SKOLEMIZZAZIONE

PROCESSO UTILIZZATO PER ELIMINARE I QUANTIFICATORI IN UNA FORMULA LOGICA CONVERTENDOLA IN UNA FORMA SEMANTICAMENTE EQUIVALENTE.

QUANTIFICATORE $\forall$, POSSIAMO ELIMINARLO $\dfrac{\forall x\, A[x]}{A[G]}$

QUANTIFICATORE $\exists$, POSSIAMO ELIMINARLO :

- SE IL QUANTIFICATORE NON COMPARE NELL' AMBITO DI $\forall$ ALLORA INTRODUCIAMO UNA COSTANTE DI SKOLEM MAI USATA

$$\frac{\exists x\, A(x)}{A(y)}$$

- SE INVECE COMPARE NELL' AMBITO DI $\forall$ AD ESEMPIO $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ INTRODUCIAMO UNA FUNZIONE DI SKOLEM

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \rightarrow \text{INTRODUCIAMO FUNZ. DI SKOLEM} \rightarrow \forall x\, P(x, f(x))$$

IN BASE DA QUANTI $\forall$ DIPENDE

ESEMPIO COMPLESSO

Consideriamo:

$$\forall x \exists y \forall z \exists w\, (P(x,y) \wedge Q(z,w))$$

Applichiamo la skolemizzazione passo per passo:

1. $\exists y$: y dipende da x, quindi sostituiamo y con $f(x)$:

$$\forall x \forall z \exists w\, (P(x, f(x)) \wedge Q(z,w))$$

2. $\exists w$: w dipende da z e da x, quindi sostituiamo w con $g(x,z)$:

$$\forall x \forall z\, (P(x, f(x)) \wedge Q(z, g(x,z)))$$

Ora la formula è completamente skolemizzata.

ATTENZIONE

DIPENDEVA DA DUE QUANT. UNIV. QUINDI LA FUNZIONE HA COME PARAMETRI ENTRAMBI

TRASFORMAZIONE DA FOL IN CNF

ABBIAMO VISTO IL METODO DI RISOLUZIONE PER PROP, POSSIAMO USARLO ANCHE PER FOL MA PRIMA DOBBIAMO PORTARE FOL IN

FORMA A CLAUSOLE.

1 ELIMINAZIONE DELLE IMPLICAZIONI

$A \to B$ DIVENTA $\neg A \vee B$. $A \Leftrightarrow B$ DIVENTA $(A \to B) \vee (B \to A)$

2 NEGAZIONI ALL' INTERNO

$\neg(\forall x\, P)$ DIVENTA $\exists x\, \neg P$, $\neg(\exists x\, P)$ DIVENTA $\forall x\, \neg P$

$\neg(A \vee B)$ DIVENTA $\neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B)$ DIVENTA $\neg A \vee \neg B$

$\neg\neg A$ DIVENTA A

3 STANDARDIZZAZIONE DELLE VARIABILI, OGNI QUANT. HA UNA VARIABILE DIVERSA

$\forall x\, (\exists y\, (\text{ANIMALE}(y) \wedge \neg \text{AMA}(x,y))) \vee (\exists y\, \text{AMA}(y,x))$

$\forall x\, (\underline{\exists y}\, (\text{ANIMALE}(\underline{y}) \wedge \neg \text{AMA}(x,\underline{y}))) \vee (\underline{\exists z}\, \text{AMA}(\underline{z},x))$

4 SKOLEMIZZAZIONE

$\forall x\, (\exists y\, (\text{ANIMALE}(y) \wedge \neg \text{AMA}(x,y))) \vee (\exists z\, \text{AMA}(z,x))$

DIVENTA

$\forall x\, (\text{ANIMALE}(F(x)) \wedge \neg \text{AMA}(x, F(x))) \vee \text{AMA}(G(x), x))$

$F(x)$ e $G(x)$ SONO FUNZIONI DI SKOLEM

5 ELIMINAZIONE QUANTIFICATORI UNIVERSALI

$(\text{ANIMALE}(F(x)) \wedge \neg \text{AMA}(x, F(x))) \vee \text{AMA}(G(x), x))$

6 FORMA NORMALE CONGIUNTIVA

$A \vee (B \wedge C)$ DIVENTA $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(\text{ANIMALE}(F(x)) \wedge \text{AMA}(G(x), x)) \vee (\neg \text{AMA}(x, F(x)) \wedge \text{AMA}(G(x), x))$

7 TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE

$\{ \text{Animale}(F(x)) , \text{Ama}(G(x), x) \} , \{ \neg \text{Ama}(x, F(x)) , \text{Ama}(G(x), x) \}$

8 VARIABILI NUMERATE

$$\{ \text{Animale}(F(x_1)) , \text{Ama}(G(x_1), x_1) \} , \{ \neg \text{Ama}(x_2, F(x_2)) , \text{Ama}(G(x_2), x_2) \}$$

UNIFICAZIONE LOGICA

DEF

DUE TERMINI SONO UNIFICABILI SE ESISTE UNA SOSTITUZIONE CHE LI RENDE IDENTICI.

MGU → MOST, GENERAL, UNIFIER, È LA SOSTITUZIONE PIÚ GENERALE T.C. TUTTE LE ALTRE SOST. SONO ISTANZE DEL MGU.

PRENDE IN INPUT DUE TERMINI o FORMULE E CERCA UN INSIEME DI SOSTITUZIONI PER LE VARIABILI TALE CHE APPLICANDO QUESTE SOSTITUZIONI I TERMINI o FORMULE RISULTINO IDENTICI.

SE QUESTO INSIEME DI SOSTITUZIONI ESISTE, I TERMINI SONO DETTI UNIFICABILI. ESEMPIO

$f(x, a)$ e $f(b, y)$

PER UNIFICARLI POSSIAMO USARE UNA SOSTITUZIONE COME:

- $x \to b$
- $y \to a$

FACENDO DIVENTARE I TERMINI ENTRAMBI $f(b, a)$. QUINDI L'UNIFICATORE È x/b e y/a.

OPPURE PRENDENDO L'ISTANZA $\text{Knows}(\text{Jhon}, x)$ e $\text{Knows}(y, \text{Mother}(y))$

L'UNIFICATORE È:

VARIABILE

COSTANTE

$$\theta = \{ x / \text{Mother}(\text{Jhon}) , y / \text{Jhon} \}$$

STANDARDIZZAZIONE

PRENDIAMO L'ISTANZA: KNOWS(JHON, X) e KNOWS(X, ELISA), NON VI È NESSUNA SOSTITUZIONE CHE POSSIAMO APPLICARE POICHÉ LA X CONDIVISA IN ENTRAMBI I PREDICATI CREA DEI CONFLITTI.
QUINDI APPLICHIAMO LA STANDARDIZZAZIONE IN CUI CHIAMIAMO IN MODO UNIVOCO LE VARIABILI IN OGNI PREDICATO, AD ESEMPIO POSSIAMO RINOMINARE LA X NEL SECONDO PREDICATO IN Y. DIVENTANDO:

KNOWS(JHON, X) e KNOWS(Y, ELISA)

POTENDO POI APPLICARE LA SOSTITUZIONE: {X/ELISA, Y/JHON}

ALTRI ESEMPI

1. Find the MGU of {p(b, X, f(g(Z))) and p(Z, f(Y), f(Y))}

- S0 => { p(b, X, f(g(Z))); p(Z, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ={Z/b}
- S1 => { p(b, X, f(g(b))); p(b, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ={X/ f(Y)}
- S2 => { p(b, f(Y), f(g(b))); p(b, f(Y), f(Y))}
- SUBST θ= {Y/ g(b)}
- S_2 => { p(b, f(g(b)), f(g(b)); p(b, f(g(b)), f(g(b))}

Unified Successfully.

Unifier = {Z/b, X/ f(Y), Y/ g(b)}

2. Find the MGU of Q(a, g(x, a), f(y)), Q(a, g(f(b), a), x)}

- S0 => {Q(a, g(x, a), f(y)); Q(a, g(f(b), a), x)}
- SUBST θ= {x/f(b)}
- S1 => {Q(a, g(f(b), a), f(y)); Q(a, g(f(b), a), f(b))}
- SUBST θ= {y/ b}
- S1 => {Q(a, g(f(b), a), f(b)); Q(a, g(f(b), a), f(b))},
- **Successfully Unified.**
- **Unifier: [x/f(b), y/b].**

3. Find the MGU of {p(f(a), g(Y)) and p(X, X)}

- S0 = {p(f(a), g(Y)) and p(X, X)}
- SUBST θ= {X/ f(a)}
- S1 ={p(f(a), g(Y)), and p(f(a), f(a))}
- SUBST θ= {f(a)/ g(y) },
- $\boxed{\text{Unification failed.}}$

MI RESTANO g(y) E f(a) DA UNIFICARE MA NON POSSO FARLO XCHÉ LE FUNZIONI SONO DIVERSE $g \neq f$

COMPOSIZIONE DI SOSTITUZIONI

SIANO σ e t DUE SOSTITUZIONI:

- $\sigma = [t_1/x_1 \dots t_k/x_k]$
- $t = [s_1/y_1 \dots s_k/y_k]$

E SIA $\sigma t' = [t_1/x_1 \dots t_k/x_k, s_1/y_1 \dots s_k/y_k]$, ANDIAMO AD ELIMINARE DA $\sigma t'$:

- LE IDENTITÀ COME AD ESEMPIO x/x
- LE COPPIE s_i/y_i TALE CHE $y_i = \{x_1 \dots x_k\}$ OVVERO DA UN TERMINE DELLA SECONDA SOSTITUZIONE ANDIAMO AD UN TERMINE DELLA PRIMA.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

SIA $\sigma = [g(x,y)/w, x/y]$ e $t = [y/x, B/w, C/z]$

ABBIAMO QUINDI $\sigma t' = [g(x,y)/w, x/y, y/x, B/w, C/z]$, POSSIAMO VEDERE CHE NON CI SONO IDENTITÀ MA CI SONO COPPIE CHE DALLA SECONDA SOST. TORNANO ALLA PRIMA, COME:

$\sigma = [g(x,y)/w, x/y]$ e $t = [y/x, \cancel{B/w}, C/z]$

ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

Passaggi:

1. **Controllo dei simboli:**
   - Se t_1 e t_2 sono identici, sono già unificati. Restituisci un'unificazione vuota.
   - Se t_1 è una variabile e non appare in t_2, sostituisci t_1 con t_2.
   - Viceversa, se t_2 è una variabile e non appare in t_1, sostituisci t_2 con t_1.
   - Se t_1 e t_2 sono funzioni, confronta i loro simboli principali e i rispettivi argomenti.
2. **Occur-check:**
   - Una variabile non può essere sostituita con un termine che contiene se stessa. Ad esempio, $x = f(x)$ porta a un ciclo infinito.
3. **Ricorsione:**
   - Unifica gli argomenti delle funzioni corrispondenti. Se una coppia di argomenti fallisce nell'unificazione, allora l'unificazione generale fallisce.
4. **Composizione:**
   - Applica le sostituzioni trovate fino a quel punto ai termini ancora da unificare e prosegui.
5. **Termine:**
   - Se tutti i sottotermini sono unificati, restituisci il MGU. Altrimenti, dichiara che i termini non sono unificabili.