METODO DELLA SOSTITUZIONE

L'IDEA È INDOVINARE LA FORMA DELLA SOLUZIONE, POI USARE L'INDUZIONE MATEMATICA PER PROVARE CHE LA SOLUZIONE È QUELLA INTUITA E RISOLVERE RISPETTO ALLE COSTANTI.

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE CI SIA UNA COSTANTE C PER LA QUALE $T(m) \leq c \cdot m$ PER UNA COSTANTE C OPPORTUNA.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

SIA $T(m) = m + T\left(\frac{m}{2}\right)$

$T(1) = 1$

ANDIAMO A VEDERE SE $T(m) \leq c \cdot m$:

PASSO BASE:

$T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \quad \forall c \geq 1$

IPOTESI INDUTTIVA:

$$\left.\begin{array}{l} m = k \\ T(k) \leq c \cdot k \quad \forall k < m \end{array}\right\} \text{SUPPONGO SIA VERO}$$

PASSO INDUTTIVO:

USANDO L'IPOTESI INDUTTIVA SOSTITUIAMO $T\left(\frac{m}{2}\right)$ CON $c \cdot \left(\frac{m}{2}\right)$ POICHÉ STIAMO ASSUMENDO CHE LA RELAZIONE VALGA ANCHE PER $\frac{m}{2}$:

$$T(m) \leq m + c \cdot \left(\frac{m}{2}\right)$$

$$T(m) \leq m + \frac{cm}{2}$$

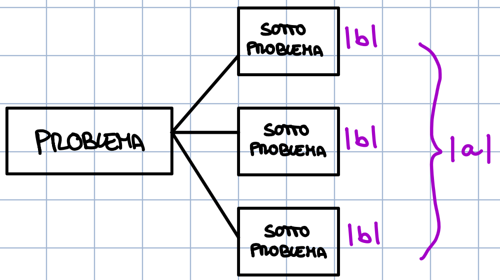
RACCOLGO m

$$T(m) \leq m\left(1 + \frac{c}{2}\right)$$

$$T(m) = m + T\left(\frac{m}{2}\right)$$

TEOREMA MASTER

TECNICA DIVIDE ET IMPERA: ALGORITMI BASATI SU QUESTA TECNICA, DIVIDE IL PROBLEMA DI DIMENSIONE m IN a SOTTOPROBLEMI DI DIMENSIONE m/b. RISOLVE I SOTTOPROBLEMI RICORSIVAMENTE E RICOMBINA LE SOLUZIONI.



SIA $f(m)$ IL TEMPO PER DIVIDERE E RICOMBINARE ISTANZE DI DIMENSIONE m.

m = DIMENSIONE DEL PROBLEMA

a = NUMERO DI SOTTOPROBLEMI CON DIMENSIONE $\frac{m}{b}$

$f(m)$ = TEMPO PER DIVIDERE E RICOMBINARE ISTANZE

ENUNCIATO INFORMALE:

$$\boxed{n^{\log_b a} \quad \text{vs} \quad f(n)}$$

QUALE VA PIÚ VELOCEMENTE A INFINITO?

- STESSO ORDINE ASINTOTICO $\longrightarrow$ $T(m) = \Theta(f(m) \cdot \log m)$ *
- SE UNA DELLE DUE È POLINOMIALMENTE PIÚ VELOCE $\longrightarrow$ $T(m)$ HA L'ORDINE ASINTOTICO DELLA PIÚ VELOCE.

RELAZIONE DI RICORRENZA:

$$T(m) = \begin{cases} a\,T(m/b) + f(m) & \text{SE } m > 1 \\ \Theta(1) & \text{SE } m = 1 \end{cases}$$

!! ATTENZIONE

- a e b COSTANTI
- $a \geq 1$
- $b > 1$
- $f(m)$ FUNZIONE POSITIVA

CON POSSIBILI SOLUZIONI:

1. $T(m) = \Theta(m^{\log_b a})$ SE $f(m) = O(m^{\log_b a - \varepsilon})$ CON $\varepsilon > 0$

2. $T(m) = \Theta(m^{\log_b a} \log m)$ SE $f(m) = \Theta(m^{\log_b a})$

3. $T(m) = \Theta(f(m))$ SE $f(m) = \Omega(m^{\log_b a + \varepsilon})$ CON $\varepsilon > 0$ e $a \cdot f(\frac{m}{b}) \leq c \cdot f(m)$ CON $c > 1$ e m SUFFICIEN. GRANDE

ESEMPIO

SIA $T(m) = m + 2T(m/2)$, INDIVIDUIAMO LE VARIE PARTI GUARDANDO LA RELAZIONE DI RICORRENZA, INDIVIDUANDO COSÍ:

$$T(m) = \underbrace{m}_{\boxed{f(m)}} + \underbrace{2T(m/2)}_{\boxed{a \cdot T(\frac{m}{b})}}$$

CON $a = 2$, $b = 2$

CON $a = 2$ e $b = 2$

SVILUPPIAMO $m^{\log_b a} = m^{\log_2 2} = m^1 = m$ CHE ALL'INTERNO DELLA NOSTRA RELAZIONE DI RICORRENZA SAREBBE IL TERMINE $a \cdot T(\frac{m}{b})$.

ANDIAMO ADESSO A CONFRONTARE $f(m)$ VS $m^{\log_b a}$, IN QUESTO CASO SONO ENTRAMBE m, QUINDI COME DA DEF.* ABBIAMO:

$$T(m) = \Theta(f(m) \cdot \log m)$$ QUINDI $T(m) = \Theta(m \log m)$ ✓

ESEMPIO

$$T(m) = \underbrace{c}_{f(m)} + \underbrace{3T\left(\frac{m}{9}\right)}_{a \cdot T\left(\frac{m}{b}\right)}$$

CON $a = 3$ e $b = 9$

SVILUPPIAMO $m^{\log_b a} = m^{\log_9 3} = m^{\frac{1}{2}}$.

ABBIAMO $f(m) = c = O(1)$

VADO ADESSO A CONFRONTARE $\underbrace{f(m)}_{c}$ CON $\underbrace{m^{\log_b a}}_{m^{\frac{1}{2}}}$

POSSIAMO VEDERE CHE $c = O(m^{\frac{1}{2}})$ E SIAMO QUINDI NEL CASO <u>1</u>, QUINDI:

$$T(m) = \Theta\left(m^{\log_b a}\right) \quad \text{QUINDI} \quad T(m) = \Theta(m^{\frac{1}{2}}) \quad \text{QUINDI} \quad T(m) = \Theta(\sqrt{m})$$ ✓

ESEMPIO

$$T(m) = \underbrace{m}_{f(m)} + \underbrace{3T(m/9)}_{a \cdot T\left(\frac{m}{b}\right)}$$

$a = 2$
$b = 9$

$m^{\log_b a} = m^{\log_9 3} = m^{\frac{1}{2}}$

QUINDI ABBIAMO $f(m) = m$ E ABBIAMO $m^{\log_b a} = m^{\frac{1}{2}}$.

ADESSO PRENDENDO m E $m^{\frac{1}{2}}$ CI CHIEDIAMO: "COSA È m RISPETTO A $m^{\frac{1}{2}}$"? IN QUESTO CASO m CRESCE PIÚ VELOCEMENTE E ABBIAMO CHE

$$m = \Omega(m^{\frac{1}{2}})$$

LOWER BOUND, m SARÁ SEMPRE $\geq$ DI $m^{\frac{1}{2}}$

QUINDI PER IL CASO 3 DEL TEOREMA MASTER ABBIAMO: $T(m) = \Theta(f(m))$
OVVERO $T(m) = \Theta(m)$ ✓

ESEMPIO

ANDIAMO ADESSO AD ANALIZZARE UN CASO IN CUI NON POSSIAMO UTILIZZARE IL TEOREMA MASTER.

$$T(n) = \underbrace{n \log n}_{f(n)} + \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)} \qquad a = 2 \quad b = 2$$

$$n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

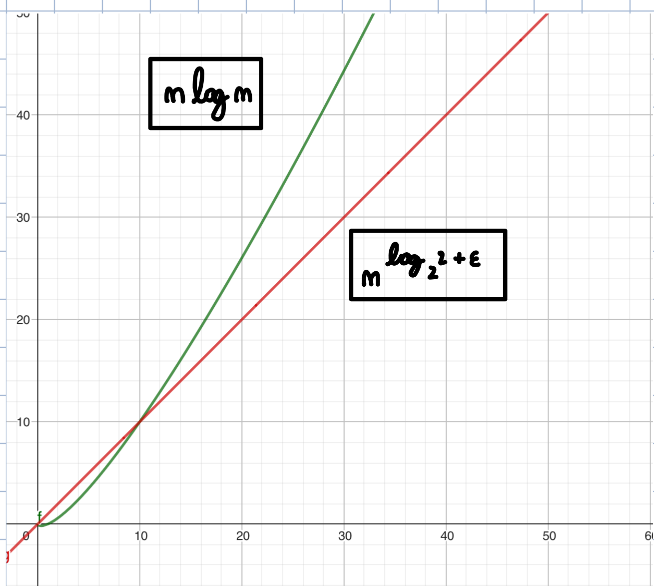
CONFRONTIAMO $\underbrace{n \log n}_{f(n)}$ CON $\underbrace{n^{\log_2 2}}_{n^{\log_b a}}$ E ABBIAMO CHE $\underbrace{f(n)}_{n \log n} = \omega\left(\underbrace{n^{\log_2 2}}_{n^{\log_b a}}\right)$

$n \log n$ É $O(n^{\log_2 2 - \varepsilon})$? ✗

$n \log n$ É $\Theta(n^{\log_2 2})$? ✗

$n \log n$ É $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$? ✗ PERCHÉ ?

PERCHE ESSENDO $n \log n = \omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon})$ OVVERO $n \log n < n^{\log_2 2 + \varepsilon}$ E AVENDO LA CLAUSOLA $\varepsilon > 0$, NON POTRÀ MAI ESSERE UGUALE E QUINDI SARÀ SEMPRE ω OVVERO $>$ STRETTO.



QUINDI NON POSSIAMO UTILIZZARE IL TEOREMA MASTER