# Soluções prova 2

**Questão 1 (Formulação, 3pt)**
Seja $x_{vi} = 1$ caso $v \in V$ é mapeado para $i \in [n]$ com $n = |V|$. Além disso define uma variável auxiliar $d_{uv}$ que representa a distância entre os vértices $u$ e $v$ para cada $\{u, v\} \in A$.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{\{u,v\}\in A} d_{uv}, & & (1)\\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{v\in V} x_{vi} = 1, & \forall i \in [n], \quad & (2)\\
& \sum_{i\in[n]} x_{vi} = 1, & \forall v \in V, \quad & (3)\\
& d_{uv} \ge \sum_{i\in[n]} ix_{ui} - ix_{vi}, & \forall \{u,v\} \in A, \quad & (4)\\
& d_{uv} \ge \sum_{i\in[n]} ix_{vi} - ix_{ui}, & \forall \{u,v\} \in A, \quad & (5)\\
& d_{uv} \in \mathbb{R}, & \forall \{u,v\} \in A, \quad & (6)\\
& x_{vi} \in \mathbb{B}, & \forall \{u,v\} \in A, i \in [n]. \quad & (7)
\end{aligned}
$$

**Questão 2 (Dualidade, 2pt)**
a) A instância corresponde com $\min\{c^t x \mid Ax \le b\}$ com

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1\\3\\3\\5\\2 \end{pmatrix}.
$$

b) Com variáveis duais $\pi_1, \ldots, \pi_5$ obtemos o dual (da relaxação linear)

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & \sum_{i\in[5]} \pi_i\\
\textbf{sujeito a} \quad & \pi_1 \le 1\\
& \pi_1 + \pi_2 + \pi_5 \le 3\\
& \pi_2 + \pi_3 \le 3\\
& \pi_3 + \pi_4 \le 5\\
& \pi_4 + \pi_5 \le 2\\
& \pi_i \in \mathbb{R}^{+r}.
\end{aligned}
$$

**Questão 3 (Resolução, 2.5pt)**
a) Sim, porque todos coeficientes na função são negativos.

b) O dicionário inicial é

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & -x_1 & -3x_2 & -x_3\\ \hline
x_4 = & -5 & -2x_1 & +5x_2 & +x_3\\
x_5 = & 4 & -2x_1 & +x_2 & -2x_3
\end{array}
$$

e um pivô dual produz o sistema ótimo

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -3 & -11/5x_1 & -3/5x_4 & -2/5x_3\\ \hline
x_2 = & 1 & +2/5x_1 & +1/5x_4 & -1/5x_3\\
x_5 = & 5 & -8/5x_1 & +1/5x_4 & -11/5x_3
\end{array}.
$$

**Questão 4 (Analise de sensibilidade, 2.5pt)**

a) A condição para manter a otimalidade é

$$\hat{y}_N = y_N^* + t\Delta y_N \geq 0$$

com

$$\Delta y_N = (B^{-1}N)\Delta c_B - \Delta c_N = -\Delta c_N = (0\,0\,\,-1)^t.$$

Logo para $t \in [-\infty, 1/2]$, i.e $c_1 \in [-\infty, 3/2]$ o sistema continua ser ótimo. (Porém o sistema é degenerado e de fato *a solução* atual continua ser ótimo para qualquer valor de $c_1$.)

b) Temos

$$\begin{aligned}\Delta y_N &= (B^{-1}N)^t\Delta c_B - \Delta c_N \\ &= 1/2\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -2 & -10 & 2\\ -5 & -24 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e logo

$$\hat{y}_N = \begin{pmatrix}3/2\\1\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\4\\11.5\end{pmatrix}.$$

Logo o sistema continua ser ótimo.

c) A nova solução básica é

$$\hat{x}_B = x_B^* + \Delta x_B$$

com

$$\Delta x_B = B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix}0 & -1/2 & -1\\ 1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\-3\\0\end{pmatrix}$$

e logo

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix}-1/2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Logo o sistema não é mais primalmente viável e nos temos o novo dicionário

$$\begin{array}{rcccc} z = & 3/2 & -3/2x_5 & -x_6 & -1/2x_1 \\ \hline x_3 = & -1/2 & +1/2x_5 & +x_6 & +5/2x_1 \\ x_4 = & -2 & +x_5 & +5x_6 & +12x_1 \\ x_2 = & 0 & & -x_6 & -3x_1 \end{array}$$

o obtemos (com 4 pivôs) o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rcccc} z = & -3/2 & -13/2x_2 & -3/2x_4 & -2x_1 \\ \hline x_3 = & 1/2 & +3/2x_2 & +1/2x_4 & +x_1 \\ x_6 = & 0 & -x_2 & & -3x_1 \\ x_5 = & 2 & +5x_2 & +x_4 & +3x_1 \end{array}.$$