**Nome:**
**Cartão:**

# Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: documenta o significado de todas variáveis e restrições.

**Questão 1 (Formulação, 2pt)**
Uma *coloração de arestas* de um grafo não-direcionado é válida, caso nenhum par de arestas incidentes a um vértice possui a mesma cor. Formule um programa inteiro para encontrar a coloração de arestas com o menor número de cores.

**Questão 2 (Formulação, 2pt)**
Considere a seguinte extensão do problema da mochila: ao invés de uma mochila temos $m$ mochilas, cada um com capacidade $c_j$ para $j \in [m]$ e que decidir, além do fato de selecionar um item ou não, em qual das mochilas queremos armazená-lo. Como no problema com uma única mochila, queremos maximizar o lucro total dos itens selecionados, tal que a capacidade de nenhuma mochila é ultrapassada.

**Questão 3 (Dualidade, 2pt)**
Qual o dual de

$$\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & z & \\
\textbf{sujeito a} & z - \sum_{i\in[m]} a_{ij}x_i \le 0 & \forall j \in [n] \\
& \sum_{i\in[m]} x_i = 1 & \\
& x_i \ge 0 & \forall i \in [m] \\
& z \lesseqgtr 0. &
\end{array}$$

**Questão 4 (Dualidade, 2pt)**
Um colega afirma que os seguintes sistemas lineares formam um par de primal e dual. Refuta essa afirmação dando um exemplo de um par de soluções. Justifica porque o par exposto é suficiente para refutar a afirmação. Determina o verdadeiro dual do primeiro problema.

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\textbf{maximiza} & -4x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & -x_4 & -3x_5 & \le 1 \\
& x_1 & -x_2 & -4x_3 & -x_4 & +2x_5 & \le 1 \\
& -x_1 & +2x_2 & & -2x_4 & & \le 1 \\
& & x_2 & & & & \le 1 \\
& & -x_2 & & & & \le 1 \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \lesseqgtr 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\textbf{minimiza} & u_1 & +u_2 & +u_3 & +u_4 & +u_5 & & \\
\textbf{sujeito a} & 2u_1 & +u_2 & -u_3 & & & = & -4 \\
& 3u_1 & -u_2 & +2u_3 & +u_4 & -u_5 & = & 0 \\
& 6u_1 & -4u_2 & & & & = & -2 \\
& -u_1 & -u_2 & -2u_3 & & & = & 0 \\
& -3u_1 & +2u_2 & & & & = & 1
\end{array}$$

**Questão 5 (Analise de sensibilidade, 2pt)**
Moe está decidindo quanta cerveja Duff regular e quanta cerveja Duff Forte encomendar a cada semana. Duff regular custa a Moe \$1 por caneco e ele a vende por \$2 por caneco; Duff Forte custa \$1.50 por caneco e ele vendo por \$3 por caneco. Entretanto, como parte de uma complicada fraude de marketing, a companhia Duff somente vende um caneco de Duff Forte para cada dois canecos ou mais de Duff regular que Moe compra. Além disso, devido a eventos passados sobre os quais é melhor nem comentar, Duff não venderá Moe mais do que 3000 canecos por semana. Moe sabe que ele pode vender tanta cerveja quanto tiver. Este problema possui a formulação

$$\begin{array}{rl} \textbf{maximiza} & r + 1.5f \\ \textbf{sujeito a} & 2f \leq r \\ & r + f \leq 3000 \\ & r, f \in \mathbb{R}_+ \end{array}$$

com solução ótima

$$\begin{array}{rrrr} z = & 3500 & -7/6x_2 & -1/6x_1 \\ \hline r = & 2000 & -2/3x_2 & +1/3x_1 \\ f = & 1000 & -1/3x_2 & -1/3x_1 \end{array}$$

Moe quer saber em qual intervalo o custo de Duff Forte pode variar, tal que comprar 2000 canecos de Duff regular e 1000 canecos de Duff Forte continua ser a decisão ótima, é qual seria o seu lucro total em função do custo de Duff Forte.

**Dica**:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$z = z^* - (y_N^*)^t x_N$$
$$x_B = x_B^* - B^{-1} N x_N$$

com

$$x_B^* = B^{-1} b$$
$$y_N^* = ((B^{-1}N)^t c_B - c_N)$$
$$z^* = c_B^t B^{-1} b$$