Soluções prova 1

Questão 0.1 (Método Simplex, 20%)

(a) Se o método Simplex entra num ciclo, então uma solução básica degenerada se repete?
Sim, sem solução básica degenerada não tem ciclo.

(b) Se um dicionário não é degenerado, então a variável entrante e a variável sainte são determinados univocamente?
Não, mesmo não sendo degenerado, pode ter uma escolha tanto da variável entrante (mais que um coeficiente máximo na regra de maior coeficiente) quanto da variável sainte (mais que uma restrição limitante).

(c) Se o sistema primal é ilimitado, então o sistema dual também é ilimitado?
Não, se o sistema primal é ilimitado, o sistema dual é inviável.

(d) O número de soluções ótimas de um programa linear sempre é finito?
Não, se o sistema tem mais que uma solução ótima, então existe um número infinito de soluções ótimas. Por exemplo, se duas soluções básicas são ótimas, todas combinações convexas são ótimas. Observe que um sistema ilimitado não possui solução ótima, porque para cada solução existe outra com maior valor.

Questão 0.2 (Formulação, 25%)

Com marcas J, O, M (Johnny Ballantine, Old Gargantua, Misty Deluxe) e misturas A, B, C temos as variáveis

$$x_{J,A}, x_{J,B}, x_{J,C}, x_{O,A}, x_{O,B}, x_{M,N}, x_{M,A}, x_{M,B}, x_{M,C}$$

que denotam o número de garrafas usadas por mistura.
Vamos introduzir ainda as variáveis auxiliares para o número de garrafas usadas de cada marca

$$x_J = x_{J,A} + x_{J,B} + x_{J,C}; \quad x_J = x_{J,A} + x_{J,B} + x_{J,C}; \quad x_J = x_{J,A} + x_{J,B} + x_{J,C}$$

e variáveis auxiliares para o número de garrafas produzidas de cada mistura

$$x_A = x_{J,A} + x_{O,A} + x_{M,A}; \quad x_B = x_{J,B} + x_{O,M} + x_{M,B}; \quad x_C = x_{J,C} + x_{O,C} + x_{M,C}.$$

Queremos maximizar o lucro em reais

$$68x_A + 57x_B + 45x_C - (70x_J + 50x_O + 40x_M)$$

respeitando os limites de importação

$$x_J \le 2000; \quad x_O \le 2500; \quad x_M \le 1200$$

e os limites de percentagem

$$\begin{aligned} x_{J,A} \ge 0.6x_A; &\quad x_{M,A} \le 0.2x_A \\ x_{J,B} \ge 0.15x_B; &\quad x_{M,B} \le 0.6x_B \\ &\quad x_{M,C} \le 0.5x_C. \end{aligned}$$

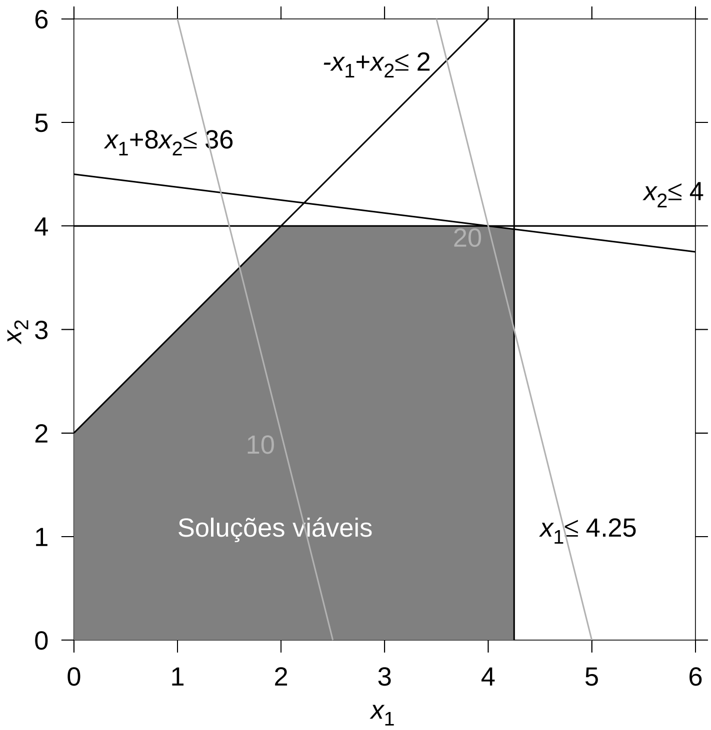
Portanto, o sistema final é

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{max} & 68x_A + 57x_B + 45x_C - (70x_J + 50x_O + 40x_M) & \\
\textbf{s.a} & x_J \le 2000 & \\
& x_O \le 2500 & \\
& x_M \le 1200 & \\
& x_{J,A} \ge 0.6x_A & \\
& x_{M,A} \le 0.2x_A & \\
& x_{J,B} \ge 0.15x_B & \\
& x_{M,B} \le 0.6x_B & \\
& x_{M,C} \le 0.5x_C & \\
& x_m = x_{m,A} + x_{m,B} + x_{m,C} & m \in \{J, O, M\} \\
& x_m = x_{J,m} + x_{O,m} + x_{M,m} & m \in \{A, B, C\} \\
& x_{m,n} \ge 0 & m \in \{J, O, M\}, n \in \{A, B, C\}
\end{array}
$$

Sem considerar a integralidade a solução ótima é produzir 2544.44 garrafas da mistura A, 3155.56 garrafas da mistura B e 0 garrafas da mistura C, com as percentagens

- A: 60% Johnny Ballantine, 20% Old Gargantua, 20% Misty Deluxe
- B: 15% Johnny Ballantine, 63% Old Gargantua, 22% Misty Deluxe

Questão 0.3 (Resolução gráfica, 25%)
A solução gráfica é



(a) A solução ótima é $x_1 = 4.25$, $x_2 \approx 4$ (valor exato $x_2 = 3.96875$).

(b) O valor da solução ótima é ≈ 21 (valor exato 20.96875).

Questão 0.4 (Método Simplex, 30%)

(a) Introduzindo variáveis de folga obtemos o sistema inicial

$$\begin{array}{rrrrr} z = & & 2x_1 & +4x_2 & -x_3 \\ w_1 = & 30 & & -2x_2 & +x_3 \\ w_2 = & 10 & -2x_1 & +x_2 & -x_3 \\ w_3 = & 40 & -4x_1 & -2x_2 & +2x_3 \end{array}$$

e a série de pivots x_2–w_1

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 60 & 2x_1 & -2w_1 & +x_3 \\ x_2 = & 15 & & -1/2w_1 & +1/2x_3 \\ w_2 = & 25 & -2x_1 & -1/2w_1 & -1/2x_3 \\ w_3 = & 40 & -4x_1 & +w_1 & +1x_3 \end{array}$$

x_2–w_3

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 65 & -1/2w_3 & -3/2w_1 & +3/2x_3 \\ x_2 = & 15 & & -1/2w_1 & +1/2x_3 \\ w_2 = & 20 & +1/2w_3 & -w_1 & -x_3 \\ x_1 = & 2.5 & -1/4w_3 & +1/4w_1 & +1/4x_3 \end{array}$$

x_3–w_2

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 95 & +1/4w_3 & -3w_1 & -3/2w_2 \\ x_2 = & 25 & +1/4w_3 & -w_1 & -1/2w_2 \\ x_3 = & 20 & +1/2w_3 & -w_1 & -w_2 \\ x_1 = & 7.5 & -1/8w_3 & & -1/4w_2 \end{array}$$

w_3–x_1

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 110 & -2x_1 & -3w_1 & -2w_2 \\ x_2 = & 40 & -2x_1 & -w_1 & -w_2 \\ x_3 = & 50 & -4x_1 & -w_1 & -2w_2 \\ w_3 = & 60 & -8x_1 & & -2w_2 \end{array}$$

(b) O sistema dual é

$$\begin{array}{rl} \textbf{min} & 30y_1 + 10y_2 + 40y_3 \\ \textbf{s.a} & 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ & 2y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ & -y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

(c) A solução primal ótima é $x_1 = 0$, $x_2 = 40$, $x_3 = 50$ com valor 110 (seguindo solução acima, constantes das variáveis básicas).

(d) A solução dual ótima é $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$ com o mesmo valor 110 (seguindo solução acima, coeficientes negativos das variáveis de folga no sistema primal.).