Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação)
Sejam $x_{ij} \in \mathbb{B}$ variáveis que indicam as posições da minas para i, j tal que $m_{ij} = \square$.

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{ij} x_{ij} \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{(i',j') \in N(i,j) : m_{ij} = \square} x_{ij} = m_{ij} && \forall (i,j) : m_{ij} \in \mathbb{Z} \\
& x_{ij} \in \mathbb{B}
\end{aligned}$$

com a vizinhança

$$N(i,j) = ((\{i-1, i, i+1\} \times \{j-1, j, j+1\}) \setminus \{(i,j)\}) \cap [m] \times [n].$$

Questão 2 (Formulação)
Sejam $x_t \in \mathbb{B}$ variáveis que indicam a seleção de uma tripla $t \in T$.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{t \in T} x_t \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{y,z:(x,y,z) \in T} x_{(x,y,z)} \leq 1 && \forall x \in X \\
& \sum_{x,z:(x,y,z) \in T} x_{(x,y,z)} \leq 1 && \forall y \in Y \\
& \sum_{x,y:(x,y,z) \in T} x_{(x,y,z)} \leq 1 && \forall z \in Z \\
& x_t \in \mathbb{B}.
\end{aligned}$$

Questão 3 (Formulação)
Sejam $x_a \in \mathbb{B}$ variáveis que indicam a seleção da aresta $a \in A$.

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{a \in N(S)} x_a \geq 1 && \forall S \subset V, S \neq \emptyset \\
& \sum_{a \in N(v)} x_a \leq k-1 && \forall v \in V \\
& x_a \in \mathbb{B} && \forall a \in A.
\end{aligned}$$

Questão 4 (Dualidade)

Teorema 0.1 (Teorema das folgas complementares)
Se x^*, y^* são soluções ótimas do sistema primal e dual, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
{y^*}^t(b - Ax) &= 0 \\
({y^*}^t A - c^t)x^* &= 0
\end{aligned}$$

Para soluções ótimas do primal e dual, o teorema das folgas complementares relaciona as folgas de um sistema (primal ou dual) com os valores da solução do sistema correspondente (dual ou primal). Por exemplo, caso uma variável na solução ótima do primal é positivo, a folga correspondente do dual tem que ser zero.

Teorema 0.2 (Dualidade fraca)
Se $x_1, \ldots, x_n$ é uma solução viável do sistema primal, e $y_1, \ldots, y_m$ uma solução viável do sistema dual, então

$$\sum_{1 \le i \le n} c_i x_i \le \sum_{1 \le j \le m} b_j y_j .$$

O teorema da dualidade fraca afirma que cada solução viável do primal é menor ou igual a cada solução viável do dual (caso o primal é um problema de maximização).

Questão 5 (Dualidade)
Sejam $\bar{A} = \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\} \setminus A$ as arestas que faltam em G e $\bar{N}(v) = \{\{u,v\} \mid u \in V, u \neq v\} \setminus N(v)$ as "não-arestas" vizinhos de um vértice v. Temos uma variável dual $y_{\bar{a}} \ge 0$ para cada $\bar{a} \in \bar{A}$.

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimiza} & \sum_{\bar{a} \in \bar{A}} y_{\bar{a}} & \\ \textbf{sujeito a} & \sum_{\bar{a} \in \bar{N}(v)} x_{\bar{a}} \ge 1 & \forall v \in V \\ & x_{\bar{a}} \in \mathbb{B}. & \end{array}$$

No grafo completo com 6 vértices temos $\bar{A} = \emptyset$ e $\bar{N}(v) = \emptyset$ para todo $v \in V$, portanto a relaxação linear do problema é ilimitado é o dual é inviável. (O dual é

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimiza} & 0 & \\ \textbf{sujeito a} & 0 \ge 1 & \forall v \in V.) \end{array}$$

Questão 6 (Sensibilidade)
Temos

$$\Delta y_N = (B^{-1}N)^t)\Delta c_B - \Delta c_N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) A condição de otimalidade $\hat{y}_N = y_N^* + t\Delta y_N \ge 0$ é satisfeita para $1 + t \ge 0$, i.e., $t \ge -1$.

b) O novo valor da função objetivo é

$$\hat{c}_B^t B^{-1} b = (3 + t 8 + 3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 + 2t + 8 + 3t = 14 + 5t$$