Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
Seja $P = [5]$. Com variáveis $x_i \in B$, que indicam se o projeto $i \in P$ é executado, e o número de unidades produzidas $y_i \in \mathbb{Z}$ temos

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & -\sum_{i\in P} 1000c_i x_i - \sum_{i\in P} 1000 m_i(1-x_i) + \sum_{i\in P} l_i y_i & \\
\textbf{sujeito a} & y_i \le 1000 d_i x_i & i \in P \quad \text{Limite produção, vínculo } x\text{–}y \\
& \sum_{i\in P} y_i \le 10000 & \text{Produção total 10000} \\
& x_1 = x_2 & \text{1 e 2 ambos ou nenhum} \\
& x_5 \le x_4 & \text{5 só caso 4} \\
& \sum_{i\in P} x_i \le 3 & \text{no máximo 3} \\
& x_i \in B, y_i \in Z & i \in P.
\end{array}
$$

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Define números $N = [12]$ e posições $P = \{A, \ldots, L\}$ e o valor de posição p por $v(p) = \sum_{n\in N} x_{np}$. Com isso temos

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & v(a) & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{n\in N} x_{np} = 1 & p \in P \\
& \sum_{p\in P} x_{np} = 1 & n \in N \\
& v(A) + v(C) + v(F) + v(H) = 26 & \\
& v(A) + v(D) + v(G) + v(K) = 26 & \\
& v(H) + v(I) + v(J) + v(K) = 26 & \\
& v(B) + v(C) + v(D) + v(E) = 26 & \\
& v(B) + v(F) + v(I) + v(L) = 26 & \\
& v(E) + v(G) + v(J) + v(L) = 26 & \\
& x_{np} \in B & n \in N, p \in P.
\end{array}
$$

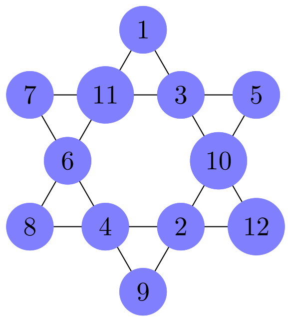
Uma formulação em AMPL é

```
set P := { 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I', 'J', 'K', 'L' };
set N := 1..12;

var x { N cross P } binary;
var v { P } integer;

subject to defineValue { p0 in P }:
        v[p0] = sum { n0 in N } n0*x[n0,p0];

minimize valueA : v['A'];

subject to function { n0 in N }:
        sum { p0 in P } x[n0,p0] = 1;
subject to bijection { p0 in P }:
```



```
          sum { n0 in N } x[n0,p0] = 1;
subject to lineAH:
          v['A']+v['C']+v['F']+v['H'] = 26;
subject to lineAK:
          v['A']+v['D']+v['G']+v['K'] = 26;
subject to lineHK:
          v['H']+v['I']+v['J']+v['K'] = 26;
subject to lineBE:
          v['B']+v['C']+v['D']+v['E'] = 26;
subject to lineBL:
          v['B']+v['F']+v['I']+v['L'] = 26;
subject to lineEL:
          v['E']+v['G']+v['J']+v['L'] = 26;
end;
```

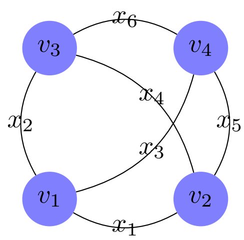
Uma solução é



Questão 3 (Formulação, 2 pt)
(Ver notas de aula.)

Questão 4 (Folgas complementares, 2 pt)
Pela complementaridade das folgas primais $2, 2, 2, 0$ com as variávies duais y_1, y_2, y_3, y_3 sabemos que $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Pela complementaridade das folgas duais com as variáveis primais obtemos ainda $2y_1 - y_2 + 2y_4 = 3$, i.e., $y_4 = 3/2$.

Questão 5 (Dualidade, 2 pt)
a) No caso de K_4 com pesos unitários



temos a instância da relaxação linear

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\textbf{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\
& x_1 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
& x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\
& x_3 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

com dual

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
\textbf{sujeito a}\quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\
& y_1 + y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_4 \leq 1 \\
& y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_2 + y_4 \leq 1 \\
& y_3 + y_4 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \in R.
\end{aligned}$$

b) No caso geral com variáveis y_v para $v \in V$ temos

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & \sum_{v \in V} y_v \\
\textbf{sujeito a}\quad & y_u + y_v \leq c_e & uv \in E \\
& y_v \geq 0.
\end{aligned}$$

Questão 6 (Sensibilidade, 2 pt)
a) No dicionário final temos os dados

$$B^{-1}N = 1/19 \begin{pmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 16 & 2 & -8 \end{pmatrix}; \qquad y_N^* = 1/19(29\ 6\ 14)^t;$$
$$x_B^* = 1/19(32\ 30\ 69)^t; \qquad z^* = 188/19$$
$$\mathcal{B} = \{3, 2, 6\}; \qquad \mathcal{N} = \{1, 5, 4\}.$$

Com isso temos

$$c_B = (4\ 2\ 0)^t; \qquad c_N = (1\ 0\ 0)^t$$
$$\Delta c_B = (1\ 2\ 0)^t \qquad \Delta c_N = (1\ 0\ 0)^t$$

e podemos calcular

$$\begin{aligned}
\Delta y_N^* &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\
&= 1/19 \begin{pmatrix} 11 & 2 & 16 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/19 \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/19 \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para obter a condição

$$\begin{aligned}
&y_N^* + t\Delta y_N^* \geq 0 \\
\iff &1/19 \begin{pmatrix} 29 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + 1/19t \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \\
\iff &\begin{pmatrix} 29 - 4t \\ 6 + 9t \\ 14 + 2t \end{pmatrix} \geq 0
\end{aligned}$$

que é satisfeita para $-2/3 \leq t \leq 7.25$.

b) Temos

$$\begin{aligned}
z^* &= (c_B + t\Delta c_B)^t B^{-1} b \\
&= \begin{pmatrix} 4+t & 2+2t & 0 \end{pmatrix} \; 1/19 \begin{pmatrix} 32 \\ 30 \\ 69 \end{pmatrix} \\
&= 1/19(128 + 32t + 60 + 60t) = 1/19(188 + 92t).
\end{aligned}$$