Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

Profs. Luciana Buriol, Marcus Ritt

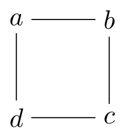
Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Leia todas as questões antes de começar e pergunte em caso de dúvidas.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: explique o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 3pt)
Dado um grafo (não-direcionado) $G = (V, A)$ queremos encontrar uma função bijetiva $f : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$ tal que a distância total $\sum_{\{u,v\}\in A} |f(u) - f(v)|$ entre os vértices incidentes a cada aresta seja minimizado. Formule um programa inteiro que determina a menor distância total.
Exemplo: Na instância

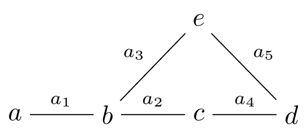


o mapeamento $\{a \mapsto 1, b \mapsto 3, c \mapsto 2, d \mapsto 4\}$ possui distância total 8, enquanto o mapeamento ótimo $\{a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4\}$ possui distância total 6.

Questão 2 (Dualidade, 2pt)
Considere o problema de cobertura de vértices: dado um grafo não-direcionado pesado $G = (V, A, p)$ com pesos p_v para $v \in V$, queremos encontrar um subconjunto $I \subseteq V$ com a menor soma dos pesos dos vértices deste subconjunto de forma que toda aresta do grafo contenha pelo menos um vértice de I. O problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{lll} \textbf{min}. & \sum_{v\in V} x_v p_v, & \\ \textbf{s. a} & x_u + x_v \geq 1, & \forall \{u, v\} \in A, \\ & x_v \in \{0, 1\}. & \end{array}$$

Exemplo: Considere a instância



com valores $p_a = 1$, $p_b = 3$, $p_c = 3$, $p_d = 5$ e $p_e = 2$. A solução ótima $I = \{a, c, e\}$ tem custo 6.

a) Identifique claramente a matriz A, e vetores b e c do sistema relativo à instância fornecida.

b) Apresente o sistema dual do sistema apresentado no item a) aplicado à instância fornecida.

Questão 3 (Resolução, 2.5pt)
Considere a formulação

$$\begin{aligned} \textbf{max.} \quad & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \textbf{s. a} \quad & 2x_1 - 5x_2 - x_3 \le -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

a) O sistema é dualmente viável? Justifique a sua resposta.

b) Execute um pivô do método dual simplex no dicionário correspondente a este sistema. O dicionário resultante é ótimo?

Questão 4 (Analise de sensibilidade, 2.5pt)
Considere o sistema

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \textbf{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le -1 \\ & -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le -2 \\ & 3x_1 + x_2 \le 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

e seu dicionário ótimo

$$\begin{array}{rrrrr} z = & -3 & -3/2w_2 & -w_3 & -1/2x_1 \\ \hline x_3 = & 1 & +1/2w_2 & +w_3 & +5/2x_1 \\ w_1 = & 1 & +w_2 & +5w_3 & +12x_1 \\ x_2 = & 0 & & -w_3 & -3x_1 \end{array}$$

a) Qual faixa de valores que c_1 (o coeficiente da variável x_1 na função objetivo) pode variar, de forma que os valores das variáveis x_1, x_2 e x_3 da solução ótima não mudem, ou seja, o dicionário atualizado continue ótimo?

b) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso c_1 mudar para -1 e c_2 mudar para 1?

c) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso b_2 mudar para 1?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\ x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{-1} b \\ y_N^* &= (B^{-1}N)^t c_B - c_N \\ z^* &= c_B^t B^{-1} b \end{aligned}$$