Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 0.1 (Formalização, 25%)
Um *Sudoku* é um tabuleiro de 3×3 quadros maiores, cada um subdividido em mais 3×3 quadros menores. Todo quadro menor tem que ser preenchido com um número entre 1 e 9 tal que

(a) Todo quadro maior contém cada número somente uma única vez.

(b) Toda linha e coluna contém cada número somente uma única vez.

Um exemplo de um Sudoku corretamente preenchido é:

9	1	3	4	6	2	7	8	5
7	6	2	1	8	5	9	3	4
4	5	8	9	7	3	2	6	1
3	4	1	5	2	7	8	9	6
6	2	3	8	9	1	3	4	7
8	7	9	3	4	6	1	5	2
1	8	6	7	5	9	4	2	3
2	3	4	6	1	8	5	7	9
5	9	7	2	3	4	6	1	8

Formalize um programa inteiro que gera um tabuleiro cujo soma dos números na diagonal principal (do ponto superior esquerdo para o ponto inferior direito) é máxima.

Dica: Usa variáveis booleanas $x_{i,j,k}$ que indicam que o quadro i, j está ocupado com o número k.

Questão 0.2 (Formalização, 25%)
Suponha que temos um problema com formulação como programa linear, exceto os seguintes restrições:

(a) Ao menos uma das seguintes duas restrições tem que ser satisfeita

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

(b) Ao menos duas das seguintes quatro restrições tem que ser satisfeitas

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10$$

Mostra como formular essas restrições junto com as condições acima como programa inteira (mista).
Dica: Cuida que a solução permaneça *linear*.

Questão 0.3 (Problemas com solução inteira, 25%)
Baseado numa análise da unimodularidade total da matriz de coeficientes, a relaxação linear de quais dessas problemas tem uma solução inteira?

$$\begin{aligned}
\textbf{max}\quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \\
\textbf{s.a}\quad & x_1 + x_3 + x_5 \le 3 \\
& x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\
& x_4 + x_5 \le 7 \\
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{max}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\textbf{s.a}\quad & -x_1 + x_3 - x_5 \le 2 \\
& x_2 + x_4 + x_5 + x_7 \le 8 \\
& -x_1 + x_2 \le 3 \\
& x_3 + x_6 + x_7 \le 2 \\
& x_4 - x_6 \le 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Questão 0.4 (Planos de cortes, 25%)
O objetivo dessa questão é resolver o sistema

$$\begin{aligned}
\textbf{max}\quad & 3x_1 + 8x_2 \\
\textbf{s.a}\quad & 4x_1 + 3x_2 \le 60 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 30 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

O dicionário em forma padrão é

$$\begin{array}{rrrr}
z = & 0 & +3x_1 & +8x_2 \\
x_3 = & 60 & -4x_1 & -3x_2 \\
x_4 = & 30 & +x_1 & -2x_2
\end{array}$$

e depois do primeiro pivô x_1–x_3 obtemos o dicionário

$$\begin{array}{rrrr}
z = & 45 & -3/4x_3 & +23/4x_2 \\
x_1 = & 15 & -1/4x_3 & -3/4x_2 \\
x_4 = & 45 & -1/4x_3 & -11/4x_2
\end{array}$$

(a) Continua resolvendo a relaxação do sistema. (**Dica**: Falta um pivô).

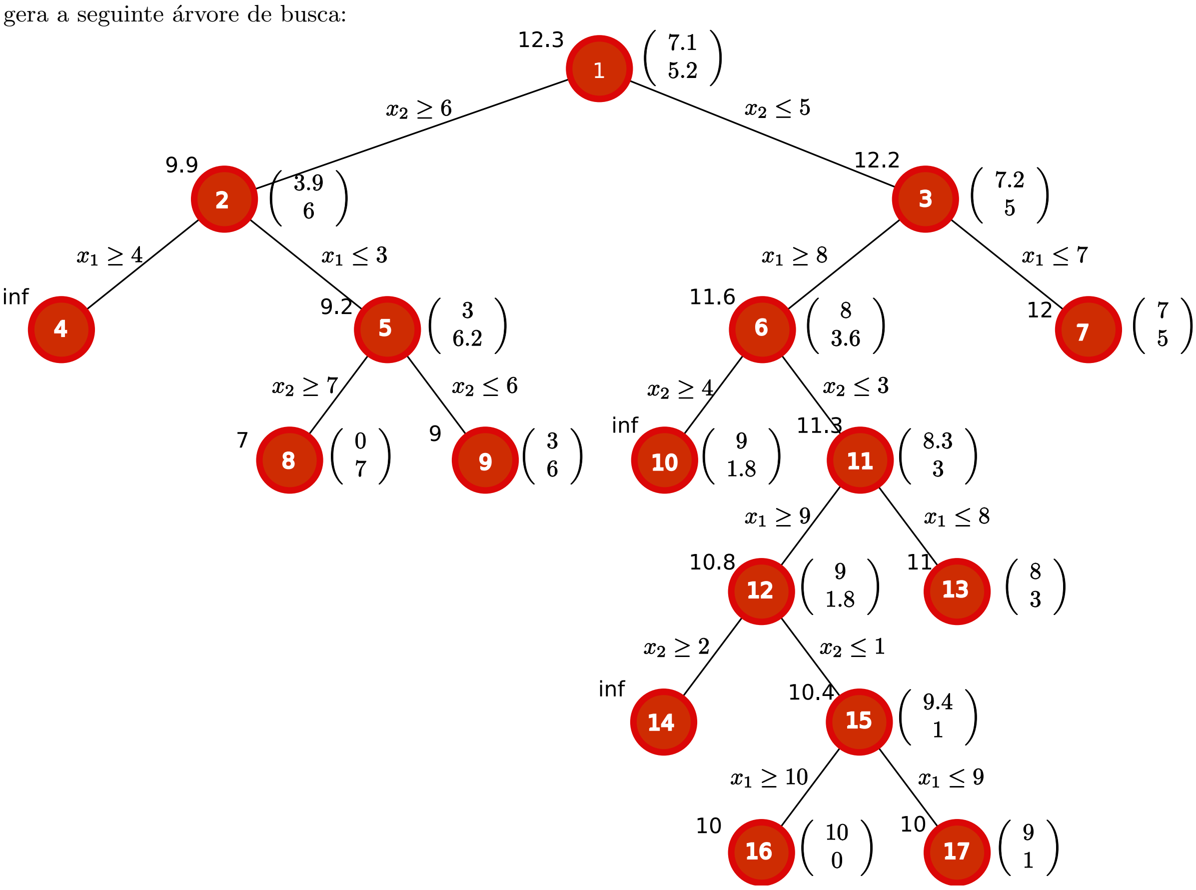
(b) Qual o corte que corresponde com a restrição x_1 no sistema ótimo?

(c) Insere esse corte e re-otimiza o sistema usando o método Simplex dual. Qual a nova solução?

Questão 0.5 (Branch-and-Bound, 25%)
Uma busca exaustiva para a solução máxima inteira de

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & x_1 + x_2 \\ \textbf{s.a} \quad & 1.8x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ & 5x_1 + 2.8x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

gera a seguinte árvore de busca:



Do lado direito dos nós da árvore está escrito a solução $x = (x_1 x_2)^t$ da relaxação linear e do lado esquerdo o valor correspondente (com o valor "inf" para um problema inviável).

(a) Supõe que nessa árvore de busca seria aplicado um algoritmo de Branch-and-Bound com busca por profundidade, processando os filhos de um nó da esquerda para direita. Quais cortes seriam aplicadas? Descreve a ordem em que os nós ficam processados, os cortes aplicados e justifique o tipo de corte aplicado.

(b) Qual seriam os cortes caso a busca por profundidade processa os filhos de um nó da direita para esquerda?