Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 0.1 (Formulação, 25%)
Suponha que uma unidade federativa (UF) manda D pessoas à assembléia legislativa do Brasil. Existem M municípios na UF ($M > D$) e a UF quer agrupar esses municípios em D distritos eleitorais, tal que cada distrito manda uma pessoa à assembléia. A população total da UF é P, e o objetivo é que cada distrito eleitoral possui uma população de aproximadamente $p = P/D$. Suponha que a comissão que define os distritos gerou uma lista longa de N *candidatos* para distritos ($N > D$). Cada distrito candidato consiste em algumas municípios (inteiras) com população total p_j ($1 \leq j \leq N$), que é suficientemente perto de p. Seja $c_j = |p_j - p|$. Cada município faz parte de ao menos um distrito candidato, e tipicamente faz parte de um número considerável de distritos candidatos (para permitir várias seleções alternativas de D distritos candidatos tal que cada município é incluído exatamente uma vez). Seja

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se município } i \text{ faz parte do distrito candidato } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dado c_j e a_{ij}, o objetivo é selecionar D dos N possíveis distritos eleitorais, tal que cada município faz parte de exatamente um distrito, e tal que *o maior* das c_j correspondentes é o menor possível.

Formula um programa inteiro que resolve esse problema.

Questão 0.2 (Formulação, 25%)
Um *quadrado latino* de ordem n é um tabuleiro de tamanho $n \times n$ preenchido com n símbolos diferentes tal que toda linha ou coluna contém cada símbolo exatamente uma vez. Supõe que os símbolos são simplesmente o conjunto de números $[1, n]$. Um quadrado latino é em *forma normal* se os símbolos da primeira linha e coluna ocorrem em ordem crescente.

1. Formule um programa linear, que gera um quadrado latino de tamanho n maximizando a soma dos elementos na diagonal principal.
2. Estende a formulação tal que o quadrado latino gerado é em formal normal.

Questão 0.3 (Resolução de programas inteiras, 25%)
Considere o seguinte programa inteiro.

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \textbf{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

1. O sistema possui solução inteira, através do critério de unimodularidade total?
2. Determine a solução da relaxação linear.
3. Caso a relaxação linear possui solução fracionário, determine a solução ótima, através de um método visto em aula. Justifique os passos de forma que fica claro como o método foi aplicado.

Questão 0.4 (Resolução de programas inteiras, 25%)
Considere o seguinte programa inteiro.

$$
\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & 2x_1 + x_4 \\
\textbf{s.a} \quad & x_1 + x_3 \leq 5 \\
& x_2 + x_4 \leq 10 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& x_1 - x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

1. O sistema possui solução inteira, através do critério de unimodularidade total?
2. Determine a solução da relaxação linear.
3. Caso a relaxação linear possui solução fracionário, determine a solução ótima, através de um método visto em aula. Justifique os passos de forma que fica claro como o método foi aplicado.

Questão 0.5 (Programação inteira, 25%)
Quais afirmações são verdadeiras, quais falsas? Justifique a resposta.

1. Problemas de programação linear em geral são mais fáceis de resolver que problemas de programação inteira.
2. Para problemas de programação inteira, o número de variáveis inteiras, em geral é mais importante que o número de restrições para determinar a dificuldade de resolver o problema.
3. Para resolver um problema de programação inteira, podemos aplicar o método Simplex à relaxação linear e depois arredondar a solução para solução inteira mais próximo. Isso nos fornece uma solução válida, mas não necessariamente ótima.
4. A região viável de uma relaxação linear é um subconjunto da região viável do programa inteiro correspondente.
5. Se a solução ótima de uma relaxação linear é inteira, então essa relaxação linear e o programa inteiro correspondente possuem a mesma solução ótima.