Metody obliczeniowe w nauce i technice

Interpolacja Hermite’a

Aga Patro
pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

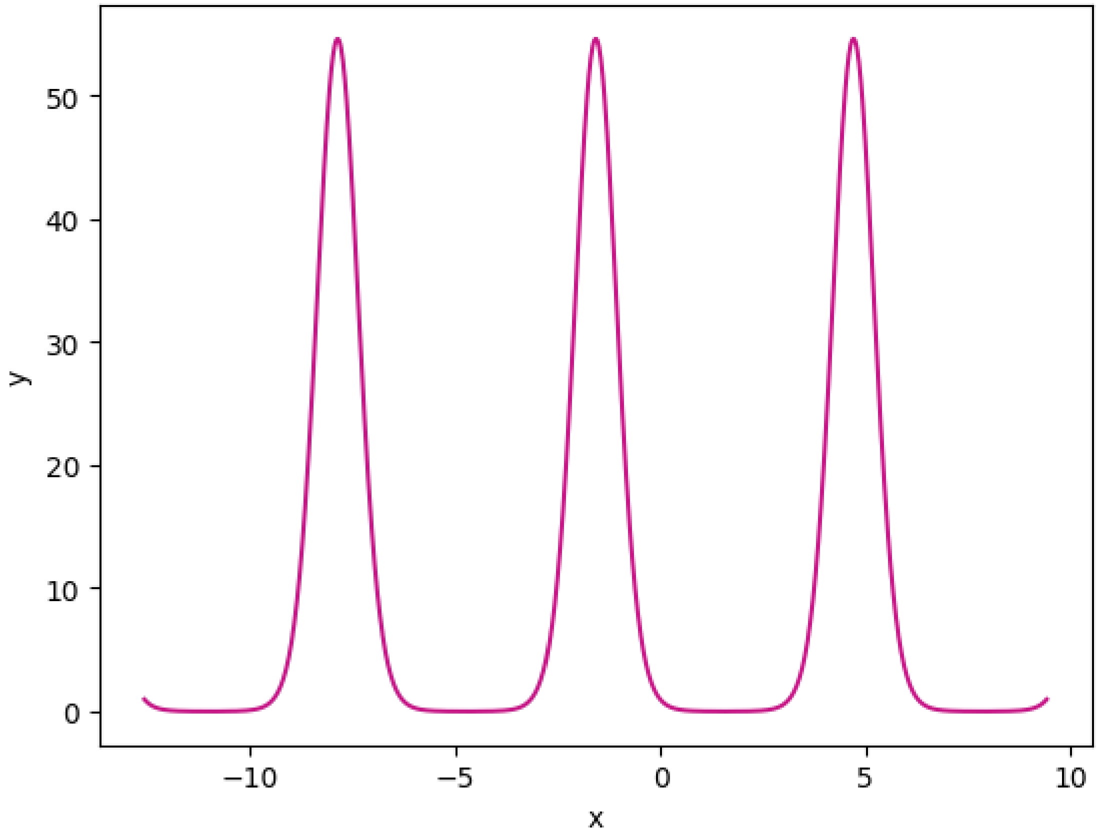
System: Debian Linux Parrot OS x64
Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz
Pamięć RAM: 16 GB
Środowisko: Jupyter Notebook
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Celem ćwiczenia było, by dla zadanej funkcji $e^{-4sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π wyznaczyć wielomian interpolujący dla zagadnienia Hermite'a. Interpolację należało wykonać dla różnej liczby węzłów oraz dla ich różnego rozmieszczenia: równomiernego oraz zgodnie z zerami Czebyszewa.

3. Opis problemu

Mamy zadaną funkcję $e^{-4sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π.



Wykres 3.1. Wykres funkcji e^(-4sin(x))

4. Realizacja ćwiczenia

Aby zrealizować zadane zadanie, napisałam dwie funkcje wyznaczające rozmieszczenie węzłów: równolegle i według zer Czebyszewa oraz funkcję wyznaczającą wielomian interpolujący metodą Hermite'a dla bazy Newtona. Eksperyment wykonałam na różnej liczby węzłów, dla różnych metod oraz różnego rozmieszczenia tj. cztery wywołania programu dla każdej liczby węzłów. Dla każdego wywołania wyznaczyłam błąd średniokwadratowy oraz błąd maksymalny.

5. Wyniki ćwiczenia

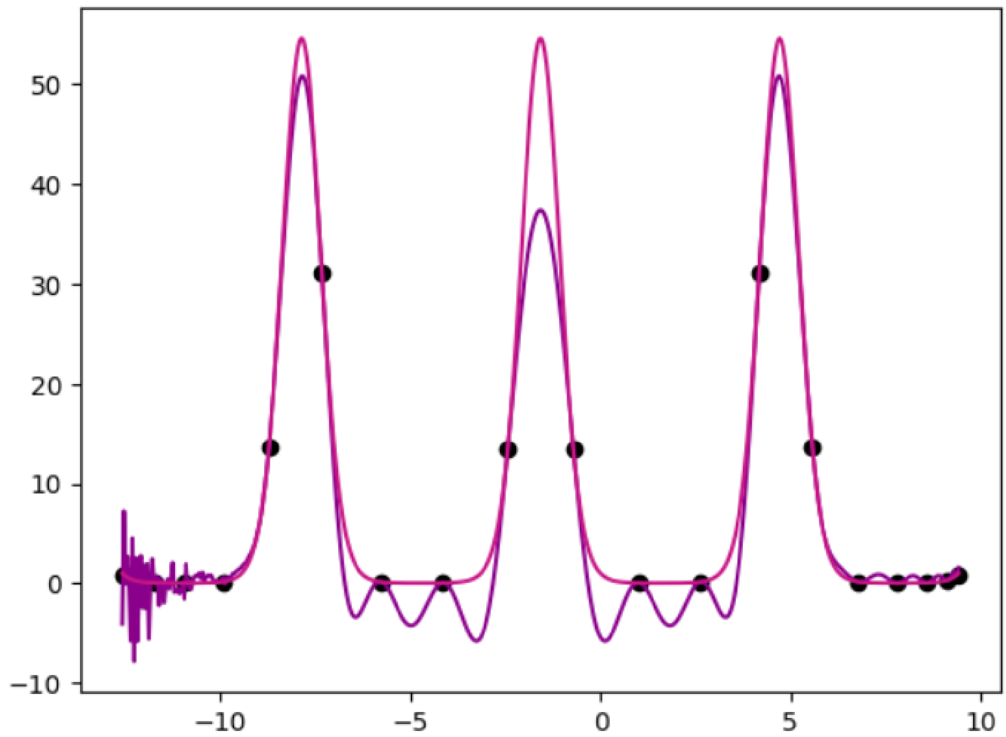
W poniższych tabelach oraz na wykresach przedstawiłam wyniki otrzymanych eksperymentów. Błędy średniokwadratowe były wyliczane dla 500 punktów. Na wykresach kolorem różowym pokazany jest wyznaczone wielomian, natomiast kolorem fioletowym ukazana jest badana funkcja.

Liczba węzłów	**Węzły równoległe**		**Węzły Czebyszewa**	
	Błąd średniokwadratowy	**Błąd maksymalny**	**Błąd średniokwadratowy**	**Błąd maksymalny**
3	861.3128	51.0081	838.0752	50.6669
4	377.0045	55.1630	365.2399	55.9963
5	4703.1496	149.1526	3248.1580	100.3927
7	379.7049	36.9694	346.3791	46.2660
10	3826.2878	233.0750	260.9617	54.3634
15	426377061.1113	98979.2409	82.3367	24.90433
20	18501935871464.18	24614157.0055	14.8196	17.2075
30	4.27692e+21	481705714036	2.121e+16	2210078379.16
40	9.833e+30	3.8475e+16	9.1185e+30	3.8384e+16
50	5.4955e+45	1.1872e+24	4.0939e+45	1.2217e+24

Tabela 5.1. Wartości błędów uzyskanych przy użyciu metody Hermite'a

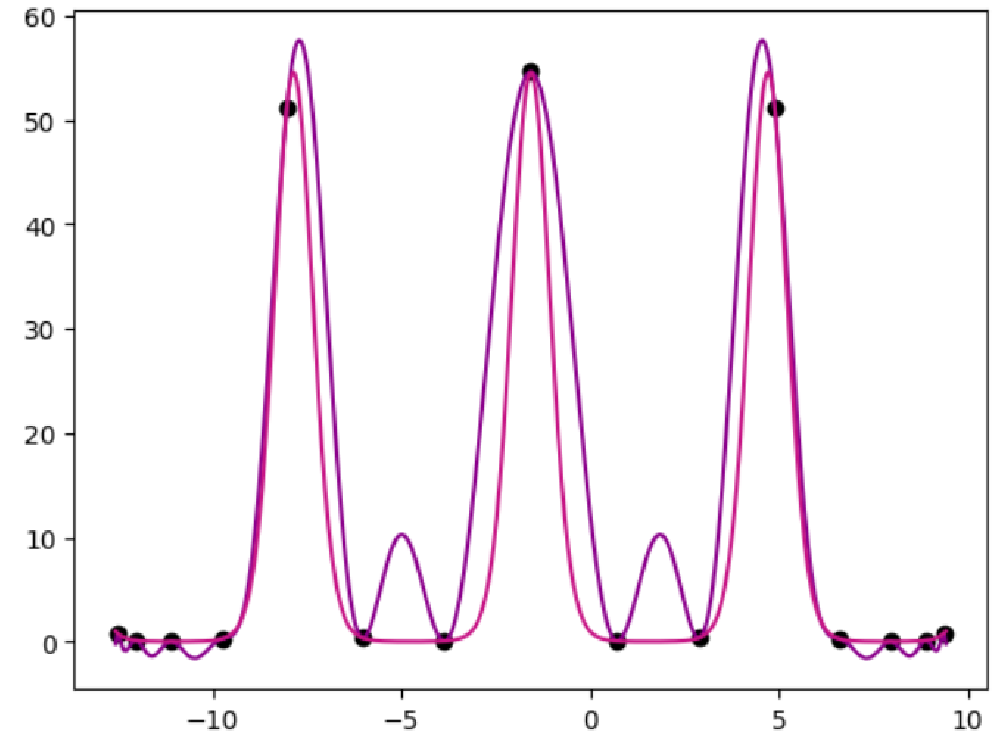
Jak widać z powyższej tabeli, od 10 węzłów błędy są kilkakrotnie większe dla równomiernego rozłożenia węzłów.

Najelpszy rezultat (najmniejszy błąd maksymalny) otrzymujemy dla 20 węzłów o rozłożeniu Czebyszewa. Niestety patrząc na poniższy wykres 5.1 można zauważyć że otrzymany wielomian “rozjeżdża” się z zadanymi węzłami. Może to być spowodowane problemami w obliczeniach numerycznych.



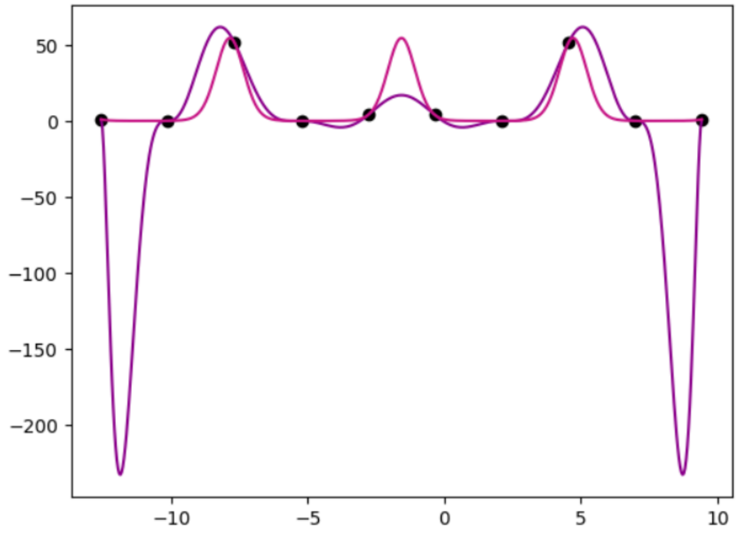
Wykres 5.1 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem Czebyszewa dla 20 węzłów

Drugi najlepszy rezultat otrzymujemy dla 15 węzłów, również o rozmieszczeniu Czebyszewa. Dla tej ilości węzłów funkcje nie "rozjeżdżają" się.

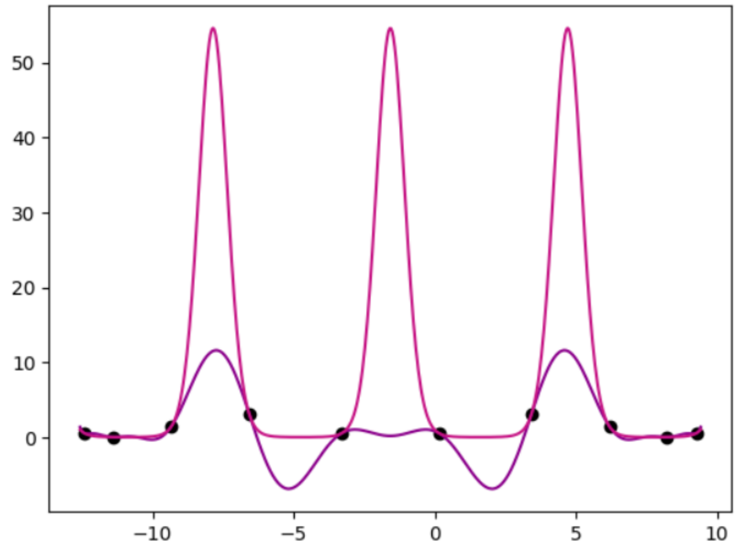


Wykres 5.2 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem Czebyszewa dla 15 węzłów

Efekt Rungego jest widoczny już dla 10 węzłów dla rozmieszczenia równoległego.



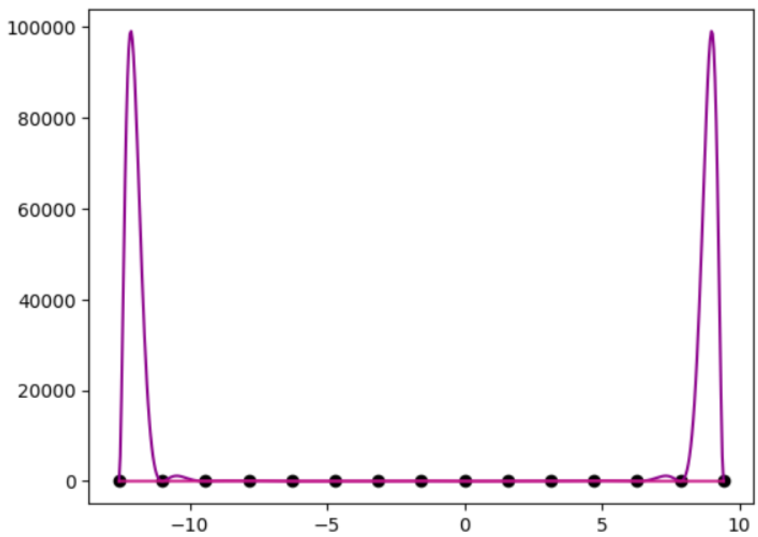
Wykres 5.3 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem równoległym dla 10 węzłów



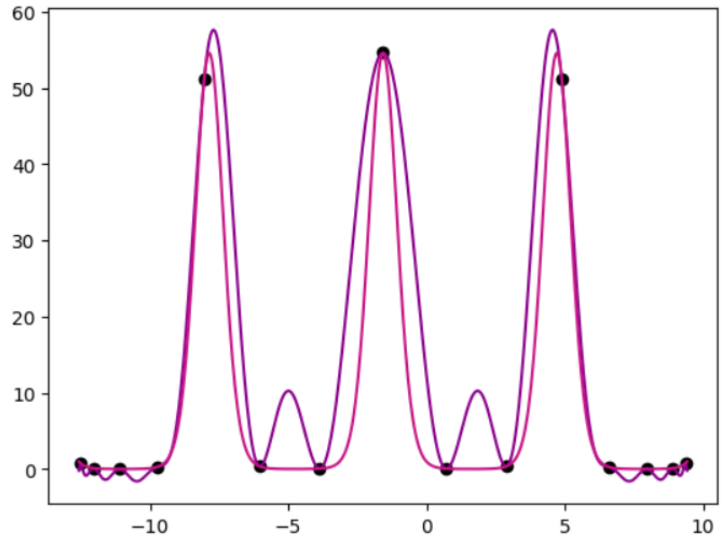
Wykres 5.4 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem Czebyszewa dla 10 węzłów

Jak widać na wykresach 5.3 oraz 5.4, w porównaniu z wykresem dla rozłożenia równoległego, dla Czebyszewa efekt Rungego nie jest widoczny.

Jednakże najbardziej widoczny efekt Runge'go (dla małej liczby węzłów) otrzymujemy dla 15 węzłów dla rozłożenia równoległego. Dla rozłożenia Czebyszewa efekt jest praktycznie niewidoczny.



Wykres 5.5 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem równoległym dla 15 węzłów



Wykres 5.6 Wykres dla metody Hermite'a z rozmieszczeniem Czebyszewa dla 15 węzłów

6. Wnioski

Z przeprowadzonych eksperymentów można wywnioskować że dla interpolacji Hermite'a rozłożenie Czebyszewa jest efektywniejsze w niwelowaniu efektu Rungego niż dla rozłożenie równoległe.

Dla dużej liczby węzłów (> 20) interpolacja staje się coraz mniej dokładna, a efekt Rungego rośnie wraz ze zwiększaniem liczby węzłów.

Powołując się na wykres 5.2, najlepsze wyniki otrzymamy wykorzystując interpolację Hermite'a przy rozłożeniu 15 węzłów według Czebyszewa.

Porównując dwie poprzednie metody (Newtona i Lagrange'a) najlepiej dopasowaną funkcję zwracała metoda interpolacji Newtona przy rozłożeniu 30 węzłów Czebyszewa.

Dla wszystkich trzech metod bardziej dopasowane funkcje otrzymujemy przy używaniu węzłów Czebyszewa.

7. Uwagi

Dla rozłożenia Czebyszewa, wykresy dla większej liczby węzłów sugerują, że punkty są wyznaczone na krańcach zadanego przedziału. Jak widać po wykresach dla mniejszej liczby węzłów, jest to nieprawda. Dzieje się tak dlatego, że punkty na wykresach są na tyle duże że pokrywają się z linią wykresu, lecz nie znajdują się na jej końcu.