線性代數

魏澤人

國立東華大學

2013

代數結構

代數結構是一個集合，配上一些運算，然後這些運算符合一些規則。

Group and Field

Definition

(略) G 是 一個加法交換群， 若他有 0，能加減，有結合律、交換律。

Example

$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$,$\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{R}^2$

Definition

(略) $\mathbb{F}$ 是 一個體(Field) 若他有 $0, 1$，能加減乘除，有結合律、交換律、分配律。

Example

$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$,$\mathbb{F}_p$

Definition

「佈於體(field) $\mathbb{F}$ 上的向量空間 V」的意思是

1. V 是一個加法交換群
2. 對任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，對任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，恆有
   1. $\lambda\mathbf{u} \in V$, $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$ ((混合)結合律)
   2. $(\lambda+\mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$，$\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (兩種分配律)
3. 若用 1 表示 $\mathbb{F}$ 的乘法單位元素，則對任意的 $\mathbf{v} \in V$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (保存尺度)(不無聊性)

Example

歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 是向量空間, 或者更一般 $\mathbb{F}^n$
無窮維空間: 函數空間、連續函數空間、可微分函數空間。
不是例子: 水彩空間

函數空間

- 令 S 是一個集合，W 是一個向量空間，若令$V = \{f | f : S \to W\}$，則 V 也是一個向量空間
  - 其中定義 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ 與 $(rf)(x) = rf(x)$
- 例：令 V 爲所有從集合 $\{a, b, c\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的向量值函數所成的集合，隨之， V 是一個向量空間
- 例：令 V 爲所有從 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數所成的集合，隨之，V 是一個向量空間

歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$

- 歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 是一個向量空間
- 一般的向量空間不一定是歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$
- 但是，它們有一些共通的性質
- 此外，歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 有一些很好的特性
- 所以，我們先從歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 來做討論，之後再推廣到一般的向量空間！

歐氏空間中的向量

- 最簡單的歐氏空間 $\mathbb{R}^2$ 與 $\mathbb{R}^3$
- 座標表示的幾何意義要知道
- 向量加法，向量減法，向量乘係數的乘法
- 例：$\mathbf{v} = [-3, 5, -1]$，$\mathbf{w} = [4, 10, -7]$，求 $5\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

線性空間的概念

- 平行(parallel) $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$
- 線性組合(linear combination) $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_k\mathbf{v}_k$
- 線性相關 如果 $\mathbf{0} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_k\mathbf{v}_k$ 且 r_i不全爲 0。
  - 或曰，$\mathbf{0}$ 是 $\{\mathbf{v_i}\}$的非無聊線性組合
- 線性獨立=非線性相關
- 張空間(所張成的空間)(span) $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_i\} = \{r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_k\mathbf{v}_k\}$
- 基底 $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_i\} = \mathbb{R}^n$ 且 $\{\mathbf{v}_i\}$ 獨立
- $\mathbb{R}^3$ 的標準基底(standard basis)是 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 其中 $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$.

什麼不是線性空間的概念?

- 垂直
- 內積

線性變換

Definition

V, W是兩線性空間, $T : V \to W$. 若

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(r\mathbf{v}) = rT(\mathbf{v})$

則稱 T 是線性變換(Linear Transformation)

Example

微分積分都可視爲線性變換

基底決定線性變換

- $T : V \to W$ 無窮多映射到無窮多
- 但如果 $\{\mathbf{v}_i\}$ 是 V 的基底，則只要知道 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$(有限個值)
- 就知道所有 T 的資訊
- $T(r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + r_3\mathbf{v}_3) = r_1\mathbf{w}_1 + r_2\mathbf{w}_2 + r_3\mathbf{w}_3$

線性變換

- 線性變換的定義(線性變換保持線性組合)
- 同態(保持運算)
- 同態的合成仍爲同態
- 一一對應的線性變換稱爲同構
- 兩個同構的空間，所有的線性性質都一樣，一一對應
- 造一個同構，但是垂直這個性質不保持

$\mathbb{R}^n$的線性變換

- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- 只要知道 $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$(有限個值)
- $$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}_j$$
- $$\begin{aligned} T([x_1, x_2, \ldots, x_n]) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{w}_i \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) \mathbf{e}_j \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{im} x_i \right] \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$的線性變換

- 把 a_{ij} 寫成矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x}$ 寫成行向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
- 定義 $A\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$

矩陣乘法

- 若 $B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$, 則定義
  $$AB = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 & \cdots & A\mathbf{u}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
- 向量運算

矩陣乘法的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 103 \\ 27 & 68 \\ 25 & 132 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 103 & 13 \\ 27 & 68 & 8 \\ 25 & 132 & 17 \\ 20 & 64 & 8 \end{bmatrix}$$

轉置

- Transpos
- $$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$
- $(AB)^T = B^T A^T$

矩陣的乘積

- 可以乘積的條件
- (AB) 的第 j 個行向量等於 A 乘 B 的第j個行向量
- 所以，矩陣的乘積可看成是多線性的
- 且 (AB) 的行向量皆爲 A 的行向量的線性組合
- 同理，或經由轉置來觀察，可得知
- (AB) 的第 i 個列向量等於 A 的第 i 個列向量乘 B
- (AB) 的列向量皆爲 B 的列向量的線性組合

矩陣的加減乘運算及它們的性質

- 可以加減的條件(與可以乘積的條件不同！)
- 矩陣乘以一個係數
- 結合(associative)律
- 單位元素(identity)：零矩陣與單位矩陣
- 分配(distributive)律(左分配律，右分配律)
- 有沒有「交換律」：$A + B = B + A$，$AB \neq BA$
- 係數在乘積中可推前拉後
- 「轉置」的反反律與對加、乘運算的影響

矩陣乘法的定義公式

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

$$B = [b_{jk}]_{n\times r}$$

$$AB = C = [c_{ik}]_{m\times r}$$

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \\ &= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \end{aligned}$$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

矩陣乘法分配律證明

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

$$B = [b_{jk}]_{n\times r}$$

$$C = [c_{jk}]_{n\times r}$$

矩陣乘法分配律證明

先算左邊

$$B+C=[b_{jk}+c_{jk}]_{n\times r}$$

$$D=[d_{ik}]_{m\times r}=A\left(B+C\right)$$

$$d_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(b_{jk}+c_{jk}\right)$$

矩陣乘法分配律證明

再算右邊

$$AB = [e_{ik}]_{m\times r}$$

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$AC = [f_{ik}]_{m\times r}$$

$$f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$$

$$AB + AC = [g_{ik}]_{m\times r}$$

$$g_{ik} = e_{ik} + f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$$

矩陣乘法分配律證明

比較 d_{ik} 和 g_{ik}

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(b_{jk} + c_{jk} \right)$$

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$$

相等

線性(方程式)系統

- 例：$2x + y = 4$ 且$x - 2y = -3$ 可用向量與矩陣表示
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
- $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right]$

基本列運算

1. 某列乘 r 倍: $rR_i \to R_i \ (r \neq 0)$
2. 兩列交換: $R_i \leftrightarrow R_j$
3. 一列扣掉另一列的 r 倍 $R_i - rR_j \to R_i \ (i \neq j)$

- 對矩陣做基本列運算等同左方乘基本矩陣

高斯消去法

- 利用基本列運算得列梯形矩陣，然後反代
- 一致的方程式系，不一致的方程式系
- 例：解 $y-3z=-5,\ 2x+3y-z=7,\ 4x+5y-2z=10$
- 高斯-喬登法
- 應用:計算反矩陣

方陣的反矩陣

- 若有 $LA = I$, 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 最多只有一個解: $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = LA\mathbf{x} = L\mathbf{b}$
- 若 $AR = I$, 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 至少有一個解: $\mathbf{x} = R\mathbf{b}$.
- L稱爲 A 的左反， R 爲 A 的右反。
- 若同時有 L 和 R 則
  - $L = L(AR) = (LA)R = R$
- 反矩陣的定義(非方陣必無反矩陣)
  - 未必存在，但若存在，則有唯一性
- 基本矩陣皆爲可逆
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

解的關係

- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解形成一個線性空間 (null space)
- 「存在 $\mathbf{b}_0$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ 有唯一解」$\Rightarrow$「$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有唯一解」
- 「$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有唯一解」$\Rightarrow$「對任意 $\mathbf{b}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 最多一解」
- 若 A 是方陣
  - 「$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有唯一解」$\Longleftrightarrow$「A 可以高斯消去成 I」$\Longleftrightarrow$「有 L」
  - 「A 可以高斯消去成 I」$\Longleftrightarrow$「$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有解」$\Longleftrightarrow$「有 R」

一個計算反矩陣的方法

- 一個計算方陣 A 的反矩陣的方法是：先寫出擴大矩陣 $[A|I]$，然後以對 A 做高斯消去法的程序同時且同樣對I做高斯消去法得 $[I|B]$，則此 B 即爲 A 的反矩陣。(基本矩陣的詮釋：$A = IA$，若 $E_1E_2\cdots E_nA = I$，則 $I = E_1E_2\cdots E_nIA$)
- 反矩陣存在的條件
- 設$E_1, E_2, \ldots, E_n$ 爲基本矩陣且 $E_1E_2\cdots E_nA = I$，則 $A = E_n^{-1}E_{n-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}$
  - (明顯也可以看出 $AL = I$)

- 齊次系統，線性齊次系統
- 線性齊次系統的解的任意線性組合亦爲解
- 相對於某運算的封閉性
- 子空間的定義
- 設 V 是一個向量空間，W 是 V 的一個子集。則「W 是 V 的一個向量子空間」若且唯若「W 對加法與乘以係數倍的乘法有封閉性」
- 必須檢查哪些？又不必檢查哪些？

張空間

- 張空間確爲子空間
- 術語的合理性
- 矩陣的行空間
- ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解)若且唯若($\mathbf{b}$ 在 A 的行空間中)
- 有關於基底的討論(唯一的線性組合表示)
- 有關齊次式 $A\mathbf{x} = 0$ 的非無聊解的討論
- 有關 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一般解與特殊解的討論

獨立性與維度

- 找張空間的一組基底
- 例：找 $W = \text{span}\left([2,3],[0,1],[4,-6]\right)$的一組基底
- 相依關係式
- 線性相依與線性不相依(線性獨立)
- 「子空間的元素都有唯一線性組合表示」等價於「張成該子空間，且爲線性獨立」

維度

- 會不會有兩組大小不一樣的基底?
  - 若 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 獨立，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有一解，所以 $m \leq n$.
  - 若 $\operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} = \mathbb{R}^n$, 則對所有 $\mathbf{b}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有解, 所以 $n \leq m$.
- 維度的定義就是基底的大小

矩陣的秩

- 矩陣的行空間，列空間，零空間
- 列運算不影響列空間及零空間
- 用矩陣找出有限集中的極大線性獨立子集
    - 列運算不影響行空間的維度
- 行秩等於列秩
- 秩的定義
- 零秩(nullity)
- 維度定理 $nullity + rank = n$
- $n \times n$ 的方陣 A 為可逆若且唯 $rank(A) = n$ (滿秩)

向量的座標化

- 有序基底 例 $1, x, x^2, x^3$
- 可把 $1 + 5x + 2x^2 + 7x^3$ 座標化為 $[1, 5, 2, 7]$
- 簡單的說，就是一個從一般線性空間 V 到 $\mathbb{F}^n$ 的線性變換(同構)
  - $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{e}_i$
- 所以有限維的向量空間，與 $\mathbb{F}^n$ 無異
- 例：假設先用標準有序基底得座標表示，令 B 為某基底的行向量所成的矩陣，則對於歐氏空間中的向量 $\mathbf{v}$ 而言，$B^{-1}\mathbf{v}$ 即為 $\mathbf{v}$ 相對於該基底的座標表示。(考量 $B^{-1}B = I$ 意義即知)

方程式，反變換，矩陣表示

- 核
- 線性變換方程式的解爲(任意一個特解+核)
- 同態爲一對一函數若且唯若其核爲無聊
- 同態若爲一對一對映，則反函數亦爲同態
- 線性變換的矩陣表示
- 可逆線性變換的反變換的矩陣表示等於其矩陣表示的反矩陣

範數與點積

- 一般的範數(norm)函數的定義：滿足所謂「正定性」、「齊次性」、「三角不等式」
- 歐氏空間中的範數函數的定義
- 歐氏空間中的範數函數滿足「正定性」、「齊次性」、「三角不等式」
- 所以，歐氏空間中的範數函數滿足一般的範數函數的定義，隨之，它是一個例子。
- 單位向量

歐氏空間中的餘弦定律與點積

- 歐氏空間中的餘弦定律
- 歐氏空間中的點積
- 歐氏空間中的點積與範數和餘弦的關係
- 歐氏空間中的兩向量的夾角
- 例：求 $[1, 2, 0, 2]$ 與 $[-3, 1, 1, 5]$ 的夾角

內積

- 一般的內積(inner product)的定義：滿足「正定性」、「扭轉的(skew)對稱性」、「一又二分之一線性」
- 歐氏空間中的點積的定義
- 歐氏空間中的點積滿足「正定性」、「交換性」、「一又二分之一線性」
- 所以，歐氏空間中的點積滿足一般的內積的定義，隨之，它是一個例子。(所以又可叫做內積)

內積可引出範數

- 歐氏空間: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
- 一般的內積空間：若定義 $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$，則 $\|\cdot\|$ 是一個範數函數
- 平行四邊形定理
- 垂直(正交)
- 例：判斷 $[4, 1, -2, 1]$ 與 $[3, -4, 2, -4]$ 是否正交
- 內積滿足柯西-舒瓦茲不等式
- 柯西-舒瓦茲不等式導出範數的三角不等式

內積空間

- 一般的內積(inner product)的定義：滿足「正定性」、「扭轉的(skew)對稱性」、「一又二分之一線性」
- 例：歐氏空間中的點積
- 例：對實數 a, b, c, d,令$[a, b], [c, d] \geq 2ac + 5bd$
- 例：對 $[0, 1]$ 上實係數多項式函數 p, q 而言，令 $\langle p, q\rangle = \int_{[0,1]} pqdx$

内積引出範數，範數引出距離

- 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 引出範數 $\|\cdot\|$，其中 $\|\mathbf{x}\| = \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$
- 範數的定義：正定性，絕對値線性，三角不等式
- 範數 $\|\cdot\|$ 引出距離 $d(\cdot,\cdot)$，其中 $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$
- 距離函數的定義：正定性，對稱性，三角不等式
- 由内積引出的範數有平行四邊形定理
- 並非任意範數都滿足平行四邊形定理
- 内積與範數的定義域必爲向量空間
- 距離函數的定義域不必爲向量空間

柯西-舒瓦茲不等式，夾角，正交

- 內積的柯西-舒瓦茲不等式推得內積所引出的範數的三角不等式必成立
- 內積空間中兩向量間的夾角的定義
- 內積空間中兩向量間為正交的定義

面積，體積，外積

- 平行四邊形的面積
- 二階行列式
- 外積， 3×3 符號矩陣
  1. 有反交換性
  2. 無結合性
  3. 有分配律

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- 例：求與 $[2, 1, 1]$，$[1, 2, 3]$ 垂直的向量
- 平行六面體的體積
- 三階行列式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ (考慮正交與 i 的係數)

- 定義的方法不唯一(但可定出相同的行列式)

1. 降階(reduction)法：minor, 餘因子(cofactor), n 階行列式展開爲 $n-1$ 階餘因子的線性組合
2. 排列(permutation)法：奇排列，偶排列
3. 抽象定義法：任意有多線性，反交換性且單位矩陣的函數值等於1的純量函數。

- 由抽象定義可得唯一性，1, 2 滿足3，故相同!

行列式的性質

- $\det(A) = \det(A^T)$
- 兩列交換，行列式變負號
- 兩列相同，行列式等於零
- 多線性
- 加一列的倍數到另一列去，行列式不變
- 方陣可逆若且唯若行列式不爲零
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

- 方陣 A 的行列式的計算方法之一：

1. 只用列加法與列交換先將 A 列簡化爲梯形矩陣
2. 若過程中或最後出現某一列全爲零，則 $\det A = 0$
3. $\det A = (-1)^r$ (pivot的乘積)，其中 r 是列交換的次數

- Cramer 法則：設 A 爲可逆，$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解爲 $x_k = (\det B_k)/(\det A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ 其中 B_k 爲將 A 的第 k 個行向量換爲 $\mathbf{b}$ 所得的矩陣。(對 $k = 1, 2, \ldots, n$，令 X_k 爲將 I 的第 k 個行向量換爲 $\mathbf{x}$ 所得的矩陣，則 $AX_k = B_k$，故 $\det A \cdot \det X_k = \det B_k$)

伴隨矩陣

- 令 A_{ij} 爲刪除 A 的第 i 個列向量與第 j 個行向量後所得的 minor，則餘因子 $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$，再由 $\det A$ 的展開計算式可得 $\sum a_{ik} a'_{jk} = \delta_{ij} \det A$
- 方陣 A 的伴隨矩陣 $\mathrm{adj}A$ 的定義爲 $(\mathrm{adj}A)_{ij} = a'_{ji}$
- 由
$$(A\mathrm{adj}A)_{ij} = \sum a_{ik} (\mathrm{adj}A)_{kj} = \sum a_{ik} a'_{jk} = \delta_{ij} \det A,$$
得
$$A\mathrm{adj}A = (\det A) I,$$
故 $A^{-1} = (\det A)^{-1} \mathrm{adj}A$

- n-box 的定義，n-box 的體積的定義
- 設用歐氏空間中的標準基底，則由 A 的 n 個行向量所張成 n-box 的體積等於 $\left[\det\left(A^T A\right)\right]^{\frac{1}{2}}$。
- 自然推論：設用歐氏空間中的標準基底，方陣 A 的行向量所張成的 box 的體積爲 $|\det A|$
- 線性變換下的體積變化因子：最簡單的Jacobian (令 A 爲 $m \times n$ 的矩陣，B 是 k 個 $1 \times n$ 的行向量所成的矩陣，則爲 $\left[\det\left((AB)^T(AB)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

固有值與固有向量

- 例：給定 n 階方陣 A，計算 A^{1000}。
- 例：Fibonacci 的兔子 $F^k = F^{k-1} + F^{k-2}$，給定 F_0, F_1， 若令 $\mathbf{x}_k = [F_k, F_{k-1}]^T$，則有 $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$ 的關係式存在
- 固有(特徵)值與固有(特徵)向量的定義
- 不穩的變換，穩的變換，中性地穩的變換

固有值與固有向量的計算

- 「特徵」多項式，「特徵」方程式(一般性的術語)
- 代數重覆數
- 例：1 必是任意Markov chain的轉移矩陣的固有值
- 例：$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

固有值與固有向量的性質

- 設 $P(x)$ 是多項式，$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 其中 $\mathbf{v}$ 非零向量，則 $P(A)\mathbf{v} = P(\lambda)\mathbf{v}$。
- 設 A 爲可逆，且$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 其中 $\mathbf{v}$ 非零向量，則 $A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$。
- 固有空間是一個子空間，幾何重覆數
- 例：解 $f' = \lambda f$
- 例：解 $f'' = -k^2 f$

對角化

- 對角矩陣，相似，Jordan form
- 若 n 階方陣 A 有 n 個固有值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 與其所對應 n 個線性獨立的固有向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$， 令 C 爲 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 由做爲行向量所成的矩陣， $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$， 則 $AC = CD$，隨之，$C^{-1}AC = D$，亦即， $A = CDC^{-1}$，故 $A^k = CD^kC^{-1}$
- 「n 階方陣 A 爲可對角化的」若且唯若「A 有 n 個線性獨立的固有向量」

同一個方陣的相異固有值

- 一些相異的固有值對應的相異的固有向量必爲線性獨立
- 正規方陣
- 内積空間中，正規方陣的相異固有值對應的固有向量必正交

實對稱方陣

- 對稱方陣，自伴隨(self-adj., Hermitian)方陣
- 「方陣可對角化」若且唯若「每個固有值的代數重覆數等於其幾何重覆數」]
- 實對稱方陣必可對角化(且固有值必爲實數)
- 自伴隨方陣必可對角化(且固有值必爲實數)
- 正規方陣必可對角化
- 正規方陣必可么正地對角化
- 代數基本定理：任意非零次複係數多項式必有複數根。
- Schur 引理：任意複方陣可么正地上三角化

算 $A^k\mathbf{x}$，人口分佈，微分方程

- 若方陣A可對角化爲 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，且對應 n 個線性獨立的固有向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$，則對於 x 表示爲

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\mathbf{v}_n$$

  而言，有

$$A^k\mathbf{x} = d_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + d_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

- 人口分佈向量
- 若 Markov chain 的轉移矩陣 T 可對角化，則其固有值的絕對值皆小於等於 1。
- 若一階線性齊次微分方程式系的係數矩陣爲可對角化，則易解此微分方程。