

# 微积分随堂练习

pvzercoffee

2026 年 2 月 5 日

## 1 题目：计算不定积分

求下列不定积分：

$$I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

解：

利用万能代换公式 (Universal Substitution)，设  $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则有：

- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

将上述代换代入原式：

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{1+t^2+2t} dt \\ &= \int \frac{2}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

最终计算得出：

$$I = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C \quad (2)$$

## 2 应用题：防空洞截面优化

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图 3-19）。截面的面积为  $5 \text{ m}^2$ 。问底宽  $x$  为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

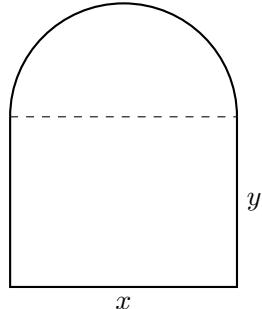


图 3-19

解：

列出周长与面积：

$$\begin{aligned} L &= 2y + x + \frac{1}{2}\pi x \\ S &= xy + \frac{\pi}{8}x^2 = 5 \end{aligned}$$

通过  $S$  找到  $y$  的  $x$  表达式：

$$y = \frac{5}{x} - \frac{\pi}{8}x^2 \quad (3)$$

将表达式代入周长  $L$ ，求出周长的  $x$  函数：

$$L = \frac{10}{x} + \frac{\pi}{4}x + x \quad (4)$$

对  $L$  求导一阶导、二阶导

$$\begin{aligned} L' &= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2} \\ L'' &= \frac{20}{x^3} \end{aligned}$$

令  $L' = 0$ ，得到  $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$  (唯一驻点)；

将其代入  $L''$ ，得  $L'' > 0$ ，即  $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$  为  $L$  的极小值点、最小值点。

故，当底宽  $x$  为  $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$  时，截面的周长最小。