

Projeto 1 - EM570

Prof. William R. Wolf
PED J. Douglas A. de Lira

Natan S. Silveira - 184975
Paulo Y. Kuga - 204451
Rafael A. B. Cota - 243366

1.1 - Introdução

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um código numérico que resolva a equação diferencial para aletas, chegando assim em sua distribuição de temperatura em função da distância da base. Três formas diferentes de aleta foram abordadas com condição de contorno adiabática na ponta e uma temperatura pré-definida na base.

A análise traz também o estudo analítico de aletas retangulares simples que servirá como fator de confirmação para a confiabilidade do código, que posteriormente será usado para os outros dois tipos de aleta, uma triangular e uma piniforme.

1.2 - Método Numérico

Apresentaremos o Método das Diferenças Finitas que utilizaremos para resolver as nossas equações das aletas. Sabemos que podemos expandir qualquer função em relação a um ponto com Séries de Taylor.

$$\sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Podemos chamar $(x-a)$ de h e portanto reduzir a forma da nossa fórmula.

$$h = (x-a) \rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

Observe que se queremos discretizar o nosso espaço, podemos começar avaliando um ponto x_i de nossa preferência, isto é, vamos avaliar “o que temos em volta” dele.

Dessa forma vamos avaliar o ponto adiantado em relação a x_i .

$$\begin{aligned}x &= x_{i+1} \\ a &= x_i \\ f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n\end{aligned}$$

E vamos avaliar o ponto atrasado em relação a x_i .

$$\begin{aligned}x &= x_{i-1} \\ a &= x_i \\ h &< 0 \\ f(x_{i-1}) &= f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n\end{aligned}$$

Agora vamos fazer algumas considerações. Imagine que nosso índice do somatório de Taylor fosse até $n = 2$, isto é, só tivéssemos até a segunda derivada. Podemos achar uma primeira derivada de diferenças finitas com relação a um termo discreto com ordem de erro h^2 .

Observe que se analisarmos o ponto atrasado, ao reorganizarmos a expressão encontramos uma forma para expressar a derivada no ponto x_i .

$$\begin{aligned}f(x_{i-1}) &= f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 \\ f(x_{i-1}) &= f(x_i) - f'(x_i)h + O(h^2) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h^2)\end{aligned}$$

Se analisarmos agora o ponto adiantado, temos outra expressão possível.

$$\begin{aligned}f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 \\ f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)h + O(h^2) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h^2)\end{aligned}$$

Note que não é problemático se somarmos essas duas expressões. A ordem do erro não muda. Dessa forma temos uma fórmula para derivada em torno de um ponto.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h^2)$$

$$2f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

Fica claro que temos várias formas de analisarmos uma primeira derivada. Desta forma, temos um leque de abordagens que podem ser feitas, de modo a analisarmos vários caminhos possíveis para testar a convergência da solução.

Vamos analisar agora a segunda derivada. Assuma nosso $n = 3$. Numa abordagem similar a anterior, tratando os casos avançados e adiantados, nós temos as seguintes expressões:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + O(h^3)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + O(h^3)$$

E então observamos que se somarmos conseguimos uma expressão para a segunda derivada de x_i .

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 + O(h^3)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Dessa forma obtivemos três possibilidades para as derivadas de primeira ordem e uma para a de segunda ordem. Nos limitaremos a uma de segunda ordem para não estender este trabalho, mas caso o leitor esteja interessado, para futuras consultas, recomendamos consultar [este livro](#) ou [este](#).

Quanto à implementação, dependerá do modelo de equação que teremos. No caso, vamos usar o modelo padrão de aletas indicado nas instruções do projeto. Sabemos que a princípio, em diferentes tipos de aletas, podemos ter variação dos parâmetros de área com x . Porém apenas a título de demonstração do método, vamos tornar todos os coeficientes constantes.

$$T'' + \left(\frac{1}{A_{sr}} A'_{sr}\right) T' - \left(\frac{h}{A_{sr} k} A'_{sp}\right) (T - T_{inf}) = 0$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{1}{A_{sr}} A'_{sr}\right) (T') - \left(\frac{h}{A_{sr} k} A'_{sp}\right) (T_i - T_{\infty}) = 0$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + C_1 T' + C_2 T_i - C_3 = 0$$

Note que deixamos T' em aberto. Vamos escolher as diferenças centradas para representá-lo. Observe o desenvolvimento.

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + C_1 h^2 T' + C_2 h^2 T_i - C_3 h^2 = 0$$

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + C_1 h^2 \left(\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}\right) + C_2 h^2 T_i - C_3 h^2 = 0$$

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + C_1 \frac{h}{2} T_{i+1} - C_1 \frac{h}{2} T_{i-1} + C_2 h^2 T_i - C_3 h^2 = 0$$

$$\left(1 + C_1 \frac{h}{2}\right) T_{i+1} + (C_2 h^2 - 2) T_i + \left(1 - C_1 \frac{h}{2}\right) T_{i-1} - C_3 h^2 = 0$$

$$\left(1 + C_1 \frac{h}{2}\right) T_{i+1} + (C_2 h^2 - 2) T_i + \left(1 - C_1 \frac{h}{2}\right) T_{i-1} = C_3 h^2$$

Vamos tomar um caso hipotético onde temos 5 pontos e já sabemos as condições de contorno no primeiro e no último. Podemos notar que temos um sistema linear que entrelaça esses pontos. Antes, observe mais uma troca de constantes para nossos coeficientes.

$$(\zeta_1)T_{i+1} + (\zeta_2)T_i + (\zeta_3)T_{i-1} = C_3 h^2$$

$$(\zeta_1)T_2 + (\zeta_2)T_1 + (\zeta_3)T_0 = C_3 h^2$$

$$(\zeta_1)T_3 + (\zeta_2)T_2 + (\zeta_3)T_1 = C_3 h^2$$

$$(\zeta_1)T_4 + (\zeta_2)T_3 + (\zeta_3)T_2 = C_3 h^2$$

Podemos transformar em um sistema por matrizes:

$$\begin{pmatrix} \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = C_3 h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E como já sabemos os contornos, é possível reduzir para um sistema 3x3:

$$\begin{pmatrix} \zeta_2 & \zeta_1 & 0 \\ \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 \\ 0 & \zeta_3 & \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 h^2 - \zeta_3 T_0 \\ C_3 h^2 \\ C_3 h^2 - \zeta_1 T_4 \end{pmatrix}$$

Bastando obter a inversa desta matriz ζ para acharmos as temperaturas. Vamos construir vários exemplos com aletas ao longo deste trabalho que tornarão mais clara esta abordagem.

1.3 - Condições de Contorno

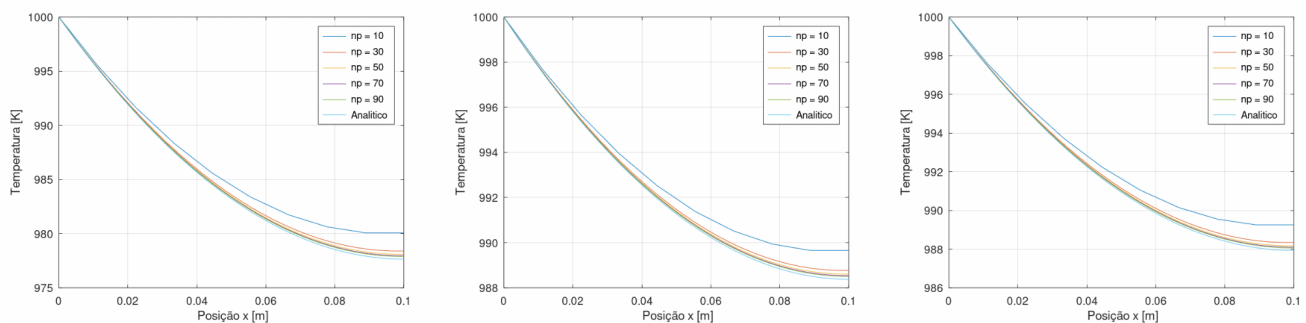
As condições de contorno escolhidas pelo grupo foram uma temperatura constante em $x = 0$ e ponta adiabática, i.e., troca de calor ausente em $x = L$. Tomamos esta decisão com base no fato de que queríamos analisar aletas onde suas pontas estivessem em

equilíbrio térmico com o ambiente. Essas aletas tem uma gama muito grande de aplicações, por isso acreditamos que isso torne o nosso programa mais abrangente em vários aspectos.

1.4 - Discussão

1.4.1 - Variação de h e k

Antes de começarmos a analisar as diferentes geometrias das aletas, primeiramente devemos entender como h e k afetam a distribuição de temperatura ao longo das aletas. Desse modo, o grupo tomou a aleta retangular como base para análise desses parâmetros. Assim, pegamos uma situação inicial, depois mudamos somente o valor de k e por último voltamos k ao valor inicial e mudamos o valor de h , isso resultou respectivamente nesses três gráficos:



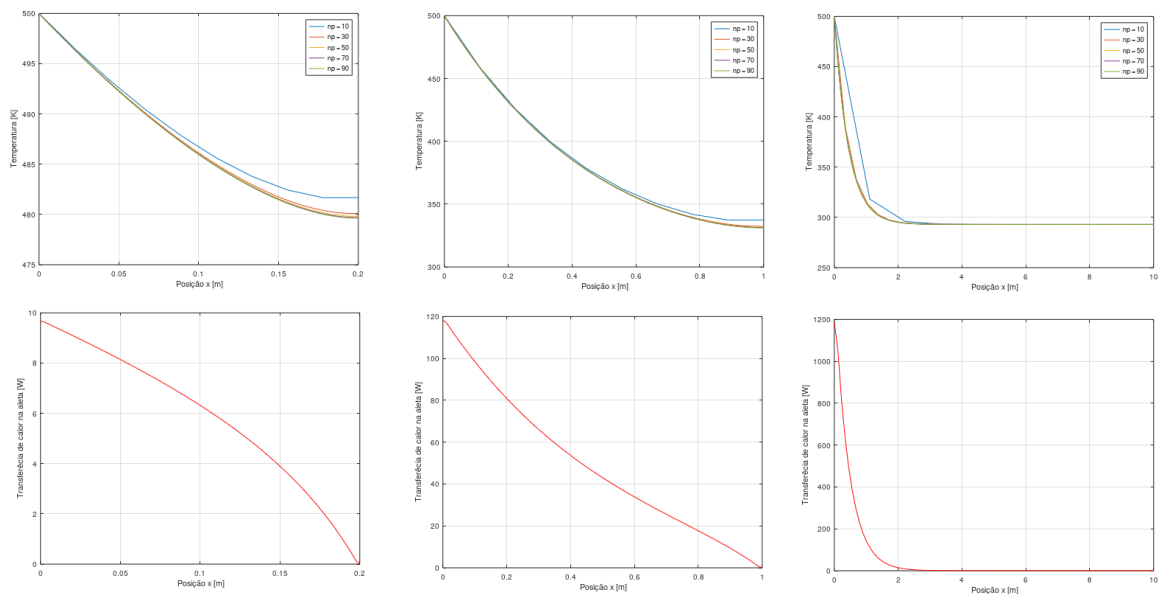
Na situação inicial, $k = 385$ [W/m*K] e $h = 15$ [W/K*m²]. Na segunda situação, o valor de k foi alterado para 500 [W/m*K] e, por último, na terceira situação, h foi alterado para 8 [W/K*m²].

Ao analisar os gráficos, é possível perceber que tanto h quanto k alteram os valores obtidos pela curvas, porém não alteram o seu comportamento (sua forma). Desse modo, para uma maior transferência de calor, devemos diminuir k e aumentar h . Consequentemente, se queremos dificultar a transferência de calor, devemos aumentar k e diminuir h .

Tendo em vista isso, podemos partir para a análise de outros parâmetros do projetos para que tenhamos uma análise completa do comportamento das aletas e suas possíveis variações.

1.4.2 - Variação de L

Neste trabalho, de forma geral, tomamos o comprimento da aleta como 10 cm, o k do cobre e o h do ar em uma convecção natural. Uma aleta desta dimensão poderia ser encontrada facilmente em um transformador, por exemplo. Porém, selecionamos 3 outros casos. Considere um espeto de 20 cm de lâmina, uma vara de 1 metro e uma estátua de 10 metros. Supondo que elas tenham uma temperatura de 500 K em sua base, temos os seguintes resultados, com todas possuindo uma geometria retangular:



Aqui temos os três respectivos casos. É possível notar que para o espeto, temos uma convergência com pouca diferença entre a temperatura final e a inicial (aproximadamente 10K).

No caso da vara, temos uma convergência na temperatura ambiente. Isto significa que em sua ponta, aproximadamente, a temperatura é a ambiente. Este tipo de aleta acaba sendo uma aleta do caso infinito, pois sua dimensão de extensão é bem maior que as demais dimensões, sendo naturalmente adiabática, no caso em que a temperatura final pudesse ser modelada como a temperatura ambiente (não há troca de calor sem um gradiente de temperatura).

Por fim, temos a estátua, que é ineficiente em termos de manufatura. Não há necessidade de empregar tanto cobre para a ponta da aleta chegar no equilíbrio térmico. A vara já satisfaz este problema. Desta forma, num projeto, para selecionarmos a melhor aleta, L é um parâmetro que devemos otimizar, de forma a termos uma ponta adiabática por equilíbrio térmico. Um L muito grande é perda de material, um L muito pequeno pode ser ineficiente.

1.4.3 - Aleta retangular

As aletas escolhidas para análise, são as retangulares, triangulares e cônicas. Uma diferença é que nem sempre teremos as mesmas condições de contorno nas pontas.

O material que nós escolhemos será o cobre, por ter um coeficiente de condução muito elevado em comparação com os outros materiais, o que o torna um excelente condutor de calor.

Vamos iniciar com a análise das aletas retangulares, que são o caso mais simples. Sua área de condução (amarelo) é constante e sua área de superfície (hachurado) varia linearmente com a distância da base. Vamos considerar, para todas as análises H_r como sendo a altura e C a espessura.

Note que temos os parâmetros constantes. O que faz com que recorramos ao exemplo dado para ilustrar o método das diferenças finitas.

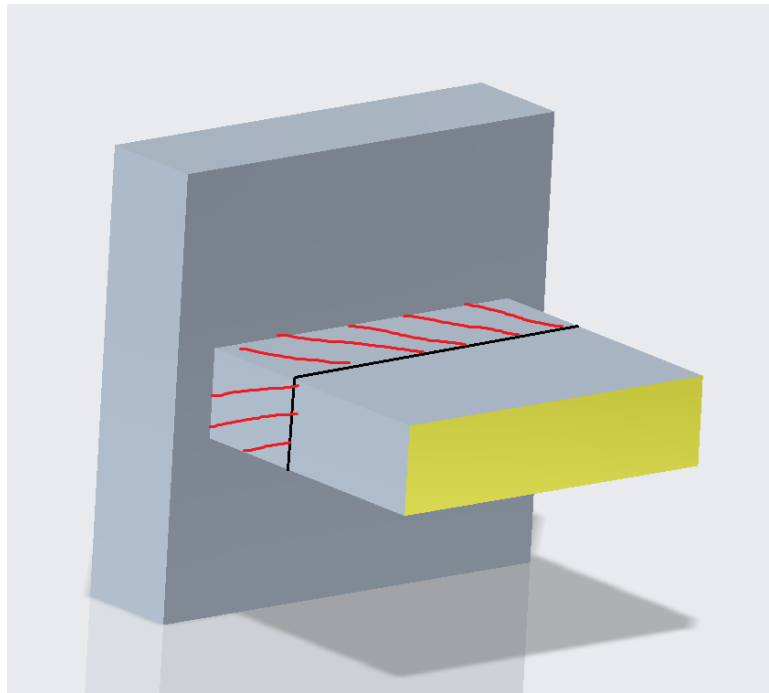


Figura 1. Aleta retangular simples

$$A_{sr} = H_r C$$

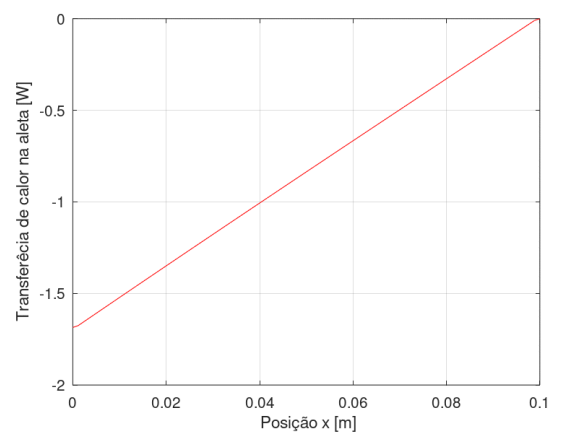
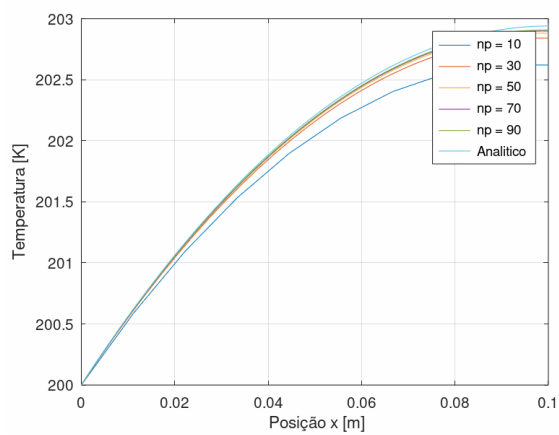
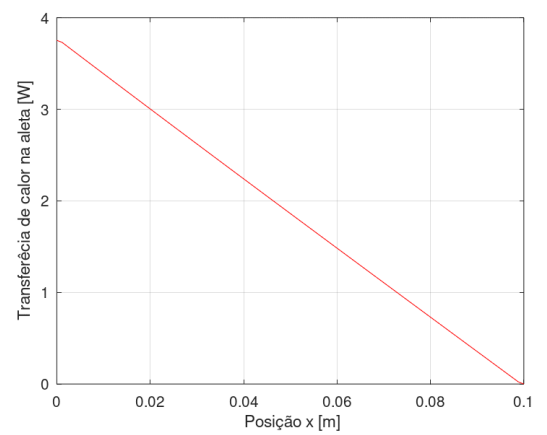
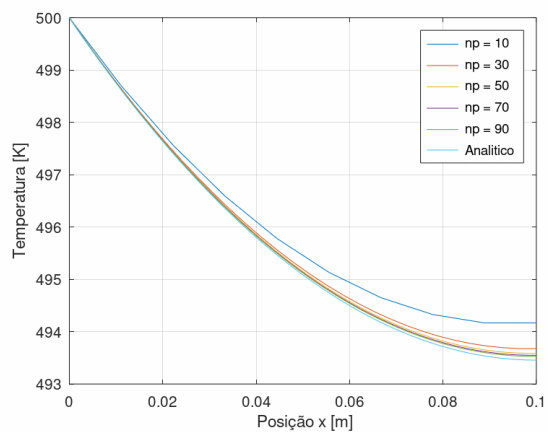
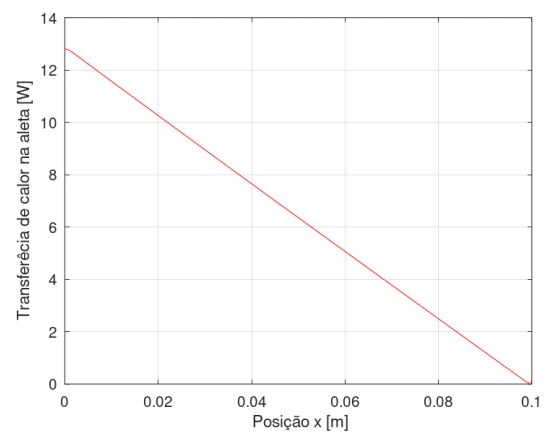
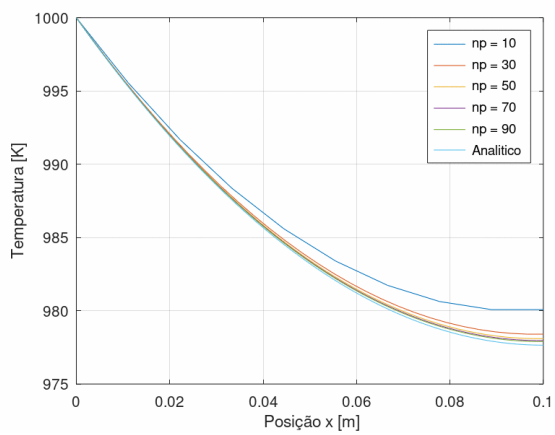
$$\frac{dA_{sr}}{dx} = 0$$

$$A_{supe} = 2 H_r x + 2 C x$$

$$\frac{dA_{supe}}{dx} = 2 (H_r + C)$$

A escolha de usar o exemplo mais simples se dá pelo fato de que a análise é simplificada e com isso há a possibilidade de comparar os dados obtidos pelo programa desenvolvido com as equações analíticas correspondentes que estão presentes no livro Incropera 7 ed. página 161. Desse modo teremos uma validação da capacidade do programa.

Os dados obtidos para as análises de temperatura de 1000, 500 e 200K são, respectivamente:



1.4.4 - Aleta triangular

Posteriormente, nós fizemos a análise da aleta triangular, que possui a área da superfície variante com a distância medida da base. É um interessante caso, onde pela definição da própria geometria da aleta nós já temos que considerar um caso adiabático na

ponta. Em aletas reais isso é uma simplificação, pois não há um processo de usinagem que possibilite realizar uma aleta em que no seu contorno, a área final de condução seja 0. Porém, mesmo assim, nas dimensões do projeto, isto acaba sendo desprezível.

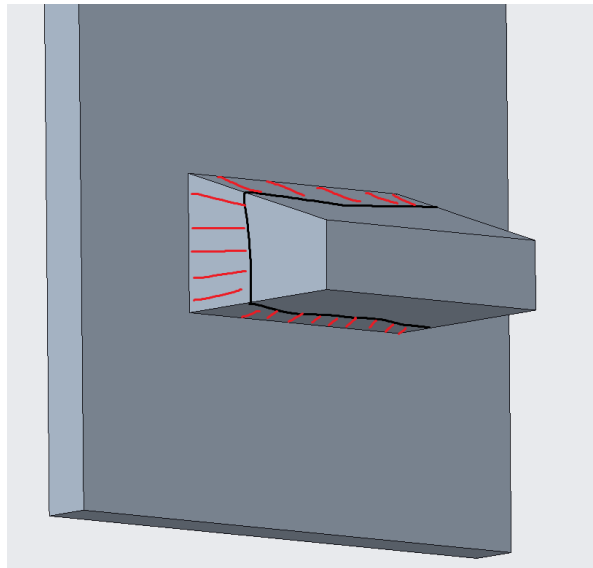


Figura 2. Aleta triangular

$$r_x = H_a + \frac{(b - H_a)}{L} x$$

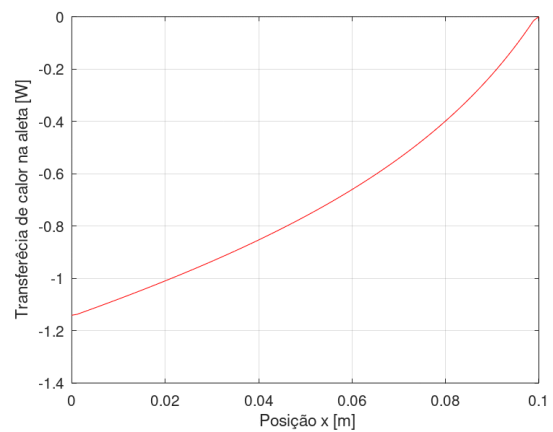
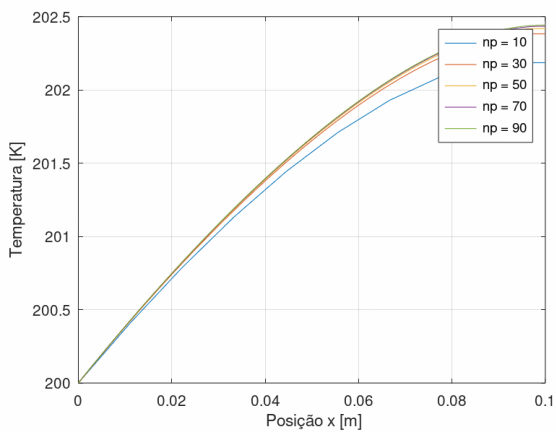
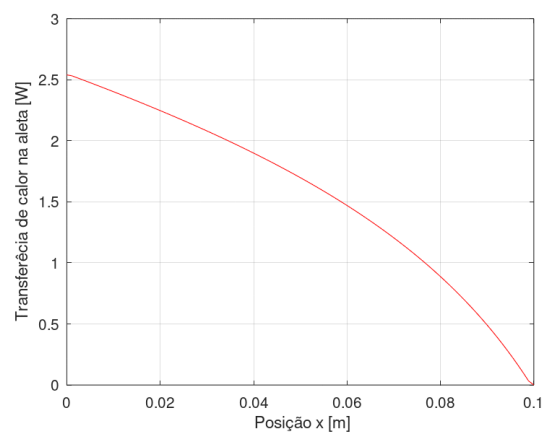
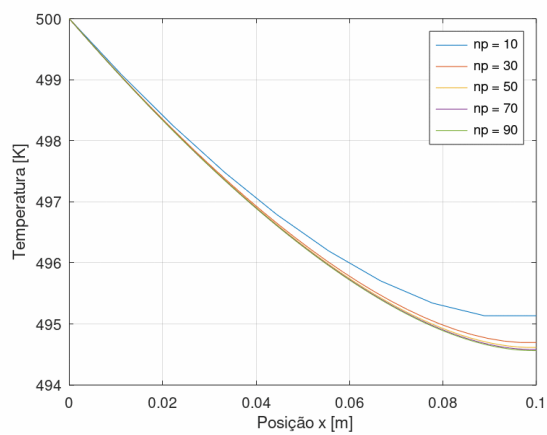
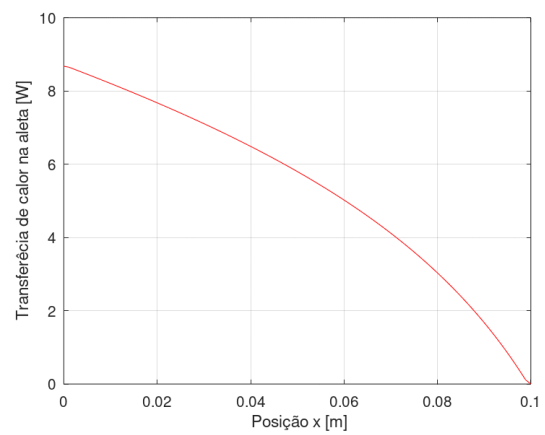
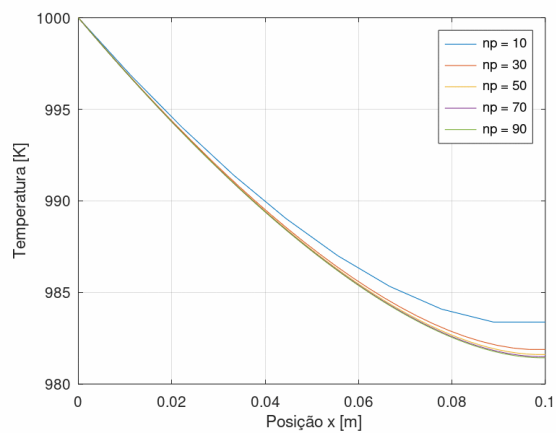
$$A_{sr} = r_x C$$

$$\frac{dA_{sr}}{dx} = C \frac{(b - H_a)}{L}$$

$$A_{supe} = 2 \left(\frac{(b - H_a)}{L} \frac{x^2}{2} + H_a x \right) + C \sqrt{r_x^2 + x^2} + Cx$$

$$\frac{dA_{supe}}{dx} = (2r_x) + C + \frac{C \left(2x - \frac{(h - H)}{L} (r_x) \right)}{\sqrt{r_x^2 + x^2}}$$

Os dados obtidos para as análises de temperatura de 1000, 500 e 200K são, respectivamente:



1.4.5 - Aleta piniforme

Por fim, encerramos este trabalho com a análise da aleta cônica em que temos uma variação da sua área dependente internamente de um parâmetro radial que varia com o comprimento da aleta. Este modelo não aparece muito na realidade como uma aleta de resfriamento, mas em alguns casos, podemos modelar algumas estruturas aerodinâmicas cônicas como aletas cônicas, dependendo do problema.

$$r(x) = -2 \frac{r_0}{L} x + 3r_0$$

$$Asr(x) = \pi \left(9r_0^2 + \frac{12r_0^2}{L} x + \frac{4r_0^2}{L^2} x^2 \right)$$

$$Asup(x) = \left(2\pi 3r_0 + 2\pi r(x) \right) \frac{x}{2}$$

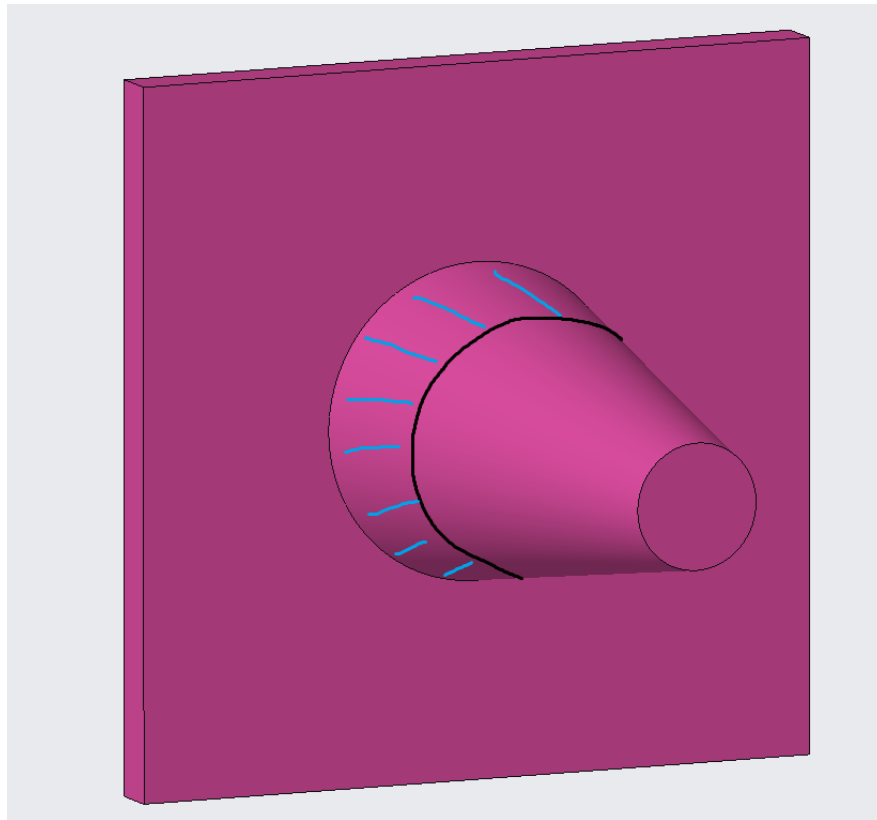
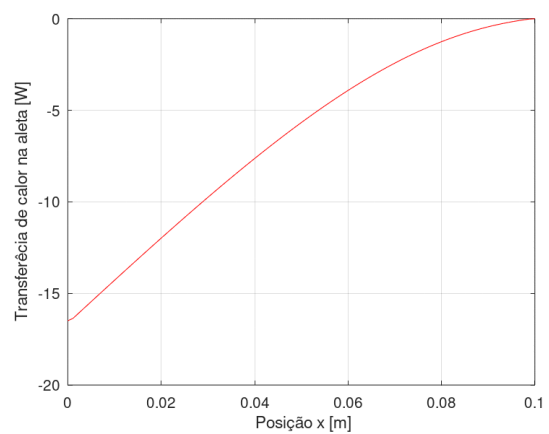
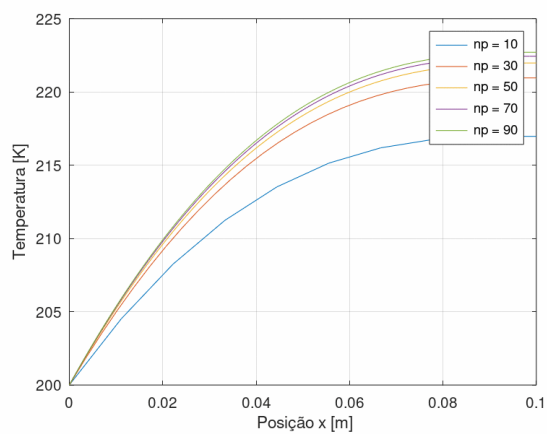
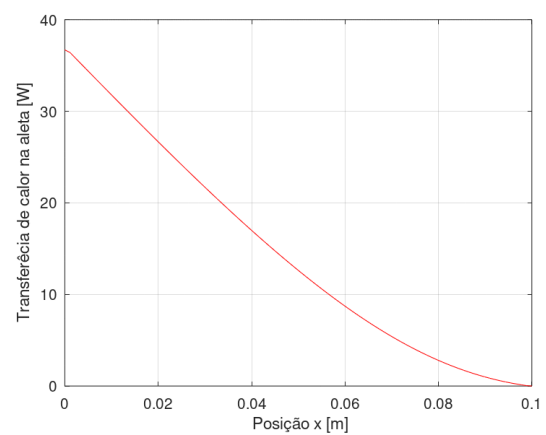
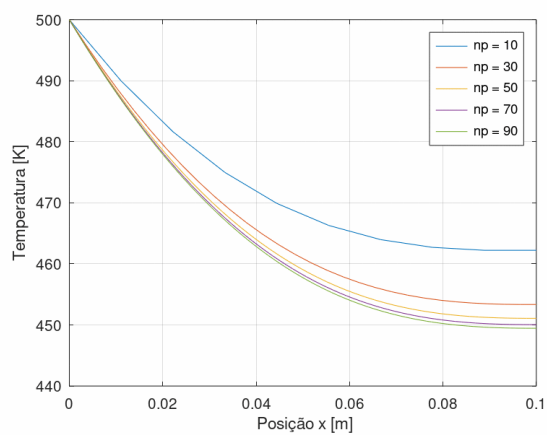
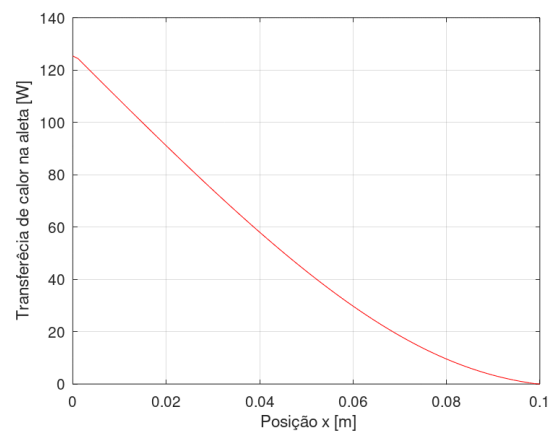
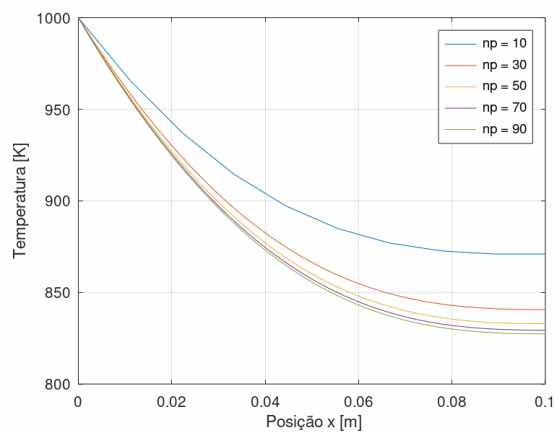


Figura 3. Aleta piniforme

Os dados obtidos para as análises de temperatura de 1000, 500 e 200K são, respectivamente:



2 - Discussão dos Resultados

Por meio dos resultados que obtivemos, é possível notar que conseguimos chegar a um resultado numérico muito próximo do analítico com as condições testadas para a retangular. Não temos soluções analíticas para as equações da aleta cônica e da aleta triangular. No entanto, pela pressuposição da convergência, poderíamos fazer alguns testes em laboratório para validar a solução da numérica. No entanto, não temos disponível este recurso.

É preciso notar que para este método, condições de Neumann diferentes de zero não obtêm uma convergência. Em trabalhos anteriores feitos por nós em EM503, notamos que algumas equações eram melhor obtidas resolvendo-as antes para a condição de Neumann e posteriormente usando apenas uma de Dirichlet.

Nem sempre isso será possível, mas pode ser uma das estratégias possíveis. Por isso é importante notar que nosso programa não comporta muito bem a convergência de uma condição de Neumann do tipo transferência de calor.

Quanto ao número de pontos para a discretização da malha, percebemos que quando nós refinamos (i.e. aumentamos o número de pontos) para a aleta retangular, nós nos aproximamos da analítica. Nos casos em que não possuímos solução analítica, foi possível observar que tivemos um efeito de aumento na convergência. Desta forma percebemos que ao aumentar o número de pontos, a tendência é que nós tenhamos mais precisão no nosso resultado.

Quando tendemos o número de pontos ao infinito, na teoria, tendemos também a uma redução do erro. Porém, há de se considerar também as limitações do sistema de números float. Existe uma precisão máxima do resultado que podemos obter. No entanto, por ora, não vemos esta discussão como necessária pelo fato do erro ser inferior aos limites de engenharia.

Quanto às temperaturas, devemos notar que escolhemos um número 5 vezes maior que a ambiente, 2 vezes maior e um valor inferior, modelo similar a refrigeração de uma pá de turbina. Destas, nenhuma mudança na condição de contorno alterou o fato da solução convergir, o que em tese, valida nosso programa para a utilização em um outro caso.

Desta forma, para aletas adiabáticas, que foi o enfoque do nosso caso, temos a suficiente confiança de que este programa pode ser utilizado para os casos de aletas em que desenvolvemos. Mas de qualquer forma, recomendamos uma validação experimental em escala dos casos apresentados.