Costi uniformi (generalmente utilizzato)

- Tutti i passi elementari costano $\underline{1}$

Costi logaritmici

- Un operazione su un operando di valore x ha costo $\log x$

Casi

Caso peggiore: diamo una garanzia sul tempo di esecuzione, indichiamo con tempo(I) il tempo di esecuzione ovvero il numero di passi elementari eseguiti.

$$T_{worst}(n) = \max_{\text{istanze } I \text{ di dimensione } n} \{ \text{tempo}(I) \}$$

Caso media: tempo di esecuzione nel caso medio, ovvero sulle istanze di ingresso tipiche per il problema.

tempo di esecuzione dell' istanza

$$T_{avg}(n) = \sum_{\text{istanze } I \text{ di dimensione } n} \{ P(I) \cdot \text{Tempo}(I) \}$$

probabilità dell'istanza che assumo

Notazione asintotica

Complessità di un algoritmo espressa con una funzione $T(n)$

$T(n) = \#$ passi elementari eseguiti nel caso peggiore

$$T(n) = \begin{cases} 71\,n^2 + 100\lfloor n/4 \rfloor + 7 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 70\,n^2 + 150\lceil (n+1)/4 \rceil + 5 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

SCRIVIAMO CHE $T(n) = \Theta(n^2)$

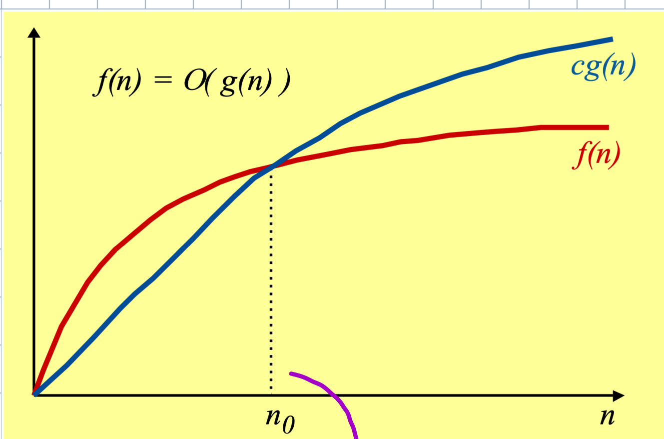
GUARDO SEMPRE COME SI COMPORTA L'ALGORITMO SU ISTANZE GRANDI

QUINDI IGNORIAMO:

- COSTANTI MOLTIPLICATIVE
- TERMINI DI ORDINE INFERIORE

NOTAZIONE O-GRANDE

$f(n) = O(g(n))$ SE $\exists\ c > 0$ e $n_0 > 0$ T.C. $\underbrace{0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall\, n > n_0}_{*}$



*

DOPO IL PUNTO n_0 LA FUNZIONE $f(n)$ CRESCE PIÚ LENTAMENTE RISPETTO A $g(n)$

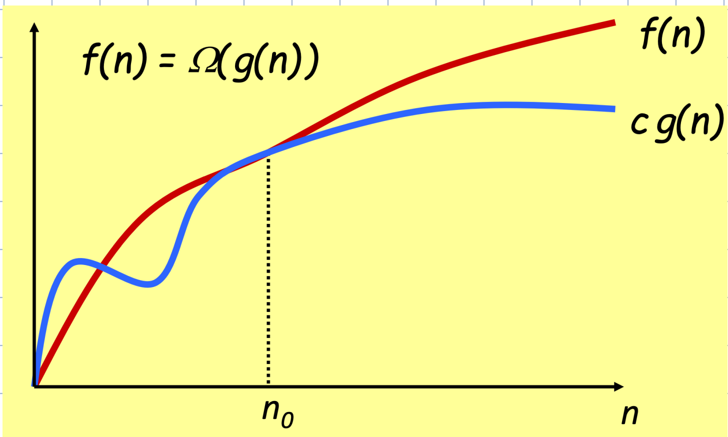
ESEMPIO:

SIA $f(n) = 2n^2 + 3n$, ALLORA:

- $f(n) = O(n^3)$
- $f(n) = O(n^2)$
- $f(n) \neq O(n)$

NOTAZIONE Ω

$f(n) = \Omega(g(n))$ SE $\exists$ $c > 0$ e $n_0 > 0$ T.C. $f(n) \geq c \cdot g(n) \geq 0 \quad \forall n > n_0$



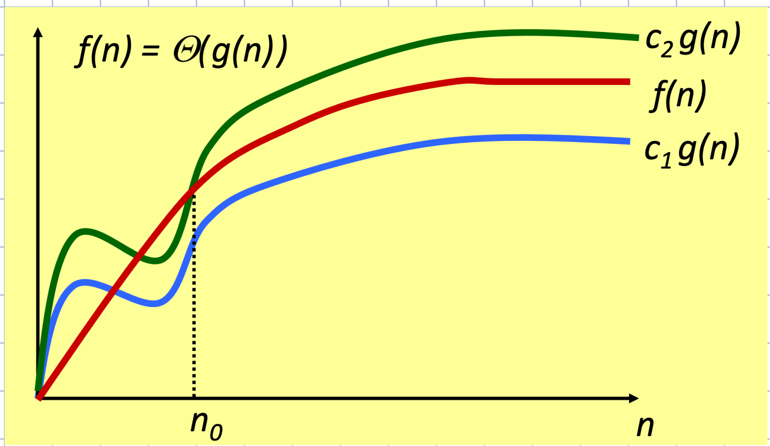
ESEMPIO:

SIA $f(n) = 2n^2 - 3n$, ALLORA:

- $f(n) = \Omega(n)$
- $f(n) = \Omega(n^2)$
- $f(n) \neq \Omega(n^3)$

NOTAZIONE Θ

$f(n) = \Theta(g(n))$ SE $\exists$ $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ T.C. $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$
$\forall n \geq n_0$



ESEMPIO

SIA $f(n) = 2n^2 + 3n$, ALLORA

- $f(n) = \Theta(n^2)$
- $f(n) \neq \Theta(n)$
- $f(n) \neq \Theta(n^3)$

IMPLICAZIONI ASINTOTICHE

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \nRightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

ESSENDO Θ É SIA O CHE Ω

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \nRightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

NON PUÓ ESSERE Θ XCHÉ Θ COMPRENDE SIA O CHE Ω

INFATTI ABBIAMO CHE:

$$\boxed{f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } f(n) = O(g(n))}$$

NOTAZIONE o-PICCOLO

$$o(g(n)) = \{ f(n) : \forall\, c > 0,\ \exists\, n_0 \text{ T.C. } \forall\, n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \}$$

ATTENZIONE: NOTIAMO CHE $o(g(n)) \subset O(g(n))$

NOTAZIONE ω-PICCOLO

$$\omega(g(n)) = \{ f(n) : \forall\, c > 0,\ \exists\, n_0 \text{ T.C. } \forall\, n > n_0 \quad 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \}$$

ATTENZIONE: NOTIAMO CHE $\omega(g(n)) \subset \Omega(g(n))$

ANALOGIE

O	Ω	Θ	o	ω
$\leq$	$\geq$	$=$	$<$	$>$

CALCOLO DEL LIMITE ASINTOTICO

POSSIAMO CALCOLARE I LIMITI ASINTOTICI DI DUE FUNZIONI $f(n)$ e $g(n)$ UTILIZZANDO IL METODO DEL LIMITE DEL RAPPORTO $\frac{f(n)}{g(n)}$.

O-GRANDE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = O(g(n))$$

VALE ANCHE PER o-PICCOLO XCHÉ $o \subset O$

Ω-GRANDE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

VALE ANCHE PER ω-PICCOLO XCHÉ $\omega \subset \Omega$

Θ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \underbrace{k}_{\text{NUMERO FINITO}} \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

SIA $f(x)$ e $g(x)$, AVENDO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

CON $f(x)$ PIÚ GRANDE RISPETTO $g(x)$ ALLORA SIGNIFICA CHE HO UN QUALCOSA DI GRANDE CHE VIENE DIVISO DA QUALCOSA DI PICCOLO, CHE FA ∞

$\downarrow$

$f(n) = \Omega(g(n))$

AL CONTRARIO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

CON $g(x)$ PIÚ GRANDE RISPETTO $f(x)$ ALLORA SIGNIFICA CHE HO UN QUALCOSA DI GRANDE CHE DIVIDE QUALCOSA DI PICCOLO, CHE VA VERSO 0

$\downarrow$

$f(n) = O(g(n))$