

Teoria de Filas - Exercícios

João Netto
netto@inf.ufrgs.br

Outubro 2007

1 Formulação Básica

A formulação apresentada é um sumário das propriedades derivadas nos textos presentes no moodle (e nos textos em geral de teoria de filas). A base das fórmulas consiste em encontrar as probabilidades da fila estar em um determinado estado (vazia, com 1 requisição, com duas requisições, etc...). Uma vez encontradas esta probabilidade (que será em função de λ e μ), aplica-se a lei de Little para derivar N e T .

Fórmula / Variável	Significado
λ	Taxa de chegada
μ	Taxa de serviço
$E[s]$	Tempo de serviço das requisições (médio)
$\rho = \lambda/\mu$	taxa de utilização
N	Número de requisições no sistema
T	Tempo de permanência no sistema
N_q	Número de requisições na fila
T_q	Tempo de espera na fila
$N = \lambda T$	Lei de Little
$N_q = \lambda T_q$	
Modelos $M/M/1$	
$P(k) = \rho^k(1 - \rho)$	Probabilidade de k requisições no sistema. $k = 0$ representa um sistema vazio
$P(N \geq k) = \rho^k$	Probabilidade de k ou mais requisições no sistema
$N = \rho/(1 - \rho)$	
$T = E[s]/(1 - \rho)$	Aplicação da lei de little
$T_q = \rho E[s]/(1 - \rho)$	Aplicação de $T = T_q + E[s]$
$N_q = \rho^2/(1 - \rho)$	Novamente lei de little
$T_{pr} = T \ln \frac{100}{100-r}$	r percentil de T (r % dos tempos de espera estão abaixo de p_r)
$T_{q-pr} = \frac{T_q}{\rho} \ln \frac{100\rho}{100-r}$	r percentil de T_q

Modelos $M/M/c$	
c $\rho = \lambda/(c\mu)$	Número de servidores

Teorema de Jackson para Redes de Filas abertas:

$$\Lambda_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^n P_{jk} \Lambda_j$$

onde P_{jk} é a probabilidade da requisição ser servida pela estação j e ir para fila da estação k .

2 Exercícios

1. Em um roteador as medidas mostram que os dados chegam a uma taxa de 125 pacotes por segundo (pps) e este roteador leva em torno de 2 ms no seu processo de forward. Usando um modelo M/M/1, extraia as métricas deste gateway (Tempo de resposta, Tempo de fila, Número médio de pacotes no router e número médio de pacotes nas filas de saída). Qual a probabilidade de buffer overflow se o roteador possuir apenas 13 buffers? Quantos buffers são necessários para manter a taxa de perdas de pacotes abaixo de um pacote a cada milhão de pacotes?
2. O tempo médio de resposta de um servidor WEB é de 3 segundos (que alto!). Durante 1 minuto de observação o tempo ocioso do sistema (idle) foi de 10 segundos. Usando um modelo M/M/1, determine:
 - (a) Taxa de utilização do sistema
 - (b) Tempo médio de atendimento por requisição
 - (c) Número de requisições completadas durante o tempo de observação
 - (d) O número médio de requisições no sistema
 - (e) Probabilidade do número de requisições no sistema ser maior que 10
 - (f) Percentil-90 do tempo de resposta
 - (g) Percentil-90 do tempo de espera na fila
3. Uma LAN House com apenas um (1) computador atende diariamente 20 usuários que chegam aleatoriamente, durante 16 horas por dia. O tempo médio de utilização por usuário é de 30 minutos, distribuídos randomicamente. O computador é utilizado durante 10 horas por dia, ou seja uma taxa de 0.625. No entanto o dono da LAN House tem reclamações sobre o tempo que os usuários tem que esperar antes de utilizar o computador. As reclamações se justificam, mesmo estando o computador livre durante 37.5% do tempo? O que pode ser feito para reduzir o tempo de espera?

4. Tarefas são submetidas a uma CPU a uma taxa de 4 tarefas por segundo, randomicamente distribuído. Cada tarefa ocupa em média uma fatia de tempo de 0.22 segundos até ser escalonada outra tarefa. A probabilidade de uma tarefa completar em uma determinada fatia de tempo é p . Qual a taxa (genérica) de utilização do sistema? Qual o tempo médio para completar uma tarefa e o número médio de tarefas no sistema com $p=0.99$ e $p=0.90$?
5. Uma requisição submetida a um sistema computacional ocupa em média 4 segundos de tempo de CPU, com uma interrupção de IO a cada 0.25 segundos, onde cada operação de IO leva 0.2 segundos (sempre em média). Este computador fica em uso 10 horas por dia e processa 8000 requisições. Assuma todas as distribuições randômicas (exponenciais). Determine as fórmulas genéricas e os valores específicos para o caso descrito para:
 - (a) Taxa de utilização da CPU e do Sistema de IO
 - (b) O número médio de tarefas na CPU (incluindo a fila de tarefas e a tarefa em execução)
 - (c) O número médio de tarefas no subsistema de IO
 - (d) Número médio de tarefas no sistema computacional (todos os subsistemas)
 - (e) Tempo médio de resposta do sistema (término de tarefas)
6. Mostre qual a probabilidade de não haver requisições em um sistema M/M/1/2 (M/M/1/K com $K=2$).