Dicas gerais:

- Leia todas as questões antes de começar e pergunte em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

Questão 0.1 (Solução gráfica)
Considere a formulação matemática abaixo:

$$\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & -x_1 - x_2 \\
\textbf{s.a} \quad & -1/2x_1 + x_2 \leq 3/2 \\
& -2x_1 - x_2 \geq -3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(a) Apresente a solução gráfica do sistema, indicando claramente o espaço de soluções factíveis (considere o eixo x como x_1 e o eixo y como x_2)

(b) Desenhe uma reta correspondente à função objetivo, indicando a direção de minimização

(c) Liste todas as soluções básicas viáveis do sistema, indicando claramente o valor de z, x_1 e x_2 de cada uma.

(d) Indique no gráfico as k soluções básicas visitadas através da resolução via método simplex, enumerando-as de s_1 a s_k, onde s_1 e s_k correspondem à solução básica inicial e a solução ótima, respectivamente. Apresente os dicionários correspontes às soluções visitadas.

O dicionário inicial é:

$$\begin{array}{cllll}
 & & & & \downarrow \\
 & z & = & +x_1 & +x_2 \\
\hline
\leftarrow & w_1 & = +3/2 & +1/2x_1 & -x_2 \\
 & w_2 & = +3 & -2x_1 & -x_2
\end{array}$$

Com solução: z=3/2, x_1=0, x_2=0.

$$\begin{array}{cllll}
 & & & \downarrow & \\
 & z & = +3/2 & +3/2x_1 & -w_1 \\
\hline
 & x_2 & = +3/2 & +1/2x_1 & -w_1 \\
\leftarrow & w_2 & = +3/2 & -5/2x_1 & +w_1
\end{array}$$

Com solução: z=3/2, x_1=0, x_2=3/2.

Questão 0.2 (Método simplex)
Considere a formulação abaixo:

$$\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\textbf{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 \leq -1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(a) Resolva o sistema usando o método simplex.

O dicionário inicial é:

$$\begin{array}{lllll} z & = & +x_1 & -2x_2 \\ \hline w_1 & = +2 & -x_1 & -x_2 \\ w_2 & = -1 & +x_1 & \end{array}$$

A solução básica inicial não é viável, então usa-se o sistema de duas fases:

$$\begin{array}{llllll} & & & & & \downarrow \\ & z & = & & & -x_0 \\ \hline & w_1 & = +2 & -x_1 & -x_2 & +x_0 \\ \leftarrow & w_2 & = -1 & +x_1 & & +x_0 \end{array}$$

Com x_0 entrando na base e w_2 saindo da base, o próximo dicionário é:

$$\begin{array}{llllll} & & & \downarrow & & \\ & z & = -1 & +x_1 & & -w_2 \\ \hline & w_1 & = +3 & -2x_1 & -x_2 & +w_2 \\ \leftarrow & x_0 & = +1 & -x_1 & & +w_2 \end{array}$$

O próximo dicionário é:

$$\begin{array}{lllll} & & \downarrow & & \\ z & = & -x_0 & & \\ \hline w_1 & = +1 & +2x_0 & -x_2 & -w_2 \\ x_1 & = +1 & -x_0 & & +w_2 \end{array}$$

O dicionário da segunda fase é:

$$\begin{array}{llll} & & & \downarrow \\ z & = 1 & -2x_2 & +w_2 \\ \hline w_1 & = +1 & -x_2 & -w_2 \\ x_1 & = +1 & & +w_2 \end{array}$$

O dicionário final é:

$$\begin{array}{llll} z & = 2 & -w_1 & -3x_2 \\ \hline w_2 & = +1 & -w_1 & -x_2 \\ x_1 & = +2 & -w_1 & -x_2 \end{array}$$

O dicionário é ótimo e portanto a solução final é $Z = 2$ e $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$.

(b) Qual a solução ótima do sistema? Indique os valores de z, bem como o valor de todas as variáveis não básicas do sistema inicial. O sistema é inviável.

(c) Se a restrição $-x_1 \leq -1$ do sistema original fosse substituída por $-x_1 \leq 1$, gerando um sistema S_2, qual seria a solução ótima do sistema S_2 neste caso? Indique os valores de z, bem como o valor de todas as variáveis não básicas do sistema inicial.

O dicionário inicial neste caso é:

$$\begin{array}{lllll} & & & \downarrow & \\ & z & = & +x_1 & -2x_2 \\ \hline \leftarrow & w_1 & = +2 & -x_1 & -x_2 \\ & w_2 & = +1 & +x_1 & \end{array}$$

A solução básica inicial é viável. Com x_1 entrando na base e w_1 saindo da base, o próximo dicionário é

$$\begin{array}{llll} z & = +2 & & -3x_2 \\ \hline x_1 & = +2 & -w_1 & -x_2 \\ w_2 & = -1 & & -2x_2 \end{array}$$

A solução ótima tem valor $z = 2$, sendo que $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$.

(d) Se a restrição $x_1+x_2 \leq -2$ do sistema S_2 (sistema do item anterior) fosse substituída por $-x_1+x_2 \leq -2$, gerando um sistema S_3, qual seria a solução ótima do sistema S_3 neste caso? Indique os valores de z, bem como o valor de todas as variáveis não básicas do sistema inicial.

O dicionário inicial neste caso é:

$$
\begin{array}{llll}
 & & \downarrow & \\
z & = & +x_1 & -2x_2 \\
\hline
w_1 & = +2 & +x_1 & -x_2 \\
w_2 & = +1 & +x_1 &
\end{array}
$$

Observe que x_1 entra na base sem limitante no seu valor (indicado por não ter uma variável para sair da base). Neste caso o sistema é ilimitado, não há solução ótima.

Questão 0.3 (Sistemas degenerados)

(a) Apresente um dicionário inicial de um sistema degenerado, contendo pelo menos duas variáveis. Ainda, o sistema deve ter a característica que, dado o próximo dicionário gerado pelas regras normais do simplex, não é possível saber se o sistema cicla ou não.

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & & \downarrow \\
 & z & = 1 & +2x_1 & +3x_2 \\
\hline
\leftarrow & w_1 & = 0 & -x_1 & -3x_2 \\
 & w_2 & = 2 & +x_1 & +x_2
\end{array}
$$

(b) Resolva o sistema via método simplex.

O próximo dicionário é:

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & \downarrow & \\
 & z & = 1 & +x_1 & -w_1 \\
\hline
\leftarrow & x_2 & = 0 & -1/3x_1 & -1/3w_1 \\
 & w_2 & = 2 & +2/3x_1 & -1/3w_1
\end{array}
$$

O próximo dicionário é:

$$
\begin{array}{llll}
z & = 1 & -3x_2 & -2w_1 \\
\hline
x_1 & = 0 & -3x_2 & -w_1 \\
w_2 & = 2 & -2x_2 & +1/3w_1
\end{array}
$$

(c) Resolva o sistema usando a regra de Bland. Comente o resultado.

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & \downarrow & \\
 & z & = 1 & +2x_1 & +3x_2 \\
\hline
\leftarrow & w_1 & = 0 & -x_1 & -3x_2 \\
 & w_2 & = 2 & +x_1 & +x_2
\end{array}
$$

O próximo dicionário é:

$$
\begin{array}{llll}
z & = 1 & -2w_1 & -3x_2 \\
\hline
x_1 & = 0 & -1w_1 & -3x_2 \\
w_2 & = 2 & -w_1 & -2x_2
\end{array}
$$

Neste caso usando a regrad e Bland chegou-se à solução ótima com menos pivos. No entanto, em geral, usando-se a regra de Bland, tem-se mais pivos.

(d) Resolva o sistema com o método lexicográfico.

(e) Todo sistema degenerado cicla?

(f) Explique com detalhes um procedimento que garantidamente evitaria a ciclagem. OBS: não é necessário fazer um exemplo, apenas explicar.