Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2pt)
Dado um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ com n vértices e m arestas

$$x_{ac} = \begin{cases} 1 & \text{caso a aresta } a \text{ possui a cor } c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $a \in A$ e $c \in [m]$, e u_c uma variável que indica se a cor $c \in [m]$ foi usado.

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{c\in[m]} u_c & & (1)\\
\textbf{sujeito a} \quad & x_{ac} \le u_c & \forall a \in A, c \in [m] \quad & (2)\\
& \sum_{c\in[m]} x_{ac} = 1 & \forall a \in A \quad & (3)\\
& \sum_{a\in N(v)} x_{ac} \le 1 & \forall v \in V, \forall c \in [m] \quad & (4)\\
& x_{ac} \in \mathbb{B} & \forall a \in A, c \in [m] \quad & (5)\\
& u_c \in \mathbb{B} & \forall c \in C. \quad & (6)
\end{aligned}$$

Questão 2 (Formulação, 2pt)
Seja $I = [n]$ o conjunto de itens, cada um com valor p_i e peso w_i. Ainda seja $x_{ij} = 1$ caso o item i é selecionado e armazenado na mochila j.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{i\in I, j\in[m]} p_i x_{ij} & \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j\in[m]} x_{ij} \le 1 & \forall i \in I\\
& \sum_{i\in I} x_{ij} \le c_j & \forall j \in [m]\\
& x_{ij} \in B & \forall i \in I, j \in [m].
\end{aligned}$$

Questão 3 (Dualidade, 2pt)
Sejam $\pi_j \ge 0$ e $\rho \ge 0$ as variáveis duais.

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \rho & \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j\in[n]} \pi_j = 1 & \\
& \rho - \sum_{j\in[n]} a_{ij}\pi_j \ge 0 & \forall i \in [m]\\
& \pi_j \ge 0 & \forall j \in [n]\\
& \rho \ge 0. &
\end{aligned}$$

Questão 4 (Dualidade, 2pt)
Pela teorema de dualidade fraca para uma par de soluções x e u devemos ter $-4x_1 - 2x_3 + x_5 \le u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$. Logo podemos demonstrar que o sistemas não são duais expondo um par que não satisfaz essa desigualdade. Podemos observar que o primeiro sistema possui a solução $x = 0$, logo é suficiente encontrar uma solução negativa do segundo sistema. No segundo sistema podemos observar que a terceira e quinta restrição são linearmente dependentes, e a segunda restrição sempre dá para

satisfazer setando u_4 e u_5 para um valor adequado. Logo uma solução do segundo sistema pode ser obtido resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 - u_3 &= -4 \\ 6u_1 - 4u_2 &= -2 \\ -u_1 - u_2 - 2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Esse sistema possui a solução $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$. Logo com $u_4 = u_5 = 0$ obtemos uma solução do segundo sistema com valor -1, em contradição com o teorema de dualidade fraca.
O verdadeiro dual do primeiro sistema, é o segundo sistema junto com as restrições triviais $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0$.

Questão 5 (Analise de sensibilidade, 2pt)
Temos $\mathcal{B} = \{r, f\}$ e $\Delta c_B = (0\ 1)^t$. Com

$$(B^{-1}N)^t = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtemos $\Delta y_N = 1/3(1\ 1)^t$ e a condição (já simplificada)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t \geq 0$$

que limita t para $[-1/2, \infty]$. Com isso o lucro deve ser no intervalo $[1, \infty]$ e o custo de um caneco Duff Forte no intervalo $[-\infty, 2]$. O lucro em função de t é $z = 3500 + (0\ 1)(2000\ 1000)^t = 3500 + 1000t$ e em função do custo c temos $z(c) = 5000 - 1000c$.