微积分随堂练习

雷振杰

2026 年 2 月 6 日

1　题目：计算不定积分

求下列不定积分：

$$I = \int \frac{1}{1+\sin x}\, dx \tag{1}$$

解：

利用万能代换公式（Universal Substitution），设 $t = \tan\frac{x}{2}$，则有：

- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

将上述代换代入原式：

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ &= \int \frac{2}{1+t^2+2t}\, dt \\ &= \int \frac{2}{(1+t)^2}\, dt \end{aligned}$$

最终计算得出：

$$I = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C \tag{2}$$

2 应用题：防空洞截面优化

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图 3-19）. 截面的面积为 $5\,\mathrm{m}^2$. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

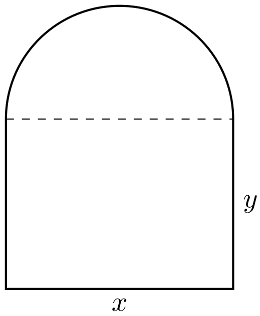

图 3-19

解：

列出周长与面积：

$$L = 2y + x + \frac{1}{2}\pi x$$
$$S = xy + \frac{\pi}{8} = 5$$

通过 S 找到 y 的 x 表达式：

$$y = \frac{5}{x} - \frac{\pi}{8}x^2 \tag{3}$$

将表达式代入周长 L，求出周长的 x 函数：

$$L = \frac{10}{x} + \frac{\pi}{4}x + x \tag{4}$$

对 L 求导一阶导、二阶导

$$L' = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2}$$
$$L'' = \frac{20}{x^3}$$

令 $L' = 0$，得到 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$（唯一驻点）；

将其代入 L''，得 $L'' > 0$，即 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为 L 的极小值点、最小值点。

故，当底宽 x 为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时，截面的周长最小。

思考方向：

- **在确定的式子减少未知数、结合题目需要的变量以明确关系**
- **通过隐藏细节，从整体比例找关系解复杂方程**

3 题目：含参函数的零点个数

设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为 ______________________ .

解：

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 求得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=e$ 为唯一驻点。

$$\begin{aligned}x\in(0,e)&,f'(x)>0\\x=e&,f'(x)=0\\x\in(e,+\infty)&,f'(x)<0\end{aligned}$$

由此可知，$x=e$ 为 $f(x)$ 的唯一极大值点，即最大值点，且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$$

又因为极大值 $k>0$，因此，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的零点个数为 2 个。

思考方向：

- **通过导数判断函数单调性与极值得到零点个数信息**

4 题目：导数与微分中值定理的综合应用

2.(1) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（ ）.

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

解：

- 因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增。
- 由此可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 上可导。

适用于拉格朗日中值定理：

$$\exists \xi \in (a,b),\ 使得 f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

将 $1,0$ 代入 b,a，有

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$$

由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，必有

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$$

因此，答案为 B。

思考方向：

- **拉格朗日中值定理**：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$。
- **二阶导数的意义**：若 $f''(x)>0$，则一阶导数 $f'(x)$ 在区间内是单调递增的。
- **结合判断**：通过比较 $0<\xi<1$ 时导数值的大小关系，即可得出选项。