Конечные автоматы

Σ — алфавит, $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \dots\}$

⊞ $\Sigma = \{'0', '1'\}$ ⊞ $\Sigma = \{'a', 'b' \dots 'z'\}$

⊞ $\Sigma = \{'-1', '0', '1'\}$ $(\dots)$

L — язык — это подмножество Σ^*.

$*$ — звезда Клини

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_0\sigma_0, \sigma_0\sigma_1, \dots, \sigma_0\sigma_0\sigma_0 \dots\}$$

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}, \quad \Sigma^1 = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}, \quad \Sigma^2 = \{\sigma_0\sigma_0, \sigma_0\sigma_1, \dots\} \dots$$

$$\Sigma^* = \Sigma^0 + \Sigma^1 + \Sigma^2 + (\dots) = \frac{1}{1-\Sigma} ?$$

$$\Sigma^* - \Sigma_1 \times \Sigma^* = 1 \Rightarrow \Sigma_1^* = 1 + \Sigma_1 \times \Sigma^*$$

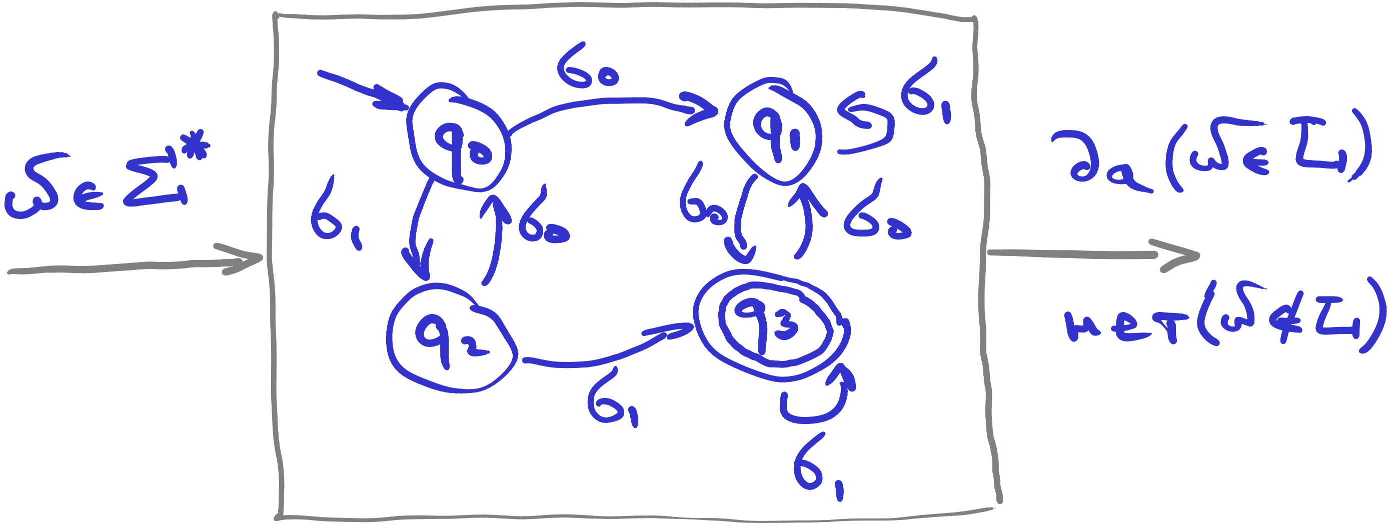
$$\Sigma_1^* = \{\varepsilon\} + \Sigma_1 \times \Sigma_1^*, \quad \omega \in \Sigma_1^* = \begin{cases} \omega = \varepsilon \\ \omega = \sigma\sigma^*, \sigma \in \Sigma_1 \\ \quad \sigma^* \in \Sigma_1^* \end{cases}$$

альтернативное определения Σ_1^*

Q – мн-во состояний, $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$

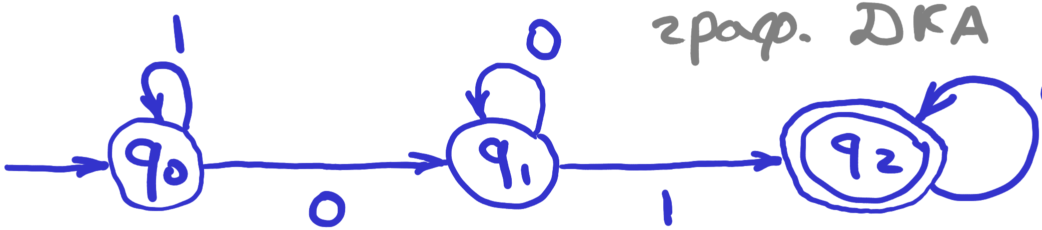
q_0 $\dots$ q_1 q_2

δ – ф-ия перехода, $\delta: Q \times \Sigma_1 \to Q$



Детерминированный конечный автомат — это
1. Σ — алфавит
2. Q — мн-во состояний
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ — ф-ия перехода
4. $q_0 \in Q$ — нач. состояние
5. $F \subseteq Q$ — доп. состояния

$\boxed{\#}$



граф. DKA

$\Sigma = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 – н. сост., $\{q_2\}$ – доп. сост.

	0	1
→ q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
* q_2	q_2	q_2

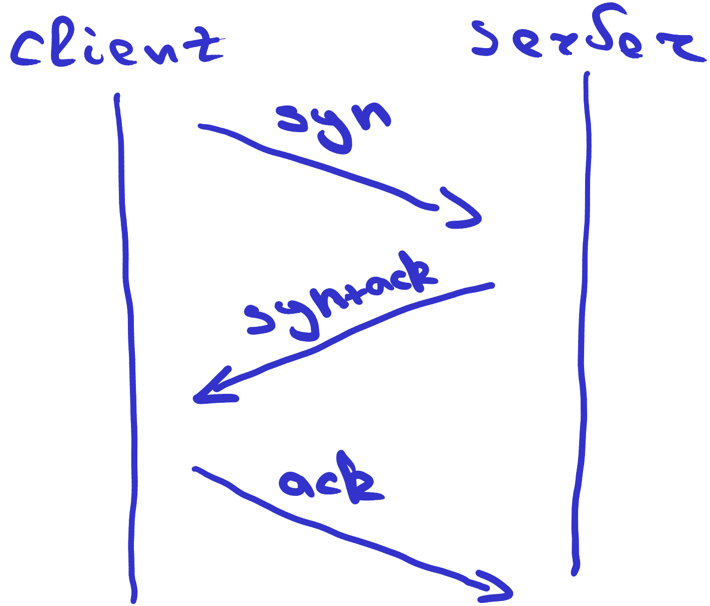
табл. DKA

$\omega \in L_1 \Leftrightarrow$ DKA доп. ω.

$\boxed{\#}$

ω	$\omega \in L_1$?
00000	нет
11111	нет
01	да
0000100	да

L_1 – все строки из Σ^*, содержащие '01'.

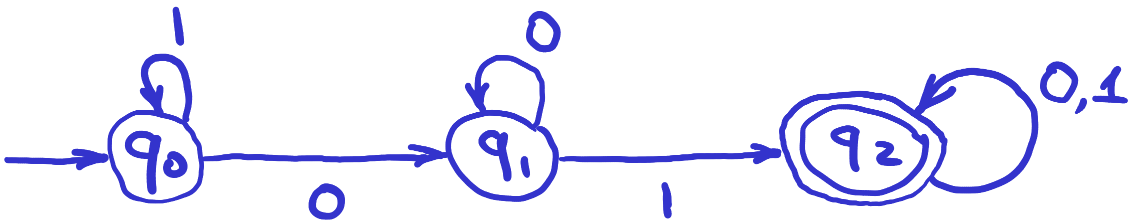


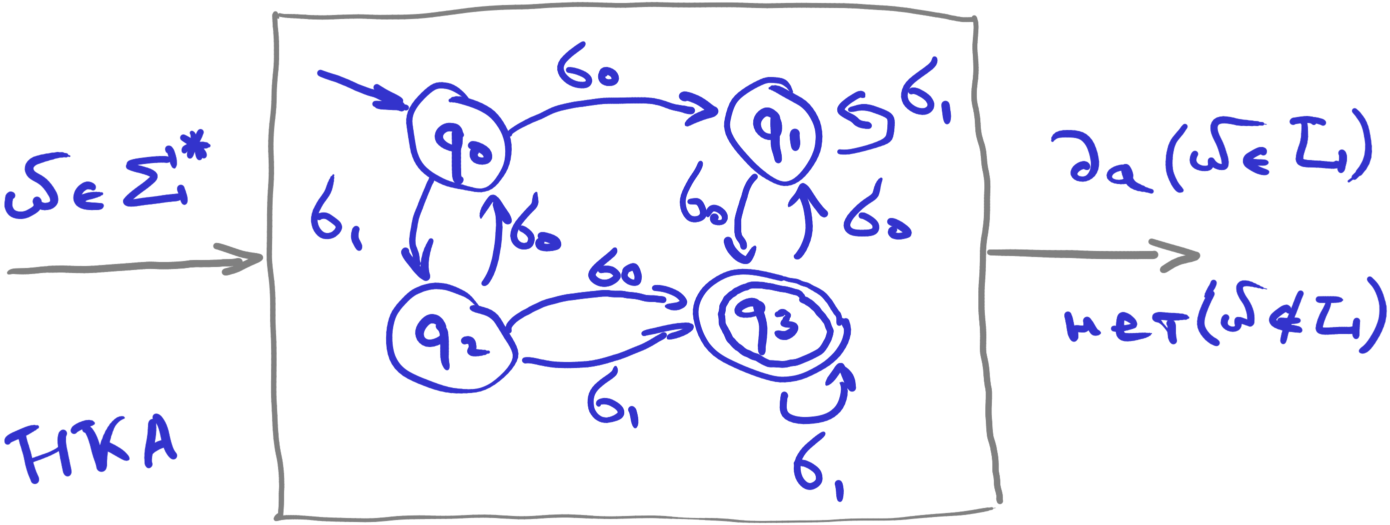
estabished connection

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$\delta : Q \times Q \underset{\text{не}}{\to} \Sigma$ ДКА

$\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$



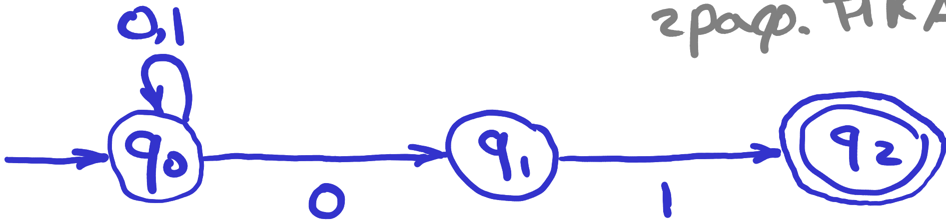


Недетерминированный конечный автомат — это

1. Σ — алфавит
2. Q — мн-во состояний
3. $\delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$ — ф-ия перехода
4. $q_0 \in Q$ — нач. состояние
5. $F \subseteq Q$ — доп. состояния

$\boxed{\#}$

граф. НКА



$\Sigma_1 = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 – н. сост., $\{q_2\}$ – доп. сост.

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

табл. НКА

$\omega \in L_1 \Leftrightarrow$ НКА доп. ω.

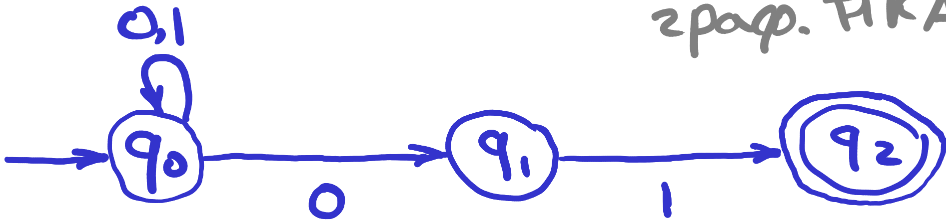
$\boxed{\#}$

ω	$\omega \in L_1$?
00000	нет
11111	нет
01	да
0000100	нет
00001	да

L_1 – все строки из Σ_1^*, заканчивающ. '01'.

$\boxed{\#}$

граф. НКА



$\Sigma = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 – н. сост., $\{q_2\}$ – доп. сост.

НКА = ДКА

НКА

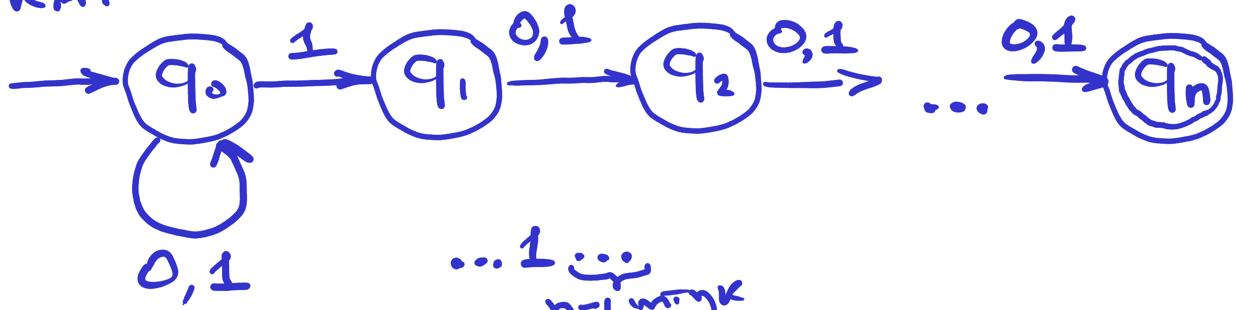
	0	1
→ q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
* q_2	$\varnothing$	$\varnothing$

ДКА

	0	1
→ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

макс. 2^n сост-ий

$\boxed{\#}$ НКА:



$\dots 1 \underbrace{\dots}_{n-1 \text{ штук}}$

L_1: Слова с "1" на n-ом месте с конца.

~$2^n - 1$ сост-ий

ДКА:

	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
...		

из $\{q_0\}$:

1 $\to \{q_0\ q_1\}$

10 $\to \{q_0, q_2\}$

100 $\to \{q_0, q_3\}$

101 $\to \{q_0, q_1, q_3\}$

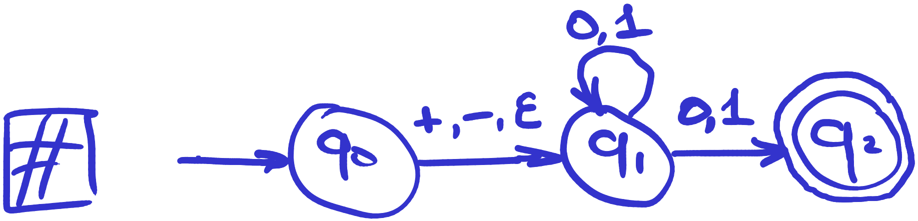
...

Сост. ДКА соотв. всем возможным словам длины до n вкл.

ε-НКА

Опр. ε-НКА — НКА с ε-переходами.

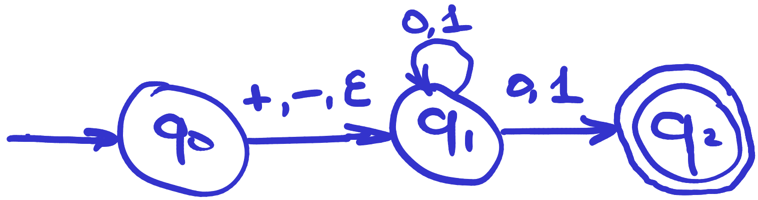
Опр. ε-переход — это переход между сост. без погл. символов.



+01
+100
−101
10
1010

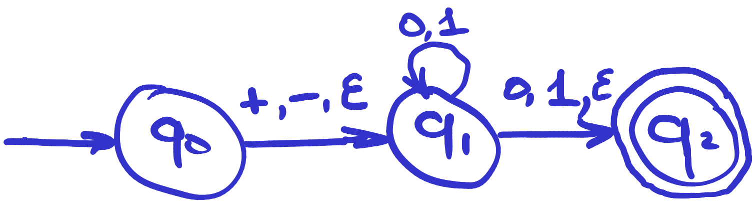
Опр. $E(q)$ — ε-зам. состояния q,
$E(q) = \{q_i \mid \exists$ путь по ε-рёбрам из q в $q_i\}$

$\boxed{\#}$



	$+,-$	$0,1$
$\rightarrow E(q_0)=\{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1,q_2\}$
$*\ \{q_1,q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1,q_2\}$

$\boxed{\#}$



	$+,-$	$0,1$
$\rightarrow *\ E(q_0)=\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
$*\ \{q_1,q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1,q_2\}$

$E(q_0)=\{q_0,q_1,q_2\}$

$E(q_1)=\{q_1,q_2\}$

$+,\ \{\}$

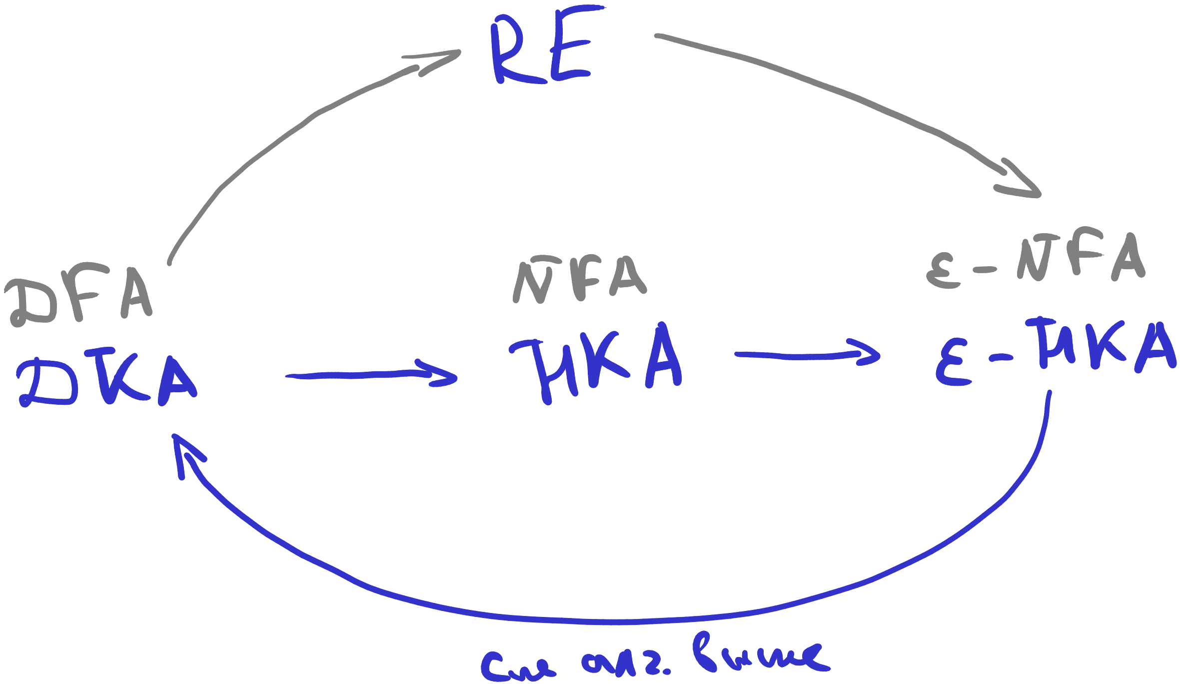
$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{DFA}\\ \text{ДКА}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{NFA}\\ \text{НКА}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\varepsilon\text{-NFA}\\ \varepsilon\text{-НКА}\end{array} \arrow[ll, bend left, "\text{см. алг. выше}"]
\end{tikzcd}$$

Регулярные выражения (RE, regexp)

Пусть Σ — алфавит, r_1 и r_2 — RE, тогда:

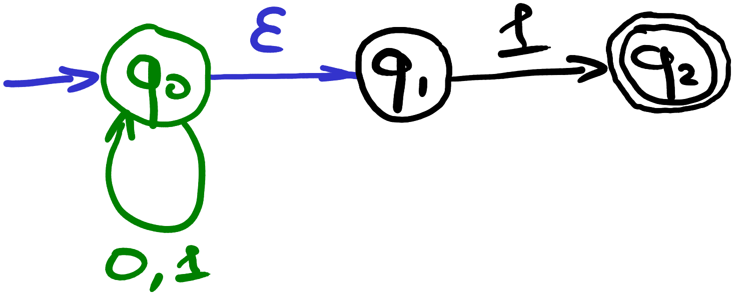
1. σ — RE, где $\sigma \in \Sigma$, $\quad L(\sigma) = \{\sigma\}$
2. $\{\}$ — RE, $\quad L(\{\}) = \{\{\}\}$
3. $r_1 r_2$ — RE, $\quad L(r_1 r_2) = \{\omega_1 \omega_2 \mid \omega_1 \in L(r_1) \cap \omega_2 \in L(r_2)\}$
4. $r_1 | r_2$ — RE, $\quad L(r_1 | r_2) = \{\omega \mid \omega \in L(r_1) \cup \omega \in L(r_2)\}$
5. r_1^* — RE. $\quad L(r_1^*) = \{\omega_1 \ldots \omega_n \mid \bigcap_i \omega_i \in L(r_1)\}$

$\# \; (+|-|\{\})(0|1)(0|1)^* \qquad \# \; (+|-|0|1)(0|1)^*$


RE
DFA
ДКА
NFA
НКА
ε-NFA
ε-НКА
См. опр. выше

RE $\longrightarrow$ ε-НКА (ε-NFA)

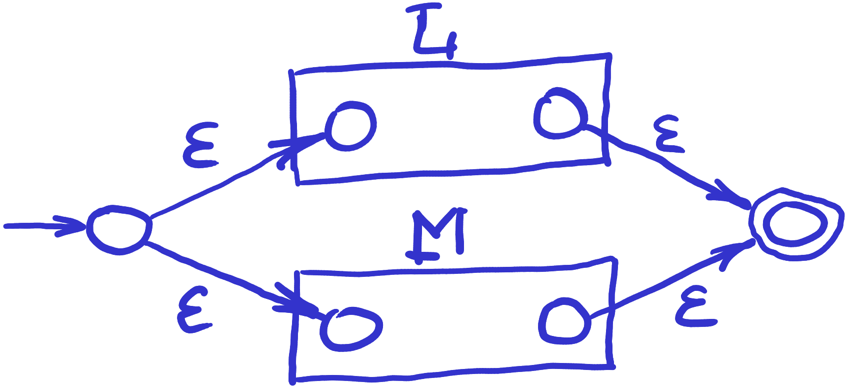
$\boxed{\#}$ $(0|1)^*1$



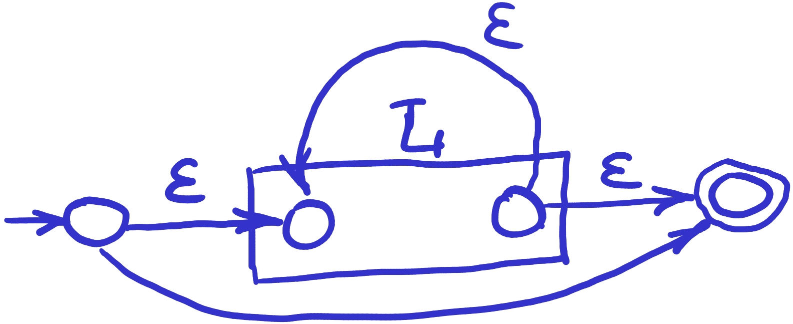
Алгоритъм:

1. L.M

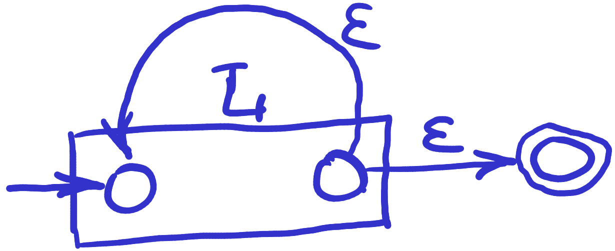
2. L|M



3. L_1^*

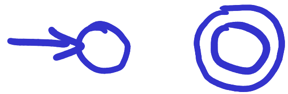


4. $L_1^+ = L_1 L_1^*$, но можно упростить:

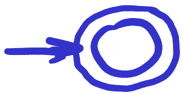


5. a

7. $\varnothing$



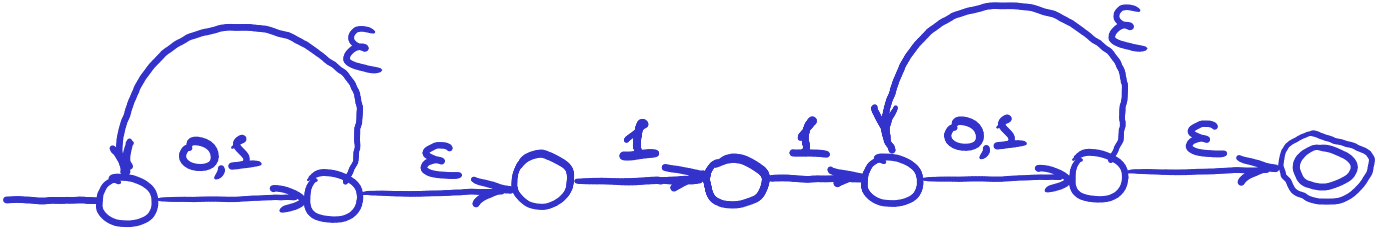
6. {}

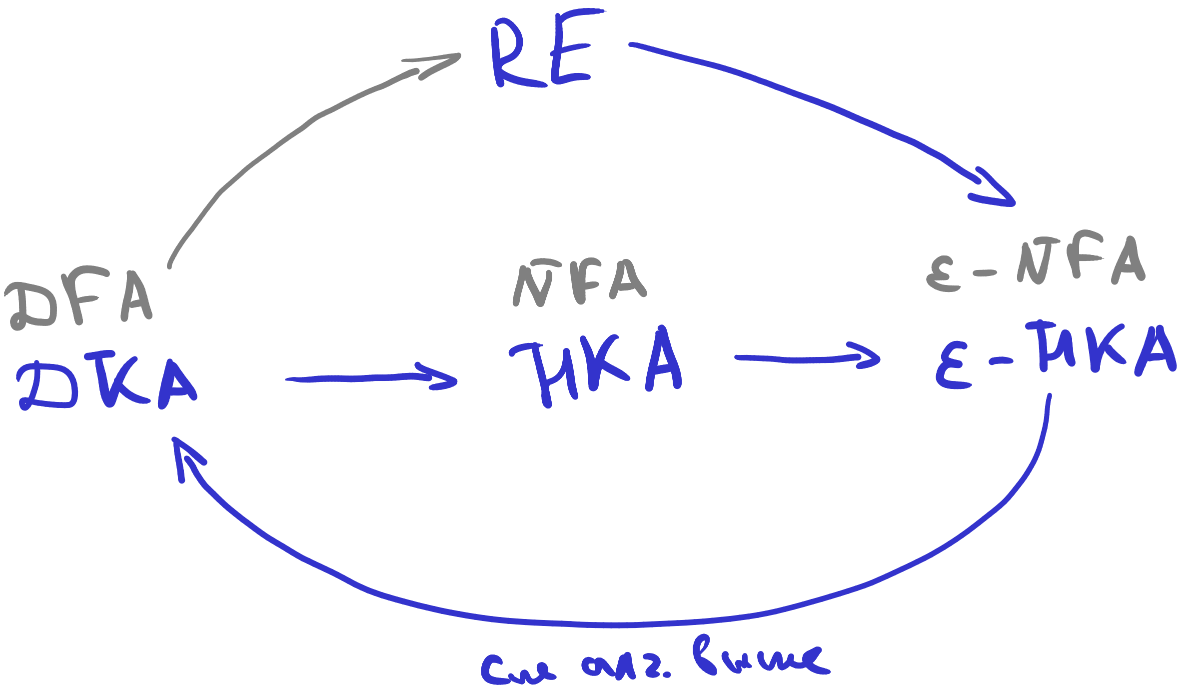


#

$(0|1)^+ 1 1 (0|1)^+$

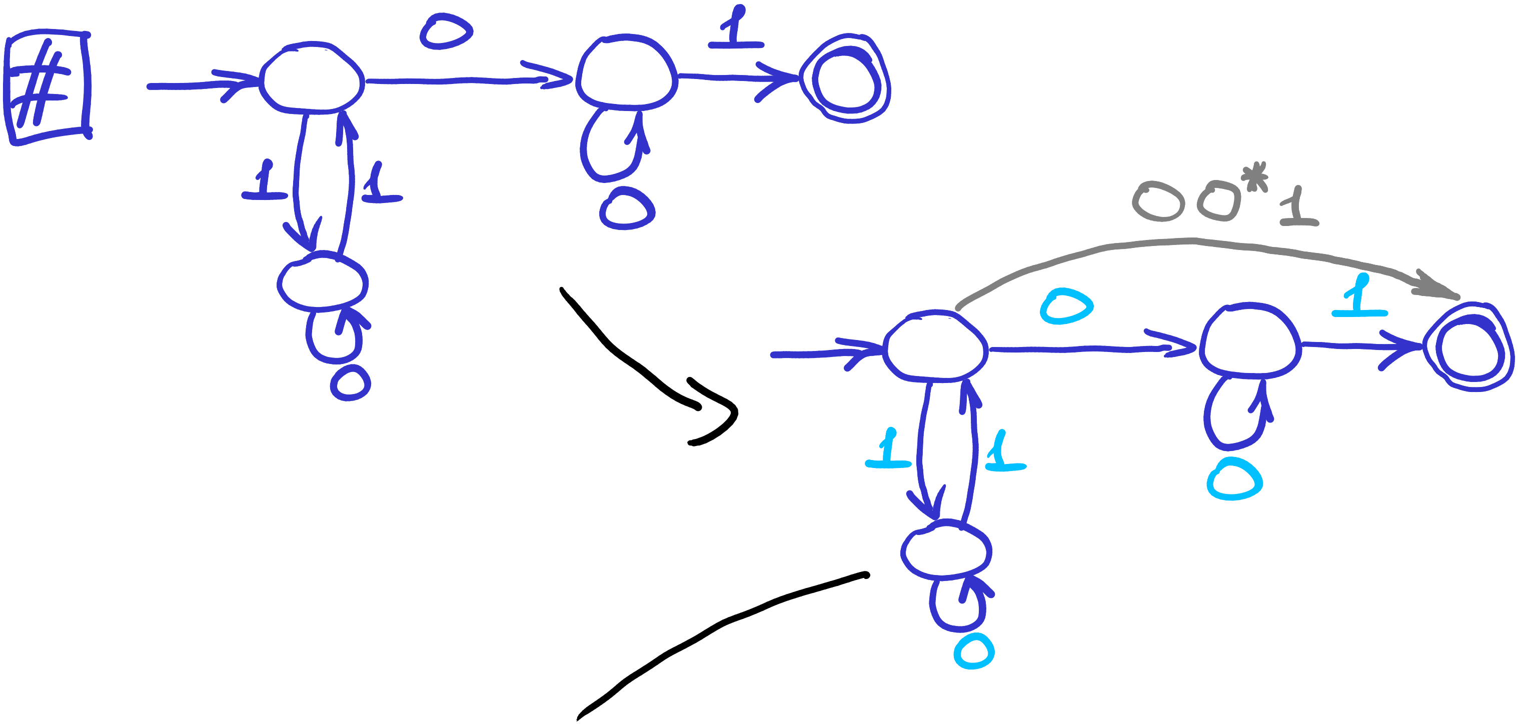
$0|1:$ 

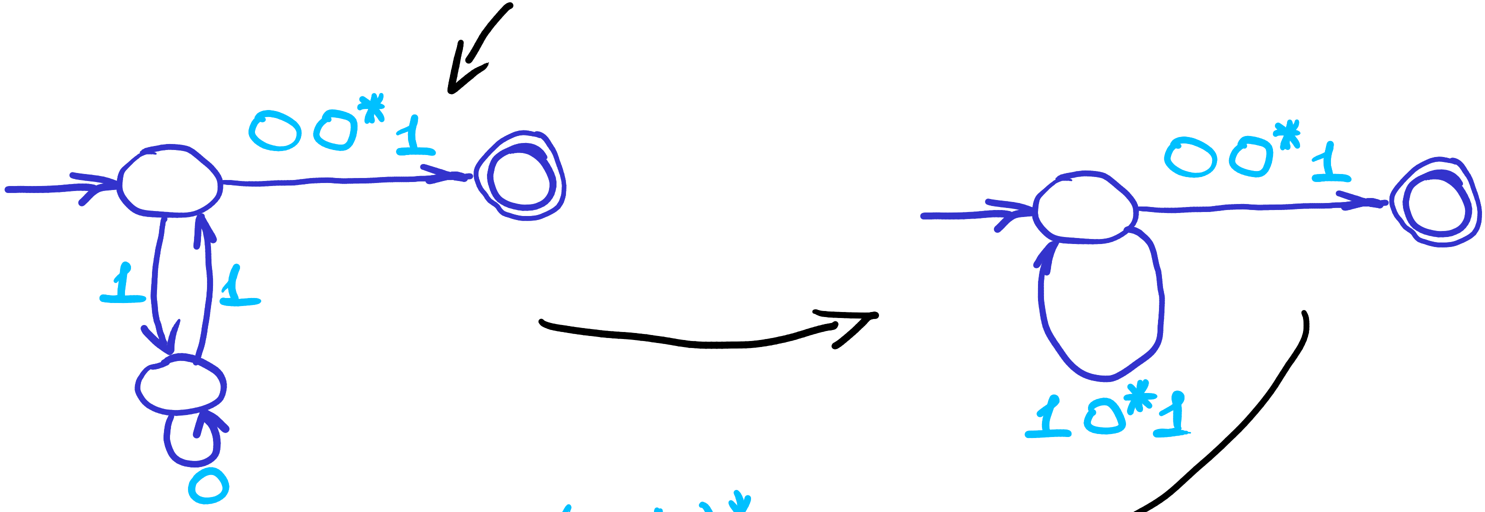



RE
DFA
ДКА
NFA
НКА
ε-NFA
ε-НКА
См опр. выше

ДКА (DFA) → RE

Алгоритм (Исключение состояний):

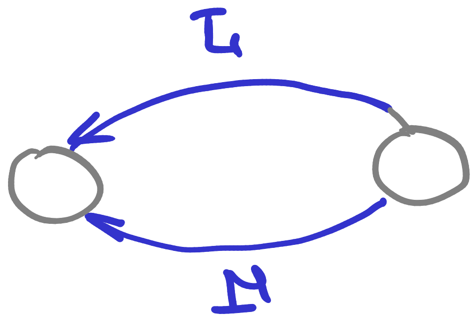




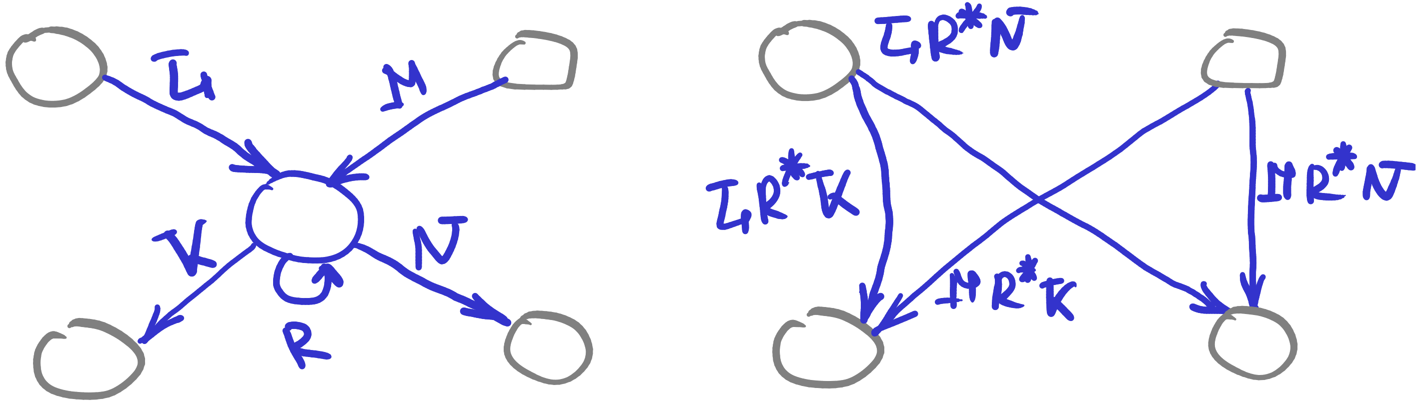
$(10^*1)^*00^*1$

Более формально:

1.

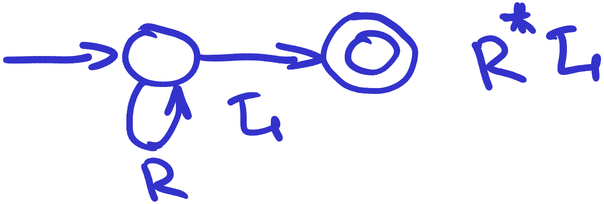


2.



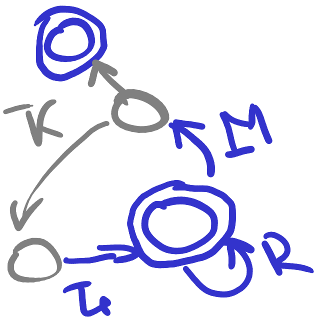
L1
M
K
N
R
L1R*N
L1R*K
MR*N
MR*K

3.

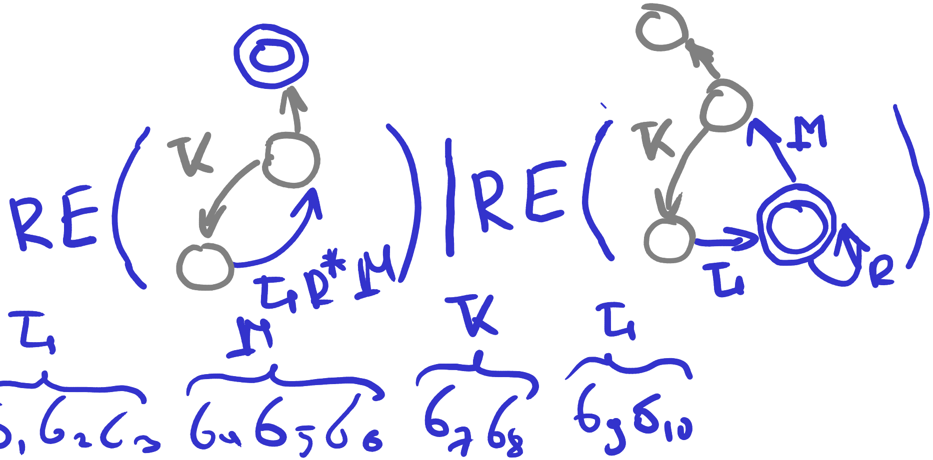


L1
R
R*L1

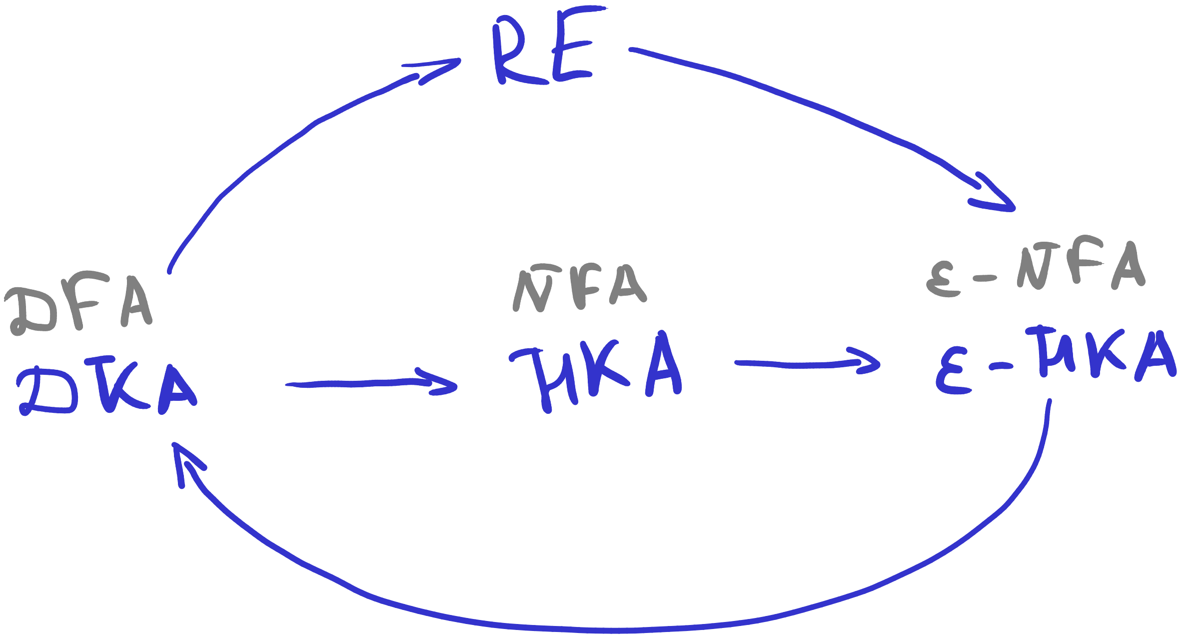
4.



K
M
L1
R



RE( )|RE( )
K
L1R*M
M
L1
R
L1
M
K
L1
σ1σ2σ3
σ4σ5σ6
σ7σ8
σ9σ10


RE
DFA
ДКА
NFA
НКА
ε-NFA
ε-НКА

Св-ва RE:

1. Коммутативность |: $L|M = M|L$
2. Ассоциативность |: $L|(M|N) = (L|M)|N$
3. Ассоциативность .: $L(MN) = (LM)N$
4. Нейтральность $\varnothing$ в |: $\varnothing | L = L | \varnothing = L$
5. Нейтральность ε в .: $\varepsilon L = L\varepsilon = L$
6. Дистрибутивность: $L(M|N) = (LM)|(LN)$

   $(M|N)L = (ML)|(NL)$

...

$L^{*}|\varepsilon = L^{*}$, $L^{+}|\varepsilon = L^{*}$ (...)

Св-ва рег. языков.

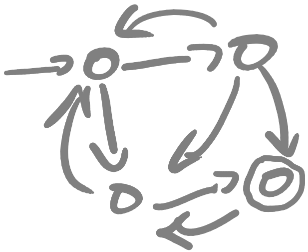
Пусть L и M — рег. языки, тогда:

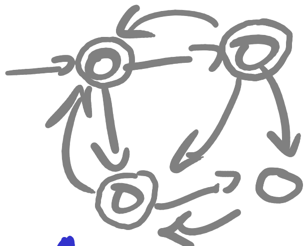
1. Объединение: $L \cup M$ — рег. яз.

т.к. $R_L | R_M$ — рег. выр., если R_L — RE и R_M — RE.

2. Дополнение: $\overline{L} = \Sigma^* / L$ — рег. яз.

ДКА: (NFA)





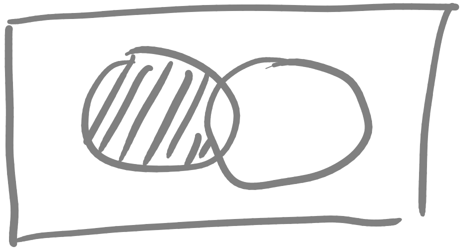
т.к. замена $F \mapsto Q/F$ выполняет операцию "дополнение".

3. Пересечение: $L_1 \cap M$ — рег. яз.

т.к. $L_1 \cap M = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{M}}$.

4. Вычитание: L_1 / M — рег. яз.

т.к. $L_1 / M = \overline{\overline{L_1} \cup M}$



5. Замыкание Клини:

L_1^* — рег. яз.

т.к. $(R_{L_1})^*$ — RE, если R_{L_1} — RE.

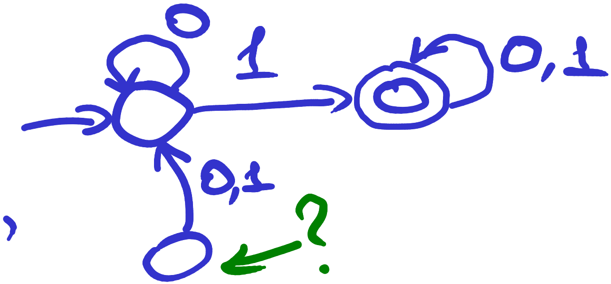
6. Конкатенация: $L_1 M$ — рег. яз.

7. Переворот: $L_1^R = \{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \mid \sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_1 \in L_1\}$

L_1^R — рег. яз. Д/З: почему?

hint: исп. ДКА $\mapsto$ ε-НКА

Эквивалентность состояний



ДКА: Σ — алфавит, Q — мн-во сост., δ — перех. ф-ия, q_0 — нач. сост., F — мн-во доп. сост.

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$, $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$

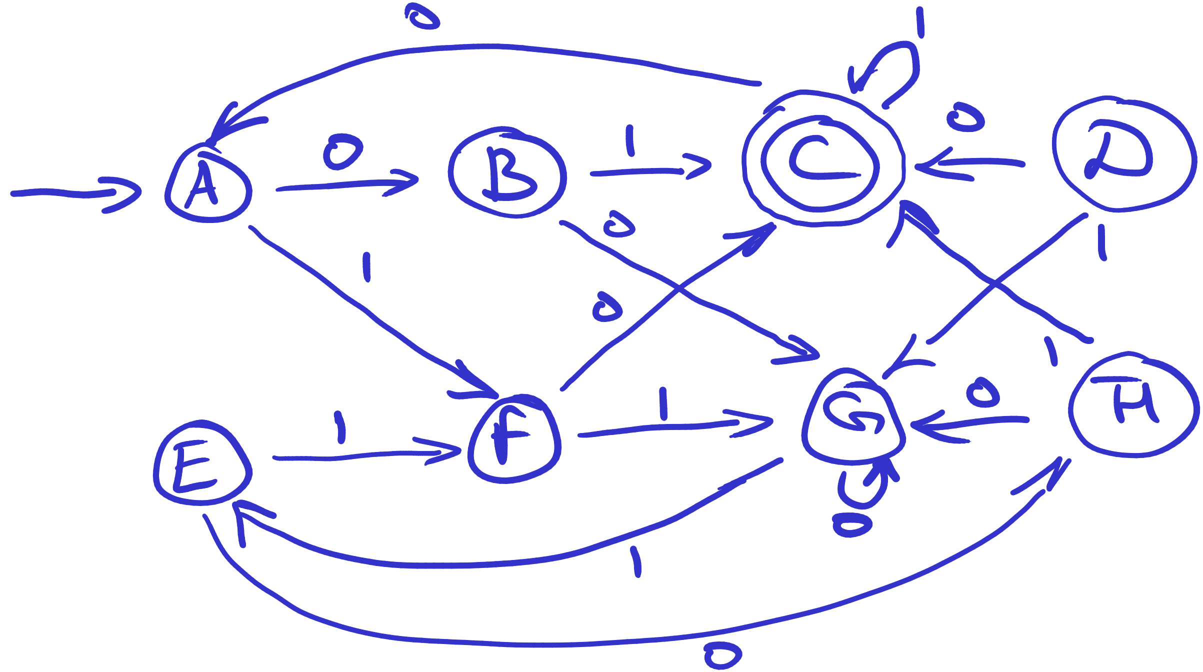
$\hat{\delta}$ — замыкание δ

Опр. Состояния q_i и q_j — экв., если

$$\hat{\delta}(q_i, \omega) - \text{доп.} \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_j, \omega) - \text{доп.}$$

т.е. ω переводит. q_i в доп. ТиТТК ω переводит. q_j в доп.

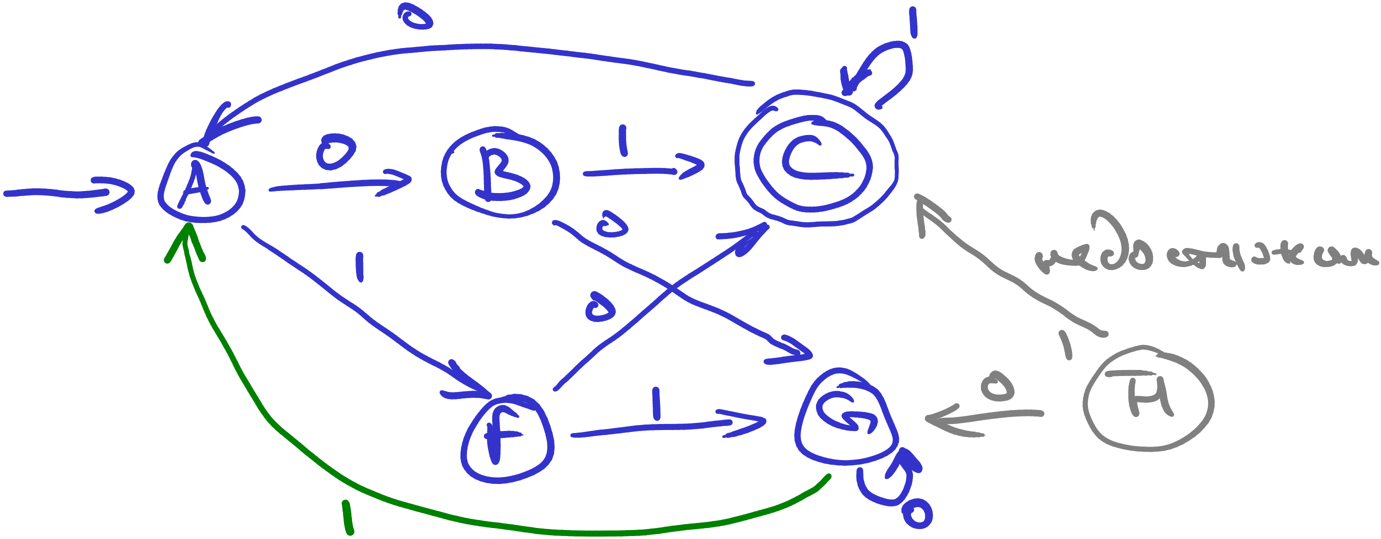
Неразличимость — синоним экв-ти сост-ий.

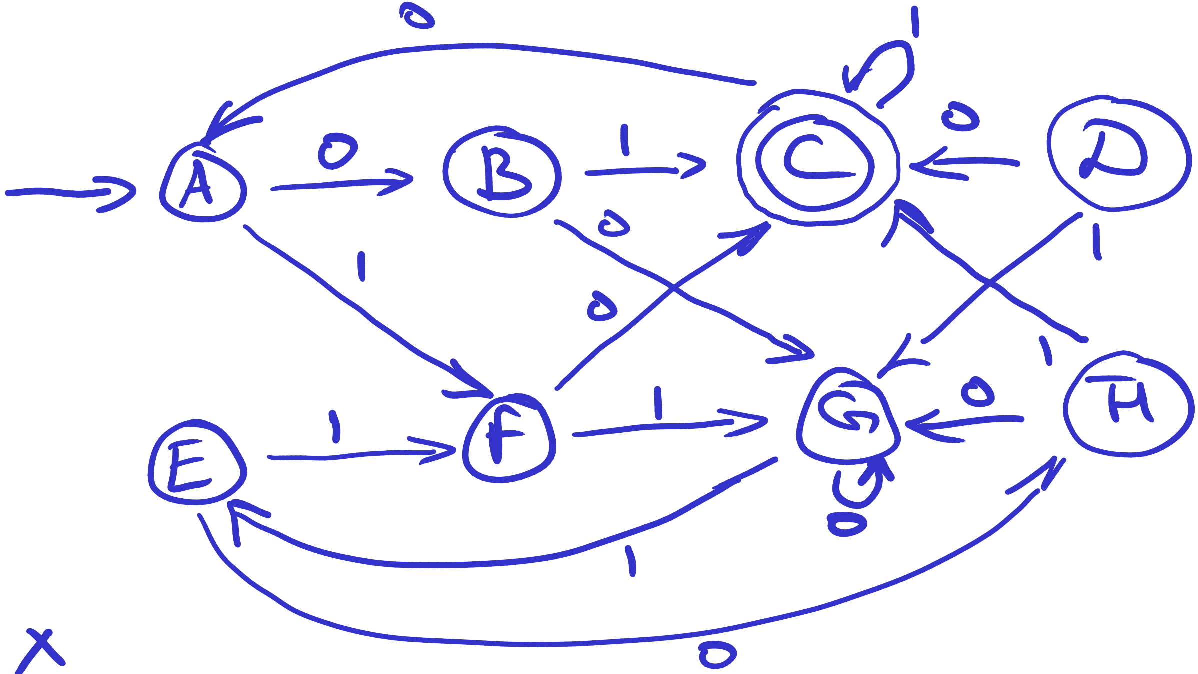


	0	1
F	C	G
D	C	G

	1	0	00	01
A	F	B	G	C
E	F	H	G	C

Эквивалентный ДКА:





	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	X	X					
D			X				
E			X				
F			X				
G			X				
H			X				