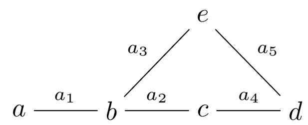
Gabarito da Prova P2 de Otimização Combinatória - 2013-2 - Profa. Luciana S. Buriol

a) Dado um grafo (não-direcionado) $G = (V, A)$ queremos encontrar uma função bijetiva $f : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$ tal que a distância total $\sum_{\{u,v\}\in A} |f(u) - f(v)|$ entre todos vértices incidentes a cada aresta seja minimizado. Formule um programa inteiro que determina a menor distância total.

b) (Dualidade, 2pt) Considere o problema de cobertura de vértices: dado um grafo não-direcionado pesado $G = (V, A, p)$ com pesos p_v para $v \in V$, queremos encontrar um subconjunto $I \subseteq V$ com a menor soma dos pesos dos vértices deste subconjunto de forma que toda aresta do grafo contenha pelo menos um vértice de I. O problema pode ser formulado como

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{min.} & \sum_{v\in V} x_v p_v, & \\
\textbf{s. a} & x_u + x_v \geq 1, & \forall \{u, v\} \in A, \\
 & x_v \in \{0, 1\}. &
\end{array}
$$

Exemplo: Considere a instância



com valores $p_a = 1$, $p_b = 3$, $p_c = 3$, $p_d = 5$ e $p_e = 2$. A solução ótima $I = \{a, c, e\}$ tem custo 6.

a) Identifique claramente a matriz A, e vetores b e c do sistema relativo à instância fornecida.

b) Apresente o sistema dual do sistema apresentado no item a) aplicado à instância fornecida.

c) (Resolução, 2.5pt)

Considere a formulação

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{max.} & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\
\textbf{s. a} & 2x_1 - 5x_2 - x_3 \leq -5 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

a) O sistema é dualmente viável? Justifique a sua resposta.

b) Execute um pivô do método dual simplex no dicionário correspondente a este sistema. O dicionário resultante é ótimo?

d) (Analise de sensibilidade, 2.5pt) Considere o sistema

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{max} & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\textbf{s.a} & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq -1 \\
 & -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -2 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

e seu dicionário ótimo

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -3 & -3/2w_2 & -w_3 & -1/2x_1 \\
x_3 = & 1 & +1/2w_2 & +w_3 & +5/2x_1 \\
w_1 = & 1 & +w_2 & +5w_3 & +12x_1 \\
x_2 = & 0 & & -w_3 & -3x_1
\end{array}
$$

a) Qual faixa de valores que c_1 (o coeficiente da variável x_1 na função objetivo) pode variar, de forma que os valores das variáveis x_1, x_2 e x_3 da solução ótima não mudem, ou seja, o dicionário atualizado continue ótimo?

b) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso c_1 mudar para -1?

c) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso c_1 mudar para -1 e c_2 mudar para 1?

d) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso b_2 mudar para 1?