

Lokalizace a termalizace kvantových stavů ve spinových systémech

Jakub Koňárek

4. září 2024

Úvod

Studium spinových systémů nachází využití napříč celým spektrem moderní fyziky, od kvantové teorie informace a kvantového počítání [1] přes fyziku kondenzované fáze [2] až po kvantovou gravitaci [3]. Experimentální metody navíc pokročily natolik, že jsme spinové systémy schopni zkoumat v laboratoři, a to například ve formě ochlazených atomů v optických mřížích [4], iontových pastí [5] nebo Bose-Einsteinových kondenzátů [6].

Termalizace stavů v uzavřených kvantových systémech je důležitým jevem, neboť indikuje, nakolik je takový systém popsitelný termodynamickými metodami. Pokud se takovému popisu naopak vymyká, hovoříme o jeho lokalizaci. V této práci se proto zaměříme zejména na chování termalizace a lokalizace, a s nimi spojených veličin, ve spinových systémech.

Struktura závěrečné zprávy je následující: V první sekci zavedeme Heisenbergovy spinové modely a omezíme se na speciální verzi jednorozměrného spinového řetízku zachovávající celkovou magnetizaci. V druhé sekci popíšeme veličiny a metody použité při následných výpočtech a při analýze výsledků. Třetí sekce popisuje počítačový program, jehož tvorba byla klíčovou součástí tohoto projektu. Čtvrtá sekce prezentuje vybrané programem vygenerované výsledky, které v páté sekci diskutujeme.

1 Heisenbergovy spinové modely

Heisenbergovy 1/2-spinové modely jsou jednoduché mnohočásticové kvantověmechanické modely používané zejména k popisu chování magnetických systémů [8], ačkoliv je dnes lze realizovat pomocí kvantových simulátorů, například s použitím ochlazených atomů na optické mříži [9, 10]. Model úspěšně teoreticky popisuje například kritické jevy, jako jsou termální či kvantové fázové přechody [11], nerovnovážnou dynamiku [12], kvantový chaos [13, 14, 15], nebo dynamickou lokalizaci [16, 17].

Každý ze spinů je umístěn ve svém uzlu¹ a je popsán svým dvojrozměrným Hilbertovým prostorem $\mathcal{H}^{(j)}$ generovaným dvojicí ortonormálních vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$. Celkový systém s N uzly je tak prvkem direktního součinu prostorů

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}^{(j)} . \quad (1)$$

¹Anglicky site.

Sílu interakce mezi jednotlivými spiny můžeme prostřednictvím hamiltoniánu vyjádřit pomocí symetrických *matic konektivity* $J_x^{(ij)}$, $J_y^{(ij)}$, $J_z^{(ij)}$ jako

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(J_x^{(ij)} \hat{\sigma}_x^{(i)} \hat{\sigma}_x^{(j)} + J_y^{(ij)} \hat{\sigma}_y^{(i)} \hat{\sigma}_y^{(j)} + J_z^{(ij)} \hat{\sigma}_z^{(i)} \hat{\sigma}_z^{(j)} \right) + \sum_{j=1}^N B_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(j)} , \quad (2)$$

kde $\hat{\sigma}_x^{(j)}$, $\hat{\sigma}_y^{(j)}$, $\hat{\sigma}_z^{(j)}$ jsou Pauliho operátory na j -tém uzlu, tedy např.

$$\hat{\sigma}_x^{(j)} = \hat{I}^{\otimes(j-1)} \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{I}^{\otimes(N-j)} \quad (3)$$

a $B_z^{(j)}$ je externí magnetické pole ve směru osy z . Uzly tak dohromady tvoří mříž, jejíž topologii a dimenzionalitu lze maticemi konektivity modelovat.

Speciálním případem Heisenbergova modelu je *homogenní Heisenbergův XXZ řetízek*, jehož hamiltonián se zjednoduší na

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(J_{xy} \hat{\sigma}_x^{(j)} \hat{\sigma}_x^{(j+1)} + J_{xy} \hat{\sigma}_y^{(j)} \hat{\sigma}_y^{(j+1)} + J_z \hat{\sigma}_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(j+1)} \right) + \sum_{j=1}^N B_z^{(j)} \hat{\sigma}_z^{(j)} \quad (4)$$

s konstantními koeficienty J_{xy} a J_z . Ukážeme, že takový model zachovává celkovou magnetizaci $\hat{M} = \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^{(j)}$, tedy že operátor magnetizace komutuje s hamiltoniánem. Členy se $\hat{\sigma}_z$ komutují triviálně. Dále máme

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^{N-1} \hat{\sigma}_x^{(j)} \hat{\sigma}_x^{(j+1)}, \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^{(j)} \right] &= -2i \sum_{j=1}^{N-1} \left(\hat{\sigma}_y^{(j)} \hat{\sigma}_x^{(j+1)} + \hat{\sigma}_x^{(j)} \hat{\sigma}_y^{(j+1)} \right) \\ \left[\sum_{j=1}^{N-1} \hat{\sigma}_y^{(j)} \hat{\sigma}_y^{(j+1)}, \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^{(j)} \right] &= 2i \sum_{j=1}^{N-1} \left(\hat{\sigma}_x^{(j)} \hat{\sigma}_y^{(j+1)} + \hat{\sigma}_y^{(j)} \hat{\sigma}_x^{(j+1)} \right) , \end{aligned}$$

tyto členy se tak vyruší a dostáváme $[\hat{H}, \hat{M}] = 0$.

Důsledkem toho lze celkový Hilbertův prostor zapsat jako direktní součet podprostorů

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{L=0}^N \mathcal{H}_L , \quad (5)$$

kde prostor \mathcal{H}_L odpovídá prostoru generovanému stavy s L spiny $|\downarrow\rangle$ a $N - L$ spiny $|\uparrow\rangle$ a má dimenzi $D_L = \binom{N}{L}$.

Časový vývoj stavu $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ je určen evolučním operátorem $\hat{U}(t)$ v jednotkách s $\hbar = 1$ jako

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi(0)\rangle = \left(\sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n| \right) |\Psi(0)\rangle , \quad (6)$$

kde $|n\rangle$ jsou stacionární stavy příslušející energii E_n .

2 Analýza časového vývoje

Lokalizaci či termalizaci počátečního stavu lze sledovat hned několika metodami. Můžeme počítat např. *pravděpodobnost přežití*

$$P = |\langle \Psi(t) | \Psi(0) \rangle|^2 . \quad (7)$$

Ta je nulová, pokud je stav $|\Psi(t)\rangle$ kolmý k počátečnímu stavu $|\Psi(0)\rangle$, a nabývá hodnoty jedna, pokud se s ním shoduje (až na fázi).

Dále lze zkoumat *entropii provázání* [18]. Ta je definována pro libovolnou bipartitní faktORIZACI

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (8)$$

a k jejímu výpočtu je třeba zkonstruovat jednu z příslušných *redukovaných matic hustoty*. Matici hustoty čistého stavu $|\Psi\rangle$ definujeme jako

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| , \quad (9)$$

redukovanou matici hustoty pro např. subsystém A potom jako

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B (\hat{\rho}) . \quad (10)$$

Z ní lze nyní vypočíst příslušnou entropii provázání

$$\begin{aligned} S &= S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr} (\hat{\rho}_A \log \hat{\rho}_A) \\ &= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i , \end{aligned} \quad (11)$$

kde λ_i jsou vlastní čísla operátoru $\hat{\rho}_A$. Poznamenejme, že pro faktorizaci tvaru (8) platí $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B)$, což plyne např. ze Schmidtova rozkladu stavu $|\Psi\rangle$.

Nakonec nás bude zajímat také lokální magnetizace jednotlivých uzlů. Tu definujeme jako střední hodnotu lokálních spinových operátorů ve směru osy z

$$M^{(j)} = \langle \Psi | \hat{\sigma}_z^{(j)} | \Psi \rangle . \quad (12)$$

Vykreslením těchto hodnot pro každý z uzlů v čase dostaneme tzv. *konturový graf*.

3 Program k práci s Heisenbergovým XXZ modelem

Za účelem této práce byl vytvořen program k práci s Heisenbergovým XXZ modelem dostupný ve veřejném repozitáři [19]. Stručně zde popíšeme několik jeho základních funkcí, a to zejména

- vytvoření hamiltoniánu na podprostoru \mathcal{H}_L pro zadané matice konektivity J_{xy} a J_z ,
- diagonalizace tohoto hamiltoniánu,
- vytvoření speciálních počátečních stavů (viz níže),
- časový vývoj libovolného stavu z \mathcal{H}_L ,

- výpočet jeho pravděpodobnosti přežití v čase,
- výpočet entropie provázání v čase,
- tvorba konturového grafu.

Zahrnuté speciální počáteční stavy jsou všechny konstruované na XXZ řetízku s otevřenými okrajovými podmínkami. Možné je vytvořit

- *domain-wall (DW) stav* na prostoru se sudým N ve tvaru

$$|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle^{\otimes N/2} \otimes |\uparrow\rangle^{\otimes N/2} \quad (13)$$

ležící v podprostoru s $L = N/2$,

- *Néelův stav* na prostoru se sudým N ve tvaru

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad (14)$$

taktéž ležící v podprostoru s $L = N/2$,

- *single-spin (SS) stav* na j -tém uzlu ve tvaru

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes (j-1)} \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle^{\otimes (N-j)} \quad (15)$$

ležící v podprostoru s $L = 1$.

Dále program umožňuje zkoumat a vykreslovat závislost střední pravděpodobnosti přežití a entropie provázání na volbě různých parametrů.

4 Výsledky simulací

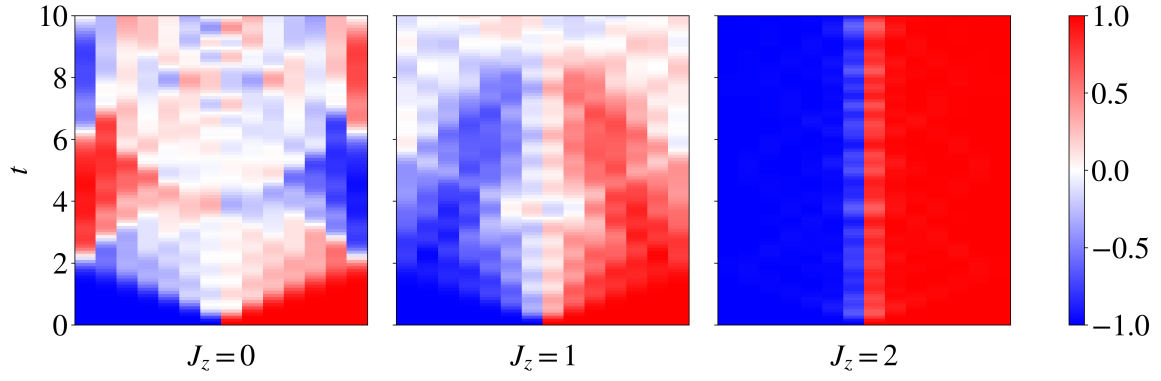
Ve všech simulacích je volen fixní parametr $J_{xy} = 1$. Stejně tak je ponechána střední hodnota magnetického pole $\langle B_z \rangle = 0$. Hodnoty B_z jsou voleny z rovnoměrného náhodného rozdělení na intervalu $(-\Delta B, \Delta B)$. Zkoumáme pouze parametry $J_z > 0$, neboť výsledky jsou pro záporné hodnoty symetrické.

Na obrázcích (1) a (2) jsou zobrazeny konturové grafy DW, Néelova a SS stavu bez přítomnosti magnetického pole. Přitom jsou voleny různé hodnoty parametru J_z .

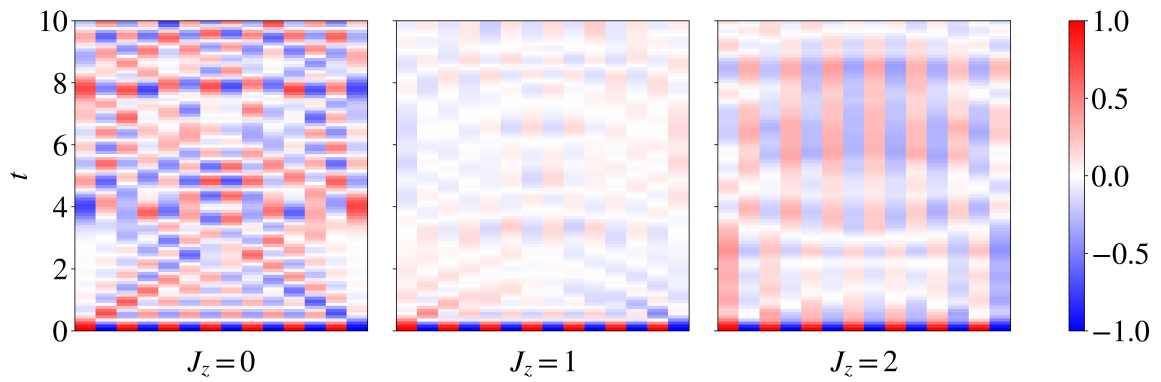
Na obrázcích (3) a (4) jsou vykresleny odpovídající pravděpodobnosti přežití, které zahrnují i simulace s přítomností magnetického pole. Pro každé nastavení parametrů bylo vygenerováno 50 vzorků s různým náhodně zvoleným magnetickým polem, ze kterých se průměruje výsledná střední hodnota.

Na obrázku (5) je vykreslena odpovídající entropie provázání, tentokrát z výpočetních důvodů bez zahrnutí vnějšího magnetického pole. V případě DW stavu je počítána entropie provázání levé a pravé poloviny uzlů, v případě Néelova a SS stavu potom entropie prostředního (nebo nejbližšího možného) z uzlů.

Na obrázcích (6) a (7) je nakonec zobrazena závislost střední hodnoty pravděpodobnosti přežití a entropie provázání (bez vnějšího magnetického pole) na parametru J_z .

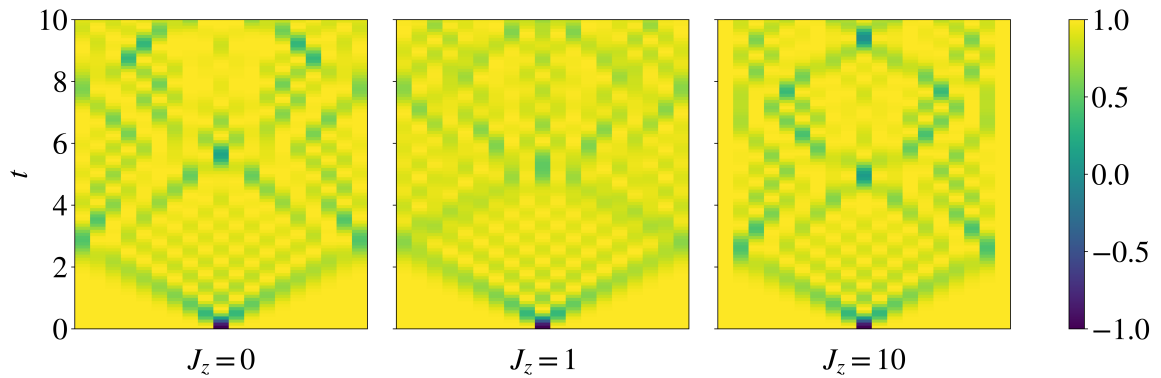


(a) DW stav pro $N = 14$

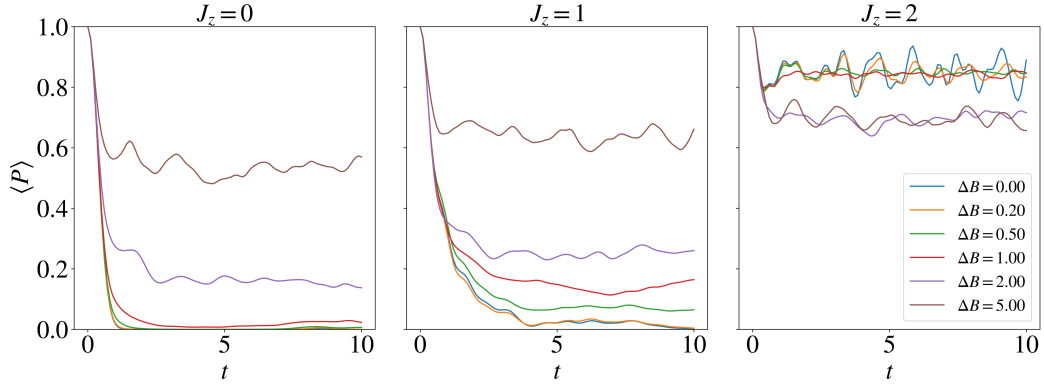


(b) Néelův stav pro $N = 14$

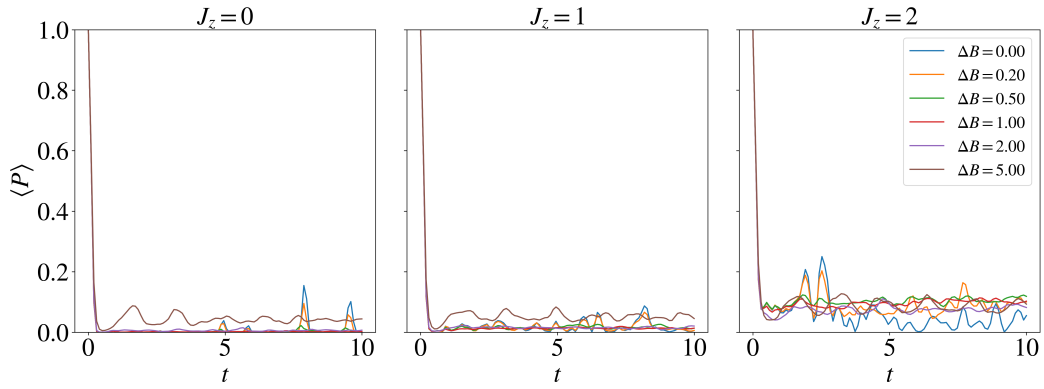
Obrázek 1: Konturové grafy pro různé druhy počátečních stavů bez magnetického pole s parametrem $J_{xy} = 1$.



Obrázek 2: Konturové grafy SS stavu bez magnetického pole pro $N=19$ s parametrem $J_{xy} = 1$.

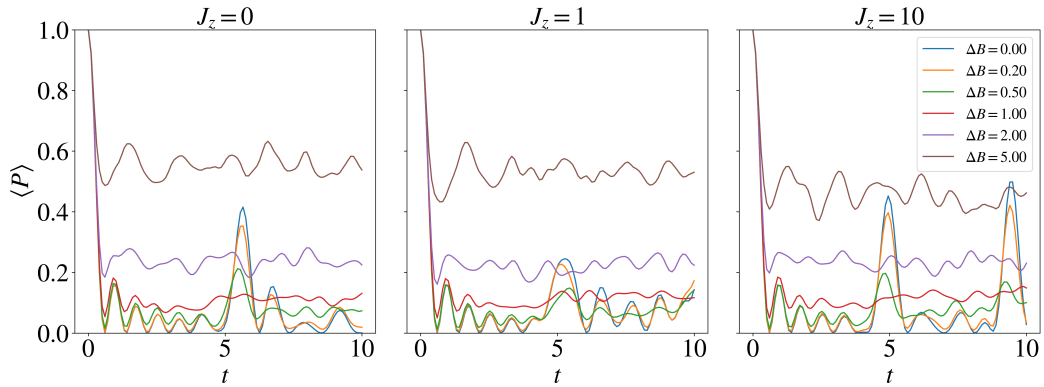


(a) DW stav pro $N = 14$

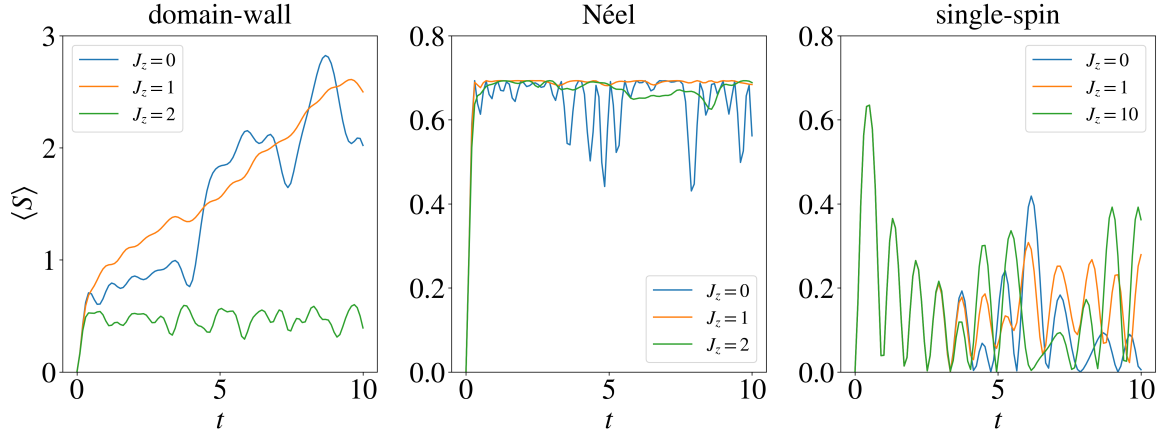


(b) Néelův stav pro $N = 14$

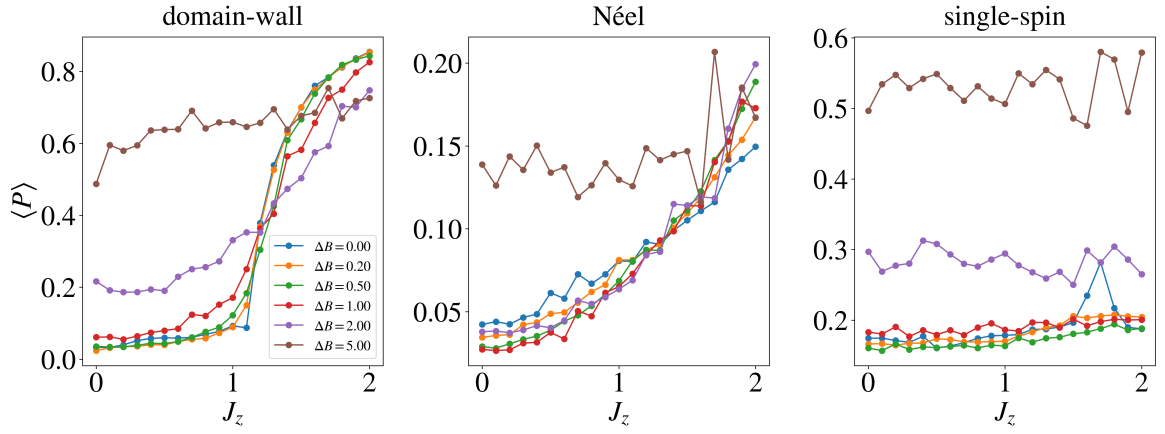
Obrázek 3: Pravděpodobnost přežití pro různé druhy počátečních stavů s magnetickým polem zprůměrovaná z 50 vzorků s parametrem $J_{xy} = 1$.



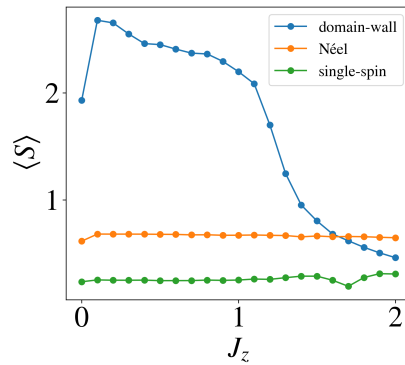
Obrázek 4: Pravděpodobnost přežití pro SS stav s magnetickým polem pro $N = 19$ zprůměrovaná z 50 vzorků s parametrem $J_{xy} = 1$.



Obrázek 5: Entropie provázání pro různé druhy počátečních stavů bez magnetického pole. Počet uzlů N byl volen 14 pro DW a Néelův stav a 19 pro SS stav. Parametr $J_{xy} = 1$.



Obrázek 6: Střední hodnota pravděpodobnosti přežití s magnetickým polem zprůměrovaná z 50 vzorků s $t_{\max} = 200$. Počet uzlů N byl volen 10 pro DW a Néelův stav a 11 pro SS stav. Parametr $J_{xy} = 1$.



Obrázek 7: Entropie provázání bez magnetického pole pro $t_{\max} = 200$. Počet uzlů N byl volen 10 pro DW a Néelův stav a 11 pro SS stav. Parametr $J_{xy} = 1$.

5 Diskuse výsledků

Na výsledcích simulací lze sledovat, zda systém v průběhu času termalizuje, či zda zůstává lokalizovaný. Termalizaci systému indikuje nízká pravděpodobnost přežití, oscilující kolem ustálené hodnoty, a vysoká entropie provázání. Naopak lokalizované zůstávají ty stavy, jejichž pravděpodobnost přežití je vysoká a entropie provázání nízká.

Z grafů je patrné, že chování DW stavu výrazně závisí na velikosti parametru J_z . Při dostatečně nízkých hodnotách se DW stav v krátkém čase *zcela rozpadá*. Konturový graf je znatelně promíchaný, pravděpodobnost přežití rapidně klesá a poté zůstává nízká, zatímco entropie provázání naopak pozvolna roste během celé doby simulace. V tomto režimu vykazuje DW stav známky úplné termalizace.

Pro vysoká J_z naopak systém zůstává lokalizován v počátečním stavu a pouze kolem něj mírně osciluje. Pravděpodobnost přežití jen lehce poklesne a drží se na konstantní hodnotě blízké jedné, stejně tak entropie provázání pouze mírně vzroste a drží se na konstantní hodnotě blízké nule.

Na obrázku (6) a (7) pozorujeme, že ke změně chování dochází v okolí hodnoty $J_z = 1$, kde ostře nárůstá střední pravděpodobnost přežití a ostře klesá entropie provázání vzhledem k J_z . Tento bod by měl v limitě $N \rightarrow \infty$ odpovídat *fázovému přechodu* [11].

Povšimnout si můžeme také prudkého nárůstu entropie provázání DW stavu v okolí bodu $J_z = 0$. Ta je zřejmě způsobena výraznou symetrií tohoto stavu bez přítomnosti magnetického pole.

Néelův stav se oproti DW stavu rozpadá rychleji, zároveň ale vykazuje četnější a větší revivaly, indikované náhlými nárůsty pravděpodobnosti přežití a poklesy entropie provázání. Se zvyšujícím se paramtrem J_z lze sledovat stejný trend jako u DW stavu, s tím rozdílem, že kritické chování u hodnoty J_z není v tomto případě pozorováno. Pravděpodobnost přežití se zvyšujícím se J_z pozvolna roste a entropie provázání, narozdíl od DW stavu, zůstává přibližně konstantní.

SS stav se od ostatních dvou stavů liší zejména velikostí svého prostoru \mathcal{H}_L , který oproti nim roste lineárně s N . Dimenze tohoto podprostoru je tedy pro podobný počet uzlů výrazně menší. Tomu odpovídá i jeho chování, které obecně vykazuje vyšší míru symetrie. Časový vývoj se pro různá J_z příliš neliší. Přesto je jeho rozpad v pravděpodobnosti přežití i entropii provázání patrný, obě veličiny však mnohem více oscilují. Střední hodnota pravděpodobnosti přežití se zvyšujícím se J_z mírně roste. Entropie provázání pak zůstává přibližně konstantní.

Na obrázcích (6) a (7) si můžeme povšimnout lokálních extrémů těchto dvou veličin v okolí bodu $J_z = 1,7$. Jejich fyzikální význam byl však vyloučen provedením simulací s různým počtem časových kroků, kde k výchylce nedocházelo. Jedná se tak pouze o numerickou chybu.

Zdá se, že vnější magnetické pole funguje pro malá ΔB jako tlumení oscilací pravděpodobnosti přežití. Volba vysokého ΔB však již začíná systém stabilizovat blízko $P = 1$, přičemž pro velmi vysoká ΔB zůstává systém zcela lokalizovaný ve svém počátečním stavu. K této změně chování dochází mezi hodnotami $\Delta B = 2$ a $\Delta B = 5$, v souladu s hodnotou popsanou v [17].

Závěr

V rámci této práce jsem se seznámil s Heisenbergovými spinovými modely a metodami analýzy jejich termalizace a lokalizace, zejména prostřednictvím

- pravděpodobnosti přežití,
- entropie provázání
- a lokální magnetizace uzlů.

K tomuto účelu jsem napsal kód pro práci s Heisenbergovým XXZ modelem a pomocí něj zkoumal vývoj a charakteristiky

- domain-wall (DW) stavu,
- Néelova stavu
- a single-spin (SS) stavu.

Z těchto simulací jsem dále vyvodil, že

- DW stav přechází se zvyšujícím se parametrem J_z od úplné termalizace k úplné lokalizaci, přičemž mezní hodnotou tohoto přechodu je $J_z = 1$,
- Néelův stav přechází se zvyšujícím se parametrem J_z od úplné termalizace k úplné lokalizaci, nevykazuje však kritické chování v okolí $J_z = 1$,
- SS stav se se zvyšujícím se parametrem J_z příliš nemění a jeho chování je obecně méně chaotické, což je způsobeno malou velikostí jeho Hilbertova prostoru,
- malé hodnoty ΔB fungují jako tlumení oscilací pravděpodobnosti přežití, zatímco velké hodnoty systém zcela lokalizují v počátečním stavu.

Literatura

- [1] WEI, Tzu-Chieh. Quantum spin models for measurement-based quantum computation. *Advances in Physics: X*. 2018, roč. 3, č. 1, s. 1461026. ISSN 2374-6149. Dostupné z DOI: 10.1080/23746149.2018.1461026.
- [2] RAMKARTHIK, M.S.; SOLANKI, Payal D. One-Dimensional Spin Chain Models in Condensed Matter Theory. In: *Numerical Recipes in Quantum Information Theory and Quantum Computing*. CRC Press, 2021, s. 297–334. ISBN 9781003164678. Dostupné z DOI: 10.1201/9781003164678-6.
- [3] SINGH, Sukhwinder; MCMAHON, Nathan A.; BRENNEN, Gavin K. Holographic spin networks from tensor network states. *Physical Review D*. 2018, roč. 97, č. 2. ISSN 2470-0029. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevd.97.026013.
- [4] BERNIEN, Hannes; SCHWARTZ, Sylvain; KEESLING, Alexander; LEVINE, Harry; OMRAN, Ahmed; PICHLER, Hannes; CHOI, Soonwon; ZIBROV, Alexander S.; ENDRES, Manuel; GREINER, Markus; VULETIĆ, Vladan; LUKIN, Mikhail D. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. *Nature*. 2017, roč. 551, č. 7682, s. 579–584. ISSN 1476-4687. Dostupné z DOI: 10.1038/nature24622.

- [5] MONROE, C.; CAMPBELL, W. C.; DUAN, L.-M.; GONG, Z.-X.; GORSHKOV, A. V.; HESS, P. W.; ISLAM, R.; KIM, K.; LINKE, N. M.; PAGANO, G.; RICHERME, P.; SENKO, C.; YAO, N. Y. Programmable quantum simulations of spin systems with trapped ions. *Reviews of Modern Physics*. 2021, roč. 93, č. 2. ISSN 1539-0756. Dostupné z DOI: 10.1103/revmodphys.93.025001.
- [6] CHANG, Ming-Shien; QIN, Qishu; ZHANG, Wenxian; YOU, Li; CHAPMAN, Michael S. Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate. *Nature Physics*. 2005, roč. 1, č. 2, s. 111–116. ISSN 1745-2481. Dostupné z DOI: 10.1038/nphys153.
- [7] SERBYN, Maksym; ABANIN, Dmitry A.; PAPIĆ, Zlatko. Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity. *Nature Physics*. 2021, roč. 17, č. 6, s. 675–685. ISSN 1745-2481. Dostupné z DOI: 10.1038/s41567-021-01230-2.
- [8] MAJLIS, Norberto. *The Quantum Theory of Magnetism*. WORLD SCIENTIFIC, 2007. ISBN 9789812779748. Dostupné z DOI: 10.1142/6094.
- [9] DUAN, L.-M.; DEMLER, E.; LUKIN, M. D. Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*. 2003, roč. 91, č. 9. ISSN 1079-7114. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevlett.91.090402.
- [10] WEI, David; RUBIO-ABADAL, Antonio; YE, Bingtian; MACHADO, Francisco; KEMP, Jack; SRAKAEW, Kritsana; HOLLERITH, Simon; RUI, Jun; GOPALAKRISHNAN, Sarang; YAO, Norman Y.; BLOCH, Immanuel; ZEIHNER, Johannes. Quantum gas microscopy of Kardar-Parisi-Zhang superdiffusion. *Science*. 2022, roč. 376, č. 6594, s. 716–720. ISSN 1095-9203. Dostupné z DOI: 10.1126/science.abk2397.
- [11] PETERS, Thomas. Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena, by H. Nishimori and G. Ortiz: Scope: textbook. Level: graduate. *Contemporary Physics*. 2012, roč. 53, č. 1, s. 78–78. ISSN 1366-5812. Dostupné z DOI: 10.1080/00107514.2011.634926.
- [12] TORRES-HERRERA, E. J.; SANTOS, Lea F. Local quenches with global effects in interacting quantum systems. *Physical Review E*. 2014, roč. 89, č. 6. ISSN 1550-2376. Dostupné z DOI: 10.1103/physreve.89.062110.
- [13] AVISHAI, Y.; RICHERT, J.; BERKOVITS, R. Level statistics in a Heisenberg chain with random magnetic field. *Physical Review B*. 2002, roč. 66, č. 5. ISSN 1095-3795. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevb.66.052416.
- [14] SANTOS, L. F.; BORGONOV, F.; IZRAILEV, F. M. Onset of chaos and relaxation in isolated systems of interacting spins: Energy shell approach. *Physical Review E*. 2012, roč. 85, č. 3. ISSN 1550-2376. Dostupné z DOI: 10.1103/physreve.85.036209.
- [15] SANTOS, Lea F.; PÉREZ-BERNAL, Francisco; TORRES-HERRERA, E. Jonathan. Speck of chaos. *Physical Review Research*. 2020, roč. 2, č. 4. ISSN 2643-1564. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevresearch.2.043034.
- [16] BARDARSON, Jens H.; POLLMANN, Frank; MOORE, Joel E. Unbounded Growth of Entanglement in Models of Many-Body Localization. *Physical Review Letters*. 2012, roč. 109, č. 1. ISSN 1079-7114. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevlett.109.017202.
- [17] PAL, Arijeet; HUSE, David A. Many-body localization phase transition. *Physical Review B*. 2010, roč. 82, č. 17. ISSN 1550-235X. Dostupné z DOI: 10.1103/physrevb.82.174411.

- [18] NANDKISHORE, Rahul; HUSE, David A. Many-Body Localization and Thermalization in Quantum Statistical Mechanics. *Annual Review of Condensed Matter Physics*. 2015, roč. 6, č. 1, s. 15–38. ISSN 1947-5462. Dostupné z DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726.
- [19] <https://github.com/pyhertz99/Heisenberg-XXZ>