卡尔曼滤波作业

——518021910971 裴奕博

- In this lecture, we introduced the Gain Matrix K of the Kalman Filter. However, we do not provide a detailed explanation of K. Would you please provide a brief derivation of K?

定义

若系统的状态的预测向量$\mathbf{x_k}$,观测值向量$\mathbf{z_k}$。假设两者均满足高斯分布，两者的均值和方差分别为(μ_0, Σ_0)和(μ_1, Σ_1)。在Kalman滤波中，我们将预测值的分布与观测值的分布相乘，两者相乘之后的分布仍然是一个高斯分布，而他们的均值和方差由(μ_0, Σ_0)和(μ_1, Σ_1)加权求得，此处的权重即为增益矩阵K。

K表达式的推导：

- 公式1：若$\mathrm{Cov}(x) = \Sigma$，则$\mathrm{Cov}(\mathbf{A}x) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T$
- 公式2：若两个高斯分布的均值和方差分别为(μ_0, Σ_0)和(μ_1, Σ_1)，则两者乘积的分布仍然满足高斯分布，且满足：

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}' &= \overrightarrow{\mu_0} + \mathbf{K}\left(\overrightarrow{\mu_1} - \overrightarrow{\mu_0}\right) \\
\Sigma' &= \Sigma_0 - \mathbf{K}\Sigma_0 \\
\text{其中}\,\mathbf{K} &= \Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1)^{-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

- 若系统的状态的预测向量$\mathbf{x_k}$,$\mathbf{x_k}$的协方差矩阵为$\mathbf{P_k}$，观测值向量为$\mathbf{z_k}$。两者均满足高斯分布，由公式1可知满足

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_1 &= \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k \\
\mathbf{\Sigma}_1 &= \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T
\end{aligned} \tag{2}$$

  其中，$\mathbf{H_k}$为传感器矩阵。

- 此外，又假设传感器的读数满足

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_0 &= \mathbf{z}_k \\
\mathbf{\Sigma}_0 &= \mathbf{R}_k
\end{aligned} \tag{3}$$

- 因此我们得到了两组满足高斯分布的预测值分布(μ_0, Σ_0)和(μ_1, Σ_1)，为了在这两者中找到最优解，我们将它们相乘，代入公式2就有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k' &= \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{A}\left(\mathbf{z_k} - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k\right) \\
\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k'\mathbf{H}_k^T &= \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T - \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T
\end{aligned}$$

  其中$\mathbf{A} = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R_k})^{-1}$。将A代入并约去公因子$H_k$便可得到结果

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_k' &= \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}\left(\mathbf{z_k} - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k\right) \\
\mathbf{P}_k' &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k \\
\text{其中}\,\mathbf{K} &= \mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R_k})^{-1}
\end{aligned}$$

  K即为增益矩阵。