Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação)
Seja x_i uma variável que indica a seleção do item $i \in I$. Temos

a) $\sum_{i \in T_2} x_i / |T_2| \leq \sum_{i \in T_1} x_i$;

b) $\sum_{i \in T_t} x_i \geq 1 \qquad \forall t \in [k]$.

Questão 2 (Dualidade)
Com variáveis duais $\pi_i \lesseqgtr$, $i \in [n]$ e $\rho_j \geq 0$, $j \in [m]$, temos

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & \sum_{i \in [n]} \pi_i \\ \textbf{sujeito a} \quad & \pi_i + \rho_j t_i \geq 0, && \forall i \in [n], j \in [m], \\ & \sum_{j \in [m]} -\rho_j \geq 1, \\ & \pi_i \in \mathbb{R}, && \forall i \in [n], \\ & \rho_j \in \mathbb{R}_+, && \forall j \in [m]. \end{aligned}$$

Questão 3 (Formulação)
Uma solução é introduzir variáveis booleanas $y_1, \ldots, y_6$ para cada restrição, que são verdadeiros, caso a restrição é satisfeito, e reescrever elas, tal que para $y_i = 0$ as restrições não tem efeito. Para isso, escolhemos uma constante suficientemente grande M (que depende do resto do problema), e escrevemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 + (1 - y_1)M \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 3 + (1 - y_2)M \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 10 + (1 - y_3)M \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 10 + (1 - y_4)M \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 10 + (1 - y_5)M \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\leq 10 + (1 - y_6)M \end{aligned}$$

Com isso, as restrições adicionais podem ser escritas de forma

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 1 && \text{(a)} \\ y_3 + y_4 + y_5 + y_6 &\geq 2 && \text{(b)} \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 &\in \mathbb{B} \end{aligned}$$

Questão 4 (Análise de sensibilidade, 25%)
No dicionário final temos a base $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e variáveis não-básicas $\mathcal{N} = \{5, 4, 2, 6\}$.
Do sistema podemos extrair (observem os sinais)

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$y_N^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t$$

O vetor de custos do sistema original, com as variaveis ordenados conforme o sistema final é

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aumentando $\hat{c} = c + t\Delta c$ com $\Delta c = e_1 = (1\,0\,0\,0\,0)^t$ temos

$$\begin{aligned}\Delta y_N &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N = (B^{-1}N)^t \Delta c_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Com

$$t \le \min_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ \Delta y_j < 0}} -\frac{y_j^*}{\Delta y_j}$$

obtemos $t \le 5/2$ e com

$$\max_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ \Delta y_j > 0}} -\frac{y_j^*}{\Delta y_j} \le t$$

obtemos $-1 \le t$.
Portanto com o valor do coeficiente de x_1 na função objetivo no intervalo $[5, 8.5]$ a solução mantem-se ótima.