SKOLEMIZZAZIONE

PROCESSO UTILIZZATO PER ELIMINARE I QUANTIFICATORI IN UNA FORMULA LOGICA CONVERTENDOLA IN UNA FORMA SEMANTICAMENTE EQUIVALENTE.

QUANTIFICATORE $\forall$, POSSIAMO ELIMINARLO $\dfrac{\forall x\, A[x]}{A[G]}$

QUANTIFICATORE $\exists$, POSSIAMO ELIMINARLO :

- SE IL QUANTIFICATORE NON COMPARE NELL' AMBITO DI $\forall$ ALLORA INTRODUCIAMO UNA COSTANTE DI SKOLEM MAI USATA

$$\frac{\exists x\, A(x)}{A(y)}$$

- SE INVECE COMPARE NELL' AMBITO DI $\forall$ AD ESEMPIO $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ INTRODUCIAMO UNA FUNZIONE DI SKOLEM

$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \rightarrow$ INTRODUCIAMO FUNZ. DI SKOLEM $\rightarrow \forall x\, P(x, f(x))$

IN BASE DA QUANTI $\forall$ DIPENDE

ESEMPIO COMPLESSO

Consideriamo:

$$\forall x \exists y \forall z \exists w\, (P(x,y) \wedge Q(z,w))$$

Applichiamo la skolemizzazione passo per passo:

1. $\exists y$: y dipende da x, quindi sostituiamo y con $f(x)$:

$$\forall x \forall z \exists w\, (P(x, f(x)) \wedge Q(z,w))$$

2. $\exists w$: w dipende da z e da x, quindi sostituiamo w con $g(x,z)$:

$$\forall x \forall z\, (P(x, f(x)) \wedge Q(z, g(x,z)))$$

Ora la formula è completamente skolemizzata.

ATTENZIONE

DIPENDEVA DA DUE QUANT. UNIV. QUINDI LA FUNZIONE HA COME PARAMETRI ENTRAMBI

TRASFORMAZIONE DA FOL IN CNF

1 ELIMINAZIONE DELLE IMPLICAZIONI

$A \rightarrow B$ DIVENTA $\neg A \vee B$. $A \Leftrightarrow B$ DIVENTA $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

2 NEGAZIONI ALL' INTERNO

$\neg(\forall x\ P)$ DIVENTA $\exists x\ \neg P$, $\neg(\exists x P)$ DIVENTA $\forall x\ \neg P$

$\neg(A \vee B)$ DIVENTA $\neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B)$ DIVENTA $\neg A \vee \neg B$

$\neg\neg A$ DIVENTA A

3 STANDARDIZZAZIONE DELLE VARIABILI, OGNI QUANT. HA UNA VARIABILE DIVERSA

$\forall x\ (\exists y\ (\text{ANIMALE}(y) \wedge \neg \text{AMA}(x, y))) \vee (\exists y\ \text{AMA}(y, x))$

$\forall x\ (\exists \underline{y}\ (\text{ANIMALE}(\underline{y}) \wedge \neg \text{AMA}(x, \underline{y}))) \vee (\exists \underline{z}\ \text{AMA}(\underline{z}, x))$

4 SKOLEMIZZAZIONE

$\forall x\ (\exists y\ (\text{ANIMALE}(y) \wedge \neg \text{AMA}(x, y))) \vee (\exists z\ \text{AMA}(z, x))$

DIVENTA

$\forall x\ (\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x))$

$F(x)$ e $G(x)$ SONO FUNZIONI DI SKOLEM

5 ELIMINAZIONE QUANTIFICATORI UNIVERSALI

$(\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x))$

6 FORMA NORMALE CONGIUNTIVA

$A \vee (B \wedge C)$ DIVENTA $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(\text{Animale}(F(x)) \wedge \text{Ama}(G(x), x)) \vee (\neg \text{Ama}(x, F(x)) \wedge \text{Ama}(G(x), x))$

7 TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE

$\{\text{ANIMALE}(F(x)),\ \text{AMA}(G(x), x)\}, \quad \{\neg \text{AMA}(x, F(x)),\ \text{AMA}(G(x), x)\}$

8 VARIABILI NUMERATE

$\{\text{ANIMALE}(F(x_1)),\ \text{AMA}(G(x_1), x_1)\}, \quad \{\neg \text{AMA}(x_2, F(x_2)),\ \text{AMA}(G(x_2), x_2)\}$

UNIFICAZIONE LOGICA

DEF

DUE TERMINI SONO UNIFICABILI SE ESISTE UNA SOSTITUZIONE CHE LI RENDE IDENTICI.

MGU → MOST, GENERAL, UNIFIER, È LA SOSTITUZIONE PIÚ GENERALE T.C. TUTTE LE ALTRE SOST. SONO ISTANZE DEL MGU.

PRENDE IN INPUT DUE TERMINI O FORMULE E CERCA UN INSIEME DI SOSTITUZIONI PER LE VARIABILI TALE CHE APPLICANDO QUESTE SOSTITUZIONI I TERMINI O FORMULE RISULTINO IDENTICI.

SE QUESTO INSIEME DI SOSTITUZIONI ESISTE, I TERMINI SONO DETTI UNIFICABILI. $\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$f(x, a)$ e $f(b, y)$

PER UNIFICARLI POSSIAMO USARE UNA SOSTITUZIONE COME:

- $x \to b$
- $y \to a$

FACENDO DIVENTARE I TERMINI ENTRAMBI $f(b, a)$. QUINDI L'UNIFICATORE È x/b e y/a.

OPPURE PRENDENDO L'ISTANZA KNOWS(JHON, x) e KNOWS(y, MOTHER(y)) L'UNIFICATORE È:

VARIABILE

COSTANTE

$\theta = \{x / \text{MOTHER}(\text{JHON}),\ y / \text{JHON}\}$

STANDARDIZZAZIONE

PRENDIAMO L'ISTANZA: KNOWS(JHON, X) e KNOWS(X, ELISA), NON VI È NESSUNA SOSTITUZIONE CHE POSSIAMO APPLICARE POICHÉ LA X CONDIVISA IN ENTRAMBI I PREDICATI CREA DEI CONFLITTI.
QUINDI APPLICHIAMO LA STANDARDIZZAZIONE IN CUI CHIAMIAMO IN MODO UNIVOCO LE VARIABILI IN OGNI PREDICATO, AD ESEMPIO POSSIAMO RINOMINARE LA X NEL SECONDO PREDICATO IN Y. DIVENTANDO:

KNOWS(JHON, X) e KNOWS(Y, ELISA)

POTENDO POI APPLICARE LA SOSTITUZIONE: {X/ELISA, Y/JHON}

ALTRI ESEMPI

1. Find the MGU of {p(b, X, f(g(Z))) and p(Z, f(Y), f(Y))}

- S0 => { p(b, X, f(g(Z))); p(Z, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ={Z/b}
- S1 => { p(b, X, f(g(b))); p(b, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ={X/ f(Y)}
- S2 => { p(b, f(Y), f(g(b))); p(b, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ= {Y/ g(b)}
- S_2 => { p(b, f(g(b)), f(g(b)); p(b, f(g(b)), f(g(b))}

Unified Successfully.

Unifier = {Z/b, X/ f(Y), Y/ g(b)}

2. Find the MGU of Q(a, g(x, a), f(y)), Q(a, g(f(b), a), x)}

- S0 => {Q(a, g(x, a), f(y)); Q(a, g(f(b), a), x)}
- SUBST θ= {x/f(b)}
- S1 => {Q(a, g(f(b), a), f(y)); Q(a, g(f(b), a), f(b))}
- SUBST θ= {y/ b}
- S1 => {Q(a, g(f(b), a), f(b)); Q(a, g(f(b), a), f(b))},
- **Successfully Unified.**
- **Unifier: [x/f(b), y/b].**

3. Find the MGU of {p(f(a), g(Y)) and p(X, X)}

- S0 = {p(f(a), g(Y)) and p(X, X)}
- SUBST θ= {X/ f(a)}
- S1 ={p(f(a), g(Y)), and p(f(a), f(a))}
- SUBST θ= {f(a)/ g(y) },
- **Unification failed.**

MI RESTANO $g(y)$ E $f(a)$ DA UNIFICARE MA NON POSSO FARLO XCHÉ LE FUNZIONI SONO DIVERSE $g \neq f$

COMPOSIZIONE DI SOSTITUZIONI

SIANO σ e t DUE SOSTITUZIONI:

- $\sigma = [t_1/x_1 \dots t_k/x_k]$
- $t = [s_1/y_1 \dots s_k/y_k]$

E SIA $\sigma t' = [t_1/x_1 \dots t_k/x_k, s_1/y_1 \dots s_k/y_k]$, ANDIAMO AD ELIMINARE DA $\sigma t'$:

- LE IDENTITÀ COME AD ESEMPIO x/x
- LE COPPIE s_i/y_i TALE CHE $y_i = \{x_1 \dots x_k\}$ OVVERO DA UN TERMINE DELLA SECONDA SOSTITUZIONE ANDIAMO AD UN TERMINE DELLA PRIMA.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

SIA $\sigma = [g(x,y)/w, x/y]$ e $t = [y/x, B/w, C/z]$

ABBIAMO QUINDI $\sigma t' = [g(x,y)/w, x/y, y/x, B/w, C/z]$, POSSIAMO VEDERE CHE NON CI SONO IDENTITÀ MA CI SONO COPPIE CHE DALLA SECONDA SOST. TORNANO ALLA PRIMA, COME:

$\sigma = [g(x,y)/w, x/y]$ e $t = [y/x, \cancel{B/w}, C/z]$

ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

Passaggi:

1. **Controllo dei simboli:**
   - Se t_1 e t_2 sono identici, sono già unificati. Restituisci un'unificazione vuota.
   - Se t_1 è una variabile e non appare in t_2, sostituisci t_1 con t_2.
   - Viceversa, se t_2 è una variabile e non appare in t_1, sostituisci t_2 con t_1.
   - Se t_1 e t_2 sono funzioni, confronta i loro simboli principali e i rispettivi argomenti.
2. **Occur-check:**
   - Una variabile non può essere sostituita con un termine che contiene se stessa. Ad esempio, $x = f(x)$ porta a un ciclo infinito.
3. **Ricorsione:**
   - Unifica gli argomenti delle funzioni corrispondenti. Se una coppia di argomenti fallisce nell'unificazione, allora l'unificazione generale fallisce.
4. **Composizione:**
   - Applica le sostituzioni trovate fino a quel punto ai termini ancora da unificare e prosegui.
5. **Termine:**
   - Se tutti i sottotermini sono unificati, restituisci il MGU. Altrimenti, dichiara che i termini non sono unificabili.