အခန်း ၁

Introduction to Vectors

၁.၁ ဗက်တာ (Vector)

"What is a vector?" ဗက်တာဆိုတာ ဘာလဲ။ ဒီမေးခွန်းကို မဖြေခင်မှာ ကိန်းစစ် (real numbers) တွေနဲ့ ဖွဲ့စည်းထားတဲ့ ဗက်တာ ဥပမာတချို့ကို ကြည့်ရအောင်။

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1.5\\-3.2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1.5\\1\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

ပထမသုံးခုဟာ 2-dimensional ဗက်တာတွေပါ။ ဒုတိယသုံးခုကတော့ 3-dimensional တွေဖြစ်ပါတယ်။ ဗက်တာတစ်ခုမှာ ကိန်းဂဏန်း တစ်လုံးနဲ့အထက် ပါဝင်နိုင်ပြီး လေးထောင့်ကွင်းထဲမှာ ကော်လံတစ်ခုအနေနဲ့ အထက်အောက်စီ ရေးလေ့ရှိတယ်။ ပါဝင်တဲ့ ကိန်းတစ်ခုချင်းစီကို ***component*** တွေလို့ခေါ်ပါတယ်။ ဘယ်လောက် dimensional ဗက်တာ ဖြစ်တယ်ဆိုတာကို ပါဝင်တဲ့ *component* အရေအတွက်နဲ့ ခွဲခြားသတ်မှတ်တာ။ Component လေးခုပါရင် 4-dimensional, ***n*** ခုပါရင် ***n-dimensional*** ပေါ့။

n-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစုကို ***Euclidean n-space*** လို့ ခေါ်ပါတယ်။ ဥပမာအားဖြင့် 2-space ဟာ 2-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစု၊ 3-space ဟာ 3-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစု ဖြစ်ပါတယ်။

Real number တွေ အနန္တရှိကြတယ်။ Real number တွေနဲ့ ဖွဲ့စည်းထားတဲ့ 2-dimensional ဗက်တာတွေလည်း အနန္တရှိကြရမယ်။ 3-dimensional တွေလည်း ထိုနည်းလည်းကောင်းပါပဲ။ ဒါကြောင့် n-space တစ်ခုမှာ အနန္တများပြားတဲ့ ဗက်တာတွေ ပါဝင်နေမှာဖြစ်တယ်။

ဗက်တာတွေကို $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ စတဲ့ အင်္ဂလိပ်အက္ခရာ အပေါ်မှာ မြှားလေးတင်ထားတဲ့ သင်္ကေတလေးတွေနဲ့ ကိုယ်စားပြုဖော်ပြလေ့ရှိတယ်။

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix}-1\\3\\3\end{bmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix}1.5\\-3.2\\\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

ဗက်တာ component တွေကိုတော့ အခုလို သင်္ကေတနဲ့ ဖော်ပြလေ့ရှိတယ်။ Component တွေဟာ သာမန် ဂဏန်းတွေပဲဖြစ်တဲ့အတွက် ၎င်းတို့ကို ကိုယ်စားပြုတဲ့အခါ မြှားမသုံးပါဘူး။

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ ဖြစ်ရင် $v_1 = 2, v_2 = 3$ ဖြစ်တယ်။

၁.၂ ဗက်တာ ပေါင်းခြင်းနှင့် စကေလာဖြင့် မြှောက်ခြင်း

ဗက်တာ အော်ပရေးရှင်းနှစ်ခုရှိတယ်။ ပထမတစ်ခုက ဗက်တာ ပေါင်းခြင်း (Vector Addition)။ ဗက်တာအချင်းချင်း ပေါင်းတာကို အခုလို သတ်မှတ်ပါတယ်။ Dimension တူရပါမယ်။

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

လိုက်ဖက် component အချင်းချင်း ပေါင်းပေးရတာပါပဲ။ ပေါင်းလဒ်ဟာ ဗက်တာတစ်ခုပဲ ဖြစ်ပြီး dimension လည်း အတူတူပဲဖြစ်တယ်။ ဗက်တာတွေ နုတ်လို့လည်းရတာပေါ့။

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ဒုတိယ ဗက်တာ အော်ပရေးရှင်းကတော့ စကေလာဖြင့်မြှောက်ခြင်း (Scalar Multiplication) ပါ။ ဒီလိုသတ်မှတ်ပါတယ်။

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad 2\vec{u} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad -2.5\vec{v} = -2.5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ဗက်တာတစ်ခုကို ရိုးရိုးဂဏန်းတစ်ခုနဲ့ မြှောက်တာပါပဲ။ Component တစ်ခုချင်းကို မြှောက်ပေးရတယ်။ ရလဒ်ဟာ ဗက်တာတစ်ခုဖြစ်ပြီး dimension မပြောင်းလဲဘူး။

၁.၃ Linear Combinations

အထက်မှာဖော်ပြခဲ့တဲ့ ဗက်တာအော်ပရေးရှင်း နှစ်ခုလုံး ပေါင်းစည်းထားတာကို ***Linear Combinations*** လို့ခေါ်တာပါ။ ဥပမာ

$$2\vec{u} + -2.5\vec{v} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + -2.5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$