzymujemy dla 5 węzłów.



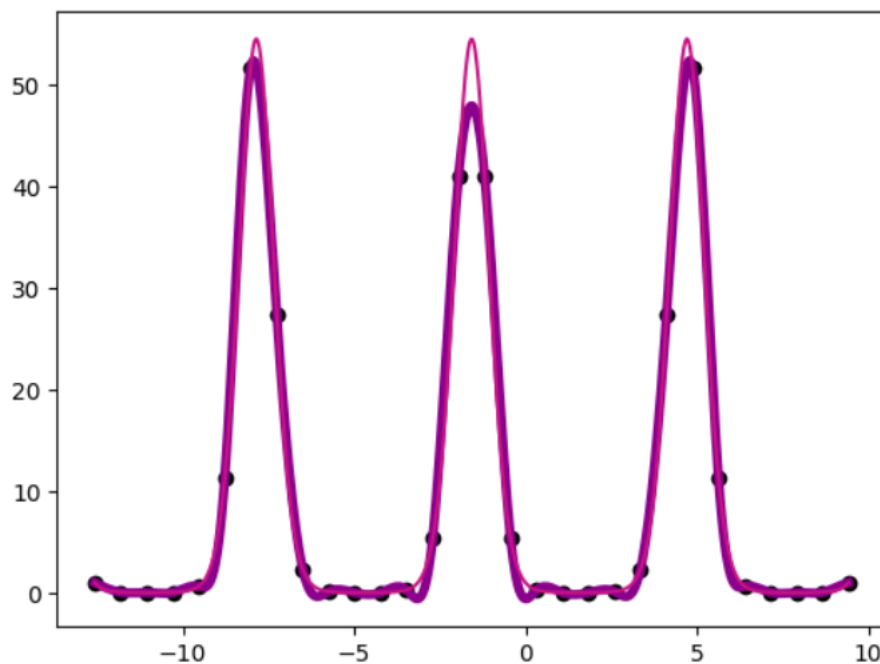
Wykres 4.2.2.1 Wykres dla liczby 5 węzłów, dla splajnu sześciennego



Wykres 4.2.2.2 Wykres dla liczby 5 węzłów, dla splajnu naturalnego

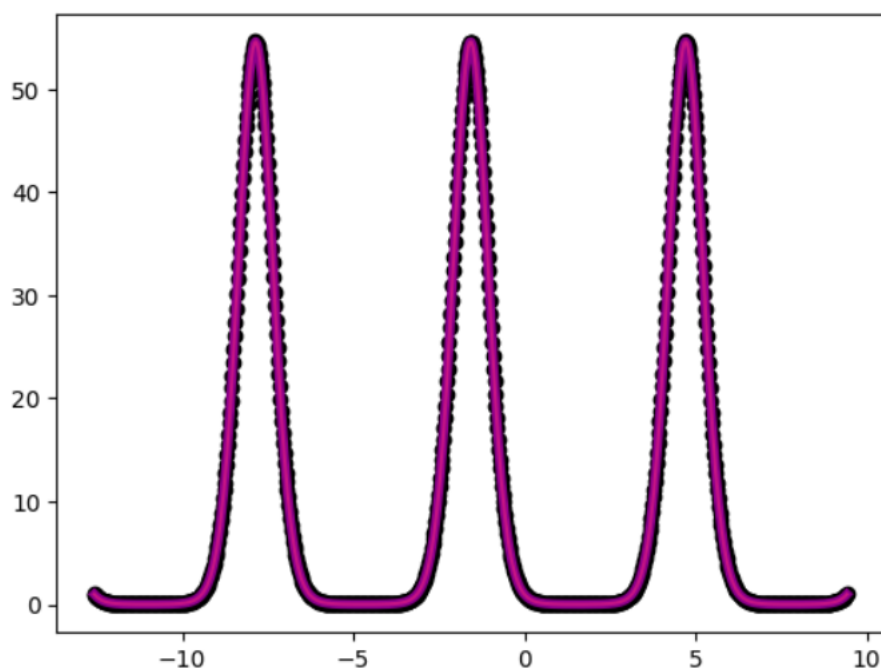
Jak widać powyżej, wykresy funkcji różnią się od siebie.

Najmniejszy błąd maksymalny (dla małej liczby węzłów, tj. $t_j < 60$) otrzymujemy dla 30 węzłów dla obu warunków brzegowych.



Wykres 4.2.2.3 Wykres dla liczby 30 węzłów, dla splajnu naturalnego

Najmniejszy błąd maksymalny otrzymujemy dla liczby 1000 węzłów dla splajnu naturalnego.



Wykres 4.2.2.4 Wykres dla liczby 1000 węzłów, dla splajnu naturalnego

5. Wnioski

Zarówno dla funkcji sklejanych drugiego stopnia, jak i funkcji sklejanych trzeciego stopnia, porównując oba warunki brzegowe (dla funkcji 2st - naturalny oraz zaciskany (*ang. clamped*); dla funkcji 3st - naturalny oraz sześcienny (*ang. cube*)) możemy zauważyć w tabelach 4.1.2.1 oraz 4.2.2.1, że wartości błędów różnią się od siebie znacząco dla małej liczby węzłów (tj. $7 >$).

Wykresy funkcji sklejanej trzeciego stopnia różnią się znacząco w zależności od wybranego warunku brzegowego (wykresy 4.2.2.1 oraz 4.2.2.2). Warunek sześcienny sprawia że wykres funkcji interpolującej zawiera w sobie duże oscylacje w każdym przedziale.

Analizując zestawienia błędów (tabele 4.1.2.1 oraz 4.2.2.1), możemy zauważyć że funkcje trzeciego stopnia są bardziej efektywne niż funkcje drugiego stopnia.

Porównując interpolacje funkcjami sklejanymi i interpolacje w zagadnieniu Lagrange'a oraz Hermite'a, możemy zauważyć, że efekt Rungego nie występuje w interpolacji funkcjami sklejanymi. Ponadto, dla funkcji sklejanych nie zauważamy błędów spowodowanych obliczeniami komputera (wykresy nie "rozjeżdżają się"), tak jak było to widoczne dla interpolacji Lagrange'a lub Hermite'a.

Interpolacja funkcjami sklejanymi jest dokładniejsza od interpolacji w zagadnieniu Lagrange'a oraz Hermite'a. Dokładność wzrasta łącznie ze wzrostem liczby węzłów, czego zdecydowanie nie można było zauważyć dla poprzednich interpolacji.

6. Bibliografia

- [1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu "Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"
- [2] Michoń Weronika, "Funkcja Sklejana", Wrocław 2020
http://www.math.uni.wroc.pl/~p-wyk4/mag2020/refs/Sem_mag2_WMichon.pdf
- [3] Johannes Zeman, "Worksheet 5: Spline Interpolation Solutions",
Stuttgart University 2017
https://www2.icp.uni-stuttgart.de/~icp/mediawiki/images/1/10/SS_2017_PC_ws5_solution.pdf