Piotr Węsiora 05.11.2019

Algorytmy numeryczne - zadanie 1
Sumowanie szeregów potęgowych

Opracowanie dotyczy dokładności sposobów aproksymowania funkcji przy użyciu szeregu Taylora w kontekście obliczeń numerycznych na liczbach zmiennoprzecinkowych o podwójnej precyzji na przykładzie funkcji aproksymowanej w punkcie .

Sposób obliczeń

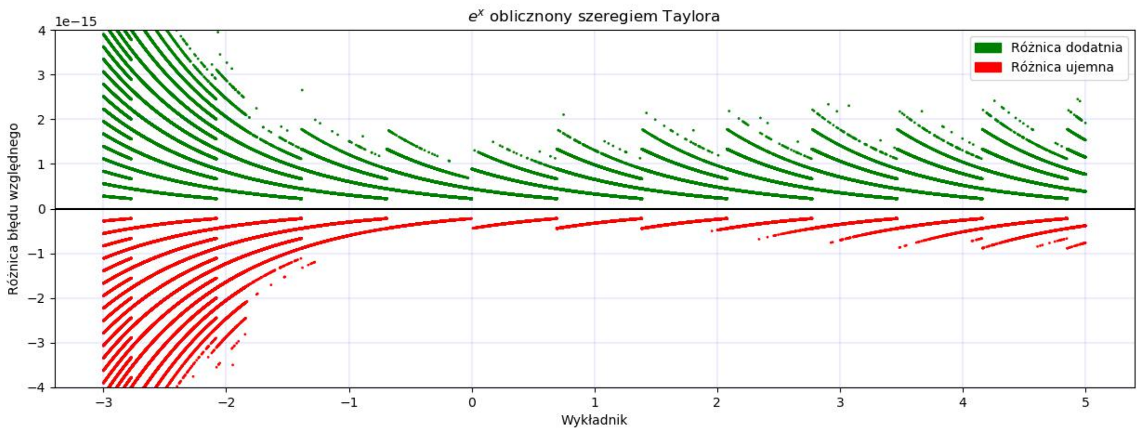
- Obliczenia przeprowadzono w programie napisanym w języku Python 3.6.
- Wyniki obliczeń były porównywane z wynikami bibliotecznej funkcji wbudowanej $Math.exp()$.
- W każdym z zakresów wyróżniono milion argumentów mających przybliżono jednakowe interwały.
- Dane są agregowano w 10 elementowe zbiory.

- Do obliczenia elementów szeregu potęgowego obliczanego bezpośrednio ze wzoru Taylora zastosowano wzór: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- Do obliczenia elementów szeregu potęgowego na podstawie poprzedniego elementu zastosowano wzór: $S_{n+1} = \frac{S_n\, x^n}{n+1}$

Hipoteza 1 – Sumowanie wyrazów szeregu Taylora od końca daje dokładniejsze wyniki

Wynik przedstawiono jako różnicę błędu względnego sumowania od tyłu i błędu względnego sumowania w przód. W wypadku różnicy dodatniej można stwierdzić większą dokładność sumowania od tyłu.
Zakres argumentów: $< -3.0; 5.0 >$.

Wyniki



Rys.1. Różnica błędów względnych między sumowaniem kolejnych wyrazów od przodu, a sumowaniem wyrazów od tyłu.

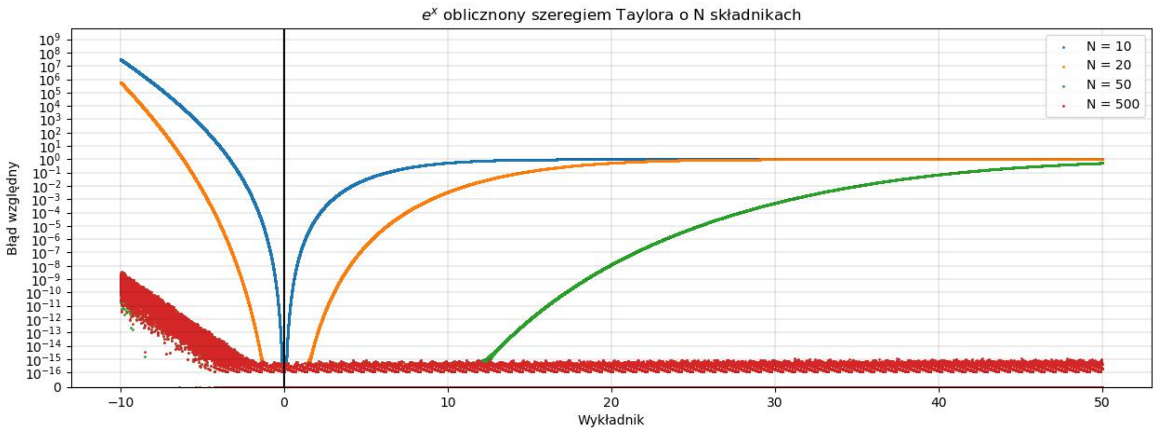
Analiza wyników i wnioski

Na wykresie widocznym jest, że dla całego przedziału argumentów istnieją wyniki zarówno dodatnie jak i ujemne, jednak widać przewagę dodatnich wyników dla wykładników większych od -1.2.
Dla wykładników mniejszych od -1.2 otrzymano mieszane wyniki bez widocznej przewagi wyników dodatnich bądź ujemnych.
Z otrzymanych wyników można uznać słuszność hipotezy dla dodatnich wykładników i niewielkich negatywnych wykładników

Hipoteza 2 – Używając rozwinięcia wokół 0, przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy przy małych argumentach

Wyniki otrzymano dokonując aproksymacji przy użyciu szeregu Taylora w punkcie **0**. Kolejne szeregi mają następującą liczbę składników: $\{10,\ 20,\ 50,\ 500\}$.
Zakres argumentów: $< -10; 50 >$.

Wyniki



Rys.2. Błąd względny w zależności od liczby składników szeregu Taylora.

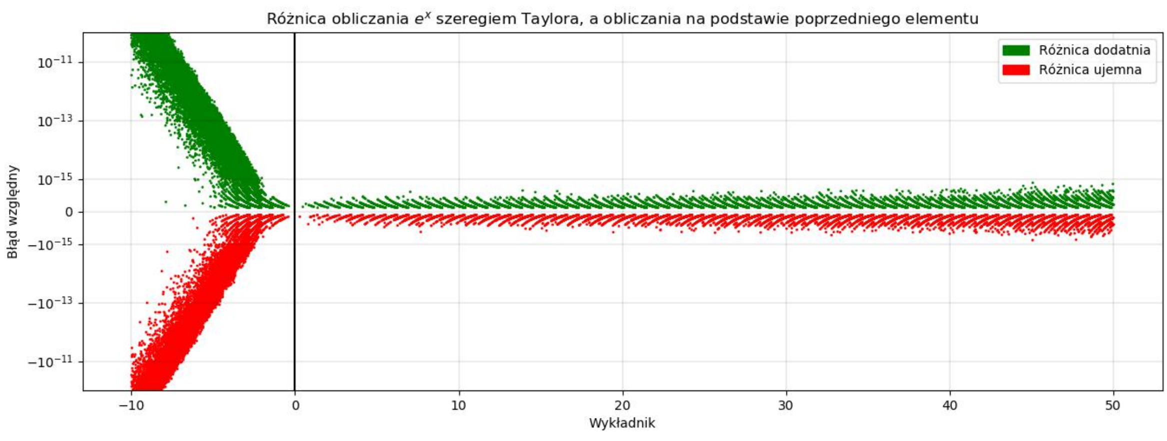
Analiza wyników i wnioski

Odczytując wartości z wykresu widać, że dla wszystkich liczb składników najmniejszy błąd względny uzyskano dla argumentów w okolicy 0 i błąd rośnie wraz z wzrostem wartości bezwględnej wykładnika. Argumenty ujemne mają szybciej rosnący błąd od wykładników dodatnich.
Na podstawie wyników należy uznać słuszność hipotezy.

Hipoteza 3 – Sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru

Wynik przedstawiono jako różnicę błędu względnego obliczania elementów na podstawie poprzedniego i błędu względnego przy obliczaniu elementów bezpośrednio ze wzoru. W wypadku różnicy dodatniej można stwierdzić większą dokładność obliczeń wykonancych na podstawie poprzedniego elementu.
Zakres argumentów: $< -10; 50 >$.

Wyniki



Rys.3. Różnica błędów względnych między obliczeniami na podstawie poprzedniego elementu, a bezpośrednio ze wzoru.

Analiza wyników i wnioski

W przedziale $< -0.5; 0.5 >$ obie metody mają tą samą dokładność natomiast dla pozostałych argumentów wyniki są mieszane. Dla argumentów ujemnych istnieje 54% więcej wyników o dodatniej różnicy (253660 wartości dodatnich, a 164680 wyników ujemnych) natomiast dla wykładników dodatnich jest ich o 1,36% więcej (168416 wyników dodatnich i 166151wyników ujemnych).
Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego elementu daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru.

PYTANIE 1 – JAK ZALEŻY DOKŁADNOŚĆ OBLICZEŃ(BŁĄD) OD LICZBY SUMOWANYCH SKŁADNIKÓW

W celu odpowiedzenia na pytanie wykorszystano wyniki z weryfikacji hipotezy 2 i zamieszczonego wykresu (rys.2).

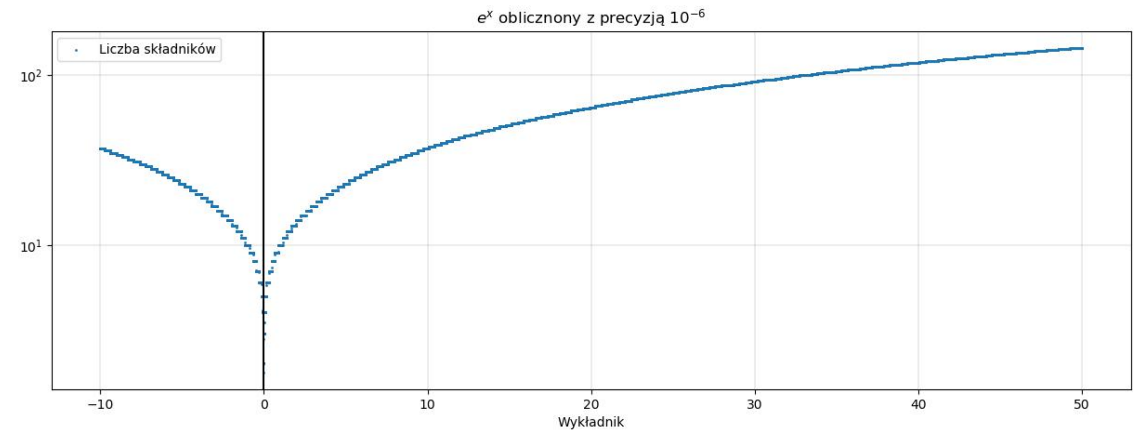
Analiza wyników i wnioski

Z danych przedstawionych na wykresie widać, że w przedziale $< 10; 20 >$ błąd względny rośnie najszybciej dla składników $N = 10$, a wolniej dla większych liczb składników.
Dane zaprezentowane na wykresie pokazują, że mniejsze liczby składników skutkują znacząco szybciej rosnącymi błędami względnymi.

PYTANIE 2 – ILE SKŁADNIKÓW W ZALEŻNOŚCI OD ARGUMENTU NALEŻY SUMOWAĆ ABY OTRZYMAĆ DOKŁADNOŚĆ 10^{-6}.

Przeprowadzono obliczenia sumując kolejne składniki aż do otrzymania precyzji 10^{-6}. Ilość składników dla kolejnych argumentów została przedstawiona na wykresie.
Zakres argumentów: $< -10; 50 >$.

Wyniki



Rys.4. Ilość składników wymaganych do osiągnięcia precyzji 10^{-6} .

Analiza wyników i wnioski

Dla wykładników w przedziale $< -0.1; 0.1 >$ ilość wymaganych składników jest najmniejsza i nie przekracza 10. Zwiększająca się wartośc bezwzględna wykładnika skutkuje rosnącą liczbą składników wykorzystanych do osiągniącią odpowiedniej precyzji.
Wraz z rosnącą wartością bezwzględną wykładnika należy stosować większą ilość składników by osiągnąć zadowalającą dokładność.