Metody obliczeniowe w nauce i technice

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Aga Patro
pt_15:00

1. Specyfikacja sprzętu i narzędzia wykorzystane w realizacji

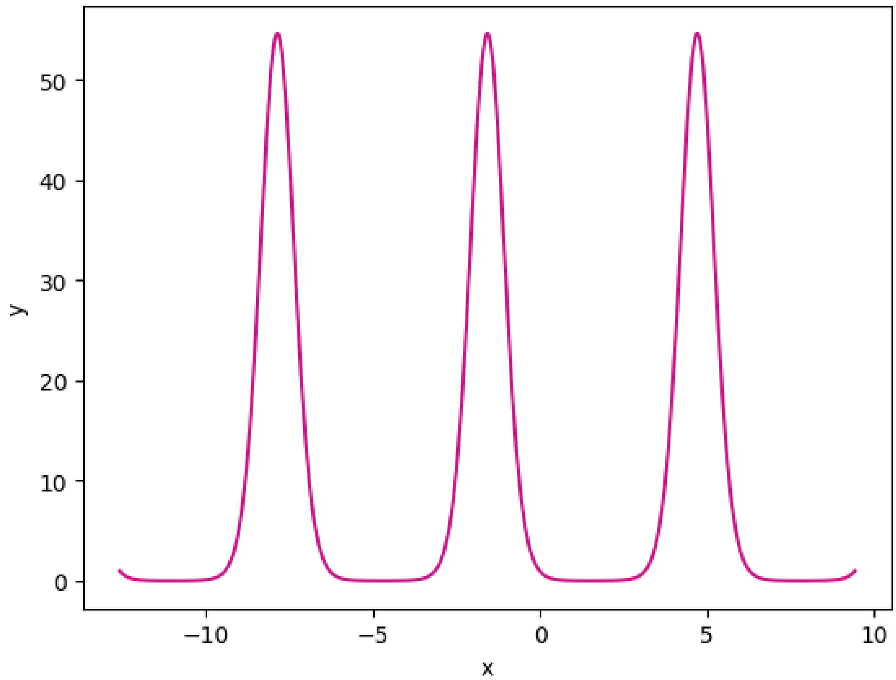
System: Debian Linux Parrot OS x64
Procesor: AMD Ryzen 5 4500U, 6 rdzeni, 6 wątków, 4.00GHz
Pamięć RAM: 16 GB
Środowisko: Jupyter Notebook
Język: Python 3

2. Temat ćwiczenia

Celem ćwiczenia było, by dla zadanej funkcji $e^{-4sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

3. Dane

Mamy zadaną funkcję $e^{-4sin(x)}$ na przedziale od -4π do 3π.



Wykres 3.1. Wykres funkcji e^(-4sin(x))

4. Realizacja i wyniki ćwiczenia

W celu realizacji ćwiczenia napisałam funkcję *approximation_func* która odpowiada za aproksymację mojego zagadnienia.
Błędy maksymalne policzyłam korzystając ze wzoru: $max_{i=0,..,1000}|f_1(x_i) - f_2(x_i)|$, a błędy średniokwadratowe ze wzoru: $\frac{1}{1000}\sqrt{\Sigma_{i=0}^{1000}(f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}$, gdzie f_1 to funkcja aproksymowana a f_2 to funkcja aproksymująca. Punkty x_i są równolegle rozmieszczone na określonym przedziale.
Ponadto zbadałam aproksymację dla różnej funkcji liczby bazowych dla 30 punktów. W tabelach 4.1.1 oraz 4.1.2 tym eksperymentom odpowiadają wiersze wyróżnione kolorem **różowym**.
Następnie przeprowadziłam aproksymację dla różnej liczby punktów i liczbie wielomianów bazowych równej 15. W tabelach 4.1.1 oraz 4.1.2 tym eksperymentom odpowiadają kolumny wyróżnione kolorem **zielonym**.
Na zamieszczonych wykresach kolorem **fioletowym** zaznaczona jest funkcja aproksymująca, a **różowym** funkcja aproksymowana.

4.1 Tabele błędów

Max stopień	Liczba punktów					
	10	15	20	25	30	35
3	54.32	200.91	69.40	81.91	54.33	83.16
5	124.92	103.19	50.04	680.87	185.72	510.71
6	62.76	62.69	70.62	1423.52	115.46	112.41
8	53.59	53.59	53.6	53.59	53.66	53.59
11	86.56	2899.91	822.42	13686.15	47129.54	173429.17
15	34.55	3745.47	4705.08	90360.0	311106.19	968759.89
20	41.10	133.46	1106.45	1476.99	36070.17	64623.76
25	39.78	28.1	1138.59	15933.52	7982.44	3244.46
30	40.07	25.95	214.0	961.45	4686.68	5319.0
35	40.02	25.5	83.72	636.5	7062.6	4106.23

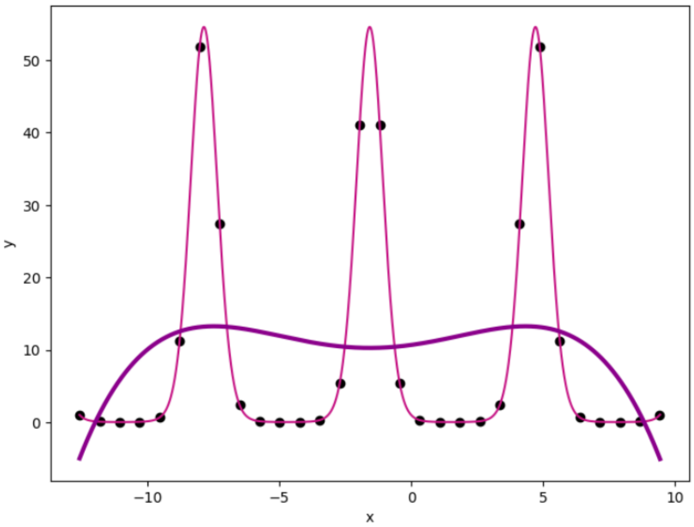
Tabela 4.1.1 Tabela błędów maksymalnych otrzymanych dla funkcji aproksymującej w zależności od liczby punktów oraz stopnia wielomianu

Max stopień	Liczba punktów					
	10	15	20	25	30	35
3	1.04e06	1.25e07	1.72e06	2.06e06	1.48e06	2.47e06
5	2.27e06	2.68e06	8.68e05	3.75e07	3.45e06	1.89e07
6	8.02e05	8.26e05	1.31e06	1.39e08	1.97e06	1.7e06
8	3.47e05	3.47e05	3.47e05	3.47e05	3.48e05	3.47e05
11	1.08e06	4.56e08	3.64e07	7.07e09	8.81e10	1.02e12
15	2.42e05	8.59e08	7.49e08	2.2e11	2.36e12	2.36e13
20	2.09e05	9.41e05	4.8e07	4.32e07	2.56e10	8.3e10
25	2.07e05	1.11e05	3.24e07	5.20e09	1.31e09	3.06e08
30	2.06e05	8.83e04	1.18e06	2.08e07	3.18e08	4.13e08
35	2.05e05	8.49e04	2.19e05	5.43e06	6.06e08	2.01e08

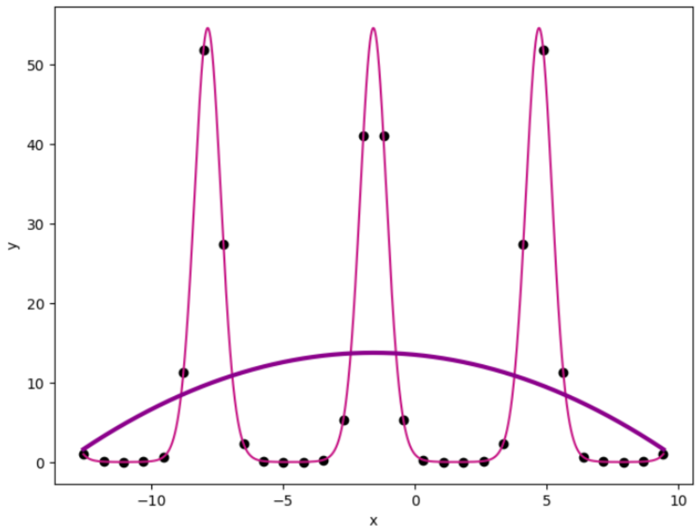
Tabela 4.1.2 Tabela błędów średniokwadratowych otrzymanych dla funkcji aproksymującej w zależności od liczby punktów oraz stopnia wielomianu

Analizując powyższe tabele możemy zauważyć, że dla stałej liczby wielomianów bazowych wartości błędów rosną wraz ze wzrostem liczby punktów. Ponadto możemy zauważyć, że dla badanej liczby punktów równej 30, nie można jednoznacznie określić tendencji wzrostowej lub malejącej.

4.2 Aproksymacja dla różnej funkcji liczby bazowych

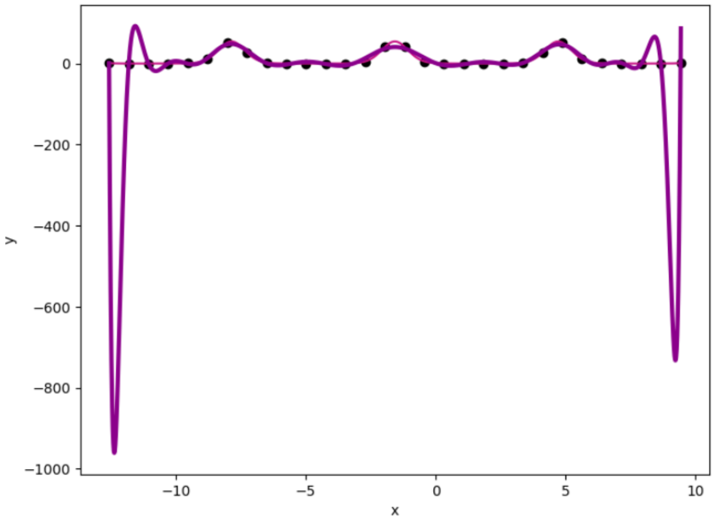


Wykres 4.2.1 Wykres dla 30 punktów i 5 wielomianów bazowych

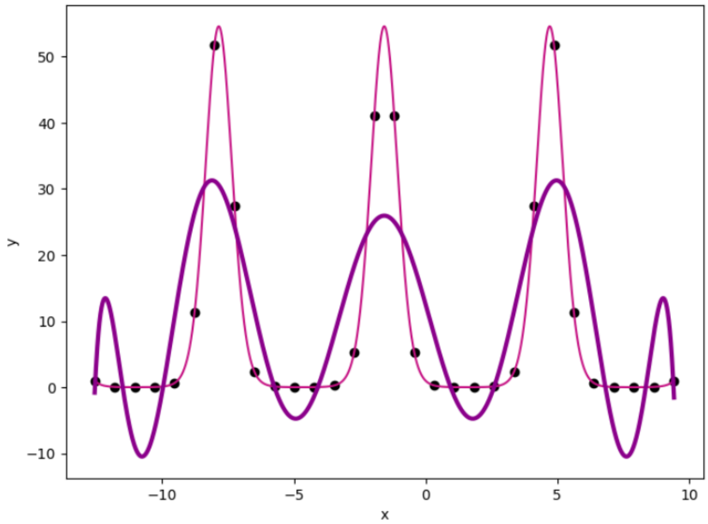


Wykres 4.2.2 Wykres dla 30 punktów i 3 wielomianów bazowych

Na powyższych wykresach (4.2.1) i (4.2.2) można zauważyć, że dla małej liczby wielomianów bazowych aproksymacja jest nieefektywna.

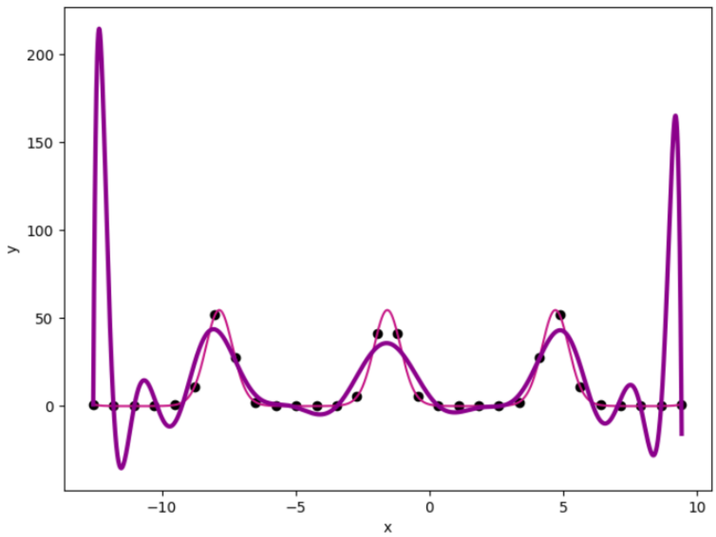


Wykres 4.2.3 Wykres dla 30 punktów i 25 wielomianów bazowych



Wykres 4.2.4 Wykres dla 30 punktów i 11 wielomianów bazowych

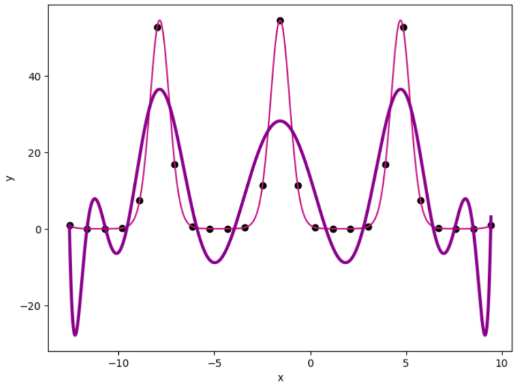
Porównując wykresy 4.2.3 oraz 4.2.4, można zauważyć, że dla liczby wielomianów bazowych większej niż połowa liczby punktów, funkcja aproksymująca nie spełnia swojej roli.



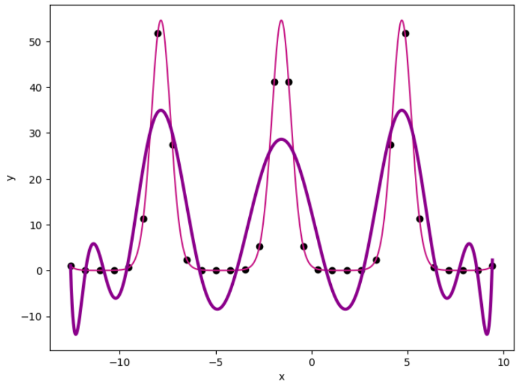
Wykres 4.2.5 Wykres dla 30 punktów i 20 wielomianów bazowych

Efekt Rungego pojawia się dla liczby 20 wielomianów bazowych.

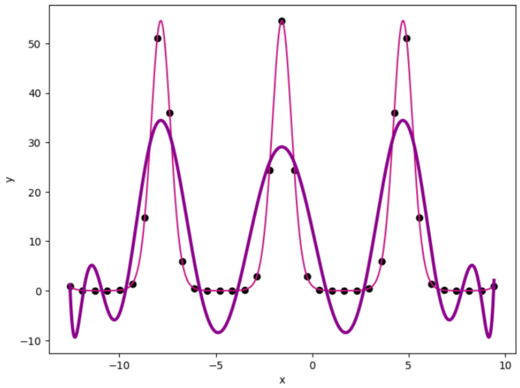
4.3 Aproksymacja dla różnej liczby punktów dyskretyzacji



Wykres 4.3.1 Wykres dla 25 punktów i 15 wielomianów bazowych

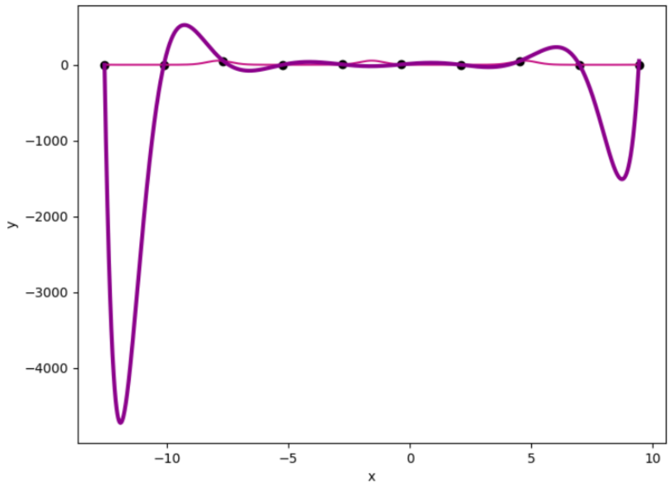


Wykres 4.3.2 Wykres dla 30 punktów i 15 wielomianów bazowych

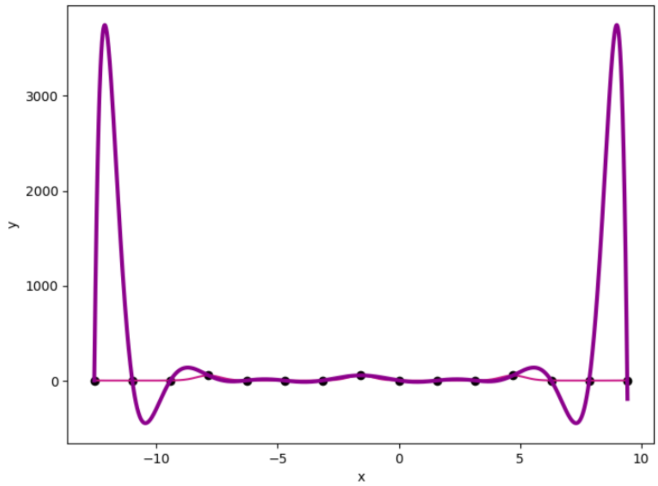


Wykres 4.3.3 Wykres dla 35 punktów i 15 wielomianów bazowych

Porównując powyższe wykresy (4.3.1, 4.3.2, 4.3.3), możemy zauważyć że otrzymana funkcja aproksymująca różni się tylko wartością ekstremów w punktach przegięć. Im więcej punktów dyskretyzacji, tym wyższa wartość minimów lokalnych.



Wykres 4.3.4 Wykres dla 10 punktów i 15 wielomianów bazowych



Wykres 4.3.5 Wykres dla 15 punktów i 15 wielomianów bazowych

Na powyższych wykresach 4.3.4 oraz 4.3.5 możemy zauważyć, że dla liczby punktów mniejszej bądź równej liczbie wielomianów bazowych, aproksymacja nie ma sensu.

Porównując aproksymację dla różnej liczby punktów dyskretyzacji z aproksymacją dla różnej funkcji liczby bazowych, możemy zauważyć że kształt funkcji aproksymującej bardziej zależy od liczby wielomianów bazowych niż liczby punktów dyskretyzacji.

5. Wnioski

Dla liczby węzłów mniejszej niż 8, funkcja ma bardzo słabą dokładność i nie ma sensu jej używać (Wykresy 4.2.1 oraz 4.2.2).

Kiedy maksymalny stopień wielomianu jest większy od liczby węzłów aproksymacji to funkcja aproksymująca nie spełnia swojej roli. Aby przybliżenie stało się dokładne, to liczba punktów musi być większa od liczby funkcji bazowych. (Wykresy 4.2.3, 4.3.4 i 4.3.5)

Kształt funkcji aproksymującej zależy od liczby wielomianów bazowych, a nie liczby punktów dyskretyzacji.

6. Bibliografia

[1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu "Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"

[2] Aproksymacja wielomianowa, Wikipedia
https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja_wielomianowa