2011秋線性代數

周君彥

國立東華大學

2011

第一章：向量、矩陣、線性系統、矩陣、線性系統

- 向量是向量空間這個帶有結構的集合中的元素
- 「佈於體(field) $\mathbb{F}$ 上的向量空間 V」的意思是
  1. V 是一個加法群(additive group)
  2. 對任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，對任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，恆有
     1. $\lambda \mathbf{u} \in V$, $\lambda(\mu \mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$ ((混合)結合律)
     2. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$，$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (兩種分配律)
  3. 若用 1 表示 $\mathbb{F}$ 的乘法單位元素，則對任意的 $\mathbf{v} \in V$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (保存尺度)(不無聊性)
- 例子：例子：歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 是向量空間

爲什麼先看歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$

- 歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 是一個向量空間
- 一般的向量空間不一定是歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$
- 一般的向量空間可能是很抽象的，例如，閉區間 $[0,1]$ 上所有連續函數所成的向量空間
- 但是，它們有一些共通的性質
- 此外，歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 有一些很好的特性
- 所以，我們先從歐氏 n 維空間 $\mathbb{R}^n$ 來做討論，之後再推廣到一般的向量空間！

線性(方程式)系統

- 例：$2x + y = 4$ 且$x - 2y = -3$ 可用向量與矩陣來解

1.1歐氏空間中的向量

- 最簡單的歐氏空間 $\mathbb{R}^2$ 與 $\mathbb{R}^3$
- 座標表示的幾何意義要知道
- 向量加法，向量減法，向量乘係數的乘法
- 例：$\mathbf{v} = [-3, 5, -1]$，$\mathbf{w} = [4, 10, -7]$，求 $5\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

- 加法群(結合性、單位元素、反元素、交換性)$(a+b)+c=a+(b+c)$, $a+0=a=0+a$, $a+(-a)=0=(-a)+0$, $a+b=b+a$
  - $(G,*)$ 有結合性: $\forall a,b,c\in G,(a*b)*c=a*(b*c)$
  - $(G,*)$ 有單位元素: $\exists e\in G\ni\forall a\in G, a*e=a=e*a$
  - $(G,*,e)$ 任意元素有反元素: $\forall a\in G\exists a^{-1}\in G\ni a*a^{-1}=e=a^{-1}*a$
  - $(G,*)$ 有教換性: $\forall a,b\in G, a*b=b*a$
- 對任意實數 λ,μ，對任意 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$，恆有 $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$, $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$ (兩種分配律)
- 對任意實數 λ,μ，對任意 $\mathbf{u}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$，恆有$\lambda\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$ ((混合)結合律)
- 對任意的 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$ (保存尺度)(不無聊性)

一些相關的概念

- 平行(parallel) [力學上的詮釋]
- 線性組合(linear combination) [線性相關與線性獨立]
- 張空間(所張成的空間)(span) [基底]
- 標準基底(standard basis)向量
- 行(column)向量與列(row)向量
- 矩陣的行與列

- 一般的範數(norm)函數的定義：滿足所謂「正定性」、「齊次性」、「三角不等式」
- 歐氏空間中的範數函數的定義
- 歐氏空間中的範數函數滿足「正定性」、「齊次性」、「三角不等式」
- 所以，歐氏空間中的範數函數滿足一般的範數函數的定義，隨之，它是一個例子。
- 單位向量

歐氏空間中的餘弦定律與點積

- 歐氏空間中的餘弦定律
- 歐氏空間中的點積
- 歐氏空間中的點積與範數和餘弦的關係
- 歐氏空間中的兩向量的夾角
- 例：求 $[1, 2, 0, 2]$ 與 $[-3, 1, 1, 5]$ 的夾角

內積

- 一般的內積(inner product)的定義：滿足「正定性」、「扭轉的(skew)對稱性」、「一又二分之一線性」
- 歐氏空間中的點積的定義
- 歐氏空間中的點積滿足「正定性」、「交換性」、「一又二分之一線性」
- 所以，歐氏空間中的點積滿足一般的內積的定義，隨之，它是一個例子。(所以又可叫做內積)

內積可引出範數

- 歐氏空間: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
- 一般的內積空間：若定義 $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$，則 $\|\cdot\|$ 是一個範數函數
- 平行四邊形定理
- 垂直(正交)
- 例：判斷 $[4, 1, -2, 1]$ 與 $[3, -4, 2, -4]$ 是否正交
- 內積滿足柯西-舒瓦茲不等式
- 柯西-舒瓦茲不等式導出範數的三角不等式

1.3矩陣及其運算

- 符號 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- 例：解 $x - 2y = -1$ 且 $3x + 5y = 19$
- 「轉置(transpose)」與「對稱(symmetric)矩陣」
- 若 A 是 $m \times n$ 矩陣，$\mathbf{x}$ 是 $n \times 1$ 行向量 $(x_1, \ldots, x_n)^T$，則 $A\mathbf{x}$ 是 A 的行向量的線性組合(係數爲 $x_1, \ldots, x_n$)
- 線性(linear)函數與多線性(multilinear)函數

矩陣的乘積

- 可以乘積的條件
- (AB) 的第 j 個行向量等於 A 乘 B 的第j個行向量
- 所以，矩陣的乘積可看成是多線性的
- 且 (AB) 的行向量皆爲 A 的行向量的線性組合
- 同理，或經由轉置來觀察，可得知
- (AB) 的第 i 個列向量等於 A 的第 i 個列向量乘 B
- (AB) 的列向量皆爲 B 的列向量的線性組合

矩陣的加減乘運算及它們的性質

- 可以加減的條件(與可以乘積的條件不同！)
- 矩陣乘以一個係數
- 結合(associative)律
- 單位元素(identity)：零矩陣與單位矩陣
- 分配(distributive)律(左分配律，右分配律)
- 有沒有「交換律」：$A+B=B+A$，$AB \neq BA$
- 係數在乘積中可推前拉後
- 「轉置」的反反律與對加、乘運算的影響

「不一定」與「一定不」

- 數學式中的「$\neq$」有時候是「不一定」，有時候是「一定不」，從上下文幫助判別
- 例：「一般而言(in general)，$AB \neq BA$」的意思是「AB 不一定等於 BA」
- 例：$x \neq x+1$ 意思是 x 一定不等於 $x+1$

1.4解線性方程式系

- 線性方程式系的幾何
- 係數矩陣
- 擴大矩陣(分割矩陣)
- 等價關係，等價的方程式系
- 基本列運算
- 列等價得等價的線性方程式系
- 基準(pivot)，列梯形矩陣，列簡化梯形矩陣

高斯消去法

- 利用基本列運算得列梯形矩陣，然後反代
- 一致的方程式系，不一致的方程式系
- 例：解 $y-3z=-5,\ 2x+3y-z=7,\ 4x+5y-2z=10$
- 高斯-喬登法
- 對矩陣做基本列運算等同左方乘基本矩陣

1.5方陣的反矩陣

- 反矩陣的定義(非方陣必無反矩陣)
- 若方陣 A 有反矩陣 $A-1$，則 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解爲$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$
- 方陣未必有反矩陣，若存在，則有唯一性
- 結合性運算下，元素的反元素未必存在，但若存在，則有唯一性
- 可逆矩陣(必爲方陣)與奇異矩陣(可爲方陣)
- 基本矩陣皆爲可逆
- 相乘的反等於反的逆序相乘

方陣若左可逆則亦右可逆

- 「存在 $\mathbf{b}_0$ 使得方陣 A 滿足 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ 有唯一解」推論「$A\mathbf{x} = 0$ 有唯一解」
- 若 $n \times n$ 方陣 A 滿足「$A\mathbf{x} = 0$ 有唯一解」，則「對任意 $n \times 1$ 向量 $\mathbf{b}$ 而言，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解」
- A 爲方陣且「對任意 $n \times 1$ 向量 $\mathbf{b}$ 而言，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解」推論「A 列等價於單位矩陣 I_n」
- 自然推論：A 爲方陣且 $BA = I$，則 $AB = I$
- 自然推論：A 爲方陣且 $AB = I$，則 $BA = I$

一個計算反矩陣的方法

- 計算反矩陣的方法不唯一
- 一個計算方陣 A 的反矩陣的方法是：先寫出擴大矩陣 $[A|I]$，然後以對 A 做高斯消去法的程序同時且同樣對I做高斯消去法得 $[I|B]$，則此 B 即爲 A 的反矩陣。(基本矩陣的詮釋：$A = IA$，若 $E_1 E_2 \cdots E_n A = I$，則 $I = E_1 E_2 \cdots E_n I A$)
- 反矩陣存在的條件
- 設$E_1, E_2, \ldots, E_n$ 爲基本矩陣且 $E_1 E_2 \cdots E_n A = I$，則 $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1}$

- 齊次系統，線性齊次系統
- 線性齊次系統的解的任意線性組合亦為解
- 相對於某運算的封閉性
- 子空間的定義
- 設 V 是一個向量空間，W 是 V 的一個子集。則「W 是 V 的一個向量子空間」若且唯若「W 對加法與乘以係數倍的乘法有封閉性」
- 必須檢查哪些？又不必檢查哪些？

張空間

- 張空間確爲子空間
- 術語的合理性
- 矩陣的行空間
- ($A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解)若且唯若($\mathbf{b}$ 在 A 的行空間中)
- 有關於基底的討論(唯一的線性組合表示)
- 有關齊次式 $A\mathbf{x}=0$ 的非無聊解的討論
- 有關 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一般解與特殊解的討論

第二章：維度，秩，線性變換

- 找張空間的一組基底
- 例：找 $W = sp([2,3],[0,1],[4,-6])$的一組基底
- 相依關係式
- 線性相依與線性不相依(線性獨立)
- 「子空間的元素都有唯一線性組合表示」等價於「張成該子空間，且爲線性獨立」
- 序(偏序)，全序，良序，最大(小)與極大(小)
- 用矩陣來找張空間的一組基底(方法不唯一)

維度

- 代換定理
- 若 V 是可以由有限多個向量張出的空間，則存在V的基底且任兩組基底元素個數相同。
- 維度的定義(維度的定義的「良好定義性」)

2.2矩陣的秩

- 矩陣的行空間，列空間，零空間
- 用矩陣找出有限集中的極大線性獨立子集
- 行秩等於列秩
- 秩的定義
- 零秩(nullity)
- 維度定理
- $n \times n$ 的方陣 A 爲可逆若且唯 $rank(A) = n$ (滿秩)

2.3歐氏空間的線性變換

- 映射(定義域，值域，像，像集，反影)
- 線性變換的定義(線性變換保持線性組合)
- 同態(保持運算)，同胚(雙向連續)
- 基底的像張成像集
- 線性變換的矩陣表示
- 線性變換的標準矩陣表示
- 核(kernel)

- 線性變換保持子空間
- 合成(composite)
- 由矩陣的乘積可得到倍角公式的簡單證明
- 線性變換的反變換
- 線性變換爲可逆若且唯若其矩陣表現可逆

- 崩塌變換(不可逆變換)
- 投影
- 投影矩陣
- 平面的可逆線性變換
- 剛性運動：(繞原點的)旋轉、平移、鏡射
- 線性變換必將原點映射至原點
- 水平或垂直的擴張或收縮，切變(shear)
- 平面的可逆線性變換的幾何描述

- 平移
- (歐氏)空間中的直線就是一維子空間的平移
- 參數(parameter)與參數式(參數方程式)
- 線段(line segment)與中點(midpoint)
- (歐氏)空間中的平面就是二維子空間的平移
- (歐氏)空間中的k-flat就是k維子空間的平移
- 向量式(向量方程式)
- 線性系統的幾何

第三章：向量空間

- 向量加法與乘以係數倍的乘法，封閉性
- 「佈於體(field) $\mathbb{F}$ 上的向量空間 V」的意思是
  1. V是一個加法群(additive group)，亦即，$(V,+,0)$ 有結合性,單位元素,反元素,交換性
  2. 對任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，對任意的 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$，恆有
     1. $\lambda\mathbf{u}\in V$, $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$ ((混合)結合律)
     2. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$，$\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$ (兩種分配律)
  3. 若用 1 表示 $\mathbb{F}$ 的乘法單位元素，則對任意的 $\mathbf{v}\in V$, $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$ (保存尺度)(不無聊性)

向量空間的基本性質

- (加法)單位元素的唯一性(不需結合性)
- (每一個元素的)反元素的唯一性(需結合性)
- 對任意向量 $\mathbf{v}$，係數 0 乘以向量 $\mathbf{v}$ 等於向量 $\mathbf{0}$
- 對任意係數 r，係數 r 乘以向量 $\mathbf{0}$ 等於向量 $\mathbf{0}$
- 對任意係數 r，任意向量 $\mathbf{v}$，$(-r)\mathbf{v} = r(-\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v})$

函數空間的普遍性

- 令 S 是一個集合，W 是一個向量空間，若令$V = \{f | f : S \to V\}$ ，則V也是一個向量空間，其中定義 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ 與 $(rf)(x) = rf(x)$
- 例：令 V 爲所有從集合 $\{a, b, c\}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量值函數所成的集合，隨之， V 是一個向量空間
- 例：令 V 爲所有從 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數所成的集合，隨之，V 是一個向量空間(事實上也是代數)
- 例：令 V 爲所有從 $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$ 到R的函數所成的集合，則 $V = M_{2\times3}(\mathbb{R})$ 是一個向量空間

3.2向量空間的一些基本概念

- 線性組合
- 張空間，生成，有限生成
- 相對於某運算的封閉性
- 子空間的定義，真子空間，零子空間
- 設 V 是一個向量空間，W 是 V 的一個子集。則「W 是 V 的一個向量子空間」若且唯若「W 對加法與乘以係數倍的乘法有封閉性」
- 必須檢查哪些？又不必檢查哪些？

基底

- 相依關係式
- 線性相依與線性不相依(線性獨立)
- 基底的定義
- 線性組合相對於基底而言的唯一表示性：「子空間的元素都有唯一線性組合表示」等價於「張成該子空間，且爲線性獨立」

維度

- 代換定理
- 若 V 是可以由有限多個向量張出的空間，則存在V的基底且任兩組基底元素個數相同。
- 維度的定義(維度的定義的「良好定義性」)

- 有序基底
- 標準有序基底(「標準」的認定不一定客觀)
- 相對於某(有序)基底的座標向量
- 找出相對於某基底的座標向量(方法不唯一)
- 例：假設先用標準有序基底得座標表示，令 B 爲某基底的行向量所成的矩陣，則對於歐氏空間中的向量 $\mathbf{v}$ 而言，$B^{-1}\mathbf{v}$ 即爲 $\mathbf{v}$ 相對於該基底的座標表示。(考量 $B^{-1}B = I$ 意義即知)

同構

- 保證有等同的結構(1-1，映成，保持運算)
- 自然推論：同構保持線性關係(線性獨立)

- 線性變換的定義(線性變換保持線性組合)
- 同態(保持運算)，同胚(雙向連續)
- 同態的合成仍爲同態
- 同態把定義域單位元素映至像集單位元素
- 同態把元素的反元素映至它的像的反元素
- 線性變換可由在基底的函數值所完全確定
- 定義域的子空間線性影像爲值域的子空間
- 值域的子空間線性反影爲定義域的子空間

方程式，反變換，矩陣表示

- 核
- 線性變換方程式的解爲(任意一個特解+核)
- 同態爲一對一函數若且唯若其核爲無聊
- 同態若爲一對一對映，則反函數亦爲同態
- 線性變換的矩陣表示
- 可逆線性變換的反變換的矩陣表示等於其矩陣表示的反矩陣

- 一般的内積(inner product)的定義：滿足「正定性」、「扭轉的(skew)對稱性」、「一又二分之一線性」
- 例：歐氏空間中的點積
- 例：對實數 a, b, c, d,令$[a, b], [c, d] \geq 2ac + 5bd$
- 例：對 $[0, 1]$ 上實係數多項式函數 p, q 而言，令 $\langle p, q \rangle = \int_{[0,1]} pqdx$

內積引出範數，範數引出距離

- 內積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 引出範數 $\|\cdot\|$，其中 $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$
- 範數的定義：正定性，絕對值線性，三角不等式
- 範數 $\|\cdot\|$ 引出距離 $d(\cdot, \cdot)$，其中 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- 距離函數的定義：正定性，對稱性，三角不等式
- 由內積引出的範數有平行四邊形定理
- 並非任意範數都滿足平行四邊形定理
- 內積與範數的定義域必爲向量空間
- 距離函數的定義域不必爲向量空間

柯西-舒瓦茲不等式，夾角，正交

- 內積的柯西-舒瓦茲不等式推得內積所引出的範數的三角不等式必成立
- 內積空間中兩向量間的夾角的定義
- 內積空間中兩向量間爲正交的定義

第四章：行列式

4.1面積，體積，外積

- 平行四邊形的面積
- 二階行列式
- 外積， 3×3 符號矩陣
  1. 有反交換性
  2. 無結合性
  3. 有分配律

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- 例：求與 $[2,1,1]$，$[1,2,3]$ 垂直的向量
- 平行六面體的體積
- 三階行列式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ (考慮正交與 i 的係數)

- 定義的方法不唯一(但可定出相同的行列式)

1. 降階(reduction)法：minor, 餘因子(cofactor), n 階行列式展開爲 $n-1$ 階餘因子的線性組合
2. 排列(permutation)法：奇排列，偶排列
3. 抽象定義法：任意有多線性，反交換性且單位矩陣的函數值等於1的純量函數。

- 由抽象定義可得唯一性，1, 2 滿足3，故相同!

行列式的性質

- $\det(A) = \det(A^T)$
- 兩列交換，行列式變負號
- 兩列相同，行列式等於零
- 多線性
- 加一列的倍數到另一列去，行列式不變
- 方陣可逆若且唯若行列式不爲零
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

- 方陣 A 的行列式的計算方法之一：

1. 只用列加法與列交換先將 A 列簡化爲梯形矩陣
2. 若過程中或最後出現某一列全爲零，則 $\det A = 0$
3. $\det A = (-1)^r$ (pivot的乘積)，其中 r 是列交換的次數

- Cramer 法則：設 A 爲可逆，$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解爲 $x_k = (\det B_k)/(\det A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ 其中 B_k 爲將 A 的第 k 個行向量換爲 $\mathbf{b}$ 所得的矩陣。(對 $k = 1, 2, \ldots, n$，令 X_k 爲將 I 的第 k 個行向量換爲 $\mathbf{x}$ 所得的矩陣，則 $AX_k = B_k$，故 $\det A \cdot \det X_k = \det B_k$)

伴隨矩陣

- 令 A_{ij} 爲刪除 A 的第 i 個列向量與第 j 個行向量後所得的 minor，則餘因子 $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$，再由 $\det A$ 的展開計算式可得 $\sum a_{ik} a'_{jk} = \delta_{ij} \det A$
- 方陣 A 的伴隨矩陣 $\mathrm{adj}A$ 的定義爲 $(\mathrm{adj}A)_{ij} = a'_{ji}$
- 由
$$(A\mathrm{adj}A)_{ij} = \sum a_{ik} (\mathrm{adj}A)_{kj} = \sum a_{ik} a'_{jk} = \delta_{ij} \det A,$$
得
$$A\mathrm{adj}A = (\det A)\, I,$$
故 $A^{-1} = (\det A)^{-1} \mathrm{adj}A$

- n-box 的定義，n-box 的體積的定義
- 設用歐氏空間中的標準基底，則由 A 的 n 個行向量所張成 n-box 的體積等於 $\left[\det\left(A^T A\right)\right]^{\frac{1}{2}}$。
- 自然推論：設用歐氏空間中的標準基底，方陣 A 的行向量所張成的 box 的體積爲 $|\det A|$
- 線性變換下的體積變化因子：最簡單的Jacobian (令 A 爲 $m \times n$ 的矩陣，B 是 k 個 $1 \times n$ 的行向量所成的矩陣，則爲 $\left[\det\left((AB)^T (AB)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

第五章：固有值與固有向量

5.1固有值與固有向量

- 例：給定 n 階方陣 A，計算 A^{1000}。
- 例：Fibonacci 的兔子 $F^k = F^{k-1} + F^{k-2}$，給定 F_0, F_1， 若令 $\mathbf{x}_k = [F_k, F_{k-1}]^T$，則有 $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$ 的關係式存在
- 固有(特徵)值與固有(特徵)向量的定義
- 不穩的變換，穩的變換，中性地穩的變換

固有值與固有向量的計算

- 「特徵」多項式，「特徵」方程式(一般性的術語)
- 代數重覆數
- 例：1 必是任意Markov chain的轉移矩陣的固有值
- 例：$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

固有值與固有向量的性質

- 設 $P(x)$ 是多項式，$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 其中 $\mathbf{v}$ 非零向量，則 $P(A)\mathbf{v} = P(\lambda)\mathbf{v}$。
- 設 A 爲可逆，且$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 其中 $\mathbf{v}$ 非零向量，則 $A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$。
- 固有空間是一個子空間，幾何重覆數
- 例：解 $f' = \lambda f$
- 例：解 $f'' = -k^2 f$

- 對角矩陣，相似，Jordan form
- 若 n 階方陣 A 有 n 個固有值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 與其所對應 n 個線性獨立的固有向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$， 令 C 爲 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 由做爲行向量所成的矩陣， $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$， 則 $AC = CD$，隨之，$C^{-1}AC = D$，亦即， $A = CDC^{-1}$，故 $A^k = CD^kC^{-1}$
- 「n 階方陣 A 爲可對角化的」若且唯若「A 有 n 個線性獨立的固有向量」

同一個方陣的相異固有值

- 一些相異的固有值對應的相異的固有向量必爲線性獨立
- 正規方陣
- 內積空間中，正規方陣的相異固有值對應的固有向量必正交

實對稱方陣

- 對稱方陣，自伴隨(self-adj., Hermitian)方陣
- 「方陣可對角化」若且唯若「每個固有值的代數重覆數等於其幾何重覆數」]
- 實對稱方陣必可對角化(且固有值必爲實數)
- 自伴隨方陣必可對角化(且固有值必爲實數)
- 正規方陣必可對角化
- 正規方陣必可么正地對角化
- 代數基本定理：任意非零次複係數多項式必有複數根。
- Schur 引理：任意複方陣可么正地上三角化

- 若方陣A可對角化爲 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，且對應 n 個線性獨立的固有向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$，則對於 x 表示爲

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\mathbf{v}_n$$

  而言，有

$$A^k\mathbf{x} = d_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + d_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

- 人口分佈向量
- 若 Markov chain 的轉移矩陣 T 可對角化，則其固有值的絕對值皆小於等於 1。
- 若一階線性齊次微分方程式系的係數矩陣爲可對角化，則易解此微分方程。