

# 微积分随堂练习

pvzercoffee

2026 年 2 月 5 日

## 1 题目：计算不定积分

求下列不定积分：

$$I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

**解：**

利用万能代换公式 (Universal Substitution), 设  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则有：

- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

将上述代换代入原式：

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{1+t^2+2t} dt \\ &= \int \frac{2}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

最终计算得出：

$$I = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C \quad (2)$$

## 2 应用题：防空洞截面优化

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图 3-19）. 截面的面积为  $5\text{ m}^2$ . 问底宽  $x$  为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

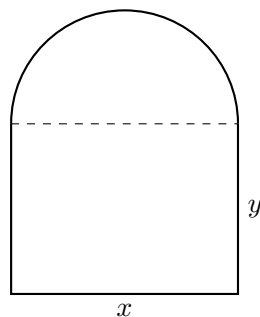


图 3-19

解：