Конечные автоматы

Σ — алфавит, $\Sigma = \{ 6_0, 6_1, 6_2 \ldots \}$

⊞ $\Sigma = \{ '0', '1' \}$ ⊞ $\Sigma = \{ 'a', 'b' \ldots 'z' \}$

⊞ $\Sigma = \{ '-1', '0', '1' \}$ $(\ldots)$

L — язык — это подмножество Σ^*.

$*$ — звезда Клини

$\Sigma^* = \{ \varepsilon, 6_0, 6_1 \ldots, 6_0 6_0, 6_0 6_1, \ldots, 6_0 6_0 6_0 \ldots \}$

$\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}, \Sigma^1 = \{ 6_0, 6_1, \ldots \}, \Sigma^2 = \{ 6_0 6_0, 6_0 6_1, \ldots \}$
$\ldots$

$\Sigma^* = \Sigma^0 + \Sigma^1 + \Sigma^2 + (\ldots) = \dfrac{1}{1 - \Sigma} \, ?$

$$\Sigma^* - \Sigma_1 \times \Sigma^* = 1 \implies \Sigma_1^* = \underset{\cdots}{1} + \Sigma_1 \times \Sigma_1^*$$
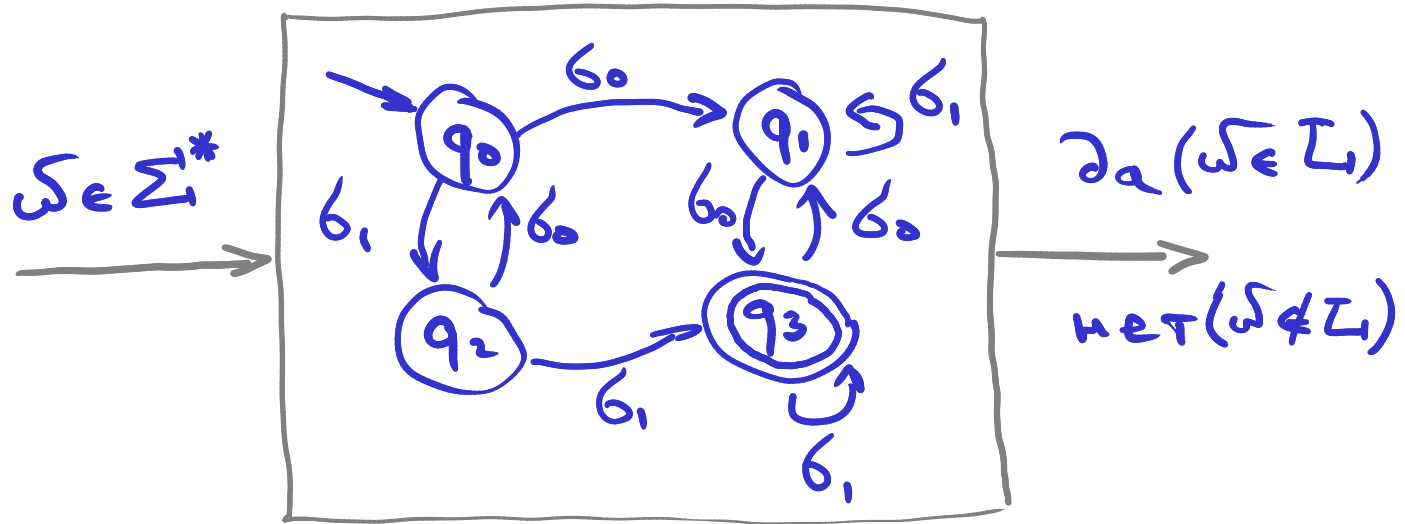
$$\Sigma_1^* = \{\varepsilon\} + \Sigma_1 \times \Sigma_1^*, \quad \omega \in \Sigma_1^* = \begin{cases} \omega = \varepsilon \\ \omega = \sigma\sigma^*, \ \sigma \in \Sigma \\ \qquad\qquad \sigma^* \in \Sigma_1^* \end{cases}$$

альтернативное определение Σ_1^*

Q — мн-во состояний, $Q = \{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$

q_0 $\cdots$ q_1

q_2

δ — ф-ия перехода, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$\omega \in \Sigma^*$

Automaton diagram with states q_0, q_1, q_2, q_3 and transitions labeled 6_0, 6_1:
- q_0 is the initial state (arrow pointing in)
- $q_0 \xrightarrow{6_0} q_1$
- $q_0 \xrightarrow{6_1} q_2$
- $q_2 \xrightarrow{6_0} q_0$
- q_1 has a self-loop 6_1
- $q_1 \xrightarrow{6_0} q_3$
- $q_3 \xrightarrow{6_0} q_1$
- $q_2 \xrightarrow{6_1} q_3$
- q_3 has a self-loop 6_1
- q_3 is an accepting state (double circle)

Output: да $(\omega \in L_1)$ / нет $(\omega \notin L_1)$

Детерминированный конечный автомат — это

1. Σ — алфавит
2. Q — мн-во состояний
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ — ф-ия перехода
4. $q_0 \in Q$ — нач. состояние
5. $F \subseteq Q$ — доп. состояния

граф. ДКА

$\Sigma = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 - н.сост., $\{q_2\}$ - доп. сост.
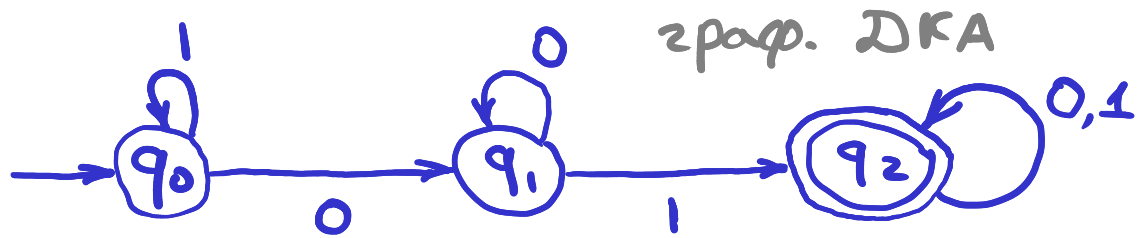
	0	1
→ q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
* q_2	q_2	q_2

табл. ДКА

$\omega \in L \iff$ ДКА доп. ω.

#	ω	$\omega \in L$?
	00000	нет
	11111	нет
	01	да
	0000100	да

L — все слова из Σ^*, содержащие '01'.
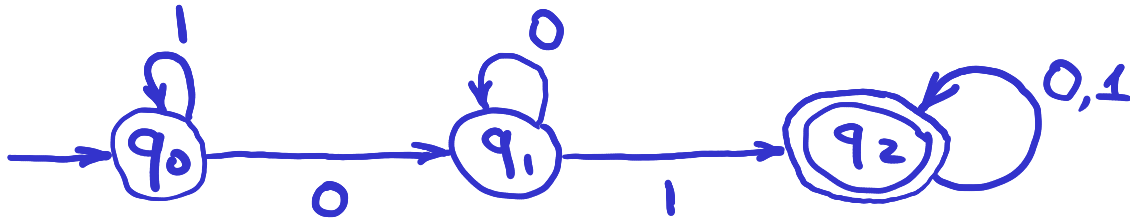
client   server

syn

syntack

ack
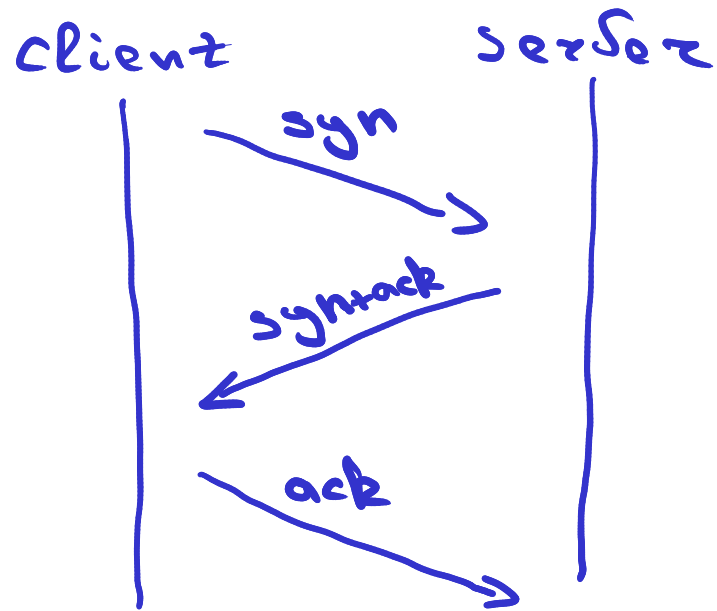
established connection

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

$$\delta : Q \times Q \to \Sigma$$
ne DKA

$$\Sigma = \{0,1\}, \quad Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
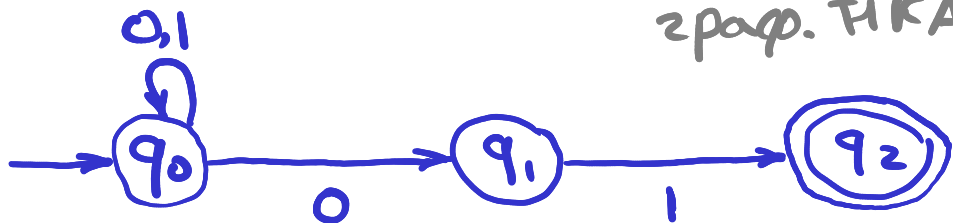
$\omega \in \Sigma^*$

HKA

$\partial_a \ (\omega \in L_1)$

$\text{нет} \ (\omega \notin L_1)$
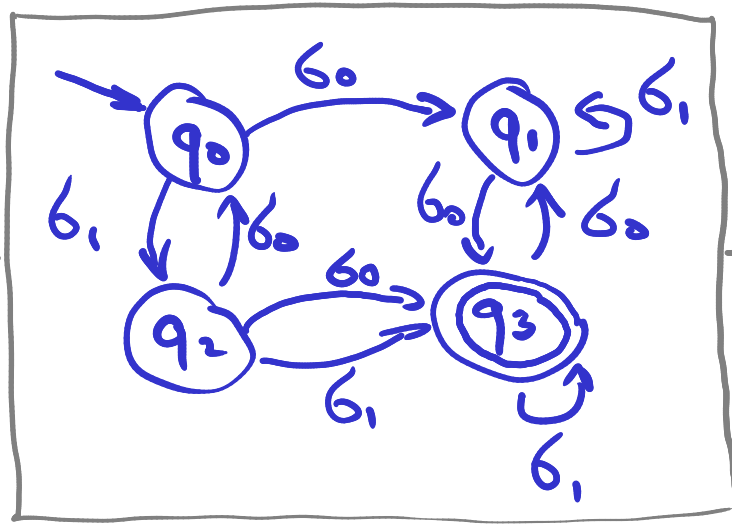
Недетерминированный конечный автомат — это

1. Σ — алфавит
2. Q — мн-во состояний
3. $\delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$ — ф-ия перехода
4. $q_0 \in Q$ — нач. состояние
5. $F \subseteq Q$ — доп. состояния

граф. НКА

$$\Sigma = \{0,1\}, \quad Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad q_0 - \text{н.сост.}, \quad \{q_2\} - \text{доп. сост.}$$

	0	1
→ q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
* q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

табл. НКА

$$\omega \in L \iff \text{НКА доп. } \omega.$$

ω	$\omega \in L$?
00000	нет
11111	нет
01	да
0000100	нет
00001	да

L — все слова из Σ^*, заканчивающ. '01'.

# #

граф. НКА

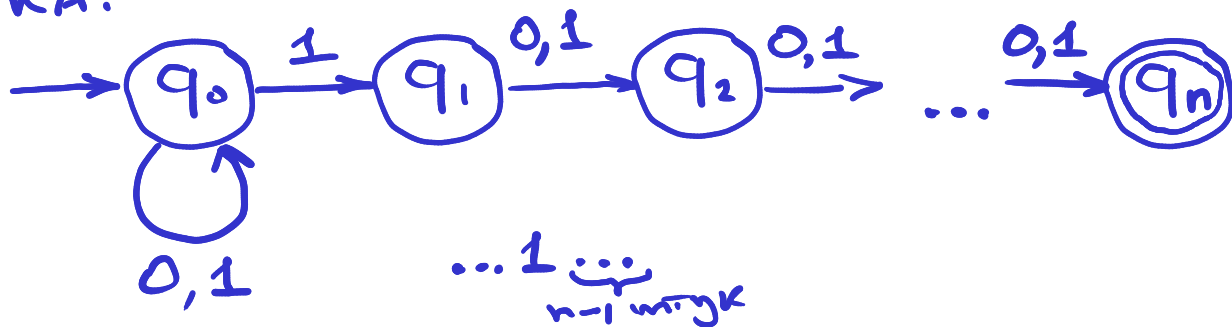$\Sigma^+ = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 - н.сост., $\{q_2\}$ - доп. сост.

НКА $=$ DKA
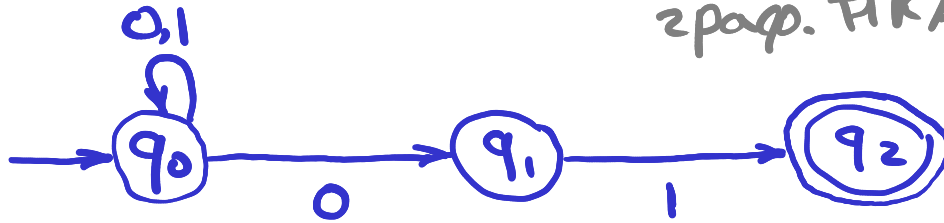
НКА

	0	1
→ q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
* q_2	$\varnothing$	$\varnothing$

DKA

	0	1
→ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

макс. 2^n сост-ий

НКА:

$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0,1} q_2 \xrightarrow{0,1} \dots \xrightarrow{0,1} q_n$

q_0 имеет петлю $0,1$

$\dots 1 \dots$ ($n-1$ штук)

L: Слова с "1" на n-ом месте с конца.

DKA: $\sim 2^n - 1$ сост-ий

	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$

$\dots$

из $\{q_0\}$:

$1 \to \{q_0, q_1\}$

$10 \to \{q_0, q_2\}$

$100 \to \{q_1, q_3\}$

$101 \to \{q_0, q_1, q_3\}$

$\dots$

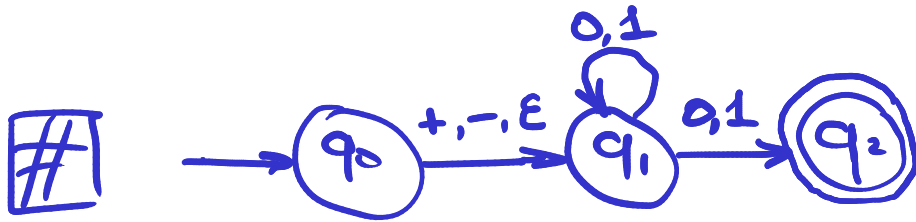сост. DKA соотв. всем возможным словам длины до n вкл.

ε-НКА

Опр. ε-НКА — НКА с ε-переходами.

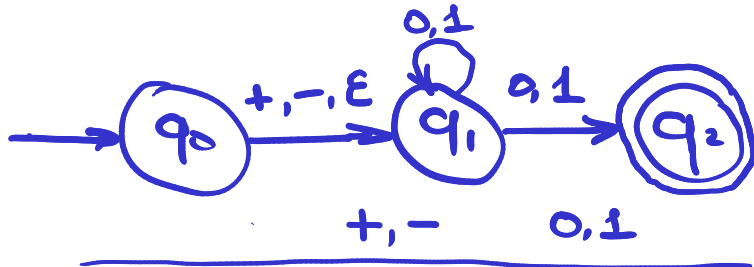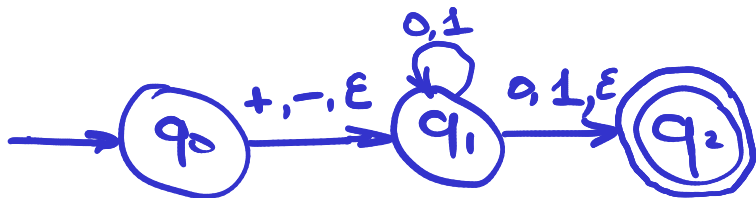Опр. ε-переход — это переход между сост. без погл. символов.

$$0,1$$

$$q_0 \xrightarrow{+,-,\varepsilon} q_1 \xrightarrow{0,1} q_2$$

+01
+100
−101
10
10±0

Опр. $E_1(q)$ — ε-дост. состояние q,

$E(q) = \{q_i \mid \exists$ путь по ε-рёбрам из q в $q_i\}$

First automaton (#): states q_0, q_1, q_2 with transitions: $q_0 \xrightarrow{+,-,\varepsilon} q_1$, self-loop $0,1$ on q_1, $q_1 \xrightarrow{0,1} q_2$.

	$+,-$	$0,1$
$\rightarrow E(q_0) = \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
$*\ \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$

Second automaton (#): states q_0, q_1, q_2 with transitions: $q_0 \xrightarrow{+,-,\varepsilon} q_1$, self-loop $0,1$ on q_1, $q_1 \xrightarrow{0,1,\varepsilon} q_2$.

	$+,-$	$0,1$
$\rightarrow *\ E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$*\ \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$

$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$E_1(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$+, \{\}$

DFA

NFA

ε-NFA

DKA ⟶ HKA ⟶ ε-HKA

Cue onz. Ruune
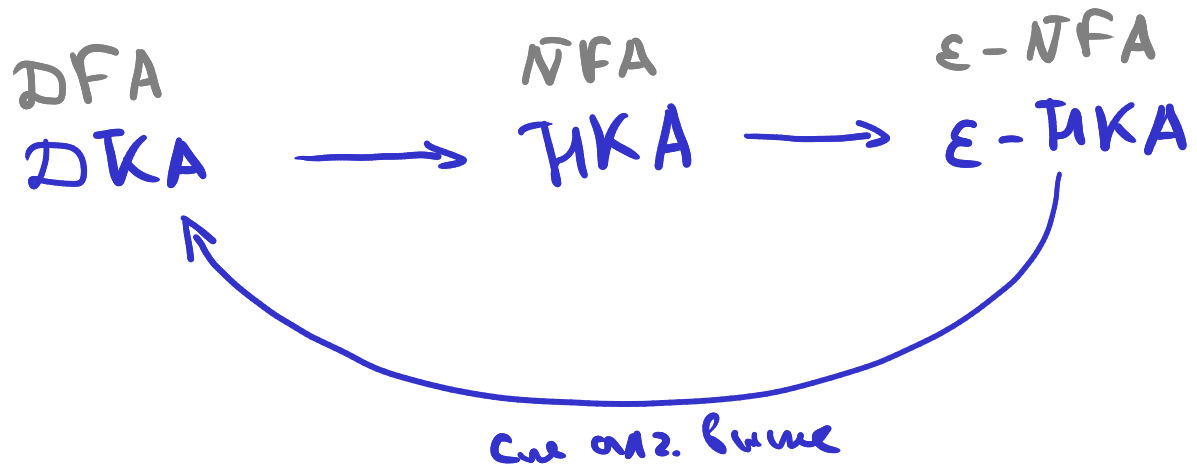
Регулярные выражения (RE, regexp)

Пусть Σ - алфавит, τ_1 и τ_2 — RE, тогда:

1. σ — RE, где $\sigma \in \Sigma$, $\qquad L_1(\sigma) = \{\sigma\}$

2. $\{\} $ — RE, $\qquad\qquad\qquad L_1(\{\}) = \{\{\}\}$

3. $\tau_1 \tau_2$ — RE, $\qquad L_1(\tau_1 \tau_2) = \{\omega_1 \omega_2 \mid \omega_1 \in L_1(\tau_1) \cap \omega_2 \in L_1(\tau_2)\}$

4. $\tau_1 \mid \tau_2$ — RE, $\qquad L_1(\tau_1 \mid \tau_2) = \{\omega \mid \omega \in L_1(\tau_1) \cup \omega \in L_1(\tau_2)\}$

5. $\tau_1 *$ — RE. $\qquad L_1(\tau_1^*) = \{\omega_1 \ldots \omega_n \mid \bigcap_i \omega_i \in L_1(\tau_1)\}$

$(+ \mid - \mid \{\})(011)(011)^*$ $\qquad\qquad (+ \mid - \mid 011)(011)^*$