Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2pt)
Seja $x_{ijk} \in \mathbb{B}$ um indicador que na casa da linha i e coluna j temos o número k, $1 \leq i, j, k \leq 5$. Com isso temos

$$\begin{array}{lllr}
\textbf{maximiza} & \sum_k k x_{11k} & & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_k x_{ijk} = 1 & \forall i, j & \text{Único número em cada casa} \\
& \sum_j x_{ijk} = 1 & \forall i, k & \text{Digito } k \text{ uma vez na linha } i \\
& \sum_i x_{ijk} = 1 & \forall j, k & \text{Digito } k \text{ uma vez na coluna } j \\
& \sum_k k x_{11k} \geq \sum_k k x_{12k} + 1 & & \text{Relação entre (1,1) e (1,2)} \\
& \sum_k k x_{13k} \geq \sum_k k x_{14k} + 1 & & \text{Relação entre (1,3) e (1,4)} \\
& \sum_k k x_{33k} \leq \sum_k k x_{34k} - 1 & & \text{Relação entre (3,3) e (3,4)} \\
& \sum_k k x_{51k} \leq \sum_k k x_{52k} - 1 & & \text{Relação entre (5,1) e (5,2)} \\
& \sum_k k x_{54k} \leq \sum_k k x_{55k} - 1 & & \text{Relação entre (5,4) e (5,5)} \\
& x_{ijk} \in \mathbb{B}. & &
\end{array}$$

Questão 2 (Formulação, 2pt)
Com variáveis de decisão $x_u \in \mathbb{B}$ para todo $u \in U$ uma formulação é

$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & \sum_{u \in U} x_u & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{u \in C} x_u \geq 1 & \forall C \in \mathcal{C} \\
& x_u \in \mathbb{B} & \forall u \in U.
\end{array}$$

(Obs.: Nessa formulação, o problema não possui solução caso $\emptyset \in \mathcal{C}$.)

Questão 3 (Formulação, 2pt)
Seja o grafo $G = (V, E)$. Com as variáveis de decisão $x_i \in \mathbb{B}$ para $i \in V$, o problema da formulação consiste em achar uma função objetivo linear. Arestas ij com $x_i = 0$ e $x_j = 1$ ou vice versa contribuem para o corte, mas a expressão $(1 - x_i)x_j + x_i(1 - x_j)$ que é 1 sse vértices i e j são em partições diferentes é quadrática. Com as técnicas vistas em aula (cap. 6.2) podemos introduzir variáveis auxiliares c_{ij} que representam o ou-exclusivo entre x_i e x_j. Com isso, uma formulação é

$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & \sum_{i,j \in V} c_{ij} & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{i \in V} x_i = \lfloor n/2 \rfloor & \\
& c_{ij} \leq 1 + x_i - x_j & \forall \{i, j\} \in E \\
& c_{ij} \leq 1 - x_i + x_j & \forall \{i, j\} \in E \\
& x_i, c_{ij} \in \mathbb{B}, & \forall i, j \in V.
\end{array}$$

Questão 4 (Dualidade, 2pt)
Temos o dicionário inicial

$$\begin{array}{rcccccc} z = & 0 & -5x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -6x_4 \\ \hline x_5 = & 14 & +6x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 \\ x_6 = & -25 & -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +5x_4 \\ x_7 = & 14 & +2x_1 & +x_2 & & +2x_4 \end{array}$$

e, após o pivô x_6–x_4 o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rcccccc} z = & -30 & -43/5x_1 & -3/5x_2 & -9/5x_3 & -6/5x_6 \\ \hline x_5 = & 34 & +42/5x_1 & -13/5x_2 & +6/5x_3 & +4/5x_6 \\ x_4 = & 5 & +3/5x_1 & -2/5x_2 & -1/5x_3 & +1/5x_6 \\ x_7 = & 24 & +16/5x_1 & +1/5x_2 & -2/5x_3 & +2/5x_6 \end{array}$$

(As regras de pivotar dualmente constam na notas de aula.)

Questão 5 (Dualidade, 2pt)

(a) A problema dual também está viável e possui uma solução ótima do mesmo valor.

(b) Não, existem pares em que nem o primal nem o dual possui solução (ver exemplo nas notas de aula).

Questão 6 (Sensibilidade, 2pt)
Do dicionário final podemos extrair

$$(B^{-1}N)^t = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad y_N^* = (5/2\ 1/2\ 5/2)^t$$

Para os três coeficientes c_1, c_2 e c_3 na função objetivo temos

$$\Delta c = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^t; \qquad \Delta c = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^t; \qquad \Delta c = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$$

respectivamente (com os elementos na ordem $2, 3, 6, 1, 4, 5$), e portanto

$$\Delta y_N^* = (-1\ 0\ 0)^t; \qquad \Delta y_N^* = (-3/2\ 1/2\ -1/2)^t; \qquad \Delta y_N^* = (1/2\ 1/2\ 1/2)^t$$

e

$$\begin{array}{ccc} -\infty \le t \le 5/2; & -1 \le t \le 5/3; & -1 \le t \le \infty \\ -\infty \le c_1 \le 9/2; & -3 \le c_2 \le 1/3; & 2 \le c_3 \le \infty. \end{array}$$