အခန်း ၁

Introduction to Vectors

၁.၁ Vectors and Linear Combinations

ဗက်တာ (Vector)

"What is a vector?" ဗက်တာဆိုတာ ဘာလဲ။ ဒီမေးခွန်းကို မဖြေခင်မှာ ကိန်းစစ် (real numbers) တွေနဲ့ ဖွဲ့စည်းထားတဲ့ ဗက်တာ ဥပမာတချို့ကို ကြည့်ရအောင်။

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1.5 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ပထမသုံးခုဟာ 2-dimensional ဗက်တာတွေပါ။ ဒုတိယသုံးခုကတော့ 3-dimensional တွေဖြစ်ပါတယ်။ ဗက်တာတစ်ခုမှာ ကိန်းဂဏန်း တစ်လုံးနဲ့အထက် ပါဝင်နိုင်ပြီး လေးထောင့်ကွင်းထဲမှာ ကော်လံတစ်ခုအနေနဲ့ အထက်အောက်စီ ရေးလေ့ရှိတယ်။ ပါဝင်တဲ့ ကိန်းတစ်ခုချင်းစီကို ***component*** တွေလို့ခေါ်ပါတယ်။ ဘယ်လောက် dimensional ဗက်တာ ဖြစ်တယ်ဆိုတာကို ပါဝင်တဲ့ *component* အရေအတွက်နဲ့ ခွဲခြားသတ်မှတ်တာ။ Component လေးခုပါရင် 4-dimensional, $\boldsymbol{n}$ ခုပါတဲ့အခါ ***n-dimensional*** ဗက်တာခေါ်တာပေါ့။

n-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစုကို ***Euclidean n-space*** လို့ ခေါ်ပါတယ်။ ဥပမာအားဖြင့် 2-space ဟာ 2-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစု၊ 3-space ဟာ 3-dimensional ဗက်တာတွေ အားလုံးပါဝင်တဲ့ အစု ဖြစ်ပါတယ်။

Real number တွေ အနန္တရှိကြတယ်။ Real number တွေနဲ့ ဖွဲ့စည်းထားတဲ့ 2-dimensional ဗက်တာတွေလည်း အနန္တရှိကြရမယ်။ 3-dimensional တွေလည်း ထိုနည်းလည်းကောင်းပါပဲ။ ဒါကြောင့် n-space တစ်ခုမှာ အနန္တများပြားတဲ့ ဗက်တာတွေ ပါဝင်နေမှာဖြစ်တယ်။

ဗက်တာတွေကို $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ စတဲ့ အင်္ဂလိပ်အက္ခရာ အပေါ်မှာ မြှားလေးတင်ထားတဲ့ သင်္ကေတလေးတွေနဲ့ ကိုယ်စားပြုဖော်ပြလေ့ရှိတယ်။

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -3.2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ဗက်တာ component တွေကိုတော့ အခုလို သင်္ကေတနဲ့ ဖော်ပြလေ့ရှိတယ်။ Component တွေဟာ သာမန် ဂဏန်းတွေပဲဖြစ်တဲ့အတွက် ၎င်းတို့ကို ကိုယ်စားပြုတဲ့အခါ မြှားမသုံးပါဘူး။

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ ဖြစ်ရင် $v_1 = 2, v_2 = 3$ ဖြစ်တယ်။

ဗက်တာ ပေါင်းခြင်းနှင့် စကေလာဖြင့် မြှောက်ခြင်း

ဗက်တာ အော်ပရေးရှင်းနှစ်ခုရှိတယ်။ ပထမတစ်ခုက ဗက်တာ ပေါင်းခြင်း (Vector Addition)။ ဗက်တာအချင်းချင်း ပေါင်းတာကို အခုလို သတ်မှတ်ပါတယ်။ Dimension တူရပါမယ်။

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

လိုက်ဖက် component အချင်းချင်း ပေါင်းပေးရတာပါပဲ။ ပေါင်းလဒ်ဟာ ဗက်တာတစ်ခုပဲ ဖြစ်ပြီး dimension လည်း အတူတူပဲဖြစ်တယ်။ ဗက်တာတွေ နုတ်လို့လည်းရတာပေါ့။

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ဒုတိယ ဗက်တာ အော်ပရေးရှင်းကတော့ စကေလာဖြင့်မြှောက်ခြင်း (Scalar Multiplication) ပါ။ ဒီလိုသတ်မှတ်ပါတယ်။

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad 2\vec{u} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad -2.5\vec{v} = -2.5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ဗက်တာတစ်ခုကို ရိုးရိုးဂဏန်းတစ်ခုနဲ့ မြှောက်တာပါပဲ။ Component တစ်ခုချင်းကို မြှောက်ပေးရတယ်။ ရလဒ်ဟာ ဗက်တာတစ်ခုဖြစ်ပြီး dimension မပြောင်းလဲဘူး။

Linear Combinations

ဗက်တာပေါင်းခြင်းနဲ့ စကေလာဖြင့်မြှောက်ခြင်း နှစ်ခုပေါင်းစည်းထားတာကို ***Linear Combinations*** လို့ခေါ်တာပါ။ ဥပမာ

$$2\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + -2.5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + -1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ဗက်တာ $\vec{u}$ နဲ့ $\vec{v}$ တို့ရဲ့ linear combinations ကို

$$c\vec{u} + d\vec{v}$$

အဖြစ် အဓိပ္ပါယ်သတ်မှတ်တယ်။ c နဲ့ d ဟာ ကိန်းစစ်တွေဖြစ်ပြီး စကေလာ (scalar) တွေလို့ခေါ်ပါတယ်။ ဗက်တာနဲ့ စကေလာ မရောထွေးရပါဘူး။ 2 ဟာ စကေလာဖြစ်ပြီး $[\,2\,]$ ကတော့ 1-dimensional ဗက်တာပါ။

$c = d = 1$ ဖြစ်ရင် ဗက်တာနှစ်ခု ပေါင်းတာပဲဖြစ်တဲ့အတွက် ဗက်တာပေါင်းခြင်းကို linear combinations ရဲ့ special case တစ်ခုလို့ ရှုမြင်နိုင်တယ်။

$$1\vec{u} + 1\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$$

ဗက်တာနှုတ်ခြင်းကိုလည်း linear combinations ရဲ့ special case တစ်ခုလို့ ရှုမြင်နိုင်တယ်။ $c = 1, d = -1$ ဖြစ်ရင် linear combination ဟာ ဗက်တာနှစ်ခု နှုတ်တာပါပဲ။

$$1\vec{u} + -1\vec{v} = 1\vec{u} - 1\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$$

စကေလာဖြင့်မြှောက်ခြင်းကိုလည်း linear combinations ရဲ့ special case တစ်ခုလို့ ရှုမြင်နိုင်တယ်။ $c = 0$ သို့မဟုတ် $d = 0$ ဖြစ်တဲ့အခါမှာ

$$c\vec{u} + 0\vec{v} = c\vec{u} + \vec{0} = c\vec{u}$$

$$0\vec{u} + d\vec{v} = \vec{0} + d\vec{v} = d\vec{v}$$

မှတ်ချက်။ ။ Component အားလုံး သုညဖြစ်တဲ့ ဗက်တာတွေကို သုညဗက်တာ (***zero vector***) လို့ခေါ်ပြီး $\vec{0}$ နဲ့ကိုယ်စားပြုပါတယ်။ မည်သည့်ဗက်တာကိုမဆို သုညနဲ့ မြှောက်တဲ့အခါ ရလဒ်ဟာ *zero vector* ဖြစ်ပြီး *zero vector* ကို မည်သည့် စကေလာဖြင့် မြှောက်သည်ဖြစ်စေ ရလဒ်ဟာ *zero vector* ပဲဖြစ်ပါမယ်။

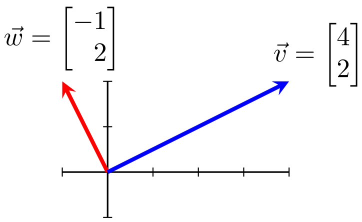
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad 0\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad c\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ (for any real } c\text{)}$$

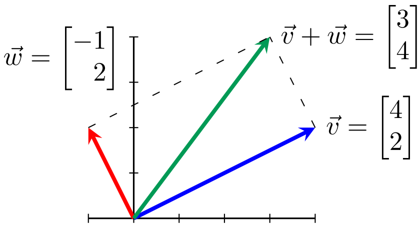
$c = 0$ နဲ့ $d = 0$ ဖြစ်လို့ရတဲ့အတွက် linear combinations ဖြင့် *zero vector* ကို အမြဲရရှိနိုင်တယ်ဆိုတာ အထူးဂရုပြု မှတ်သားထားသင့်ပါတယ်။ မြှောက်ဖော်ကိန်း coefficient နှစ်ခုကို (c နဲ့ d ကို ဆိုလို) သုညထားလိုက်တဲ့အခါ *zero vector* ရတာပေါ့။

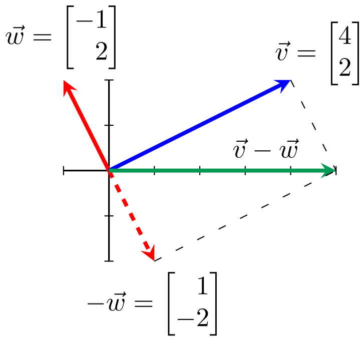
$$0\vec{u} + 0\vec{v} = \vec{0} \quad \text{(for any n-dimensional } \vec{u} \text{ and } \vec{v}\text{)}$$

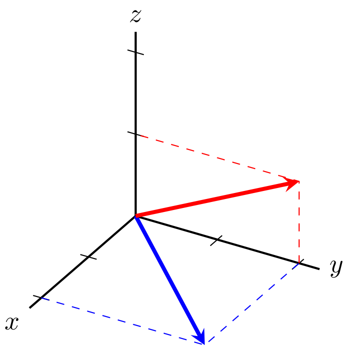
ဗက်တာများကို ပုံဖော်ကြည့်ခြင်း

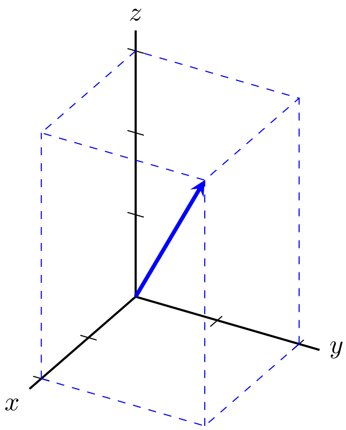
2-dimensional ဗက်တာတွေကို ပုံဖော်ကြည့်ဖို့ စံသုံးနေကြ xy-plane ကို အသုံးပြုနိုင်ပါတယ်။ ဗက်တာ $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ ကို $(0,0)$ ကနေ $(4,2)$ အမှတ်ထိ အလျားရှိတဲ့ မြှားနဲ့ ဖော်ပြပါတယ်။ ထိုနည်းတူစွာ $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right]$ ကို $(0,0)$ ကနေ $(-1,2)$ အမှတ်ထိ အလျားရှိတဲ့ မြှားနဲ့ ဖော်ပြတယ်။ မြှားအမြီးဟာ ***origin*** $(0,0)$ မှစပြီး မြှားခေါင်းကတော့ ဗက်တာရဲ့ components နှစ်ခုနဲ့ လိုက်ဖက်တဲ့ (x, y) ကိုသြဒိနိတ် အမှတ်မှာဆုံးရပါမယ်။




$\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$


$\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\vec{v} - \vec{w}$
$-\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$


z
y
x


z
y
x