Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

INF05510 – Otimização combinatória
2010/1
Prof. Marcus Ritt

Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: documenta o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
No jogo de *campos minados* temos um tabuleiro com campos abertos e cobertos (Fig. 1). Para os campos abertos é informado o número total de minas nos oito campos adjacentes. Cada campo coberto é limpo ou contém uma mina. Para os campos cobertos não temos informação. O jogador escolhe campos cobertos para abri-los. Caso um campo escolhido contenha uma mina ele perde, caso ele consiga abrir todos campos cobertos limpos ele vence.
Um campo é representado por um símbolo em $\Gamma = \mathbb{Z} \cup \{\square\}$ com o seguinte significado: Caso o campo contenha um número $\gamma \in \mathbb{Z}$, ele é aberto e existem γ minas adjacentes. Caso o campo contenha $\square$ ele é coberto. O estado do jogo é representado por uma matriz $M \in \Gamma^{m \times n}$ com elementos m_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
Para uma dada matriz M, formule um programa inteiro que determina o menor número de minas (e a posição deles) que é compatível com a informação nos campos abertos.

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Sejam X, Y e Z três conjuntos disjuntos, e $T \subseteq X \times Y \times Z$ um conjunto de triplas. Um *emparelhamento tridimensional* é um subconjunto $M \subseteq T$ de triplas, tal que para cada par de triplas $(x, y, z) \in M$ e $(x', y', z') \in M$, temos $x \neq x'$, $y \neq y'$ e $z \neq z'$ (Fig. 1). Formule um programa inteiro que determina o maior emparelhamento tridimensional, dado X, Y, Z, T, i.e, que maximiza $|M|$.

Questão 3 (Formulação, 2 pt)
Formule um programa inteiro que encontra a árvore geradora de menor peso total num grafo conexo não-direcionado $G = (V, A, c)$ com custos na arestas c_a, $a \in A$ sujeito a restrição adicional que o grau de cada vértice na árvore é menor que um dado $k \in \mathbb{Z}$.

Questão 4 (Dualidade, 2 pt)
O que afirmam o teorema das folgas complementares e o teorema fraco da dualidade? Cita os teoremas e explica o significado deles brevemente.

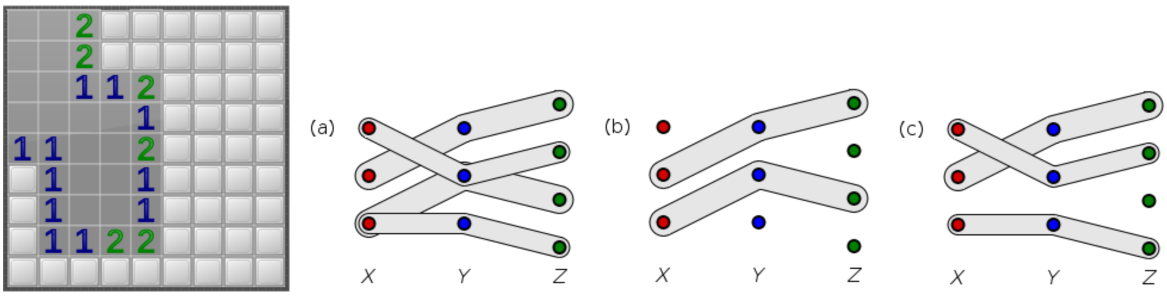

Figura 1: Esquerda: Exemplo de um campo minado. Direita: Exemplo de uma instância (a) e duas soluções (b,c) de um emparelhamento tridimensional. (Fonte: Wikipedia.)

Questão 5 (Dualidade, 2 pt)
Uma formulação do problema do clique máximo num grafo não-direcionado $G = (V, A)$ é

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximiza} & \sum_{v\in V} x_v & \\ \textbf{sujeito a} & x_u + x_v \leq 1 & \forall\{u,v\} \notin A \\ & x_v \in \mathbb{B} & \forall v \in V. \end{array}$$

a) Qual o problema dual da relaxação linear

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximiza} & \sum_{v\in V} x_v & \\ \textbf{sujeito a} & x_u + x_v \leq 1 & \forall\{u,v\} \notin A \\ & x_v \geq 0 & \forall v \in V \end{array}$$

desse problema?

b) Qual uma solução ótima do problema dual restringindo as variáveis duais para $\mathbb{B}$ no grafo completo com 6 vértices?

Questão 6 (Sensibilidade, 2 pt)
A solução ótima do sistema

$$\begin{array}{ll} \textbf{maximiza} & 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \textbf{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(com variáveis de folga x_4 e x_5) é

$$\begin{array}{rcccc} z = & 14 & -x_4 & -x_2 & -x_5 \\ \hline x_1 = & 2 & -3x_4 & +x_2 & +5x_5 \\ x_3 = & 1 & +x_4 & -x_2 & -2x_5 \end{array}$$

Queremos modificar os coeficientes $3, 4, 8$ da função objetivo nas proporções $1 : 2 : 3$, i.e., obter uma solução com vetor de custos $(3\,4\,8)^t + t(1\,2\,3)^t$ para um $t \in \mathbb{R}$.

a) Em qual intervalo podemos escolher t tal que base atual mantem-se ótima?

b) Qual o novo valor da função objetivo em função de t neste intervalo?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$z = z^* - (y_N^*)^t x_N$$
$$x_B = x_B^* - B^{-1} N x_N$$

com

$$x_B^* = B^{-1} b$$
$$y_N^* = (B^{-1}N)^t c_B - c_N$$
$$z^* = c_B^t B^{-1} b.$$