Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática
Departamento de Informática Teórica

INF05510 – Otimização combinatória
2009/2
Prof. Marcus Ritt

Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: documenta o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2pt)
Um *Futoshiki* é um tabuleiro quadrático de tamanho $n \times n$ preenchido com os números $[1, n]$ tal que toda linha e toda coluna contém cada número exatamente uma vez. Além disso, algumas casas adjacentes na mesma linha tem que respeitar uma ordem entre seus números. Isso é indicado por um $<$ ou $>$ colocado entre as casas. Por exemplo, no tabuleiro abaixo, o número em A1 tem que ser maior que o número em A2. Formule um programa inteiro para resolver o seguinte Futoshiki minimizando o valor na casa A1:

	1		2		3		4		5
A	☐	$>$	☐		☐	$>$	☐		☐
B	☐		☐		☐		☐		☐
C	☐		☐		☐	$<$	☐		☐
D	☐		☐		☐		☐		☐
E	☐	$<$	☐		☐		☐	$<$	☐

Questão 2 (Formulação, 2pt)
Dado uma coleção de $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto finito U, qual o menor subconjunto $S \subseteq U$ tal que S contém no mínimo um elemento de cada conjunto $C \in \mathcal{C}$? (Este problema é conhecido pelo nome Minimum hitting set ou Transversal mínima.) Formule um programa inteiro.

Questão 3 (Formulação, 2pt)
O problema da bisseção balanceada mínima consiste em achar uma partição dos vértices de um grafo não-direcionado, tal que o tamanho das partições difere em no máximo um vértice e tal que o número de arestas entre as duas partes é mínimo. Formule um programa inteiro. (Assume que o número de vértices no grafo é par.)

Questão 4 (Dualidade, 2pt)
Resolve

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & -5x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -6x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 \leq 14 \\
& 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \leq -25 \\
& -2x_1 - x_2 - 2x_4 \leq 14 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

usando o método Simplex dual. Explique brevemente as regras para escolher a variável sainte e entrante no método Simplex dual.

Questão 5 (Dualidade, 2pt)
Responde e justifique brevemente.

(a) Dado um problema de otimização linear que possui uma solução ótima, e que da para afirmar sobre a viabilidade e o valor da solução ótima do problema dual?

(b) É verdadeiro que em cada par de problema linear primal e dual, ao menos um deles possui uma solução viável?

Questão 6 (Sensibilidade, 2pt)
O problema

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\
& x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

possui dicionário ótimo

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 7 & -5/2x_1 & -1/2x_4 & -5/2x_5 \\
\hline
x_2 = & 1 & +3/2x_1 & -1/2x_4 & +1/2x_5 \\
x_3 = & 3 & -1/2x_1 & -1/2x_4 & -1/2x_5 \\
x_6 = & 2 & -x_1 & +2x_4 & +x_5
\end{array}
$$

Para cada um dos três coeficientes da função objetivo original, determine o intervalo em que ele pode ser variado mantendo a otimalidade do dicionário final.

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$
\begin{aligned}
z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\
x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
x_B^* &= B^{-1} b \\
y_N^* &= ((B^{-1}N)^t c_B - c_N) \\
z^* &= c_B^t B^{-1} b.
\end{aligned}
$$