Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
Com variáveis a e b para o número de copiadores do modelo A e B e uma variável y que indica se o Instituto aluga ao menos um modelo B temos

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & 6000a + 4000b + 40 + 30y \\
\textbf{sujeito a} \quad & 20000a + 10000b \geq 75001 \\
& a \geq 1 \\
& a + b \geq 6 \\
& 6y \geq b \\
& a, b \in \mathbb{Z}_+, y \in \mathbb{B}.
\end{aligned}$$

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Com variáveis x_i, $1 \leq i \leq 10$ que indicam a seleção da rota i temos

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 3x_8 + 7x_9 + 6x_{10} \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{1 \leq i \leq 10} x_i = 3 \\
& x_1 + x_5 + x_9 = 1 \\
& x_2 + x_4 + x_6 + x_9 + x_{10} = 1 \\
& x_3 + x_4 + x_7 + x_9 = 1 \\
& x_1 + x_6 + x_8 = 1 \\
& x_3 + x_4 + x_6 = 1 \\
& x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1 + x_7 + x_8 + x_{10} = 1 \\
& x_3 + x_5 + x_{10} = 1 \\
& x_2 + x_7 = 1 \\
& x_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq 10.
\end{aligned}$$

Questão 3 (Formulação, 2 pt)
Sejam $f_1, \ldots, f_5$ indicadores para $x_1 - x_2$ possuir o valor $0, 3, -3, 6, -6$, respectivamente. Com isso temos

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq 5} f_i &= 1 \\
x_1 - x_2 = 0f_1 + 3f_2 - 3f_3 + 6f_4 - 6f_5 & \\
f_i \in \mathbb{B}, 1 \leq i \leq 5. &
\end{aligned}$$

Questão 4 (Otimalidade, 2 pt)
A solução primal satisfaz as restrições. O valor da função objetivo é 52. O dual do problema é

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & 24y_1 + 36y_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3y_1 + 3y_2 \geq 5 \\
& 2y_1 + 3y_2 \geq 4 \\
& -3y_1 + y_2 \geq -1 \\
& y_1 + 3y_2 \geq 3 \\
& y_1, y_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

A solução dual satisfaz as restrições do dual e possui valor 52. Portanto, pelo teorema forte da dualidade sabemos que ambas soluções são ótimas.

Questão 5 (Dualidade, 2 pt)
a) Nesse caso o sistema é

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \textbf{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_4 \geq 1 \\ & x_3 + x_4 \geq 11 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{B} \end{aligned}$$

com dual

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \textbf{sujeito a}\quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_3 \leq 1 \\ & y_2 + y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b) No caso geral temos uma variável y_C para $C \in \mathcal{C}$ e temos

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & \sum_{C \in \mathcal{C}} y_C & \\ \textbf{sujeito a}\quad & \sum_{C \in \mathcal{C} \mid u \in C} y_C \leq 1 & \forall u \in U \\ & y_C \in \mathbb{B} & \forall C \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Questão 6 (Sensibilidade, 2 pt)
a) Temos

$$B^{-1}N = -1/2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \hat{c}_B = \begin{pmatrix} -2+t \\ 3-t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{c}_N = \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

logo

$$y_N^* = -1/2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+t \\ 3-t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1/2 \begin{pmatrix} -5+2t \\ -1 \\ -5+2t \end{pmatrix}$$

Logo, a condição y_N^* é satisfeita para $t \leq 5/2$.

b) Temos

$$z^* = \hat{c}_B^t B^{-1} b = \begin{pmatrix} -2+t & 3-t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 - 2t.$$