

## Глава 7

# Анализ временных рядов

### 7.1 Случайные процессы

Ещё одна популярная область применения метода максимального правдоподобия из главы 6 — моделирование и анализ случайных процессов.

*Случайные процессы* можно считать некоторым обобщением понятия случайной величины. Если случайная величина является отображением  $\xi(\omega)$  из пространства элементарных исходов в пространство реализаций случайной величины  $\mathbb{R}$ , то реализацией случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  является функция некоторой величины  $x(t)$ . Понятно, что под временем  $t$  здесь понимается просто любая скалярная переменная, но для удобства обычно говорят о случайных процессах и времени. Обобщение случайного процесса на случай больших размерностей детерминированного параметра называется случайным полем  $\xi(\omega, \mathbf{r})$ .

Важным частным случаем случайных процессов являются случайные последовательности, когда время  $t$  может принимать только значения на равномерной сетке и заменяется индексом  $i$ . С точки зрения физики это означает, что мы обязуемся рассматривать (измерять или предсказывать) значения случайного процесса только на какой-то равномерной сетке по времени. Выделение такого частного случая практически целесообразно, так как позволяет предложить более простые методы анализа данных, с другой стороны равномерные по времени ряды измерений достаточно часто встречаются на практике, особенно с учетом частого применения автоматизации физического эксперимента.

Хотя и подразумевается, что величины  $\xi(\omega, t_1)$  и  $\xi(\omega, t_2)$  зависимы, в общем случае, случайные процессы нельзя свести к случайным векторам, так как наличие скалярного параметра предполагает возможность продолжать процесс бесконечно в прошлое или будущее, либо бесконечно дробить сетку времен, на которой происходит измерение случайного процесса. Полным и исчерпывающим описанием случайного процесса является многомерная функция плотности вероятности. Для любого  $N$  и любого набора  $t_1, \dots, t_N$

мы обязаны предоставить функцию  $p(x_1, t_1, \dots, x_N, t_N)$ , показывающую совместную плотность распределения измерений значения случайного процесса в заданный набор времен. Стоит отметить, что нужно уметь задавать (пусть не в виде формулы, но хотя бы в смысле эффективного алгоритма позволяющего рассчитать значение) функцию переменного числа аргументов, а это может быть не просто.

Однако, если можно предложить эффективный способ построения такой функции, т.е. решения прямой задачи, то затем, во-первых, можно применить метод максимального правдоподобия для оценки неизвестных параметров многомерной функции плотности вероятности исходя из известной заданной реализации случайного процесса. Во-вторых, используя найденные оценки параметров и известную реализацию случайного процесса, можно решать задачу прогнозирования, т.е. задания плотности вероятности для прошлого, будущего, либо любых других моментов времени, когда нет измерений.

Если многоточечная функция распределения подчиняется свойству сдвига по времени  $p(x_1, t_1, \dots, x_N, t_N) = p(x_1, t_1 + \Delta t, \dots, x_N, t_N + \Delta t) \quad \forall \Delta t$ , то такой случайный процесс называется *стационарным* (в этом случае для  $N = 1$  зависимость от времени вовсе отсутствует).

Частными характеристиками случайных процессов являются среднее, дисперсия, моменты высших порядков. Все эти величины могут зависеть от времени в общем случае, но для стационарного процесса моменты от времени не зависят. Иногда, говорят, что процесс называется стационарным в широком (слабом) смысле, если его среднее и дисперсия не зависят от времени. Важной характеристикой случайного процесса является автоковариационная функция или автокорреляционная функция, её нормированный вариант. Для стационарного процесса автоковариационная функция зависит от разности времен  $|t_1 - t_2|$ .

С точки зрения практической оценки моментов случайного процесса и его автоковариационной функции важно понятие *эргодичности*: когда усреднение по различным реализациям случайного процесса можно заменить на усреднение по времени в рамках одной доступной реализации.

### 7.1.1 Случайные последовательности

Рассмотрим индекс  $i$  нумерующий моменты времени на равномерной сетке, и приведем простые примеры случайных последовательностей. *Белый шум*:

$$p(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(x_i), \quad (7.1)$$

необходимо задать вид функции одноточечной функции плотности вероятности  $p(x)$ , таким образом сразу окажется задана многоточечная функция плотности вероятности для любого  $N$ . В каком-то смысле, белый шум является предельным случаем и сводится к набору из  $N$  независимых одинаково распределенных величин.

## 7.2. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО 91

Марковская случайная последовательности:

$$p(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{i-1}) p(x_1). \quad (7.2)$$

Необходимо задать одноточечную функцию плотности вероятности  $p(x)$ , а так же двухточечную функцию условной плотности вероятности  $p(x_i | x_{i-1})$ , тогда наш случайный процесс (последовательность) будет полностью задан.

Случайная последовательность с нормальным распределением (гауссовская случайная последовательность):

$$p(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu, \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu))\right) \quad (7.3)$$

нужно задать некоторые правила, как вычислять параметры распределения для любых индексов  $\mu_i = \mu(i)$ ,  $\Sigma_{ij} = \Sigma(i, j)$ . Рассмотрим некоторые конкретные примеры случайных последовательностей с нормальным распределением.

## 7.2 Линейные модели авторегрессии скользящего среднего

### 7.2.1 Модель авторегрессии первого порядка

Пусть  $a_i$  — независимы и одинаково распределены  $a_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ , а интересующий нас наблюдаемый случайный процесс  $x_i$  подчиняется разностному уравнению:

$$x_i = \phi x_{i-1} + a_i, \quad (7.4)$$

где  $\phi$  некоторый параметр.  $a_i = 0$ ,  $x_i = 0$  для  $i < 0$ . Случайные величины  $a_i$  иногда называют генерирующим процессом. Разностное уравнение (7.4) задает процесс авторегрессии.

Видно, что  $E[x_i] = 0$ , значит  $\mu_i = 0$ . Для того, чтобы найти  $\Sigma_{ij}$ , решим разностное уравнение (7.4) методом производящих функций. Пусть  $X(w) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i w^i$ ,  $A(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i w^i$ , тогда  $X(w) = A(w)(1 - \phi w)^{-1}$ . Раскладывая знаменатель в степенной ряд, и затем меняя порядок суммирования, получим, что

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} \phi^m a_{i-m}, \quad (7.5)$$

откуда сразу видно, что каждый  $x_i$  распределен нормально, так как является суммой нормально-распределенных величин. Подсчитаем ковариацию

между  $x_i$  и  $x_j$ :

$$\begin{aligned} E[x_i x_j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{n+m} E[a_{i-n} a_{j-m}] = \\ &= \sigma_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{2m+|i-j|} = \sigma_0^2 \frac{\phi^{|i-j|}}{1-\phi^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Откуда сразу видно условие стационарности рассматриваемого случайного процесса  $|\phi| < 1$ .

Теперь можно сказать, что

$$\Sigma_{ij} = \sigma_0^2 \Sigma_{ij}^{(0)}, \quad (7.7)$$

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = \frac{\phi^{|i-j|}}{1-\phi^2}. \quad (7.8)$$

Предположим, что мы располагаем  $N$  последовательными измерениями из реализации такого случайного процесса, тогда можно расписать функцию логарифма правдоподобия:

$$\ln p(x_1, \dots, x_N | \phi, \sigma_0^2) = -\frac{N}{2} \ln \sigma_0^2 - \frac{1}{2} \ln \det \Sigma^{(0)}(\phi) - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\mathbf{x}, (\Sigma^{(0)}(\phi))^{-1} \mathbf{x}) \quad (7.9)$$

Параметр  $\phi$  находится численно из уравнения

$$\text{tr} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \phi} \left( \Sigma_0^{-1} - \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_0^{-1} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \Sigma_0^{-1} \right) = 0, \quad (7.10)$$

а параметр  $\sigma_0^2$  выражается как

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{x}, \Sigma_0^{-1}(\phi) \mathbf{x}), \quad (7.11)$$

Замечание, если пренебречь слагаемым  $\ln \det \Sigma_0(\phi)$ , то задача сводится к минимизации квадратичной формы:

$$\phi = \arg \min_{\phi} (\mathbf{x}, \Sigma_0^{-1}(\phi) \mathbf{x}) \quad (7.12)$$

Кстати говоря, матрица  $\Sigma_0$  по построению является симметричной тёплицевой матрицей, что подразумевает существование алгоритмов умножения на вектор за  $O(N \log N)$  и обращения за  $O(N^2)$ .

### 7.2.2 Модели авторегрессии порядка $p$

Предыдущий подход можно обобщить:

$$x_i = \phi_1 x_{i-1} + \dots + \phi_p x_{i-p} + a_i, \quad (7.13)$$

## 7.2. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО 93

иногда для удобства вводят оператор сдвига по времени  $Bx_i \equiv x_{i-1}$  и записывают разностное уравнение в операторном виде:

$$\Phi_p(B)x_i = a_i, \quad (7.14)$$

$$\Phi_p(B) \equiv 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p. \quad (7.15)$$

Процедура оценки параметров  $\phi_1, \dots, \phi_p$  аналогична предыдущему случаю. Можно показать, что

$$\Sigma_{ij} = \sigma_0^2 \left( A_1 w_1^{-|i-j|} + \dots + A_p w_p^{-|i-j|} \right), \quad (7.16)$$

где  $w_1, \dots, w_p$  — корни так называемого характеристического уравнения:

$$1 - \phi_1 w - \phi_2 w^2 - \dots - \phi_p w^p = 0. \quad (7.17)$$

Из формулы (7.16) видно, что процессы авторегрессии всегда имеют автоковариационную функцию в виде суммы затухающих экспонент и гармонических функций, в случае если решения характеристического уравнения состоят из комплексных чисел. Можно рассуждать и в обратную сторону: если выборочная автоковариационная функция некоторой реализации случайного процесса выглядит как сумма затухающих экспонент и гармонических функций, то разумно попытаться представить этот процесс моделью процесса авторегрессии.

### 7.2.3 Модель скользящего среднего

Рассмотрим другой вид разностных уравнений, сохраняя предыдущие предположения:

$$x_i = a_i - \theta_1 a_{i-1} - \dots - \theta_q a_{i-q}, \quad (7.18)$$

или в операторном виде

$$x_i = \Theta_q(B)a_i, \quad (7.19)$$

$$\Theta_q(B) \equiv 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q. \quad (7.20)$$

Такой процесс называется *процессом скользящего среднего*. Действительно, в правой части уравнения записано выражение для взвешенной суммы. Сразу видно, что  $\Sigma_{ij} = 0$ ,  $\forall i, j : |i - j| > q$ , а для  $|i - j| \leq q$  соответствующие  $\Sigma_{ij}$  вычисляются как комбинация констант  $\theta_1, \dots, \theta_q$ . Процедура оценки этих параметров  $\theta_1, \dots, \theta_q$  аналогична предыдущим случаям.

### 7.2.4 Модели авторегрессии интегрированного скользящего среднего

В самом общем виде рассматриваются модели авторегрессии интегрированного скользящего среднего, которые задаются уравнением

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d x_i = \Theta_q(B)a_i, \quad (7.21)$$

где  $\Phi_p(B)$  и  $\Theta_q(B)$  задаются уравнениями (7.15) и (7.20) соответственно.

Такая модель в записи часто обозначается как  $ARIMA(p, d, q)$ . Как видно из уравнений (7.21), если мы зададим значения  $p, d$ , и  $q$ , т.е. определим количество необходимых нам параметров модели, то соответствующие  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  и  $\sigma_0^2$  определяются исходя из доступной реализации с помощью метода максимального правдоподобия.

Однако, процедура подбора  $p, d$ , и  $q$  выполняется перебором и называется *идентификацией модели*. Сравнение нескольких моделей описывающих одни и те же данные, но имеющие разный набор  $p, d$ , и  $q$  происходит по нескольким критериям: невязки модели не имеют остаточных корреляций, значение правдоподобия максимально, количество параметров минимально возможное (т.е. простота модели) при прочих равных условиях.

### 7.2.5 Прогнозирование

*Прогноз* — условная плотность вероятности (либо условное среднее) случайного процесса в некоторые моменты времени, когда значения не известны, при условии известных значений. Моменты времени могут быть либо в будущем, либо в прошлом, либо в другие моменты, когда не было измерений.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  известные значения случайного процесса в некоторые моменты времени, а  $\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+l}$  неизвестные значения в некоторые моменты времени. Для краткости обозначим их векторами  $\mathbf{x}$  и  $\hat{\mathbf{x}}$ , соответственно. Тогда искомая условная многоточечная плотность вероятности:

$$p(\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+l} | x_1, \dots, x_n) = \frac{p(\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+l}, x_1, \dots, x_n)}{p(x_1, \dots, x_n)} = \frac{p(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})}{p(\mathbf{x})}. \quad (7.22)$$

Числитель и знаменатель подчиняются многоточечной функции плотности вероятности исследуемого процесса, будем считать, что это нормальная плотность вероятности с нулевым средним, а параметры матрицы ковариации известны, например были найдены ранее с помощью метода максимального правдоподобия:

$$p(\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+l} | x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma_{11}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}', \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{x}')\right)}{\sqrt{(2\pi)^l \det \Sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{x})\right)}, \quad (7.23)$$

где блочный вектор

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

а матрица  $\Sigma$  задается в блочном виде:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Используем формулу Фробениуса для обращения блочной матрицы, чтобы упростить выражение, тогда:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} H^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & -\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} H^{-1} \\ -H^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (7.26)$$

где

$$H \equiv \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}. \quad (7.27)$$

Окончательно находим:

$$\begin{aligned} p(\hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_{n+l} | x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^l \det H}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{x}, H^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{x})) \right), \end{aligned} \quad (7.28)$$

откуда достаточно очевидно, что прогноз — тоже многомерное нормальное распределение, с известной матрицей ковариации  $H$  и некоторым условным средним  $\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{x}$ . Обратим внимание, что в этом случае точность прогноза (матрица ковариации  $H$ ) не зависит от измеренных значений, а зависит только лишь от относительного расстояния во времени между моментами времени для прогноза и моментами времени известных значений.

Условное среднее зависит как от известных измерений, так и от корреляционных свойств процесса. Например, мы хотим предсказать среднее значение условного процесса, отстоящее в будущее на  $l$  шагов от последнего измеренного значения. В случае процесса скользящего среднего  $\Sigma_{21} = 0$  в случае  $l > q$ , следовательно, условное среднее (прогноз) совпадает с безусловным средним, т.е. измерения уже не дают никакой подсказки о том, что может произойти через  $l$  шагов. В таких случаях говорят, что процесс имеет короткую память. Если мы имеем дело с процессом авторегрессии, то  $\Sigma_{21} \neq 0$  даже для  $l \gg p$ , и тогда говорят, что процесс имеет длинную память.

### 7.3 Гауссовы процессы

В предыдущем разделе рассматривались линейные эмпирические модели для стохастических процессов для дискретного времени. Возникает естественное желание обобщить такие модели на случай непрерывного времени, или измерений, выполненных на неравномерной временной сетке. Например, при проведении наземных астрономических наблюдений, непредсказуемые погодные условия определяют возможность измерений в конкретный момент времени. Ранее известные измерения  $x_i$  и интересующие нас прогнозируемые величины  $\hat{x}_l$  различались только индексом, нумерующим дискретные узлы сетки времени, а теперь для каждого измерения  $x_i$  должен быть дополнительно известен момент времени  $t_i$ , которому приписаны измерения.

Снова будем считать, что значение случайного процесса в каждый момент времени распределено согласно нормальному распределению с нулевым средним и некоторой дисперсией. Таким образом, многоточечная функция плотности вероятности может быть записана как

$$p(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x}, \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \right), \quad (7.29)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор составленный из всех аргументов  $x_i$ , а элементы матрицы  $\Sigma$  зависят в общем случае от всех моментов времени  $t_1, \dots, t_N$ .

Как и в прошлый раз, перед тем как применить метод максимального правдоподобия, нужно предложить некоторую параметрическую модель матрицы  $\Sigma$ . Для линейных моделей авторегрессии скользящего среднего параметрическая модель задавалась опосредованно, через рассмотрение разностных уравнений. Можно было бы поступить аналогично, рассматривая теорию стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, Степанов 2012), однако на практике поступают более простым образом. Оказывается, можно доказать (см., например, Rasmussen и Williams 2006), что на роль  $\Sigma$  годится любая матрица заданная через так называемое *ядро* следующим образом:

$$(\Sigma)_{ij} = K(|t_i - t_j|), \quad (7.30)$$

где  $K(\Delta t)$  — ядро, т.е. любая функция, которая удовлетворяет всем свойствам функции автоковариации стационарного случайного процесса. Например,  $K(0) \geq |K(\Delta t)|$ ,  $K(-\Delta t) = K(\Delta t)$ , и т.п. Определение (7.30) позволяет гарантировать, что  $\Sigma$  удовлетворяет свойствам матрицы ковариации, таким как симметричность и положительная определенность.

Некоторые примеры ядер  $K(\Delta t)$ :

- Экспоненциальное ядро:<sup>1</sup>

$$K(\Delta t) = \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{l}\right), \quad (7.31)$$

где  $\sigma_0^2$  — параметр, определяющий дисперсию, а  $l$  — определяет характерный временной масштаб корреляции рассматриваемого процесса. Все параметры оцениваются исходя из метода максимального правдоподобия.

- Квадратично-экспоненциальное ядро:

$$K(\Delta t) = \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{2l^2}\right). \quad (7.32)$$

- Дробно-квадратичное ядро:<sup>2</sup>

$$K(\Delta t) = \sigma_0^2 \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\alpha l^2}\right)^{-\alpha}. \quad (7.33)$$

- Кроме того, оказывается, что если  $K_1(\Delta t)$  и  $K_2(\Delta t)$  — некоторые ядра, то их линейная комбинация тоже является ядром:

$$K(\Delta t) = \theta_1 K_1(\Delta t) + \theta_2 K_2(\Delta t), \quad (7.34)$$

где параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  оцениваются исходя из метода максимального правдоподобия.

<sup>1</sup>Ядро процесса Орнштейна-Уленбека, который является прямым аналогом процесса авторегрессии первого порядка для непрерывного времени.

<sup>2</sup>Rational quadratic



Последнее свойство открывает возможности для бесконечного комбинирования ядер между собой. Если в случае линейных моделей авторегрессии скользящего среднего приходилось перебирать различные значения параметров  $p$ ,  $d$  и  $q$ , то теперь количество потенциальных моделей значительно больше. Отметим, что для гауссовых процессов техническая трудность сопряжена с тем, что результирующая матрица  $\Sigma$  не имеет трёхлинейной структуры, значит поиск неизвестных параметров требует большего количества вычислений.

После того как параметры ядра оценены с помощью метода максимального правдоподобия, прогнозирование осуществляется в соответствии с подходом из раздела 7.2.5. Моменты времени прогнозирования могут быть в прошлом, в будущем, либо в другие моменты времени, когда не проводились измерения. Последний случай, например, популярен как метод интерполяции измерений на равномерную сетку по времени для последующего применения методов машинного обучения для анализа набора различных реализаций случайных процессов.

## 7.4 Спектральная плотность мощности. Теорема Винера-Хинчина

*Спектральная плотность мощности* наряду с автоковариационной функцией  $\gamma(\tau)$  случайного процесса является полезным инструментом анализа корреляционных свойств стационарных случайных процессов. Пусть  $x(t)$  — действительный стационарный случайный процесс с нулевым средним. Рассмотрим следующую величину:

$$A_T(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2T}\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt x(t) \exp(-i\omega t). \quad (7.35)$$

Видно, что  $E[A_T] = 0$  для любого значения  $\omega$  равно нулю, поэтому дисперсия величины  $A_T(\omega)$  запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} E[|A_T(\omega)|^2] &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T dt_1 dt_2 \exp(-i\omega(t_1 - t_2)) E[x(t_1)x(t_2)] = \\ &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T dt_1 dt_2 \exp(-i\omega(t_1 - t_2)) \gamma(t_1 - t_2) = \\ &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-2T}^{2T} d\tau \int_{-(T-|\tau|/2)}^{T-|\tau|/2} dt \exp(-i\omega\tau) \gamma(\tau) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} d\tau \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) \exp(-i\omega\tau) \gamma(\tau). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Следовательно,

$$S(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|\hat{x}_T(\omega)|^2]}{2\pi T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \gamma(\tau) \exp(-i\omega\tau), \quad (7.37)$$

где  $S(\omega) \geq 0$  называется *спектральной плотностью мощности*, а  $\hat{x}_T(\omega)$  — преобразование Фурье «урезанного» случайного процесса  $x_T(t)$ . Советский математик Александр Яковлевич Хинчин доказал, что если  $S(\omega) \geq 0$ , то справедливо и обратное утверждение:

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) \exp(i\omega\tau), \quad (7.38)$$

причём  $\gamma(\tau)$  — автоковариационная функция некоторого стационарного случайного процесса, т.е. для такой функции выполняются все необходимые свойства, которыми должна обладать автоковариационная функция. Полученное утверждение носит имя теоремы Винера-Хинчина и является одним из практических способов вычисления выборочной автоковариационной функции.

Речь идёт о том, чтобы применить к выборке отрезков случайного процесса преобразование Фурье, что особенно удобно делать при рассмотрении равномерной сетки времени, а затем вычислить выборочное среднее согласно определению (7.37). Далее полученная оценка спектральной плотности мощности может быть преобразована в автоковариационную функцию с помощью (7.38).

Аналогичное свойство можно доказать для эргодического случайного процесса. В этом случае, каждая реализация содержит в себе ансамбль реализаций, и вместо усреднения по ансамблю используется усреднение по времени:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x_T(t) x_T(t + \tau) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{x}_T(\omega) \hat{x}_T(\omega') \exp(it(\omega + \omega')) \exp(i\tau\omega') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\tau\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{2\pi T}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

## 7.5 Согласованный фильтр

*Согласованный фильтр*<sup>3</sup> — один из простых но изящных способов решения задачи детектирования. Теперь про случайный процесс известно, что он составлен из суммы детерминированного сигнала  $s(t)$  и некоторого аддитивного шума  $\epsilon(t)$  с известными характеристиками:

$$x(t) = s(t) + \epsilon(t). \quad (7.40)$$

Предположим, что  $\epsilon(t)$  — белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ . Кроме того, предположим, что сигнал  $s(t)$  состоит из импульса известной

---

<sup>3</sup>matched filter

формы  $s_0(\Delta t)$  и с конечным носителем  $[0, T]$ , который появляется или не появляется в некоторый момент времени  $t_0$ :

$$s(t) = s_0(t - t_0). \quad (7.41)$$

Задача детектирования состоит в том, чтобы понять был ли в сигнале импульс  $s_0(\tau)$  или его не было, а был только аддитивный шум. Если амплитуда импульса много больше амплитуды шума, то работает наивный подход — детектирование по порогу сигнала, но при наличии шума достаточной мощности (дисперсии  $\sigma_0^2$ ) результирующий (измеряемый, наблюдаемый) сигнал  $x(t)$  может быть слабо различим для случаев присутствия сигнала и его отсутствия. Итак, нам бы хотелось получить ответ на вопрос передается ли в данный момент импульс или не передаются. Заметим, что успешное решение данной задачи может быть положено в основу простейшей линии цифровой передачи данных: например, импульс  $s_0(\tau)$  будет обозначать логическую единицу, а импульс  $-s_0(\tau)$  логический ноль.

Итак, рассмотрим линейный фильтр в общем виде:

$$x'(t) = \int_0^T d\tau h(\tau)x(t - \tau), \quad (7.42)$$

где  $h(\tau)$  некоторая функция, задающая фильтр, которую иногда называют импульсной характеристикой. Такой фильтр может быть реализован как чисто аналоговым образом, так и цифровым.

Тогда сигнал преобразуется фильтром как

$$s'_0(\Delta t) = \int_0^T d\tau h(\tau)s_0(\Delta t - \tau), \quad (7.43)$$

а шум в свою очередь

$$\epsilon'(t) = \int_0^T d\tau h(\tau)\epsilon(t - \tau). \quad (7.44)$$

Сразу заметим, что среднее  $\epsilon'(t)$  по прежнему равно нулю в силу линейности фильтра и попробуем оценить дисперсию  $\epsilon'(t)$ :

$$\begin{aligned} E[\epsilon'^2] &= \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' h(\tau)h(\tau')E[\epsilon(t - \tau)\epsilon(t - \tau')] = \\ &= \sigma_0^2 \int_0^T d\tau h^2(\tau), \end{aligned} \quad (7.45)$$

здесь используется предположение, что  $\epsilon(t)$  белый шум, но полученный результат можно без труда обобщить на случай любой другой известной автоковариационной функции  $\epsilon(t)$ .

Для того, чтобы надежно заметить полезный сигнал  $s'_0(\Delta t)$  с помощью детектирования по порогу, амплитуда сигнала должна быть много больше, чем возможная амплитуда шума  $\epsilon'(t)$ . Очевидно, что чем больше будет

это отношение амплитуд (в радио-технике его часто называют *отношением сигнал-шум*), тем увереннее будет происходить детектирование, и тем меньше будет вероятность ошибиться: обнаружить сигнал там, где его не было, либо пропустить сигнал там, где он был. Формально это требование запишется как следующая вариационная задача:

$$h(\tau) = \arg \max_{h(\tau)} \frac{s'_0(T)^2}{E[\epsilon'^2]} = \frac{\left( \int_0^T d\tau h(\tau) s_0(T - \tau) \right)^2}{\sigma_0^2 \int_0^T d\tau h^2(\tau)}. \quad (7.46)$$

Видно, что  $h(\tau)$  необходимо отнормировать, так как умножение на константу не меняет отношения сигнал-шум. Выберем следующую нормировку:

$$\int_0^T d\tau h(\tau) s_0(T - \tau) = 1. \quad (7.47)$$

Итак, запишем теперь следующий функционал и найдём его минимум:

$$\Phi[h(\tau)] = \sigma_0^2 \int_0^T d\tau h^2(\tau) - \lambda \left( 1 - \int_0^T d\tau h(\tau) s_0(T - \tau) \right), \quad (7.48)$$

тогда условие минимума запишется в следующем виде:

$$\int_0^T d\tau g(\tau) (2\sigma_0^2 h(\tau) + \lambda s_0(T - \tau)) = 0, \quad (7.49)$$

где  $g(\tau)$  произвольная функция. Видно, что утверждение (7.49) выполняется для любых  $g(\tau)$  только когда

$$h(\tau) = -\frac{\lambda}{2\sigma_0^2} s_0(T - \tau). \quad (7.50)$$

Константа  $\lambda$  может быть найдена из условия нормировки, но так как условие нормировки было выбрано достаточно произвольно, и не влияет на результат, то окончательно примем  $h(\tau) = s_0(T - \tau)$ .

Мы получили достаточно красивый результат: получается, что согласованный фильтр сопоставляет входящий сигнал с известным:

$$x'(t) = \int_0^T d\tau s_0(T - \tau) x(t - \tau), \quad (7.51)$$

а форма преобразованного сигнала определяется как

$$s'_0(\Delta t) = \int_0^T d\tau s_0(T - \tau) s_0(\Delta t - \tau). \quad (7.52)$$