Nome:
Cartão:

Prova 2

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Em questões de formulação: documenta o significado de todas variáveis e restrições.

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
O Instituto de Informática quer alugar novas copiadoras e tem a escolha entre dois modelos. Modelo A copia até 20000 folhas por dia e o aluguel é R$ 600 por mês. Modelo B copia até 10000 folhas por dia e o aluguel é R$ 400 por mês. O Instituto quer alugar ao menos seis copiadoras, e ao menos uma delas deve ser um modelo A. A capacidade agregada das copiadoras tem que ser maior que 75000 páginas por dia. Ainda, caso ao menos um modelo A é alugado, o Instituto tem que pagar R$ 40 por mês para um contrato de manutenção. Caso ao menos um modelo B é alugado, o Instituto tem que pagar R$ 30 por mês para um outro contra de manutenção.
Formule um programa inteiro que determina quantas copiadores de cada modelo o Instituto deve comprar tal que o custo mensal total é minimizado.

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Uma empresa de transporte tem que entregar produtos para nove clientes $A, \ldots, I$. Por razões técnicas (distribuição de clientes, volume das cargas, etc.) existem somente dez rotas candidatas para a entrega aos clientes. Tabela 1 mostra as rotas possíveis e os clientes que cada rota atende. (Por exemplo a rota 6 atende cliente D, depois cliente B, depois E.) A empresa tem três caminhões a disposição. Formule um programa inteira que seleciona entre as rotas possíveis três rotas tal que o tempo total de entrega é minimizada e tal que cada cliente é atendido exatamente uma vez.

Questão 3 (Formulação, 2 pt)
Supõe que a formulação matemática de um problema é linear exceto a restrição que $|x_1 - x_2| \in \{0, 3, 6\}$. Formule essa restrição usando programação inteira.

Tabela 1: Questão 2: Rotas possíveis. Os números definem a ordem de entrega.

	Rota									
Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1				1				1	
B		2		1		2			2	2
C			3	3			3		3	
D	2					1		1		
E			2	2		3				
F		1			2					
G	3						1	2		3
H			1		3					1
I		3					2			
Tempo [h]	6	4	7	5	4	6	5	3	7	6

Questão 4 (Otimalidade, 2 pt)
Um colega alega que o programa linear

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 24 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 36 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

possui as solução ótima

$$x_1 = 11; x_2 = 0; x_3 = 3; x_4 = 0; \qquad y_1 = 2/3; y_2 = 1$$

(com variáveis duais y_1, y_2). Dá uma prova sucinta da verdade ou falsidade dessa afirmação.

Questão 5 (Dualidade, 2 pt)
Dado uma coleção de $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto finito U, o problema de encontrar o menor subconjunto $S \subseteq U$ tal que S contém no mínimo um elemento de cada conjunto $C \in \mathcal{C}$ é conhecido como Minimum hitting set ou Transversal mínima. Uma formulação inteira com variáveis de decisão $x_u \in \mathbb{B}$ para todo $u \in U$ é

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & \sum_{u \in U} x_u & \\ \textbf{sujeito a} \quad & \sum_{u \in C} x_u \ge 1 & \forall C \in \mathcal{C} \\ & x_u \in \mathbb{B} & \forall u \in U. \end{aligned}$$

a) Qual o dual desse problema no caso $U = \{1, \ldots, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$?

b) Qual o dual desse problema no caso geral?

Questão 6 (Sensibilidade, 2 pt)
A dicionário ótima do sistema

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(com variáveis de folga x_4, x_5, e x_6) é

$$\begin{array}{rcccc} z = & 7 & -5/2x_1 & -1/2x_4 & -5/2x_5 \\ \hline x_2 = & 1 & +3/2x_1 & -1/2x_4 & +1/2x_5 \\ x_3 = & 3 & -1/2x_1 & -1/2x_4 & -1/2x_5 \\ x_6 = & 2 & -x_1 & +2x_4 & +x_5 \end{array}$$

Queremos modificar os coeficientes $2, -2, 3$ das variáveis x_1, x_2 e x_3 da função objetivo nas proporções $-1 : 1 : -1$, i.e., obter uma solução com vetor de custos $(2\ -2\ 3)^t + t(-1\ 1\ -1)^t$ para um $t \in \mathbb{R}$.

a) Em qual intervalo podemos escolher t tal que base atual mantem-se ótima?

b) Qual o novo valor da função objetivo em função de t neste intervalo?

Dica:
Após a solução de um sistema linear, temos o dicionário ótimo

$$\begin{aligned} z &= z^* - (y_N^*)^t x_N \\ x_B &= x_B^* - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{-1} b \\ y_N^* &= (B^{-1}N)^t c_B - c_N \\ z^* &= c_B^t B^{-1} b. \end{aligned}$$