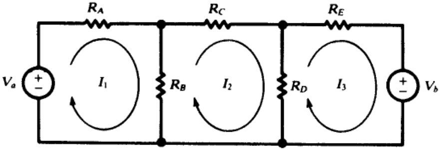
Sisteme de ecuații liniare

4 octombrie 2019

Sumar

- Sisteme de ecuații liniare; Noțiuni generale
- Matrice în forma diagonal canonică
- Procedeul Gauss-Jordan
- Aplicații ale procedeului Gauss-Jordan la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, determinarea rangului unei matrice, calculul inversei unei matrice

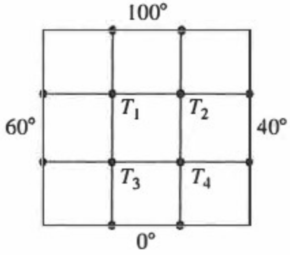
Sisteme de ecuații liniare - Aplicații



$$
\begin{aligned}
(R_A + R_B)I_1 \quad - R_B I_2 \quad &= V_a \\
-R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 \quad - R_D I_3 &= 0 \\
-R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}
$$

Sisteme de ecuații liniare - Aplicații



$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{60+100+T_2+T_3}{4} \\
T_2 &= \frac{T_1+100+40+T_4}{4} \\
T_3 &= \frac{60+T_1+T_4+0}{4} \\
T_4 &= \frac{T_3+T_2+40+0}{4}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
4T_1 - T_2 - T_3 \phantom{{}-T_4} &= 160 \\
-T_1 + 4T_2 \phantom{{}-T_3} - T_4 &= 140 \\
-T_1 \phantom{{}+4T_2} + 4T_3 - T_4 &= 60 \\
- T_2 - T_3 + 4T_4 &= 40.
\end{aligned}
$$

Sisteme de ecuații liniare

Forma generalã a unui sistem de m ecuații cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se definesc matricele:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matricea sistemului — Matricea extinsã a sistemului

Cazuri particulare de sisteme

- Sisteme omogene

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Sisteme de n ecuații cu n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Compatibilitatea sistemelor

În funcție de natura soluțiilor unui sistem de ecuații liniare, acest sistem poate fi:

- incompatibil (sistemul nu admite nici o soluție)
- compatibil determinat (sistemul admite o singurã soluție)
- compatibil nedeterminat (sistemul admite o infinitate de soluții)

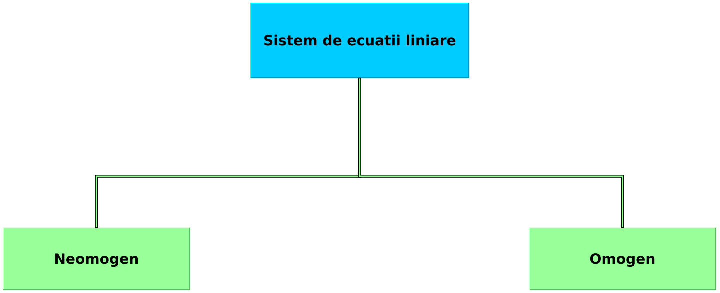
Compatibilitatea sistemelor (continuare)

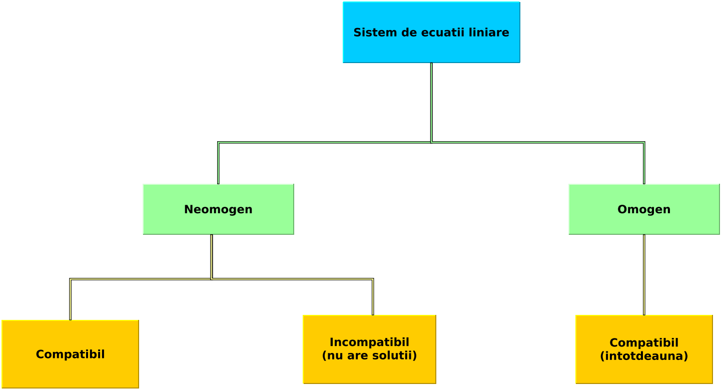
Teoremã - Kronecker-Capelli

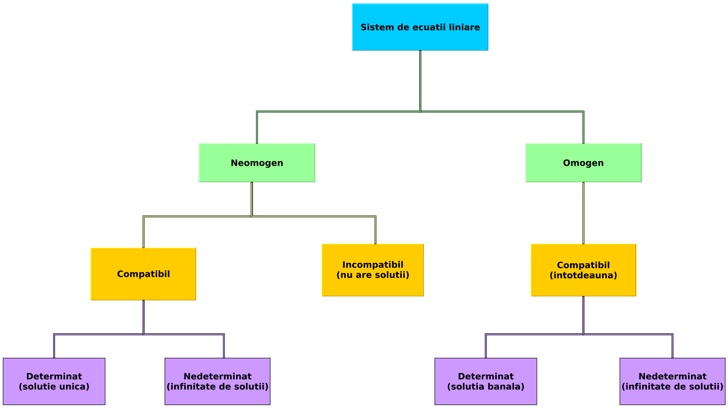
Un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute este compatibil dacã și numai dacã rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

- Un sistem de ecuații omogen are întotdeauna cel puțin o soluție (este compatibil), și anume soluția nulã: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$
- Sisteme de n ecuații cu n necunoscute
  - Dacã determinantul matricei asociate sistemului este diferit de 0, atunci sistemul este compatibil determinat
  - Dacã determinantul matricei asociate sistemului este egal cu 0, atunci sistemul este compatibil nedeterminat sau incompatibil.

Sistem de ecuatii liniare


Sistem de ecuatii liniare
Neomogen
Omogen


Sistem de ecuatii liniare
Neomogen
Omogen
Compatibil
Incompatibil
(nu are solutii)
Compatibil
(intotdeauna)


Sistem de ecuatii liniare
Neomogen
Omogen
Compatibil
Incompatibil
(nu are solutii)
Compatibil
(intotdeauna)
Determinat
(solutie unica)
Nedeterminat
(infinitate de solutii)
Determinat
(solutia banala)
Nedeterminat
(infinitate de solutii)

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$(-2)L_1 + L2; (-3)L_1 + L_3$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 0x - 5y - 5z = -10 \\ 0x - 6y - 10z = -24 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{pmatrix};$$

$L_2/(-5); L_3/(-2)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 0x + y + z = 2 \\ 0x + 3y + 5z = 12 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix};$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (continuare)

$(-3)L_2 + L_3$;

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 0x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$z = 3$
$y = 2 - z = 2 - 3 = -1$
$x = 9 - 2y - 3z = 9 - 2(-1) - 3 \cdot 3 = 2$

Transformãri elementare

Definiție: Transformare elementarã a unei matrice

Se numește transformare elementarã a unei matrice $A = (a_{ij})$ orice transformare realizatã prin una din urmãtoarele trei operații:

- schimbarea a douã linii între ele
- înmulțirea unei linii cu un numãr nenul
- adunarea la o linie a altei linii înmulțitã cu un numãr nenul

Matrice echivalente

Definiție

Două matrice A și B, de dimensiuni (m, n), se numesc echivalente dacă se obține una din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare. Se notează $A \approx B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$A \approx B$

Porind de la matricea A se efectuează operațiile:

- La linia 2 se adaugă de două ori linia 3
- Se interschimbă liniile 2 și 3
- Linia 1 se înmulțește cu 2

Forma diagonal canonicã a unei matrice

Definiție

O matrice, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, este în forma diagonal canonicã dacã ea conține o matrice unitate de ordin r, $(r \leqq min(m,n))$, și eventual un numãr oarecare de linii ale cãror elemente sunt nule.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & .... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & .... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Exemple matrice în forma diagonal canonică

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\underline{1}} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple matrice în forma diagonal canonicã

Cazuri particulare: Nu întotdeauna coloanele matricei unitate de ordin r corespund primelor r coloane din matricea A. Putem avea următoarele situații:

$$A_3 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Reguli de stabilire dacã o matrice este în forma diagonal canonicã (FDC). **O matrice este în FDC, dacã:**

1. Toate liniile ce conțin doar elementul 0, dacã existã, se aflã pe ultimele linii ale matricei (exemplul A_2).
2. Pe fiecare linie, primul element diferit de zero (dacã linia nu este formatã doar din zerouri), este 1. Vom numi acest element pivot_1 (exemplul A_1, A_2, A_3, A_4, în care pivoutul_1 este subliniat).
3. Fie i și $i+1$ douã linii succesive, ambele cu cel puțin un element nenul. Atunci pivotul_1 corespunzãtor liniei $i+1$ se aflã la dreapta pivotului_1 de pe linia i. (exemplul A_1, A_2, A_3, A_4)
4. Dacã o coloanã conține pivotul_1, atunci toate celelalte elemente de pe coloana pivotului_1 sunt 0. (exemplul A_1, A_2, A_3, A_4)

Exemple de matrice care NU sunt în forma diagonal canonică

$$B1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Matricele nu sunt în FDC deoarece nu îndeplinite condițiile: 1 (B1), 2 (B2), 3 (B3), respectiv 4 (B4).

Procedeul Gauss-Jordan

Teoremã

Orice matrice nenulã este echivalentã cu o matrice unica în forma diagonal canonicã.

Teoremã

Fie $AX = B$ și $CX = D$ douã sisteme de m ecuații liniare cu n necunoscute. Dacã matricele extinse ale sistemelor sunt echivalente ($(A|B) \approx (C|D)$), atunci ambele sisteme de ecuații au exact aceleași soluții.

Fiind dat un sistem $AX = B$, se urmarește:

- Se formeazã matricea extinsã a sistemului $(A|B)$
- Se cautã matricea în FDC echivalentã cu matricea extinsã
- Soluțiile sistemului inițial sunt de fapt soluțiile sistemului a cãrui matrice extinsã este matricea în FDC determinatã la pasul anterior

Procedeul Gauss-Jordan - Algoritm

- PAS 1: Se pornește de la o matrice $A = (a_{ij})$
- PAS 2: Se alege un element nenul din matricea A, numit pivot
- PAS 3: Obținem o nouã matrice $\overline{A}$, echivalentã cu A, astfel:
  - PAS 3.1: Elementele de pe linia pivotului se împart la pivot (inclusiv pivotul se împarte la el însuși)
  - PAS 3.2: Elementele de pe coloana pivotului devin 0, cu excepția pivotului care va avea valoarea 1
  - PAS 3.3: Dacã pe linia/coloana pivotului, în matricea (A), existã elemente egale cu 0, atunci coloana/linia corespunzãtoare elementului 0 se copiazã în matricea $\overline{A}$
  - PAS 3.4: Celelalte elemente ale matricei echivalente $\overline{A}$ se calculeazã dupã "regula dreptunghiului", astfel:

$$\overline{a_{kl}} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}, \text{ unde } k = 1, ..., m; k \neq i; l = 1, ..., n; l \neq j$$

Se repetã pașii 2 și 3 pânã se ajunge la o matrice în FDC

Aplicații: - rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

1. Se scrie matricea extinsã a sistemului ($\overline{A}$).
2. Se aplicã procedeul Gauss-Jordan pornind de la matricea $\overline{A}$, pânã se ajunge la o matrice în forma diagonal canonicã.
3. Se citesc soluțiile sistemului din matricea în FDC:
   - Dacã în FDC coloana termenilor liberi nu conține pivotul_1, atunci:
     - Dacã in FDC toate coloanele au câte un pivot_1, atunci **sistemul este compatibil determinat**.
     - Dacã in FDC existã cel puțin o coloanã ce nu conține pivotul_1, atunci **sistemul este compatibil nedeterminat**. Atunci, necunoscutele corespunzãtoare coloanelor ce nu conțin pivotul_1 se considerã necunoscute secundare și se noteazã cu variabile oarecare ce iau valori în mulțimea numerelor reale. Se scrie sistemul asociat matricei în FDC și necunoscutele principale se determinã în funcție de necunoscutele secundare.
   - Dacã în FDC coloana termenilor liberi conține pivotul_1 , **sistemul este incompatibil**

Aplicații: - rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases}$$

Aplicații: - determinarea rangului unei matrice

1. Se aplicã procedeul Gauss-Jordan pe matricea a cãrui rang se determinã panã cand se ajunge la FDC
2. Rangul matricei este numãrul de linii ce conțin cel puțin un element diferit de zero

Aplicații: - determinarea inversei unei matrice

1. Se construiește matricea $\overline{A} = (A|I_n)$, prin adãugarea la matricea A, a matricei unitate de ordin n. Matricea $\overline{A}$ va avea n linii și $2n$ coloane.
2. Se aplicã procedeul Gauss-Jordan pe matricea $\overline{A}$ panã cand se ajunge la FDC
3. Dacã în matricea în FDC:
   - submatricea formatã din primele n linii și n coloane este matricea unitate, atunci submatricea formatã din cele n linii și ultimele n coloane ale matricei în FDC reprezintã inversa matricei A
   - submatricea formatã din primele n linii și n coloane nu este matricea unitate, atunci matricea A nu este inversabilã

Sã se determine inversa matricelor:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$

Cerințe minime pentru examen

- Aplicarea procedeului Gauss-Jordan pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, determinarea rangului și a inversei unei matrice

Spații vectoriale (liniare)

14 octombrie 2019

Spațiu vectorial (liniar)

Definiție: Spațiu vectorial (liniar)

Fie V o mulțime și K un câmp. Pe V se definesc două operații astfel:

$$\oplus : V \times V \longrightarrow V(\text{adunarea vectorilor}) \tag{1}$$

$$\odot : K \times V \longrightarrow V(\text{înmulțirea cu scalari}) \tag{2}$$

Mulțimea V împreună cu cele două operații $\oplus$ și $\odot$ se numește spațiu vectorial peste K dacă sunt îndeplinite următoarele proprtietăți:

- **PROPRIETĂȚI DE ÎNCHIDERE**

  I1: $\forall u, v \in V : u \oplus v \in V$ (închidere față de $\oplus$)

  I2: $\forall u \in V, \forall \alpha \in K : \alpha \odot u \in V$ (închidere față de $\odot$)

Spațiu vectorial (liniar) - continuare

Definiție: Spațiu vectorial (liniar)

- **PROPRIETÃȚI ALE ADUNÃRII**

  A1: $\forall u, v, w \in V : (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (asociativitate)

  A2: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u$ (comutativitate)

  A3: $\exists 0_V \in V a.i. \forall u \in V : 0_V \oplus u = u \oplus 0_V = u$ (element neutru)

  A4: $\forall u \in V, \exists u' \in V : u' \oplus u' = u \oplus u = 0_V$ (opusul)

- **PROPRIETÃȚI ALE ÎNMULȚIRII**

  P1: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V : \alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u$

  P2: $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V : \alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$ (distributivitatea $\odot$ fațã de $\oplus$)

  P3: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V : (\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$

  P4: $\forall u \in V : 1 \odot u = u$

Spațiu vectorial (liniar)

I1: $\forall u, v \in V : u \oplus v \in V$ (închidere față de $\oplus$)

I2: $\forall u \in V, \forall \alpha \in K : \alpha \odot u \in V$ (închidere față de $\odot$)

A1: $\forall u, v, w \in V : (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (asociativitate)

A2: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u$ (comutativitate)

A3: $\exists 0_V \in Va.i.\forall u \in V : 0_V \oplus u = u \oplus 0_V = u$ (element neutru)

A4: $\forall u \ inV, \exists u' \in V : u \oplus u' = 0_V$ (opusul)

P1: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V : \alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u$

P2: $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V : \alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$
(distributivitatea $\odot$ față de $\oplus$)

P3: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V : (\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$

P4: $\forall u \in V : 1 \odot u = u$

Combinații liniare

Definiție: Combinație liniarã

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K. Un vector v din V se numește combinație liniarã de vectori $v_1, v_2, ..., v_n$ din V dacã $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ astfel încat:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Exemple Fie $\mathbb{R}^2$, spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Fie $W = \{v_1, v_2\}$ un sistem de vectori $(v_1 = (4, 2), v_2 = (1, 3))$. Sã se arate cã vectorul $v = (9, 7)$ este o combinație liniarã a vectorilor v_1 și v_2.

Subspații vectoriale (liniare)

Definiție: Subspațiu vectorial (liniar)

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K și W o submulțime nevidã a lui V. Dacã W este un spațiu vectorial peste K în raport cu operațiile definite pe V, atunci W se numește **subspațiu vectorial** al lui V.

Teoremã

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K și W o submulțime nevidã a lui V. Atunci W este subspațiu vectorial al lui V dacã și numai dacã sunt îndeplinite ambele condiții:

$$a) \forall u, v \in W : u \oplus v \in W$$
$$b) \forall \alpha \in K, \forall u \in W : \alpha \odot u \in W$$

$\oplus$ și $\odot$ sunt operațiile de adunare și înmulțire definite pe V

Combinații liniare. Dependență și independență liniară. Bază

21 octombrie 2019

Combinații liniare

- $(9, 24) = 1 \cdot (9, 24)$
- $(9, 24) = 3 \cdot (3, 8)$
- $(9, 24) =? \cdot (11, 11)$

- $(9, 24) = 2 \cdot (3, 6) + 3 \cdot (1, 4)$
- $(9, 24) = 4 \cdot (3, 5) - 1 \cdot (3, -4)$
- $(9, 24) = 6 \cdot (2, 16/3) - 3 \cdot (1, 8/3)$
- $(9, 24) = 2 \cdot (2, 16/3) + 5 \cdot (1, 8/3)$
- $(9, 24) =? \cdot (7/8, 2) +? \cdot (-7/8, -2)$

- $(9, 24) = 3 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, 7) + 1 \cdot (4, 7)$

Combinații liniare

Definiție: Combinație liniarã

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K. Un vector v din V se numește combinație liniarã de vectori $v_1, v_2, ..., v_n$ din V dacã $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ astfel încat:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Combinații liniare

Definiție: Combinație liniarã

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K. Un vector v din V se numește combinație liniarã de vectori $v_1, v_2, ..., v_n$ din V dacã $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ astfel încat:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Dacã v este din R^n, pentru a verifica dacã v este o combinație liniarã a unei mulțimi de m vectori dați, se rezolvã un sistem de n ecuații liniare cu m necunoscute. Matricea sistemului se obține, aranjând cei m vectori pe coloane, iar coloana termenilor liberi este formatã din vectorul v pus pe coloanã.

Dependență și independență liniară

Definiție:dependență liniară

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K și $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o mulțime de vectori din V. Spunem ca vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt **liniar dependenți** (sau că mulțimea S este **liniar dependentă**) dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, cu cel puțin unul dintre ei nenul, astfel încât să avem:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0_V \tag{1}$$

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt **liniar independenți** (sau mulțimea S este **liniar independentă**) dacă relația (1) este adevărată doar pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Observație: Relația (1) are loc întotdeauna pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Dar aceasta nu înseamnă că vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt liniar independenți.

Dependențã și independențã liniarã

Problema stabilirii dacã o mulțime datã de vectori este liniar dependentã/independentã se reduce la rezolvarea unui sistem omogen de ecuații liniare.

- Dacã sistemul este compatibil determinat (unica soluție este $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$), mulțimea este liniar independentã
- Dacã sistemul este compatibil nedeterminat (existã și alte soluții pe lângã soluția banalã), mulțimea este liniar dependentã

Dependență și independență liniară

Problema stabilirii dacã o mulțime datã de vectori este liniar dependentã/independentã se reduce la rezolvarea unui sistem omogen de ecuații liniare.

- Dacã sistemul este compatibil determinat (unica soluție este $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$), mulțimea este liniar independentã
- Dacã sistemul este compatibil nedeterminat (existã și alte soluții pe lângã soluția banalã), mulțimea este liniar dependentã

Pentru a verifica dacã n vectori din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți putem:

- rezolva sistemul omogen și determinã soluțiile

Dependență și independență liniară

Problema stabilirii dacă o mulțime dată de vectori este liniar dependentă/independentă se reduce la rezolvarea unui sistem omogen de ecuații liniare.

- Dacă sistemul este compatibil determinat (unica soluție este $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$), mulțimea este liniar independentă
- Dacă sistemul este compatibil nedeterminat (există și alte soluții pe lângă soluția banală), mulțimea este liniar dependentă

Pentru a verifica dacă n vectori din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți putem:

- rezolva sistemul omogen și determină soluțiile
- calcula determinantul matriccei sistemului ($\Delta \neq 0$ - LI; $\Delta = 0$-LD)

Dependență și independență liniară

Problema stabilirii dacă o mulțime dată de vectori este liniar dependentă/independentă se reduce la rezolvarea unui sistem omogen de ecuații liniare.

- Dacă sistemul este compatibil determinat (unica soluție este $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$), mulțimea este liniar independentă
- Dacă sistemul este compatibil nedeterminat (există și alte soluții pe lângă soluția banală), mulțimea este liniar dependentă

Pentru a verifica dacă n vectori din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți putem:

- rezolva sistemul omogen și determină soluțiile
- calcula determinantul matriccei sistemului ($\Delta \neq 0$ - LI; $\Delta = 0$-LD)
- calcula rangul matriccei sistemului ($r = n$ - LI; $r \neq n$-LD)

Dependențã și independențã liniarã

Teoremã

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre ei se scrie ca o combinație liniarã a celorlalți vectori.

Dependență și independență liniară

Teoremă

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre ei se scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

Teoremă

Orice submulțime nevidă a unei mulțimi liniar independente este liniar independentă.

Dependență și independență liniară

Teoremă

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre ei se scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

Teoremă

Orice submulțime nevidă a unei mulțimi liniar independente este liniar independentă.

Teoremă

Orice mulțime de vectori ce include o mulțime liniar dependentă este liniar dependentă.

Dependență și independență liniară

Teoremă

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ sunt liniar dependenți $\Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre ei se scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

Teoremă

Orice submulțime nevidă a unei mulțimi liniar independente este liniar independentă.

Teoremă

Orice mulțime de vectori ce include o mulțime liniar dependentă este liniar dependentă.

Teoremă

Orice mulțime de vectori ce conține vectorul nul (0_V) este liniar dependentă.

Sistem de generatori

Definiție:Spațiu generat

Fie $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o submulțime a lui V. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente din S și scalari din K se numește spațiu generat de S (sau acoperirea liniarã a lui S). Se noteazã $L(S)$

$L(S)$ este subspațiu vectorial al lui V.

Sistem de generatori

Definiție:Spațiu generat

Fie $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o submulțime a lui V. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente din S și scalari din K se numește spațiu generat de S (sau acoperirea liniarã a lui S). Se noteazã $L(S)$

$L(S)$ este subspațiu vectorial al lui V.

Definiție:Sistem de generatori

Submulțimea S se numește sistem de generatori pentru spațiul V, dacã spațiul generat de S este egal cu V $(L(S) = V)$.

Bazã a unui spațiu vectorial

Definiție: Bazã

O mulțime de vectori $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \in V$ formeazã o bazã a spațiului vectorial V dacã și numai dacã:

- vectorii din B sunt liniar independenți (B este liniar independentã)
- B este un sistem de generatori pentru V

Bazã a unui spațiu vectorial

Definiție: Bazã

O mulțime de vectori $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \in V$ formeazã o bazã a spațiului vectorial V dacã și numai dacã:

- vectorii din B sunt liniar independenți (B este liniar independentã)
- B este un sistem de generatori pentru V

Exemple de baze În $\mathbb{R}^2$:

Baza canonicã $E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$B_1 = \{(3, 6), (1, 4)\}$

$B_2 = \{(3, 5), (3, -4)\}$

Dimensiunea a unui spațiu vectorial

Definiție: Dimensiunea spațiului vectorial

Dacă V are o bază formată din n elemente, atunci numărul n se numește dimensiunea lui V. Se notează $dimV = n$ sau V_n

Dimensiunea a unui spațiu vectorial

Definiție: Dimensiunea spațiului vectorial

Dacã V are o bazã formatã din n elemente, atunci numãrul n se numește dimensiunea lui V. Se noteazã $dimV = n$ sau V_n

Definiție: Spațiu finit dimensional

Spațiul V se numește finit dimensional dacã posedã o bazã finitã sau dacã $V = \{0_V\}$ (dimensiunea $= 0$). În caz contrar V se numește infinit dimensional.

Dimensiunea a unui spațiu vectorial

Definiție: Dimensiunea spațiului vectorial

Dacã V are o bazã formatã din n elemente, atunci numãrul n se numește dimensiunea lui V. Se noteazã $dimV = n$ sau V_n

Definiție: Spațiu finit dimensional

Spațiul V se numește finit dimensional dacã posedã o bazã finitã sau dacã $V = \{0_V\}$ (dimensiunea $= 0$). În caz contrar V se numește infinit dimensional.

Teoremã

Dacã V este un spațiu finit dimensional, atunci oricare douã baze ale lui V au același numãr de elemente.

Bază. Dimensiune a unui spațiu vectorial

Teoremă

Fie $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o bază a spațiului vectorial V. **Oricare vector** $v \in V$ se exprimă în mod unic în forma:

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n$$

Bază. Dimensiune a unui spațiu vectorial

Teoremă

Fie $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o bază a spațiului vectorial V. **Oricare vector** $v \in V$ se exprimă în mod unic în forma:

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n$$

Definiție:

Scalarii $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ se numesc coordonatele lui v în raport cu baza B, iar bijecția $f : V \longrightarrow K^n$ definită prin $v \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ se numește sistem de coordonate pe V.

Notăm: $v_b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Bazã. Dimensiune a unui spațiu vectorial

Teoremã

Fie V un spațiu de dimensiune finitã n. Atunci:

(i) Oricare n+1 sau mai mulți vectori din V sunt liniar dependenți

(ii) Orice mulțime liniar independentã $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ din V cu n elemente este o bazã a lui V

(iii) Orice mulțime $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ din V cu n elemente ce este sistem de generatori pentru V este o bazã a lui V.

Schimbarea coordonatelor unui vector

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n în care considerãm douã baze $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ și $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Un vector $v \in V$ poate fi scris:

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n$$
$$v = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... + \beta_n g_n$$

Cum vectorii din baza G sunt elemente ale spațiului vectorial V, și B este bazã în V, atunci ei pot fi scriși ca o combinație liniarã de vectori din B astfel:

$$g_1 = a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + ... + a_{1n} b_n, \quad a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \in K$$
$$g_2 = a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + ... + a_{2n} b_n, \quad a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \in K$$
$$\vdots$$
$$g_n = a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + ... + a_{nn} b_n, \quad a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} \in K$$

Schimbarea coordonatelor unui vector

Matricea $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, având pe coloane coordonatele lui g_i în baza B $(i = 1, .., n)$ se numește matricea schimbãrii bazelor (de trecere de la baza B la baza G). Matricea schimbãrii bazelor B și G este inversabilã și inversa ei (P^{-1}) este matricea schibãrii bazelor de la baza G la baza B.

Teoremã

Fie P matricea schimbãrii bazelor de la baza B la baza G. Atunci, pentru orice vector avem:

$$v_B = P\ v_G$$
$$v_G = P^{-1} v_B$$

Metoda1: Se calculează folosind definiția

Metoda2: Se urmărește următorul algoritm

- PAS 1: Se construiește matricea $(B|G)$. Matricea $(B|G)$ formată va avea n linii și $2n$ coloane.
- PAS 2: Se aplică procedeul Gauss-Jordan pe matricea $(B|G)$, urmărindu-se să se obțină matricea unitate pe primele n linii și n coloane. În acest caz, submatricea formată din cele n linii și ultimele n coloane (coloanele cu indicele de la $n+1$ la $2n$) va fi matricea schimbării de la baza B la baza G. Având matricea de trecere de la baza B la baza G (notată cu P) și coordonatele unui vector v în baza B (v_B), atunci coordonatele lui v în baza G (v_G), se pot calcula astfel:
  - se construiește matricea $(P|v_B)$, formată din matricea P la care se adaugă o coloană formată din coordonatele vectorului v_B
  - se aplică procedeul Gauss-Jordan pe matricea $(P|v_B)$ pană când se obține matricea unitate pe primele n linii și n coloane.
  - în forma diagonal canonică obținută la pasul precedent, ultima coloană reprezintă coordonatele lui v în baza G (v_G).

Operatori liniari (transformãri liniare)

28 octombrie 2019

Definiție: Operator liniar

Fie V și W două spații vectoriale peste câmpul K. O funcție $L : V \to W$ cu proprietățile:

$$a)\ \ \forall u, v \in V :\ \ L(u+v) = L(u) + L(v)$$
$$b)\ \ \forall \alpha \in K, \forall u \in V :\ \ L(\alpha u) = \alpha L(u)$$

se numește operator liniar (sau transformare liniară).

Operatori liniari

Teoremã

Dacã $L\colon V \to W$ este un operator liniar, atunci:

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + ... + \alpha_n L(x_n)$$
$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in V \text{ și } \forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K.$$

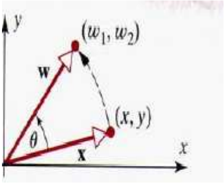
Teoremã

Fie $L\colon V \to W$ un operator liniar. Atunci:
a) $L(0_V) = 0_W$ (0_V și 0_W sunt elementele neutre fațã de adunarea vectorilor din V, respectiv W)
b)$L(x - y) = L(x) - L(y)$ ($-y$ este opusul lui x fatã de adunarea vectorilor din V, iar $-L(y)$ este opusul lui $L(x)$ fațã de adunarea vectorilor din W)

Exemple de operatori liniari

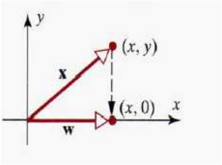
- $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y, z) = (x, y)$
- $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x) = rx, \quad unde\ r \in \mathbb{R}$
- $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y, z) = (x + y, y - z)$
- $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x + 1, 2y, z)$ NU este operator liniar (Verificați!)

Exemple de operatori liniari



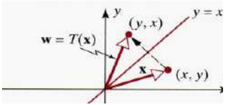
operatorul de rotație de unghi θ:

- $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $R(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$



operatorul de proiecție

- $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $P(x, y) = (x, 0)$ (proiecția pe OX)
- $P(x, y) = (0, y)$ (proiecția pe OY)



operatorul de simetrie (față de prima bisectoare)

- $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $T(x, y) = (y, x)$

Matricea asociată unui operator liniar

Definiție

Fie V și W două spații vectoriale finit dimensionale ($dimV = n; dimW = m$) peste K și $L: V \to W$ un operator liniar. Dacă $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ este o bază alui V și $G = \{g_1, g_2 ..., g_m\}$ este o bază a lui W, atunci există o matrice și numai una: $A = (a_{ij})$ de tipul (m, n) astfel încât

$$L(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_i, \quad \forall 1 \leq j \leq n, a_{ij} \in K$$

Matricea A se numește matricea asociată operatorului L în perechea de baze B și G.

Fie $x \in V$, atunci: $[L(x)]_G = Ax_B$.
Această ecuație se numește reprezentarea operatorului L în raport cu bazele B și G.

Determinarea matricei asociate unui operator liniar

Pentru determinarea matricei operatorului $L\colon V \to W$ în raport cu bazele $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ și $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ ale lui V, respectiv W se urmează pașii:

- Se calculează $L(b_j) = Y_j$ pentru $j = 1, 2, \ldots, n$
- Se determină coordonatele lui Y_j în raport cu baza G

$$Y_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

- Matricea asociată operatorului în raport cu bazele B și G se construiește așezând coordonatele lui Y_j pe coloana j.

Exercițiu: Să se determine matricea asociată operatorului $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, yz) = (x + y, y - z)$ în raport cu bazele:

a) $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ și $G = \{g_1, g_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b) $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ și $G = \{g_1, g_2\} = \{(1, 2), (-1, 1)\}$

Modificarea matricei unui operator la schimbarea bazelor

Fie V și W două spații vectoriale, finit dimensionale (dim V=n, dim W=m), nenule, peste câmpul K și $L: V \to W$ un operator liniar. Fie $A_{B,G}$ matricea operatorului în raport cu perechea de baze B și G. Dacă $A_{B',G'}$ este matricea lui L în raport cu alte două baze $B' \subset V$ și $G' \subset W$, atunci:

$$A_{B',G'} = Q^{-1} A_{B,G} P, \tag{1}$$

unde P este matricea de trecere de la baza B la baza B' și Q este matricea de trecere de la baza G' la baza G.

Particularizare pentru un operator $L: V \to V$

În cazul în care operatorul este definit pe un spațiu vectorial cu valori în același spațiu vectorial, $G = B$ și $G' = B'$, iar matricea lui L în raport cu baza B' este dată de:

$$A_{B'} = P^{-1} A_B P \tag{2}$$

Modificarea matricei unui operator la schimbarea bazelor

Fie V și W două spații vectoriale, finit dimensionale (dim V=n, dim W=m), nenule, peste câmpul K și $L\colon V \to W$ un operator liniar. Fie $A_{B,G}$ matricea operatorului în raport cu perechea de baze B și G. Dacă $A_{B',G'}$ este matricea lui L în raport cu alte două baze $B' \subset V$ și $G' \subset W$, atunci:

$$A_{B',G'} = Q^{-1} A_{B,G} P, \tag{3}$$

unde P este matricea de trecere de la baza B la baza B' și Q este matricea de trecere de la baza G' la baza G.

Particularizare pentru un operator $L\colon V \to V$

În cazul în care operatorul este definit pe un spațiu vectorial cu valori în același spațiu vectorial, $G = B$ și $G' = B'$, iar matricea lui L în raport cu baza B' este dată de:

$$A_{B'} = P^{-1} A_B P \tag{4}$$

Operații cu operatori

- Suma a doi operatori
  Fie $L_1 \colon V \to W$ și $L_2 \colon V \to W$ doi operatori liniari.
  Se numește suma lui L_1 cu L_2, funcția definitã:
  $L \colon V \to W$, $L(v) = L_1(v) + L_2(v)$
  Matricea asociatã operatorului L este suma matricelor asociate lui L_1 și L_2
- Produsul (compusul) a doi operatori
  Fie $L_1 \colon V \to W$ și $L_2 \colon W \to T$ doi operatori liniari.
  Se numește produsul lui L_2 cu L_1 $(L_2 \circ L_1)$, funcția:
  $L \colon V \to T$, $(L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)) \forall v \in V$
  Matricea asociatã operatorului L este produsul matricelor asociate lui L_1 și L_2
- Inversul unui operator
  Operatorul $L \colon V \to W$ este inversabil dacã stabilește o bijecție intre spațiile vectoriale V și W. Inversul operatorului L, este operatorul $L^{-1} \colon W \to V$ pentru care $L^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = L(x)$
  Matricea asociatã operatorului L^{-1} este inversa matricei lui L

Vectori proprii. Valori proprii.

4 noiembrie 2019

Operatori liniari

Fie V și W două spații vectoriale peste câmpul K.
Orice operator ($L\colon V \to W$) poate fi definit în două moduri:

- **dându-se formula de calcul pentru imaginea oricărui vector din domeniu de definiție al operatorului (mulțimea V)**
  Exemplu: $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y,z) = (x+y, y-z)$
- **dându-se matricea asociată operatorului într-o pereche de baze**
  Pentru exemplul anterior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $L(x) = Ax$

  ! Matricea dată este în raport cu bazele canonice din R^3, respectiv R^2

Operatori liniari

În continuare, se vor considera doar operatorii care au domeniul și codomeniul reprezentat de același spațiu vectorial.

- Dându-se un operator liniar, $L\colon V \to V$, există un vector $x \in V$ astfel încât imaginea lui x prin L sã fie datã de produsul unui scalar cu x?

$$? \quad \exists x \in V, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.î.}$$
$$L(x) = Ax = \lambda x$$

  (curs 5)

- Existã o bazã în V astfel încât matricea asociatã operatorului în raport cu baza respectivã sã aibã elemente nenule doar pe diagonala principalã? (curs 6)

Vectori proprii. Valori proprii.

Definiție: Vectori proprii. Valori proprii

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K și $L\colon V \to V$ un operator liniar. Vectorul $x \in V$, $x \neq 0_V$ se numește **vector propriu** al lui L dacã existã $\lambda \in K$ astfel încât:

$$L(x) = \lambda x$$

Scalarul λ se numește **valoare proprie** a lui L.

Subspațiu propriu. Spectrul unui operator

Definiție: subspațiu propriu al unui operator

Fie λ o valoare proprie a lui L. Mulțimea:

$$X_\lambda = \{x \in V | L(x) = \lambda x\}$$

se numește subspațiul propriu al lui L corespunzãtor valorii proprii λ.

Definiție: spectrul unui operator

Mulțimea tuturor valorilor proprii se noteazã cu $Sp(L)$ și se numește spectrul operatorului L.

Polinom caracateristic. Ecuație caracteristică.

Definiție: Polinom caracteristic. Ecuație caracteristică.

Fie A_B matricea operatorului L în raport cu baza B și $dimV = n$. Polinomul:

$$P(\lambda) = det(A_B - \lambda I_n) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + ... + p_{n-1}\lambda^1 + p_n, \quad p_i \in K, i = 1, ..., n$$

se numște polinomul caracteristic al lui L.
Ecuația:

$$P(\lambda) = 0,$$

se numște ecuația caracteristică a lui L.

Polinom caracateristic. Ecuație caracteristicã. (continuare)

Teoremã:

Polinomul caracteristic al operatorului liniar L nu se modificã la schimbarea bazei în raport cu care se calculeazã matricea asociatã operatorului.

Proprietate:

Dacã $dimV = n$, iar A_B este matricea lui L în raport cu baza B atunci $\lambda \in K$ este o valoare proprie pentru L (sau pentru A_B) $\Longleftrightarrow$

$$det(A_B - \lambda I_n) = 0_V$$

Deci, valorile proprii ale lui L sunt rãdãcinile polinomului caracateristic al lui L. Vectorul propriu x, corespunzãtor valorii proprii λ se determinã din sistemul:

$$(A_B - \lambda I_n)x_B = 0_V$$

Determinarea vectorilor proprii și valorilor proprii - Algoritm

Se consideră A_B, matricea operatorului în raport cu o bază B din V. Dacă A_B nu este dată, se alege o bază în V, față de care se determină matricea operatorulu (ex. baza canonică).

- PAS1 : Se scrie polinomul caracteristic al lui L:
  $P(\lambda) = \det(A_B - \lambda I_n)$
- PAS 2: Se determină mulțimea tuturor rădăcinilor polinomului caracteristic ($Sp(L)$), rezolvând ecuația $P(\lambda) = 0$.
- PAS 3: Presupunem că s-au găsit p valori proprii ($p \leq n$). Pentru fiecare valoare proprie $\lambda_i, i = \overline{1, p}$ se urmează pașii:
  - PAS 3.1: Se determină matricea $M = A_B - \lambda_i I_n$, care se obține de fapt scăzând λ_i din fiecare element de pe diagonala principală a lui A_B.
  - PAS 3.2: Se determină soluțiile sistemului omogen de ecuații: $MX = 0$. Sistemul este compatibil nedeterminat, iar mulțimea soluțiilor va reprezenta mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_i

Vectori proprii. Valori proprii. Proprietăți

Proprietate:

Dacă $L\colon V \to V$ este un operator liniar, atunci:

- Fiecărui vector propriu al lui L îi corespunde o unică valoare proprie
- La valori proprii distincte ale lui L corespund vectori proprii liniar independenți.

Proprietate:

Dacă $L\colon V \to V$ este un operator liniar iar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale operatorului, atunci:

- Determinantul matricei asociate operatorului este egal cu produsul valorilor proprii
- Urma matricei asociate operatorului ($Tr(A)$) este egală cu suma valorilor proprii

Vectori proprii. Valori proprii. Proprietăţi

Proprietate:

În cazul particular în care matricea asociată operatorului este simetrică, atunci toate valorile proprii sunt numere reale.

Operatori liniari diagonalizabili

11 noiembrie 2019

Operatori liniari

În continuare, se vor considera doar operatorii care au domeniul și codomeniul reprezentat de același spațiu vectorial.

- Dându-se un operator liniar, $L\colon V \to V$, există un vector $x \in V$ astfel încât imaginea lui x prin L să fie dată de produsul unui scalar cu x?

$$? \quad \exists x \in V, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.î.}$$
$$L(x) = Ax = \lambda x$$

  (curs 5)
- Există o bază în V astfel încât matricea asociată operatorului în raport cu baza respectivă să aibă elemente nenule doar pe diagonala principală? (curs 6)

Operatori liniari

Fie V un spațiu vectorial peste K, finit dimensional ($dimV = n \in \mathbb{N}^*$). Fie $L: V \to V$ un operator liniar și A_B matricea asociată lui L în raport cu o bază fixată (B) din V.

Definiție

O matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$ se numește diagonală dacă $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

Definiție: Operator diagonalizabil

Operatorul L se numește diagonalizabil dacă există o bază în V astfel încât matricea asociată operatorului în raport cu această bază este diagonală.

Operator diagonalizabil

Teoremã:

Un operator este diagonalizabil $\Leftrightarrow$

- existã o bazã B a lui V formatã din vectorii proprii ai lui L **SAU**
- polinomul caracteristic al lui L $(P(\lambda))$ are toate rãdãcinile în câmpul K și oricare ar fi valoarea proprie λ, dimensiunea subspațiului propriu X_λ este egalã cu ordinul de multiplicitate al lui λ.

În cazul în care operatorul este diagonalizabil, elementele matricei diagonale asociatã lui L sunt valorile proprii ale lui L.

Vectori proprii. Valori proprii. Proprietãți

Proprietate:

Dacã $L\colon V \to V$ este un operator liniar, atunci:

- Fiecãrui vector propriu al lui L îi corespunde o unicã valoare proprie
- La valori proprii distincte ale lui L corespund vectori proprii liniar independenți.

Dimensiunea subspațiului propriu a unui operator

Teoremã:

Dimensiunea subspațiului generat de mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații omogen ($AX = 0$) este $n - r$, unde n este numãrul de necunoscute iar r este rangul matricei coeficienților (matricea A).

Notãm cu W subspațiul generat de mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații omogen ($AX = 0$)
Dacã sistemul a fost adus la forma diagonal canonicã folosind procedeul Gauss-Jordan, atunci vom avea $n - r$ variabile secundare $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{(n-r)}})$. Fie v_j o soluție obținutã alegând $x_{i_j} = 1$ (sau orice altã valoare diferitã de zero) și restul variabilelor secundare egale cu 0. Atunci soluțiile $v_1, v_2, ..., v_{n-r}$ sunt vectori liniar independenți, deci formeazã o bazã a lui W.

Subspațiu propriu. Spectrul unui operator

Definiție: multiplicitatea algebricã a unei valori proprii

Multiplicitatea algebricã a valorii proprii λ este multiplicitatea lui λ ca rãdãcinã a ecuației caracteristice. Multiplicitatea algebricã a valorii proprii λ se noteazã $m_{a\lambda}$

Definiție: multiplicitatea geometricã a unei valori proprii

Dimensiunea subspațiului propriu X_λ peste K se numește multiplicitate geometricã a valorii proprii λ. Multiplicitatea geometricã a valorii proprii λ se noteazã $m_{g\lambda}$

Algoritmul de diagonalizare a unui operator liniar

- PAS 1: Se determinã o bazã B a lui V și se scrie matricea $A_B \in M_n(K)$
- PAS 2: Se scrie polinomul caracteristic al lui L: $P(\lambda) = \det(A_B - \lambda I_n)$
- PAS 3: Se determinã spectrul operatorului ($Sp(L)$ este mulțimea tuturor rãdãcinilor polinomului caracteristic).
  1. Dacã exista cel puțin o valoare proprie ce nu aparține lui $K(= \mathbb{R})$, atunci L nu este diagonalizabil.
- PAS 4: Presupunem cã s-au gãsit p valori proprii ($p \leq n$). Pentru fiecare valoare proprie $\lambda_i, i = \overline{1, p}$ se urmeazã pașii:
  - PAS 4.1: Se calculeazã matricea $M = A_B - \lambda_i I_n$
  - PAS 4.2: Se determinã o bazã pentru subspațiul soluțiilor sistemului omogen de ecuații: $MX = 0$. Notãm aceastã bazã cu B_i.
    1. Dacã ordinul de multiplicitate a lui λ_i este diferit de numãrul de elemente din baza B_i, atunci L nu este diagonalizabil.

Algoritmul de diagonalizare a unui operator liniar (continuare)

- PAS 5: Se construiește mulțimea $B' = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_p$, unde $B_1, B_2, ...B_p$ sunt mulțimile obținute la PASUL 4.
  1. Dacă numărul de elemente din $B' \neq n$, atunci L nu este diagonalizabil.
- PAS 6: Matricea asociată lui L în baza B' este matrice diagonală și are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, fiecare dintre acestea apărând de un număr de ori egal cu ordinul său de multiplicitate. Notăm această matrice cu $A_{B'}$.

  Verificare
- PAS 7: Se construiește matricea de trecere de la baza B la baza B' (notată $C_{B,B'}$).
- PAS 8: Se verifică relația: $A_{B'} = (C_{B,B'})^{-1} A_B C_{B,B'}$

Forme biliniare. Forme pãtratice

18 noiembrie 2019

Recapitulare operatori liniari.

- Un operator liniar este o funcție $L\colon V \to W$ (V - spațiu vectorial de dimensiune n; W -spațiu dimensional de dimensiune m)
  În raport cu oricare 2 baze (B din V și G din W), operatorului i se asociază o matrice unică $A_{B,G} \in M_{m,n}(K)$
- Când $V = W$, $L\colon V \to V$
  În raport cu orice bază (B din V), operatorului i se asociază o matrice unică $A_B \in M_n(K)$

Forme (funcționale) liniare

Definiție: formã (funcționalã) liniarã

Fie V un spațiu vectorial peste K, de dimensiune finitã. O funcție $f : V \to K$ se numește formã (funcționalã) liniarã dacã:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in K, x \in V$$

Forme biliniare

Definiție: formã biliniarã

Fie V și W douã spații vectoriale peste K.
O funcție $f: V \times W \to K$ se numește formã bililiniarã dacã:

$$f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w), \forall u,v \in V, \forall w \in W$$
$$f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w), \forall u \in V, \forall v,w \in W$$

$$f(\alpha u,w) = \alpha f(u,w), \forall \alpha \in K, u \in V, w \in W$$
$$f(u,\alpha w) = \alpha f(u,w), \forall \alpha \in K, u \in V, w \in W$$

Condițiile de mai sus sunt echivalente cu:

$$a) f(\alpha u + \alpha v, w) = \alpha f(u,w) + \beta f(v,w) \forall \alpha \in K, u,v \in V, w \in W$$
$$b) f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u,v) + \beta f(u,w) \forall \alpha \in K, u \in V, v,w \in W$$

Matricea asociatã unei forme biliniare

Fie $f\colon V \times W \to K$. Fie $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o bazã în V și $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ o bazã în W. Fie x și y doi vectori oarecare din V și W.

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n \in V$$

$$y = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... + \beta_m g_m \in W$$

$f(x, y) = f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... + \beta_m g_m) =$
$= \alpha_1 f(b_1, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... + \beta_m g_m) + \alpha_2 f(b_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... +$
$\beta_m g_m) + ... + \alpha_n f(b_n, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + ... + \beta_m g_m) = ...$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(b_i, g_j)$

Notãm $a_{ij} = f(b_i, g_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ și egalitatea de mai sus devine:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \alpha_i \beta_j \tag{1}$$

Matricea asociatã unei forme biliniare

Definiție:

Matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ definitã anterior (ecuația [1]) se numește matricea asociatã formei biliniare f în perechea de baze B și G, iar elementele a_{ij} se numesc coeficienții formei biliniare în aceeași pereche de baze.

Observații:

- Expresia matricealã a formulei [1] este:

$$f(x, y) = x_B^t A y_G$$

- Dacã $V = W$ și $G = B$ atunci:

$$f(x, y) = x_B^t A y_G = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(b_i, b_j)$$

Modificarea matricei asociate unei forme biliniare la schimbarea bazelor

Fie $f: V \times W \to K$.

Fie $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o bază în V și $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ o bază în W și $A_{B,G}$ matricea lui f în raport cu cele două baze.

Fie $B\prime = \{b_1\prime, b_2\prime, ..., b_n\prime\}$ o bază în V și $G\prime = \{g_1\prime, g_2\prime, ..., g_n\prime\}$ o bază în W și $A_{B\prime,G\prime}$ matricea lui f în raport cu cele două baze.

Dacă P este matricea de trecere de la baza B la $B\prime$ și Q matricea de trecere de la G la $G\prime$, atunci avem:

$$A_{B\prime,G\prime} = P^t A_{B,G} Q$$

Forme biliniare simetrice

Definiție: formã biliniarã simetricã

O formã biliniarã $L\colon V \times V \to K$ se numește simetricã dacã $f(x,y) = f(y,x)$.

Observație: f - este formã biliniarã simetricã $\Leftrightarrow$ matricea asociatã lui f (într-o pereche oarecare de baze) este simetricã (adicã pentru $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, a_{ij} = a_{ji}, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}$)

Forme biliniare simetrice (continuare)

Teoremă

Fie f o formă biliniară simetrică pe V. Atunci există o bază $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ în V, față de care matricea asociată formei biliniare f este diagonală.
Orice altă matrice diagonală a lui f are același număr p de elemente pozitive și același număr n de elemente negative.

Forme pãtratice

Definiție:

Fie f o formã biliniarã simetricã pe V. Funcția $q\colon V \to \mathbb{R}, q(x) = f(x,x)$ se numește formã pãtraticã pe V asociatã lui f.

$$q(x) = f(x,x) = x^t Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

Definiție:

Forma biliniarã simetricã f se numește forma polarã a formei pãtratice q.

Dându-se o formã pãtraticã, forma sa polarã este datã de:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Existã o corespondențã bijectivã între mulțimea formelor pãtratice definite pe spațiul vectorial V și mulțimea formelor biliniare simetrice definite pe $V \times V$.

Matricea asociatã unei forme pãtratice

Ca și în cazul formelor biliniare simetrice, se pune problema asocierii la fiecare formã pãtraticã $q\colon V \to \mathbb{R}$ a unei matrice într-o bazã B a spațiului vectorial V.

Definiție:

Se numește matrice asociatã formei pãtratice $q\colon V \to \mathbb{R}$ în baza B din V, matricea asociatã formei sale polare în aceeași bazã.

Metode de aducere la forma canonicã a unei forme pãtratice - **Metoda lui Gauss**

Fie forma pãtraticã: $q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

- Dacã $a_{11} \neq 0$ se grupeazã toți termenii care conțin pe x_1, realizând un pãtrat perfect astfel:

$$q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x_1^2 + 2a_{11}a_{12}x_1x_2 + .. + 2a_{11}a_{1n}x_1x_n) + \varphi(x_2, ..., x_n)$$

  Se repetã procedeul pentru forma pãtraticã $\varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$ grupând termenii care îi conțin pe x_2, și așa mai departe. Forma canonicã a formei inițiale date este:

$$q(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \frac{1}{a'_{22}}y_2^2 + ... + \frac{1}{a'_{nn}}y_n^2$$

- Dacã $a_{ii} = 0$ se face mai întâi schimbarea de variabile: $x_i = x'_i + x'_j; x_j = x'_i - x'_j; ...; x_k = x'_k$ pentru $k = \overline{1, n}, k \neq i, k \neq j$

Metode de aducere la forma canonicã a unei forme pãtratice - **Metoda lui Jacobi**

Teorema (Jacobi):

Fie V un spațiu vectorial, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o bazã a lui V și $q\colon V \to \mathbb{R}$ o formã pãtraticã. Dacã matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ asociatã formei pãtratice q în baza B are toți minorii principali nenuli , atunci existã o bazã $\overline{B} = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_n}\}$ a lui V fațã de care q are forma canonicã:

$$q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x_1}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x_2}^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x_n}^2,$$

unde $\Delta_1 = a_{11}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; ...$
$\Delta_n = det(A)$ sunt minorii principali ai matricei A.

Metoda lui Jacobi se aplica doar dacã $\Delta_i \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$

Metoda lui Jacobi - determinarea bazei $\overline{B}$

Baza $\overline{B}$ în raport cu care forma pãtraticã q are forma diagonal canonicã gãsitã se determinã astfel.

- Vectorii din baza $\overline{B}$ se determinã folosind baza B astfel:
$$\begin{cases} \overline{b_1} = c_{11}b_1 \\ \overline{b_2} = c_{12}b_1 + c_{22}b_2 \\ ... \\ \overline{b_n} = c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n \end{cases}$$
- Coeficienții $c_{1i}, c_{2i}...c_{ii}$ se determinã, pentru fiecare $i = \overline{1, n}$ rezolvând sistemul:

$$A_i \cdot \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

unde A_i este submatricea lui A (matricea formei în raport cu baza B) formatã din primele i linii și i coloane.

Spații Euclidiene

25 noiembrie 2019

Produs scalar

Definiție: produs scalar

Fie V un spațiu vectorial peste K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Se numește produs scalar pe V o aplicație:
$<,>: V \times V \to K$
care are următoarele proprietăți:

$$1) < v, w >=< w, v >, \forall v, w \in V$$

$$2) < v + w, u >=< v, u > + < w, u >, \forall v, w, u \in V$$

$$3) < \alpha v, w >= \alpha < v, w >, \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V$$

$$4) < v, v >\geq 0, \forall v \in V; < v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0_V$$

Exemple de produse scalare

- $M_2(\mathbb{R})$- mulțimea tuturor matricelor pãtratice de ordin 2 cu elemente reale este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$
  Se definește produsul scalar $<,>: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ astfel:
  $< A, B >= Tr(B^t A) = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}$
- $\mathbb{R}^n$ - spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.
  Se definește produsul scalar $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel:

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n,$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n); y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

Pentru $\mathbb{R}^n$, produsul scalar definit mai sus se numește **produsul scalar standard** (sau canonic). Se mai noteazã $x \cdot y$.

- $\mathbb{C}^n$- spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$. Se definește produsul scalar $<,>: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ astfel:
  $< x, y >= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n},$
  unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{C}$ și $y = (y_1, y_2, ..., y_n), y_i \in \mathbb{C}$

Spațiu euclidian

Un spațiu vectorial V **definit peste câmpul** $\mathbb{R}$, finit dimensional, **dotat cu un produs scalar** se numește spațiu euclidian.

Spațiul euclidian $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$

Norma indusã de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K.
Aplicația: $||\cdot||$: $V \to \mathbb{R}_+$ care are urmãtoarele proprietãți:

$$1)||x|| \geq 0, \forall x \in V; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$$
$$2)||\alpha x|| = \alpha||x||, \forall x \in V \text{și } \alpha \in K$$
$$3)||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in V$$

se numește normã pe V.

Spațiul vectorial pe care s-a definit o normã se numește spațiu vectorial normat.

Teoremã:

Orice spațiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar poate fi înzestrat cu o normã:

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} \qquad \forall x \in V$$

Distanța dintre doi vectori

Definiție: distanța dintre doi vectori

Într-un spațiu vectorial V, dotat cu produs scalar, distanța dintre 2 vectori oarecare din V este:

$$d(v, w) = ||v - w||$$

Definiție: distanța dintre doi vectori

Un vector u din V se numește vector unitate dacã $||u|| = 1$ (echivalent cu $< u, u >= 1$)

Observație:

Pentru orice vector nenul din $\mathbb{R}^n$, vectorul $\widehat{v} = \frac{1}{||v||} v = \frac{v}{||v||}$ se numește vectorul unitate orientat în aceeași direcție cu v. Procesul determinãrii lui $\widehat{v}$ din v se numește normalizarea lui v.

Unghiul dintre doi vectori

Definiție: unghiul dintre doi vectori

În spațiul euclidian V, se definește unghiul dintre doi vectori x și y prin relația:

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||} \qquad \widehat{x,y} = [0, 2\Pi]$$

Definiție:

Doi vectori nenuli $x, y \in V$ se numesc ortogonali (perpendiculari) $\Leftrightarrow < x, y >= 0$.

Baze ortogonale. Baze ortonormate

Fie V un spațiu euclidian.

O **mulțime** $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset V$ se numește **ortogonalã** dacã oricare doi vectori distincți din S sunt ortogonali ($< x_i, x_j >= 0, \forall i \neq j, i, j = \overline{1, k}$).

Teoremã:

Dacã $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset V$ este o mulțime ortogonalã de vectori nenuli, atunci S este liniar independentã.

Mulțimea S se numește **ortonormatã** dacã S este ortogonalã și $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt vectori unitate.

O **bazã** $B \subset V$ se numește **ortogonalã (ortonormatã)** dacã mulțimea B este ortogonalã (ortonormatã).

Corolar:

O mulțime ortonormatã de vectori din V este liniar independentã.

Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

În orice spațiu euclidian de dimensiune finitã existã baze ortonormate.

Algoritm de ortogonalizare Gram-Schmidt:

Pornind de la o bazã $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ în $V(dimV = n)$ vrem sã determinãm o bazã $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset V$ ortonormatã.

- PAS1 Alegem $y_1 = b_1$
- PAS2 Se calculeazã vectorii $y_2, y_3, ..., y_n$, pe rând, astfel:

$$y_i = b_i - \frac{< b_i, y_1 >}{< y_1, y_1 >} y_1 - \frac{< b_i, y_2 >}{< y_2, y_2 >} y_2 - ... - \frac{< b_i, y_{i-1} >}{< y_{i-1}, y_{i-1} >} y_{i-1}$$

  Mulțimea de vectori $G^* = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ este ortogonalã.
- PAS3 Fie $g_i = \dfrac{y_i}{||y_i||}, i = \overline{1, n} \Leftrightarrow g_i = \dfrac{y_i}{\sqrt{< y_i, y_i >}}$

  Atunci $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ este o bazã ortonormatã în V.

Dreapta și Planul

2 decembrie 2019

Vectori legați

Fi E_3 spațiul geometriei elementare. Orice pereche de puncte din E_3, notată (A, B) se numește **segment orientat (vector legat).**

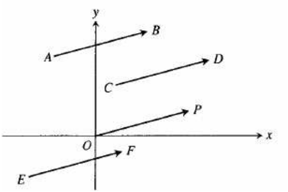
Un vector legat este caracterizat de:

- **direcție** - Dacă $A \neq B$, atunci direcția dreptei determinate se numește direcția segmentului (A, B)
- **sens** - Sensul segmentului orientat este dat de sensul de parcurs de la A la B. Atunci, segmentele (A, B) și (B, A) se numesc opuse.
- **lungime** - Lungimea unui vector reprezintă lungimea segmentului AB

Punctul A se numește originea (punctul de aplicație) al vectorului (A, B) iar punctul B se numește extremitatea vectorului.
Notații pentru vectorul legat (A, B): $\overrightarrow{a}$, sau $\overrightarrow{AB}$

Vectori liberi

Mulțimea segmentelor orientate din E_3, care au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime se numește **vector liber**.



Un vector liber se reprezintã grafic printr-unul dintre segmentele orientate care aparțin acestei mulțimi.
Doi vectori se numesc egali dacã au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.
Lungimea unui vector $\overrightarrow{a}$, sau $\overrightarrow{AB}$ se noteazã prin $\| \overrightarrow{a} \|$sau $\|\overrightarrow{AB}\|$

Reper cartezian (ortogonal)

Se consideră în E_3 un triedru ortogonal $Oxyz$, format din trei semidrepte Ox, Oy, Oz, astfel ca cele 3 drepte sunt ortogonale două câte două. Fie pe cele 3 drepte punctele U_1, U_2, U_3 și vectorii $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OU_1}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OU_2}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OU_3}$ astfel ca $d(OU_1) = d(OU_2) = d(OU_3) = 1$

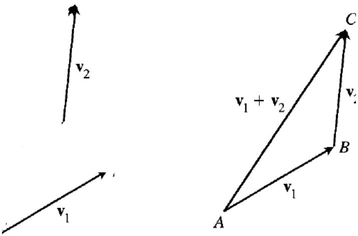
Fie M un punct oarecare. Atunci, vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numește **vectorul de poziție** al punctului M (notat și $\overrightarrow{r_M}$).

Mulțimea vectorilor liberi (notată V_3) formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$, iar $B = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este o bază în acest spațiu vectorial. Pe acest spațiu vectorial se definesc operațiile de adunare între vectori și de înmulțire a unui vector cu un scalar.

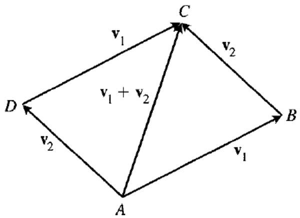
Adunarea vectorilor

Se defineste adunarea vectorilor liberi astfel $+: V_3 x V_3 \to V_3$

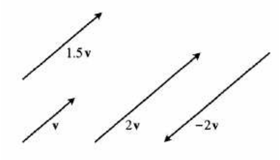
Regula triunghiului



Regula paralelogramului



Înmulțirea cu scalari



Produs scalar

Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$ doi vectori liberi și $\theta \in [0, \pi]$ unghiul dintre doi reprezentanți.
Numim produs scalar numãrul real dat de: $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \| \cos \theta$
Produsul scalar are proprietãțile produsului scalar din definiția spațiilor euclidiene.

Produs vectorial

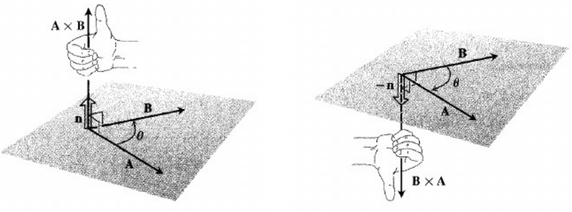
Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$ doi vectori liberi. Numim produs vectorial, vectorul notat $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ astfel:
Dacã $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sunt coliniari, atunci $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ Dacã $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ nu sunt coliniari, atunci $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ are:

1. direcția este perpendicularã pe planul celor doi vectori
2. lungimea este $\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \sin\theta$
3. sensul este dat de "regula mainii drepte" sau "regula burghiului"

Produsul vectorial a doi vectori $\overrightarrow{v} = (m, n, p) \times \overrightarrow{w} = (m1, n1, p1)$ este vectorul

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p1 \end{vmatrix};$$

Regula mâinii drepte



Produs mixt

Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V_3$. Se numește produs mixt numãrul real:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} x \overrightarrow{c}) \tag{1}$$

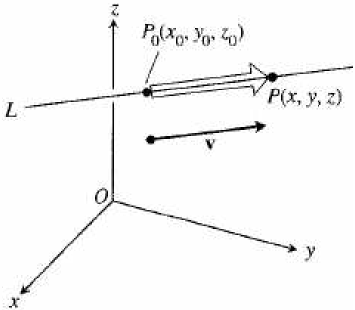
Dacã $\overrightarrow{a} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{c} = x_3 \overrightarrow{i} + y_3 \overrightarrow{j} + z_3 \overrightarrow{k}$, atunci

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Proprietãți

1. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ dacã și numai dacã vectorii sunt coplanari (liniar dependenți)

Ecuația unei drepte ce trece printr-un punct și este paralelă la o direcție



1. Fie un punct oarecare în spațiu $P_0(X_0, y_0, z_0)$
2. Fie o direcție dată de un vector $\overrightarrow{v}$ și o linie L ce trece prin punctul P_0 și este paralelă cu direcția lui $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{v} = (u, v, w)$

3. Cum se poate scrie vectorul de poziție al unui punct oarecare P în funcție de vectorul de poziție al punctului dat și vectorul $\overrightarrow{v}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{P_0P}=t\overrightarrow{v},\, t\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+c\overrightarrow{v} \tag{3}$$

Ecuația 3 se numește **ecuația vectorială a unei drepte**

Ecuațiile parametrice ale unei drepte

Proiectând ecuația 3, avem:

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + c(u, v, w)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu, tv, tw)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0 + tu, y_0 + tv, z_0 + tw)$

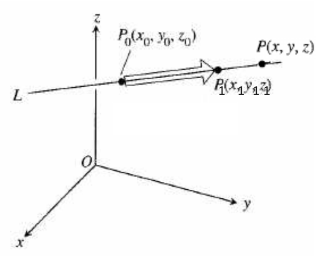
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \\ z = z_0 + tw \end{cases} \quad \text{Ecuațiile parametrice ale dreptei}$$

Ecuația dreptei dată de un punct $P(x_0, y_0, z_0)$ și este paralel la o direcție $\overrightarrow{v} = (u, v, w)$

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w} \tag{4}$$

Observații: Vectorul $\overrightarrow{v}$ se numește vector director al dreptei, iar $u, v, w)$ parametrii directori.

Ecuația unei drepte ce trece prin două puncte



1. Fie două puncte oarecare în spațiu $P_0(X_0, y_0, z_0)$ și $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Două puncte determină un vector $\overrightarrow{P_0P_1}$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{5}$$

- **Unghiul dintre douã drepte** Fie douã drepte d_1, d_2 de vectori directori $\overrightarrow{v_1} = (l_1, m_1, n_1), \overrightarrow{v_2} = (l_2, m_2, n_2)$. Unghiul format de dreptele $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ este dat de:
$$\cos\alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$
- **Distanța de la un punct la o dreaptã** Fie punctul $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ și dreapta (d) datã de punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și vectorul $\overrightarrow{v} = (l, m, n)$. Atunci distanța de la punctul M_0 la dreapta (d) este:
$$d(M_0, d) = \frac{||\overrightarrow{M_0 M_1} \times \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||}$$
- **Distanța dintre douã drepte** Distanța dintre dreptele (d_1) $(\overrightarrow{v_1} = (l_1, m_1, n_1))$ și (d_2) $(\overrightarrow{v_2} = (l_2, m_2, n_2))$ este:
$$d(d_1, d_2) = \frac{||\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{v1}, \overrightarrow{v_2}||}{||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||}$$
unde $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in (d_1)$ și $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in (d_2)$.

Ecuația planului ce trece printr-un punct și este paralel cu două direcții date

Un punct oarecare P, aparține planului deteminat de un punct (A) și 2 direcții date ($\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$) dacă și numai dacă vectorul $\overrightarrow{AP}$ aparține planului. Avem:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_A}$$

$\overrightarrow{AP}$aparține planului, deci$\exists t, s \in \mathbb{R}$a.î.

$$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}$$

Ecuația vectorială a planului este dată de:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A} + t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v} \tag{6}$$

Exprimând vectorii din ecuația vectorialã a planului în raport cu baza reperului ales $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{r_A} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + z_0\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$$

se obțin ecuațiile parametrice ale planului:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \tag{7}$$

Ecuația planului ce trece prin trei puncte

Considerãm $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ și $P_3(x_3, y_3, z_3)$ cele trei puncte ce determinã planul și P un punct oarecare din plan. Atunci vectorii $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ și $\overrightarrow{P_1P_3}$ sunt coplanari. Deci, produsul lor mixt este nul.

$$(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Conice

Curbe în plan

Definiție: (curbã planã)

Se numește curbã planã locul geometric al punctelor din plan ale cãror coordonate satisfac ecuația:

$$F(x, y) = 0,$$

unde $F(x, y)$ este o funcție de douã variabile.

Definiție: (curbã algebricã de ordinul întâi)

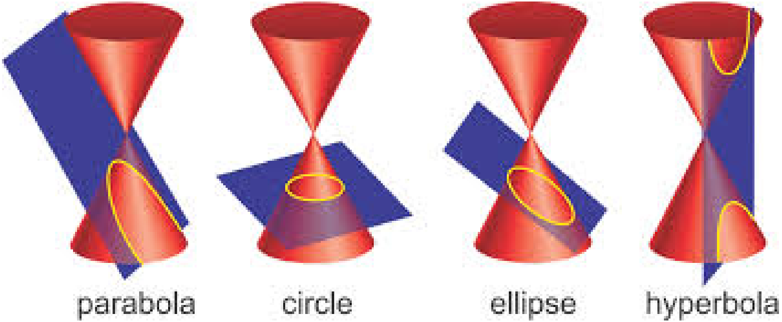
Dacã se considerã funcția $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = ax + by + c$, unde $a^2 + b^2 \neq 0$. Se numește curbã algebricã de ordinul întâi locul geometric al punctelor din plan ale cãror coordonate verificã ecuația $F(x, y) = 0$.

Definiție: (curbã algebricã de ordinul al doilea (conicã))

Dacã se considerã funcția $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, unde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
Se numește curbã algebricã de ordinul al doilea (conicã) locul geometric al punctelor din plan ale cãror coordonate verificã ecuația $F(x, y) = 0$.

Exemple: cercul, elipsa, hiperbola, parabola

Conice



Cercul

Definiție: (Cercul)

Numim cerc locul geometric al punctelor egal depãrtate de un punct fix, numit centru.

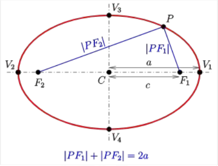
Dacã se alege centrul $C(x_0, y_0)$ și distanța r, pe baza definiției se obține **ecuația redusã a cercului**:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Ecuația generalã este:
$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, unde $a^2 + b^2 - c > 0$

- **Ecuația generalã a cercului**:
  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, unde $a^2 + b^2 - c > 0$
  Exemple: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
- **Centrul și raza unui cerc**
  Centrul cercului are coordonatele: $C(-a, -b)$
  Raza cercului este: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
- **Ecuațiile parametrice ale cercului**
  $$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), r \in \mathbb{R}$$

Elipsa

Definiție: (Elipsa)

Numim elipsã locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor la douã puncte fixe constrantã.



$F_1(c, 0)$ și $F_2(-c, 0)$ se numesc focarele elipsei iar distanța F_1F_2 constituie distanța focalã a elipsei. PF_1 și PF_2 se numesc raze focale

Ecuațiile elipsei

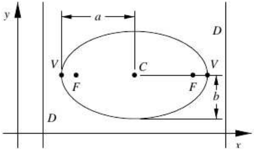
- **Ecuația redusã**

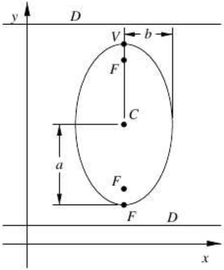
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

- **Ecuațiile parametrice**

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} ,\varphi \in [0, 2\pi)$$

Elipsa



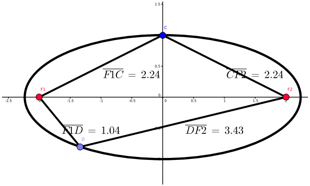


Ecuația redusã

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}-1=0 \qquad \frac{(x-x_C)^2}{b^2}+\frac{(y-y_C)^2}{a^2}-1=0$$

unde x_C și y_C sunt coordonatele centrului elipsei (C), iar a și b sunt semiaxa mare respectiv cea micã a elipsei. Între a, b și c existã relația: $a^2-c^2=b^2$.

Elipsa

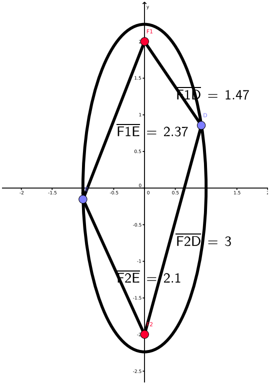


Ecuația elipsei

$$x^2 + 5y^2 - 5 = 0$$

sau

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$$



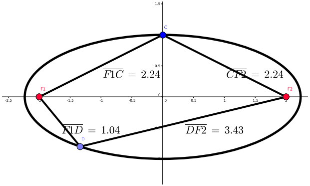
Ecuația elipsei

$$5x^2 + y^2 - 5 = 0$$

sau

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$$

Elipsa

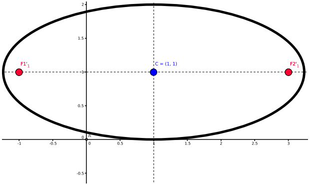


Ecuația elipsei

$$\boxed{x^2 + 5y^2 - 5 = 0}$$

sau

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$$



Ecuația elipsei

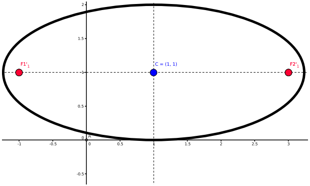
$$(x-1)^2 + 5(y-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

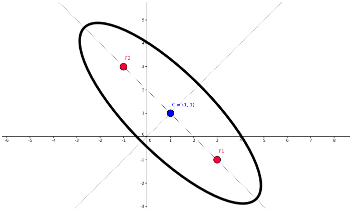
$$\boxed{x^2 + 5y^2 - 2x - 10y + 1 = 0}$$

sau

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{1} - 1 = 0$$

Elipsa





Ecuația elipsei

$$(x-1)^2 + 5(y-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x^2 + 5y^2 - 2x - 10y + 1 = 0}$$

sau

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{1} - 1 = 0$$

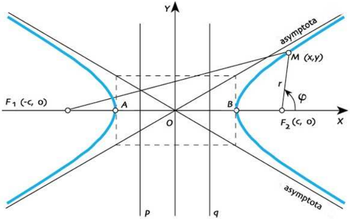
Ecuația elipsei

$$\boxed{5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0}$$

Hiperbola

Definiție: (Hiperbola)

Numim hiperbolã locul geometric al punctelor din plan care au diferența distanțelor la douã puncte fixe constantã.



Ecuațiile hiperbolei

- **Ecuația redusã**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

- **Ecuațiile parametrice**

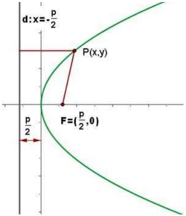
$$\begin{cases} x = a\ ch\ t \\ y = b\ sh\ t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

$$ch\ t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; sh\ t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Parabola

Definiție: (Parabola)

Numim parabolã locul geometric al punctelor din plan egal depãrtate de un punct și o dreaptã datã.



- punctul F se numește focarul parabolei
- dreapta h se umește directoarea parabolei
- segmentul $[PF]$ se numește razã focalã perpendiculara din F pe d se numește axa transversã a parabolei

Ecuațiile parabolei

- **Ecuația redusã**

$$y^2 = 2px$$

- **Ecuațiile parametrice**

$$\begin{cases} x = t^2/2p \\ y = t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R})$$

Fie ecuația unei parabole de forma: $(y-k)^2 = 2p(x-h)$. Atunci:

- Graficul este o parabolã orizontalã, cu ramurile orientate spre dreapta (dacã $p > 0$), sau stânga (dacã $p < 0$)
- Vârful parabolei este punctul de coordonate (h, k)
- Graficul este simetric fațã de dreapta $y = k$ (axa parabolei)
- Deschiderea parabolei este direct proporționalã cu valoarea lui $|p|$

Reducerea ecuației unei conice la forma canonicã

Teoremã:

Orice conicã este: o elipsã, o hiperbolã, o parabolã sau o pereche de linii drepte (care se intersecteazã, paralele sau coincidente)

Dându-se ecuația generalã a unei conice:
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$
dorim sã aflãm forma redusã a acestei ecuații:
$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + s = 0, s \in \mathbb{R}$

Invarianții unei conice

Definiție: (curbã algebricã de ordinul al doilea (conicã))

Se numesc invarianți ai unei conice acele expresii formate cu coeficienții ecuației conicei care pãstrazã aceeași valoare la schimbãri de repere ortonormate.

Unei conice îi putem asocia trei invarianți:

1. $I = a + c$
2. $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, discriminantul mic
3. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$, discriminantul mare

Natura și genul unei conice se poate studia în funcție de valoarea lui δ și Δ. Dacã:

- $\Delta \neq 0$ conica este nedegeneratã (cercul, elipsa, hiperbola și parabola)
- $\Delta = 0$ conica este degeneratã

Dacã:

- $\delta = ac - b^2 > 0$ conica are gen eliptic (elipsã realã, elipsã imaginarã, douã drepte concurente imaginare cu intersecție realã)
- $\delta = ac - b^2 < 0$ conica are gen hiperbolic (hiperbola, douã drepte concurente reale)
- $\delta = ac - b^2 = 0$ conica are gen parabolic (parabola, douã drepte paralele reale sau imaginare, douã drepte confundate)

I) Dacă $\Delta \neq 0$ atunci pentru:

1. $\delta > 0$, conica este
   a) o elipsă reală când $I\Delta < 0$
   b) o elipsă imaginară când $I\Delta > 0$
2. $\delta = 0$, conica este o parabolă.
3. $\delta < 0$ conica este o hiperbolă

II) Dacă $\Delta = 0$ atunci pentru:

1. $\delta > 0$ obţinem două drepte concurente imaginare cu intersecţia rea
2. $\delta = 0$ obţinem:
   a) două drepte paralele dacă $\delta_1 < 0$
   b) două drepte confundate dacă $\delta_1 = 0$
   c) două drepte paralele imaginare dacă $\delta_1 > 0$
3. $\delta < 0$ obţinem două drepte concurente reale,

unde

$$\delta_1 = af - d^2$$

Reducerea ecuației unei conice la forma canonică

$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$

Algoritm - pentru o conica cu centru (cercul, elipsa, hiperbola)

1. Se scrie forma pãtraticã corespunzãtoare ecuației conicei:
$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
2. Se determinã coordonatele centrului conicei $C(x_c, y_c)$ rezolvând sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_c + a_{22}y_c + a_{23} = 0 \end{cases}$$
3. Se translateazã sistemul de referintã inițial în centrul conicei, obținându-se noua ecuație a conicei:
$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y' + c' = 0; c' = f(x_c, y_c)$$
4. Se determinã o bazã ortonormatã B' formatã din vectorii proprii
5. În raport cu baza B', ecuația conicei devine:
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c' = 0$$

unde λ_1 și λ_2 sunt astfel aleși astfel încât sã satisfacã relația: $(\lambda_1 - \lambda_2)a_{12} > 0$

Reducerea ecuației unei conice la forma canonicã

$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$

Algoritm - pentru o conica fãrã centru (parabola)

1. Se scrie forma pãtraticã corespunzãtoare ecuației conicei:
$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
2. Se determinã o bazã ortonormatã B' formatã din vectorii proprii
3. În raport cu baza B', ecuația conicei devine:
$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1' x' + 2b_2' y' + c' = 0$$
4. Trecerea la noile coordonate se realzeazã prin intermediul relației:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_{B,B'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
5. Se formeazã un pãtrat perfect, apoi se realizeazã o translație convenabilã, astfel rezultând ecuația canonicã.

Fațã de reperul inițial, axa parabolei este datã de ecuația $a_{11}f_x + a_{12}f_y = 0$, iar coordonatele vârfului se obține rezolvând sistemul: $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ a_{11}f_x + a_{12}f_y = 0 \end{cases}$

Curbe în plan

6 ianuarie 2020

Curbe în plan

Se consideră spațiul geometriei elementare raportat la un sistem de coordonate rectangular Oxy cu baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$.

Definiție: arc simplu

Se numește arc simplu de curbă plană mulțimea punctelor care:

1. satisfac o ecuație de tipul:
   $y = f(x), x \in (a, b)$
2. satisfac o ecuație de tipul:
   $F(x, y) = 0, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2; D = (a, b) \times (c, d)$
3. satisfac un sistem de forma:
   $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I \subseteq \mathbb{R}; I = (a, b)$$
4. sunt date de vectorul de poziție:
   $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)}, t \in I \subseteq \mathbb{R}$

unde funcțiile f, F, x, y sunt funcții reale de clasă cel puțin C^1 pe domeniul de definiție.

Funcții implicite. Teorema de existență

Fie $F(x,y)$ o funcție realã definitã pe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $M_0(x_0,y_0)$ un punct din D. Dacã:

- $F(x_0,y_0)=0$
- $F(x,y), F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ sunt continue pe o vecinãtate a lui D
- $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

atunci

1. Existã o vecinãtate U_0 a lui x_0 și o vecinãtate V_0 a lui y_0 și o funcție unicã $f: U_0 \to V_0$ astfel încât:
   $f(x_0)=y_0$ și $F(x,f(x))=0$ pentru $x\in U_0$
2. Funcția $f(x)$ are derivata continuã pe U_0 datã de:
   $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

Ecuațiile (1)-(4) din definiția precedentă reprezintă diferite reprezentări ale ale arcelor:

- Reprezentarea explicită $y = f(x), x \in [a, b]$
- Reprezentarea implicită $F(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Reprezentarea parametrică
  - Ecuația vectorial parametrică: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$
  - Ecuațiile scalar parametrice: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
  - Ecuația parametrică mai poate fi scrisă: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t))$

Curbe în plan

Definiție: arc regulat

O mulțime de puncte (C) se numește arc regulat de curbã planã dacã:

1. (C) este un arc simplu de curbã planã
2. a) $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 > 0$
   b) $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$
   c) $\overrightarrow{r'} \neq 0$

Condițiile de la punctul 2) se numesc condiții de regularitate.

Un arc regulat este de clasã n (de ordin n) dacã proprietãtile 2) se respectã pentru toate derivatele de ordin pânã la n (inclusiv n).

Definiție: punct regulat

Un punct se numește regulat dacã îndeplinește toate condițiile de regularitate. În caz contrar punctul se numește punct singular.

Caracterizarea curbelor

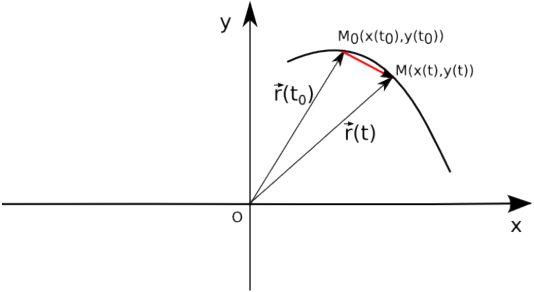
Definiție: curbã de clasã n

Se numește curbã de clasã n o reuniune de arce regulate de clasã n.

Spunem cã aceastã curbã este:

- **regularã** dacã orice punct al ei este regulat
- **simplã**, dacã nu se autointersecteazã
- **închisã** dacã $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$

Tangenta la o curbã planã într-un punct regulat



Fie o curbã planã reprezentatã prin ecuația vectorialã:
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ și
$M_0(\overrightarrow{r}(t_0))$ un punct fixat pe curbã, corespunzãtor valorii t_0.
De asemenea, fie $M(\overrightarrow{r}(t))$ un punct oarecare pe curbã.

Definiție: Tangenta la curbã

Dreapta limitã a secantei M_0M cand punctul M tinde cãtre M_0 pe curbã se numește tangenta la curbã în punctul M_0.

Punctelor M_0 și M le corespund vectorii de poziție $\overrightarrow{r}(t_0)$, respectiv $\overrightarrow{r}(t)$

$$\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r}(t_0); \overrightarrow{0M} = \overrightarrow{r}(t)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{0M} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)$$

Impãrțim ambii membrii ai ecuației de mai sus prin $t - t_0$

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = \frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{t - t_0}$$

Trecând la limitã se obține:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{t - t_0}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = \overrightarrow{r'}(t_0)$$

Ecuația tangentei la o curbã planã

Direcția secantei M_0M converge cãtre direcția vectorului $\overrightarrow{r'}(t)$ atunci când M tinde la M_0

Ecuația tangentei la o curbã într-un punct regulat M_0 este:

- Pentru **reprezentarea explicitã** a curbei:
  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
- Pentru **reprezentarea implicitã** a curbei:
  $(y - y_0)F'_y(x_0, y_0) + (x - x_0)F'_x(x_0, y_0) = 0$
- Pentru **reprezentarea parametricã** a curbei:
  $\dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$
- Pentru **reprezentarea vectorial-parametricã** a curbei:
  $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda \overrightarrow{r'}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Normala la o curbã planã

Definiție: Normala la curbã

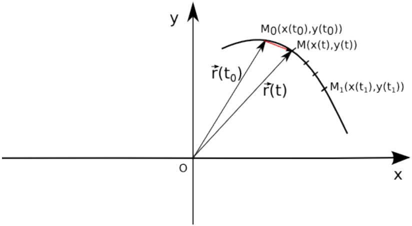
Se numește normala la curbã în punctul M_0 dreapta care trece prin M_0 și este perpendicularã pe tangenta la curbã în M_0.

Ecuația normalei la curbã într-un punct regulat M_0 este:

- Pentru **reprezentarea explicitã** a curbei:
  $(y - y_0)f'(x_0) + (x - x_0) = 0$
- Pentru **reprezentarea implicitã** a curbei:
  $(y - y_0)F'_x(x_0, y_0) - (x - x_0)F'_y(x_0, y_0) = 0$
- Pentru **reprezentarea parametricã** a curbei:
  $\dfrac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} + \dfrac{y - y(t_0)}{x'(t_0)} = 0$
- Pentru **reprezentarea vectorial-parametricã** a curbei:
  $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda \overrightarrow{r'}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Elementul de arc al unei curbe plane

Fie o curbã planã si M_0 și M_1 douã puncte ale curbei (corespunzãtoare parametrului t_0 și respectiv t_1 ale parametrului)



Lungimea arcului de curbã M_0M_1 este:

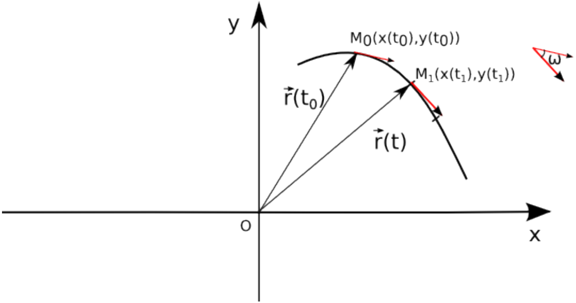
$$l(M_0M_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Elementul de arc este:

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Curbura unei curbe plane

Fie o curbã planã si M_0 și M_1 douã puncte ale curbei (corespunzãtoare parametrului t_0 și respectiv t_1 ale parametrului).
Fie ω unghiul fãcut de tangenta la curbã în punctul M_0 și punctul M_1 și s lungimea arcului de curbã arcului $\overset{\frown}{M_0M_1}$.



Definiție: unghi de contigență

Se numește unghiul de contigență a arcului $\overset{\frown}{M_0M_1}$, unghiul fãcut de tangentele la curbã în punctele M_0, respectiv M_1

Definiție: Curbura medie

Se numește curbura medie a arcului $\overset{\frown}{M_0 M_1}$ raportul:

$$K = \frac{1}{R_m} = \frac{\omega}{s}$$

unde ω este unghiul de contigență al arcului $\overset{\frown}{M_0 M_1}$, iar s este lungimea arcului.

Definiție: Curbura într-un punct

Se numește curbura în punctul M_0 limita (dacă există)

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{s \to 0} |\frac{\omega}{s}|$$

Inversul curburii se numește raza de curbură $R = 1/K$ în punctul M_0.

Curbura unei curbe

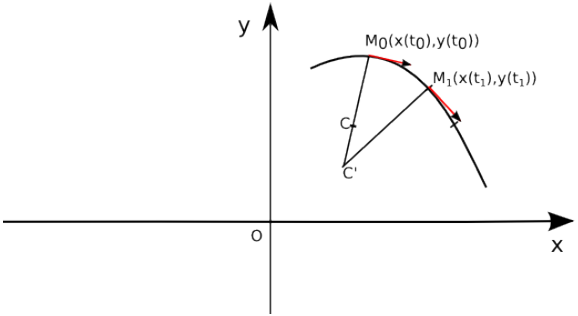
Curbura unei curbe plane este:

$$K = \frac{\left\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\right\|}{\overrightarrow{r'}(t)^{3}}$$

- Curbura unei drepte este 0
- Curbura unui cerc de razã R este $\dfrac{1}{R}$
- Pentru orice alte curbe, curbura se modificã de la punct la punct

Raza de curburã

Fie o curbã planã si M_0 și M_1 douã puncte ale curbei (corespunzãtoare parametrului t_0 și respectiv t_1 ale parametrului).
Fie perpendicularele pe tangentele la curbã în cele douã puncte. Fie C' punctul de intersecție al celor douã perpendiculare.



Când punctul M_1 tinde cãtre M_0 pe curbã, segmentul M_0C se numește **raza de curburã**, iar punctul C se numește **centrul de curburã**.

Raza de curbură

Între curbura unei curbe intr-un punct și raza de curbură există relația: $K = \dfrac{1}{R}$

- Când curba este dată parametric avem:
  - curbura: $K = \dfrac{|x'y'' - y'x''|}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$
  - raza de curbură: $R = \dfrac{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}{|x'y'' - y'x''|}$
  - centrul de curbură: $x_C = x - \dfrac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}y'$;

    $y_C = y + \dfrac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}x'$

Raza de curburã

Între curbura unei curbe intr-un punct și raza de curburã existã relația: $K = \dfrac{1}{R}$

- Când curba este datã explicit ($y = f(x)$) avem:
  - curbura: $K = \dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}$
  - raza de curburã: $R = \dfrac{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}{|y''|}$
  - centrul de curburã: $x_C = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}$; $y_C = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}$

Modele de subiecte pentru examen

9 ianuarie 2020

Tematica

1. 1.5p Curs1-Curs3:
   - Metoda Gauss-Jordan: rezolvarea sistemelor de ecuații, rangul și inversa unei matrice
   - Determinarea coordonatelor unui vector intr-o bazã datã
   - Dependențã/Independențã liniarã
   - Combinații liniare
2. 1p Operații cu vectori în $\mathbb{R}^n$; spațiul vectorial al vectorilor liberi: produs scalar (condiție de perpendicularitate), produs vectorial, norma unui vector
3. 1p Ecuațiile unei drepte (1 pct+direcție; 2pcte), ecuațiile planului (3 pcte; 1 pct+2 vectori necoliniari)
4. 1p Reprezentarea graficã a unei conice (fãrã rotație). Intersecția cu axele sau o dreaptã oarecare

Tematica

5. 1p Matricea schimbãrii bazelor. Coordonatele unui vector la schimbarea bazelor. Operatori liniari. Matricea unei forme biliniare. Algoritm de ortogonalizare
6. 1p Tangenta la o curbã, lungimea arcului de curbã
7. 2.5p Reducerea la forma canonicã a unei conice

Subiect 1

1. Sã se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x+y+z+w=6 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+y+2w=6 \end{cases}$$
2. Fie vectorii din $\mathbb{R}^4$: $v_1=(5,4,2,1), v_2=(4,2,5,7)$, $v_3=(-5,-2,-1,0)$. Sã se determine vectorul $v=2v_1+3v_2-2v_3$
3. Sã se scrie ecuația planului determinat de punctele: $M_1(1,0,-1), M_2(2,2,1); M_3=(-5,-3,7)$
4. Sã se reprezinte grafic conica: $9x^2+4y^2-24x+8y-16=0$. Determinați punctele de intersecție ale conicei cu dreapta de ecuație $y=3x+2$.

Subiect 1 - continuare

1. Fie $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operator liniar definit astfel: $L(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z)$. Fie $G = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ o bazã în $\mathbb{R}^3$ și $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ o bazã în $\mathbb{R}^3$ (baza canonicã). Determinați matricea asociatã operatorului L în raport cu perechea de baze G și E.
2. Sã s escrie ecuația tangentei la curba $x^2 + xy + y^2 + x + y - 1 = 0$ în punctul $C(-1, -1)$.
3. Sã se reducã la forma canonicã urmãtoarea conicã: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

Subiect 2

1. Este vectorul $u = (1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ o combinație liniară a vectorilor $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, -1), u_3 = (0, 1, 0)$?
2. Fie vectorii $\overrightarrow{v}_1 = (5, 4, 2), \overrightarrow{v}_2 = (4, 2, 5)$. Sã se calculeze: a) produsul vectorial $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$, b) produsul scalar $\langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \rangle$ și norma vectorului $\overrightarrow{v}_1$ $(\|\overrightarrow{v}_1\|)$.
3. Sã se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $M_1(1, 0, -1)$ și are direcția datã de vectorul $\overrightarrow{v} = (2, 2, 1)$ $(\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$
4. Sã se reprezinte grafic conica: $x^2 - 5y^2 + 2x - 30y - 69 = 0$. Aparține punctul de coordonate $M(1, 3)$ conicei?

Subiect 2 - continuare

1. Fie $B = \{(3,1,1),(1,-1,0),(1,-3,0)\}$ și $G = \{(-2,1,0),(1,1,-1),(-1,4,2)\}$ două baze în $\mathbb{R}^3$. Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza G.
2. Să se determine lungimea arcului cuprins între punctele de abscisă $x = 0$ și $x = 5$ pentru curba $y = x^{3/2}$
3. Să se reducă la forma canonică următoarea conică: $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

Subiect 3

1. Sã se determine coordonatele vectorului v=(-4,-10,-11) din $\mathbb{R}^3$ în raport cu baza $B = \{v_1, v_2, v_3\} = (1,2,3),(2,5,-2),(-4,-9,3)$
2. Sã se reprezinte grafic vectorul $\overrightarrow{v_1}$, care este vectorul de poziție corespunzãtor puncului din plan $M(1,-1)$, și vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, unde $\overrightarrow{v_2} = (1,3)$
3. Sã se scrie ecuația planului determinat de punctul $M = (1,7,3)$ și vectorii necoliniari $\overrightarrow{v1} = (-1,3,0)$ și $\overrightarrow{v_2} = (3,-2,5)$
4. Sã se reprezinte grafic conica: $2x = y^2 - 6y + 5$. Sã se determine punctele de intersecție ale conicei cu axele Ox și Oy.

Subiect 3 - continuare

1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formã biliniarã simetricã definitã astfel: $f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 4x_1y_1 - 5x_1y_2 + 7x_1y_3 - 5x_2y_1 - 6x_2y_2 + 8x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 - 9x_3y_3$ Sã se determine forma pãtraticã asociatã formei biliniare simetrice.
2. Sã se scrie ecuația tangentei la curba $y = 3x - x^2$ în punctul $A(1, 2)$
3. Sã se reducã la forma canonicã urmãtoarea conicã: $9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$