1 Problembeschreibung

1.1 Polynommultiplikation und Polynomaddition

In der Schule haben Sie Polynome kennen gelernt. Ein Polynom ist eine Funktion F, die sich in der Gestalt

$$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

schreiben läßt. Man nennt $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ die *Koeffizienten* des Polynoms. Wir betrachten in dieser Aufgabe Polynome F, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. (Beachten Sie, dass dies die 0 mit einschließt.) Wir schreiben hierfür $F\in\mathbb{Z}[x]$. Desweiteren wählen wir als Definitionsbereich der Funktion F die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Hieraus ergibt sich als Wertebreich von F ebenfalls $\mathbb{C}$. Wir schreiben hierfür $F:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$.

Es seien nun zwei Polynome $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ gegeben, mit

$$f\ =\ a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad \text{und} \qquad g\ =\ b_2x^2+b_1x+b_0.$$

Für das Produkt $f\cdot g$ von f und g gilt

$$f\cdot g\ =\ c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0,$$

mit

$$c_4=a_2b_2,\quad c_3=a_2b_1+a_1b_2,\quad +c_2=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2,\quad c_1=a_1b_0+a_0b_1,\quad c_0=a_0b_0.$$

(Man beachte, dass für jeden Summanden eines Koeffizienten c_k, wobei $k\in\{0,1,2,3,4\}$, die Summe der Indizes seiner Faktoren wieder k ergibt.)
Es sei nun ein weiteres Polynom $h=x^5\in\mathbb{Z}[x]$ gegeben. Dann gilt

$$h+f\cdot g\ =\ x^5+c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0.$$

Eine Teilaufgabe dieser Programmieraufgabe ist es, eine solche Summe $h+f\cdot g$ zu berechnen.

1.2 Descartes' Vorzeichenregel

Ein Polynom kann sowohl reelle, als auch komplexe Nullstellen haben. Descartes' Vorzeichenregel ermöglicht zweierlei. Erstens läßt sich durch sie eine obere Schranke C für die Zahl positiver reeller

Nullstellen eines Polynoms ermitteln. Zweitens gibt diese obere Schranke C die Zahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms bis auf ein Vielfaches von 2 genau an. Das heißt, ist die Schranke C z. B. 5, so ist die Zahl der positiven reellen Nullstellen des zugrunde liegenden Polynoms 5, 3 oder 1.

Es sei wiederum ein Polynom f gegeben. (Die Koeffizienten von f können reell sein, auch wenn wir uns in der Programmieraufgabe auf ganzzahlige Koeffizienten einschränken). Dann ist C gegeben durch die Zahl der Vorzeichenwechsel von Koeffizient zu Koeffizient. Hierbei gehen nur Koeffizienten ungleich 0 in die Berechnung ein. Wir machen dies an einem Beispiel klar. Es sei

$$f = x^5+4x^4-3x^2+x-6.$$

Die Folge der Koeffizienten ungleich 0 ist dann

$$+1 \qquad +4 \qquad -3 \qquad +1 \qquad -6$$

Das Vorzeichen wechselt drei mal. Damit ist die Zahl positiver reeller Nullstellen von f entweder 3 oder 1. Insbesondere ist die Zahl positiver reeller Nullstellen ungerade. Das folgende Polynom hat eine gerade Zahl positiver reeller Nullstellen, da die Zahl der Vorzeichenwechsel gerade ist.

$$g = x^5+4x^4-3x^2+x.$$

2 Aufgabenstellung und Anforderungen

Schreiben Sie eine Funktion

```
roots(a,b,c,d,e,f) ,
```

welche mittels Descartes' Regel ermittelt, ob die Zahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms

$$h+f\cdot g$$

gerade oder ungerade ist. Hierbei seien

$$f = ax^2+bx+c, \qquad g = dx^2+ex+f \qquad \text{und} \qquad h = x^5.$$

Der Rückgabewert der Funktion soll, je nachdem, ob die Zahl positiver reeller Wurzeln gerade oder ungerade ist, einer der beiden folgenden Strings sein:

Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.

Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.

Beachten Sie hierbei, dass 0 als gerade Zahl gilt.

Hinweis: Sie dürfen alle `python3`-Befehle benutzen, die ohne das Importieren zusätzlicher Pakete in `python3` zur Verfügung stehen. Zusätzliche Module wie z.B. `numpy` können vom Comajudge in der Regel nicht importiert werden.

2.1 Beispielaufrufe

```
$ python3 -i PA01.py
>>> roots(1,-2,-1,2,1,2)
'Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.'
>>> roots(0,0,0,0,0,0)
'Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen Wurzeln.'
```