Soluções prova 2

Questão 0.1 (Formalização)
O seguinte modelo em AMPL formaliza as restriçoes:

```
set digitos := 1 .. 9;
set linhas  := 1 .. 9;
set colunas := 1 .. 9;

var numero { linhas , colunas , digitos } binary;

maximize SomaDiagonalSuperior:
        sum { i in linhas , d in digitos } d*numero[i,i,d];

# cada quadro contém exatamente um digito
subject to QuadroMenor { i in linhas , j in colunas }:
        sum { d in digitos } numero[i,j,d] = 1;
# cada linha contém de cada dígito exatamente uma vez
subject to Linha { i in linhas , d in digitos }:
        sum { j in colunas } numero[i,j,d] = 1;
# cada coluna contém de cada dígito exatamente uma vez
subject to Coluna { j in colunas , d in digitos }:
        sum { i in linhas } numero[i,j,d] = 1;
# cada quadro maior contém cada dígito exatamente uma vez
subject to QuadroMaior { i in {1,4,7}, j in {1,4,7}, d in digitos }:
        sum { di in 0..2, dj in 0..2 } numero[i+di,j+dj,d] = 1;
```

Um exemplo de uma solucao é

8	3	1	4	2	5	8	9	6
4	8	2	6	9	1	3	5	7
5	6	9	3	7	8	2	1	4
6	2	5	7	1	3	9	4	8
1	9	3	2	8	4	6	7	5
8	4	7	5	6	9	1	2	3
9	5	4	8	3	2	7	6	1
3	1	6	9	5	7	4	8	2
2	7	8	1	4	6	4	3	9

Questão 0.2 (Formalização)
Uma solução é introduzir variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_6$ para cada restrição, que são verdadeiros, caso a restrição é satisfeito, e reescrever elas, tal que para $x_i = 0$ a restrições não tem efeito. Para isso, escolhemos uma constante suficientemente grande M (que depende do resto do problema), e escrevemos

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 + (1 - x_1)M \\
3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 3 + (1 - x_2)M \\
5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 10 + (1 - x_3)M \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 10 + (1 - x_4)M \\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 10 + (1 - x_5)M \\
3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\leq 10 + (1 - x_6)M
\end{aligned}
$$

Com isso, as restrições adicionais podem ser escritos de forma

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\in \mathbb{B} \end{aligned}$$

Questão 0.3 (Problemas com solução inteira)
Os dois sistemas tem coeficientes inteiros na lado direito. As matrizes de coeficientes dos dois programas são

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz não é totalmente unimodular. O critério da partição não se aplica, mas ainda existe a possibilidade que a matriz seja totalmente unimodular. Mas a submatriz 3×3 (primeiras três linhas e últimas três colunas)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante 2, que exclui essa possibilidade.
A segunda matriz é totalmente unimodular. O critério da partição se aplica, porque todos coeficientes são -1, 0 ou 1, cada coluna contém no máximo dois coeficientes não-nulas, e a partição das linhas $1, 2$ e $3, 4, 5$ satisfaz o terceiro critério.

Questão 0.4 (Planos de cortes)
O pivô x_2–x_4 gera o dicionário

$$\begin{aligned} z = &\; 1530/11 & -14/11x_3 & & -23/11x_4 \\ x_1 = &\; 30/11 & -2/11x_3 & & +3/11x_4 \\ x_2 = &\; 180/11 & -1/11x_3 & & -4/11x_4 \end{aligned}$$

que é ótimo. O corte que corresponde com x_1 é

$$x_5 = \; -8/11 \quad +2/11x_3 \quad +8/11x_4$$

com a nova variável x_5, e logo temos o novo dicionário

$$\begin{aligned} z = &\; 1530/11 & -14/11x_3 & & -23/11x_4 \\ x_1 = &\; 30/11 & -2/11x_3 & & +3/11x_4 \\ x_2 = &\; 180/11 & -1/11x_3 & & -4/11x_4 \\ x_5 = &\; -8/11 & +2/11x_3 & & +8/11x_4 \end{aligned}$$

O sistema é dualmente viável, e o pivô x_5–x_4 gera o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z = &\; 137 & -3/4x_3 & & -23/8x_5 \\ x_1 = &\; 3 & -1/4x_3 & & +3/8x_5 \\ x_2 = &\; 16 & & & -1/2x_5 \\ x_4 = &\; 1 & -1/4x_3 & & +11/8x_5 \end{aligned}$$

com solução integral.

Questão 0.5 (Branch-and-Bound)
Com Branch-and-bound da esquerda para direita, se aplicam somente os cortes por inviabilidade, nos nós 4, 10 e 14. Em ordem da direita para esquerda, se aplica um corte por limite no nó 6 e outro corte por limite no nó 2.