Introduction to Optimization

2024 Fall

Doo Ho Lee

1. Optimization (1/3)

- An academic field in developing quantitative analytics to help people make the best decisions

- Terminology

(1) Decision Making

- Selecting the best one among available alternatives

(2) Quantitative Analysis

- 1st step : Expressing the real-decision problem as mathematical model (Modeling)
- 2nd step : Finding the best solution with mathematical methods (Problem solving)

cf. Qualitative Analysis : Based on people's experience and intuition

(3) History

- Late 19c ~ Early 20c : Gantt's chart, Harris's economic order quantity, Erlang's queueing system
- WW2 : Quantitative operations research
- Postwar era: Application to the industry fields (Dantzig's Simplex method)
- Applied to all areas where decision making problems arise

1. Optimization (2/3)

- Importance of OR

  - Life is “**C(hoice)**” between ”**B(irth)**” and “**D(eadth)**”.

  - Facing decision problems and getting the best result.

  - Portfolio selection problem

$ 10 million

Bank investment should be more than 50% of total investments.

$ *x*

Bank **5%**

$ *y*

Stock **20%**

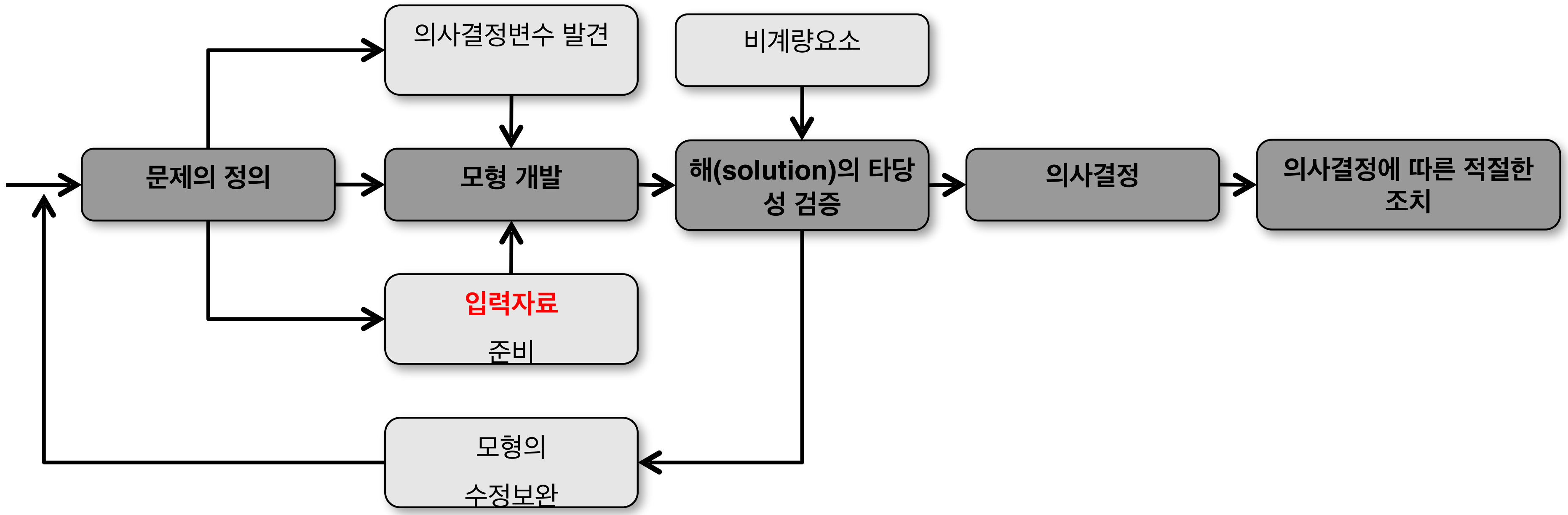
$$(x^*, y^*) = (5,\ 5)$$

<Jean Paul Sartre>

1. Optimization (3/3)

- Problem solving procedure

- Problem definition → Establishing (mathematical model) → Deriving solutions → Validation of model → Execution of results



- Deterministic model (확정적 모형): input values are known
- Stochastic model (확률적 모형): input values are unknown and probabilistic
- Mixture model (혼합 모형) : deterministic + stochastic

2. Applications

- Examples in biz environment

  - Production management: production planning, inventory, locating facilities,
  - Flight routing, reserving rooms and seats in hotel
  - Finance: budgeting, portfolio selection
  - Human resource: demanding/supplying manpower, allocating employees
  - Marketing: selecting advertising media, locating branch offices, logistics channel design

- Others

  - Military : fire force planning, demanding, supplying
  - Politics : campaign schedule planning, election district planning
  - Administration: # of toll booths in highway, communication network design
  - Sports : allocating umpires or referees, seasonal league planning

- Useful methods

  - Linear programming
  - Integer programming
  - Multi-criteria decision making
  - Network models
  - Decision analysis
  - Simulation
  - Forecasting
  - Markov process models
  - PERT/CPM
  - Inventory system
  - Queuing system

3. Examples of mathematical model (1/2)

(E1) 갑을공업사가 생산 판매하는 제품 A는 고정비(Fixed Cost)가 100,000 원이고, 단위당 변동비(Variable Cost)는 100 원이며, 판매단가는 200원이라 한다. 제품 갑에 과한 다음 질문에 답하여라.

(1)제품 A의 생산판매량(sales)이 500 단위이면 순이익 (또는 순손실)은 얼마인가?

(2)제품 A의 생산판매량이 2,000 단위이면 순이익 (또는 순손실)은 얼마인가?

(3)제품 A으로부터의 순이익(또는 순손실)이 0이 되려면, 생산판매량을 얼마로 해야 하는가?

Q : amount of sales,   R: revenue,   C: cost,   Z: net profit

R = 200 * Q

C = 100,000 + 100 * Q

Z = R – C = 100Q – 100,000

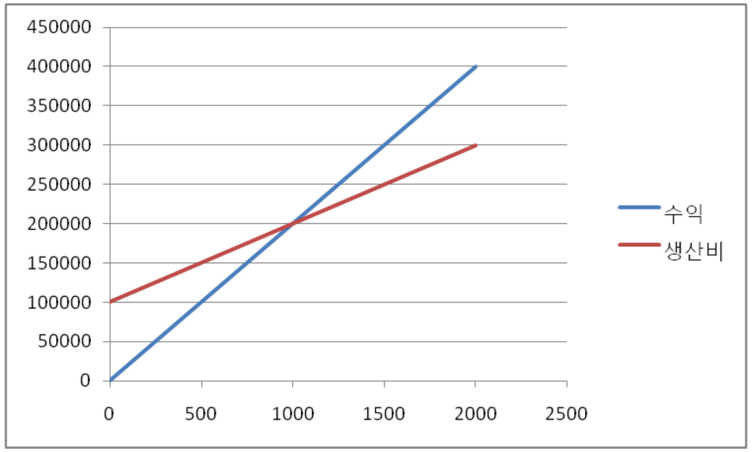
(1) -50,000

(2) 100,000

(3) Q satisfying 100Q – 100,000 = 0 (break-even point)

1,000

※ Excel software



3. Examples of mathematical model (2/2)

(E2) 수입원목을 이용하여 의자와 책상을 제작하는 세방가구는 다음 달의 생산계획을 수립하고자 한다. 다음 달에 이용 가능한 원목의 양은 50m^3 인데, 의자생산에는 개당 0.1m^3, 책상생산에는 0.4m^3가 소요된다. 다음 달에 동원할 수 있는 노동력은 1,200시간인데, 의자생산에는 개당 4시간, 책상 생산에는 개당 8시간이 소요된다.

생산된 의자와 책상은 수요가 높아서 전량 판매되는데 의자는 개당 10만원, 책상은 개당 25만원의 이익이 발생한다. 세방가구의 경영진은 이익이 최대가 되도록 의자와 책상의 다음 달 생산량을 결정하고자 한다.

X : Quantity of chair production,

Y: Quantity of desk production,

Z: net profit

hardwood : $0.1X + 0.4Y \le 50$

labor : $4X + 8Y \le 1200$

$X \ge 0, \quad Y \ge 0$

$Z = 10X + 25Y$

If X=100 and Y=100, Z = 3,500

X	Y	wood	labor	Possible?	Z
120	200	92	2080	no	6200
120	150	72	1680	no	4950
120	100	52	1280	no	3700
150	100	55	1400	no	4000
150	50	35	1000	OK	2750
150	60	39	1080	OK	3000
150	70	43	1160	OK	3250

→ **S/W (Lindo, R, Excel solver)**

4. Linear Programming (1/2)

- LP = Linear(선형) + Programming(계획법) : Linear Programming

  → For the decision problems in the real world,

  - **<u>Expressing alternatives as linear equations</u>**
  - Establishing a mathematical models where **<u>preferences are expressed as linear equations</u>**.

  → Generally, applied to **<u>efficiently allocate the limited resources</u>**

- Terminology

(1) Alternatives (or Preferences, Solution) 대안

- Feasible alternative (실행가능한 대안) : should **<u>satisfy the real world constraints(제약조건), conditions(조건), or requirements(요구사항)</u>** such as the limited amount of resources
- Optimal solution(최적해) : **<u>the alternative (solution) which maximizes profits or minimizes costs</u>**

(2) Programming(계획법)

- Expressing the problems in terms of **<u>mathematical equations or logical forms</u>**
- By using **<u>Simplex method or interior-point method</u>**, we obtain the optimal solution

(3) Linear equations (1차식, 선형식, 직선, 초평면, 곡선X, 곡면X)

- 1^{st} order function such as x+1, 3x+2y, and ….

4. Linear Programming (2/2)

- Applications of LP

✓ Production planning

- To produce various products with the limited resources
- What to produce and how many to produce in order to maximize the profit or minimize the cost

✓ Transportation and distribution problem

- To deliver manufactured goods from the warehouse (source) to wholesaler (destination)
- Maximal amount of supply in source and minimal amount of demand in destination
- Minimize the transportation cost through planning the best distribution policy

✓ Inventory management

- Adjusting the yield level every period in order to correspond the fluctuating demand
- If supply > demand, inventory (storage) cost increases
- Otherwise, production cost increases
- How many to produce to minimize the sum of inventory cost and production cost

✓ Financial portfolio selection

- Maximizing the expected returns with satisfying the pre-determined risk level
- Minimizing the risk level with satisfying the expected returns
- Investment planning and Asset operations

5. Establishment of LP (1/3)

[EX 2-1]

식탁용 나이프와 포크를 생산하는 삼영실업은 현재의 생산설비를 가지고 이익을 최대로 할 수 있도록 각 제품의 생산량을 결정하려 하고 있다. 이 제품들은 품질이 우수하여 생산된 제품 전량이 수출되고 있는데 각각 케이스당 **8,000원과 6,000원의 이익**이 발생한다. 이 제품들은 프레스공정(press job)과 광택공정(polish job)을 거치게 되는데 다음 1주일간 각 공정에서 사용 가능한 인력(workforce)은 **프레스공정의 경우 700시간이며, 광택공정의 경우 1,000시간**으로 추정된다. 한편, **나이프 한 케이스 생산에는 12분(0.2시간)의 프레스공정 인력과 30분(0.5시간)의 광택공정 인력이 소요되며, 포크 한 케이스 생산에는 24분(0.4시간)의 프레스공정 인력과 15분(0.25시간)의 광택공정 인력이 소요**된다. 삼영실업은 다음 1주일간의 나이프와 포크의 생산량을 **총 이익이 최대**가 되도록 결정하고자 한다.

<u>※ What to do:</u>

- ➢ Defining decision variables(의사결정변수): What to be decided?
- ➢ Objective function (목적함수) (mission or goal): What do you want to do by determining the values of decision variables? ex) cost minimization or profit maximization
- ➢ Constraints (제약식) (conditions or requirements): What to be fulfilled? ex) resource, money or time?

5. Establishment of LP (2/3)

- **Decision variables:**
  X_1: production for knife (case)
  X_2: production for fork (case)

- **Objective:**
  profit $Z = 8{,}000X_1 + 6{,}000X_2$ ← **Maximize**

- **Constraints:**
  $0.2X_1 + 0.4X_2 \leq 700$ ← **Press job**
  $0.5X_1 + 0.25X_2 \leq 1{,}000$ ← **Polish job**
  $X_1, X_2 \geq 0$ ← **Non-negative (비음의 수)**

$$\max_{X_1, X_2 \in R^+} \quad Z = 8{,}000X_1 + 6{,}000X_2$$

s.t.

$$0.2X_1 + 0.4X_2 \leq 700$$

$$0.5X_1 + 0.25X_2 \leq 1{,}000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

< LP model for EX 2-1 >

- What are the optimal values for X_1 and X_2, respectively?

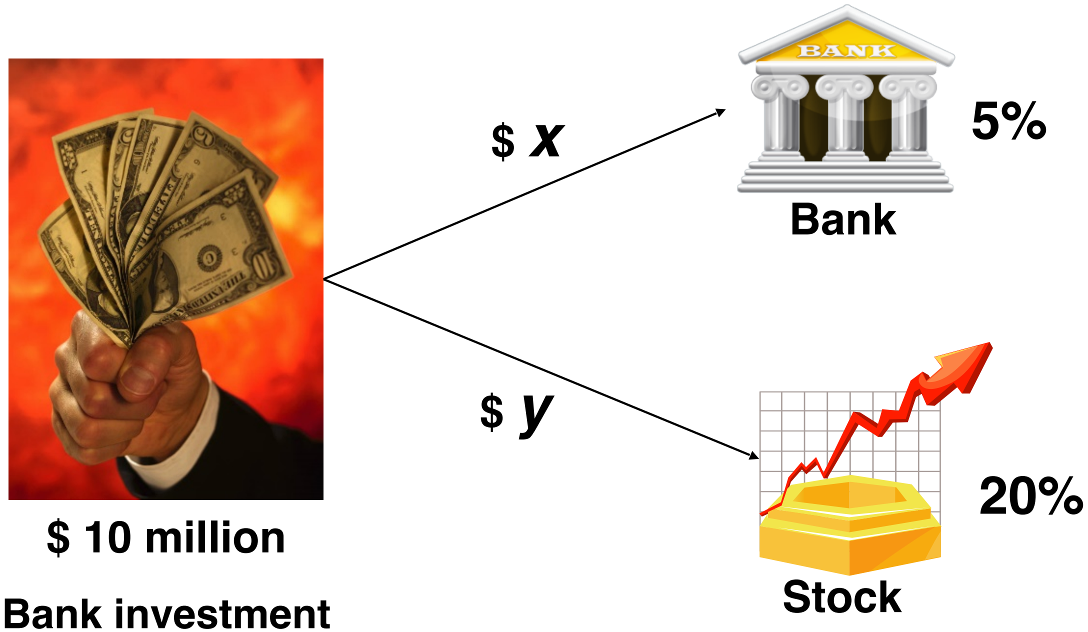
  ✓ $X_1^* = 1{,}500$, $X_2^* = 1{,}000$

  ✓ maximum value of profit : $Z^* = 8{,}000X_1^* + 6{,}000X_2^*$

  $= 18$ Million

5. Establishment of LP (3/3)

- Portfolio selection problem



$ 10 million

Bank investment should be more than 50% of total investments.

$$\max \; 0.05x + 0.20y$$

s.t.

$$x + y \le 10$$

$$x \ge 0.5(x + y)$$

$$x, y \ge 0$$

$$(x^*, y^*) = (5,\; 5)$$

6. Examples of LP model (1/8)

[EX 2-2] [Diet problem (식단문제)]

이 문제는 매일의 식단을 구성함에 있어서 하루에 필요한 영양분 요구량을 만족시키면서 **최소의 비용**을 갖는 식단구성방법을 모색하는 것이다. 이 예제에서는 참치, 우유, 시금치 및 빵을 이용하여 비타민 A, C, D와 철분의 1일 필요량을 만족하는 최소비용의 식단을 구성하려고 한다. 각 음식의 영양분 함유량과 가격이 다음 표에 나와 있다. 한편, 음식의 맛을 유지하기 위해서 참치는 최소한 0.1kg 이상, 빵은 반줄 이상 포함되어야 한다.

영 양 분	우유 (리터)	참치 (kg)	빵 (한 줄)	시금치 (kg)	1일 필요량
비타민A (단위: IU)	1,600	500	0	70,000	5,000
비타민C (단위: mg)	10	0	0	140	30
비타민D (단위: IU)	120	0	0	0	100
철분 (단위: mg)	7	14	13	16	12
가 격 (원)	1,000	3,000	650	600	-

(1) Decision variables: Milk (X_1), Tuna (X_2), Bread (X_3), Spinach(X_4)

(2) Objective: Objective: **Minimal diet cost** (Consider purchasing price for each ingredient)

→ $1{,}000X_1 + 3{,}000X_2 + 650X_3 + 600X_4$

(3) Constraints:

Required amount of Vitamin A → $1{,}600X_1 + 500X_2 + \quad + 70{,}000X_4 \geq 5{,}000$

Required amount of Vitamin C → $10X_1 + \quad 140X_4 \geq 30$

Required amount of Vitamin D → $120X_1 \quad \geq 100$

Required amount of iron → $7X_1 + 14X_2 + 13X_3 + 16X_4 \geq 12$

6. Examples of LP model (2/8)

(3) Constraints:

Minimal amount of tuna → $X_2 \geq 0.1$
Minimal amount of bread → $X_3 \geq 0.5$

$$\min \quad 1{,}000x_1 + 6{,}000x_2 + 650x_3 + 600x_4$$

$$\text{s.t.} \quad 1{,}600x_1 + 500x_2 + 70{,}000x_4 \geq 5{,}000$$

$$10x_1 + 140x_4 \geq 30$$

$$120x_1 \geq 100$$

$$7x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 600x_4 \geq 12$$

$$x_2 \geq 0.1$$

$$x_3 \geq 0.5$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1551.190

VARIABLE	VALUE
X1	0.833333
X2	0.100000
X3	0.500000
X4	0.154762

6. Examples of LP model (3/8)

[EX 2-3] [Production and distribution problem (생산 및 배분문제)] network, transportation 수송문제

A회사는 지역적으로 위치가 다른 두 개의 공장을 갖고 있으며 세 지역에 중간창고를 갖고 있다. 각 **중간창고(warehouse)에서는 다음 달에 각각 500, 2,000 및 900개의 제품을 보내달라고 요구**하고 있다. 또한 **두 개의 공장에서 다음 달에 공급할 수 있는 양은 각각 2,300, 1,500개 이내**에서 가능하다. **제1공장에서의 생산단가는 15만 원이며 제2공장에서는 인력이 비싸고 시설이 노후함으로 말미암아 생산단가는 20만 원이다.** 또한, 각 공장에서 창고로의 수송비용(단위: 만원/개)은 다음 표에 주어져 있다. A사에서는 생산비와 수송비의 합이 **최소**가 되도록 생산 및 배분계획을 수립하고자 한다.

공장 \ 창고	1	2	3
1	3	9	8
2	7	2	4

(1) Decision variables:

How many to produce in each factory? And How many to transport in each warehouse?

X_{ij} : manufactured volume in factory i and transported volume to warehouse j

(2) Objective:

Want to minimize the sum of production and transportation cost

Production costs are 150K won for factory 1 won and 200K won for factory 2 + transportation cost

$(15+3)X_{11} + (15+9)X_{12} + (15+8)X_{13} + (20+7)X_{21} + (20+2)X_{22} + (20+4)X_{23}$ **의 최소**

(3) Constraints:

Warehouse: $X_{11} + X_{21} = 500$ (W1) | $X_{12} + X_{22} = 2{,}000$ (W2) | $X_{13} + X_{23} = 900$ (W3)

Factory: $X_{11} + X_{12} + X_{13} \le 2{,}300$ (F1) | $X_{21} + X_{22} + X_{23} \le 1{,}500$ (F2)

$$\min \quad 18x_{11} + 24x_{12} + 23x_{13} + 27x_{21} + 22x_{22} + 24x_{23}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{11} + x_{21} = 500$$

$$x_{12} + x_{22} = 2,000$$

$$x_{13} + x_{23} = 900$$

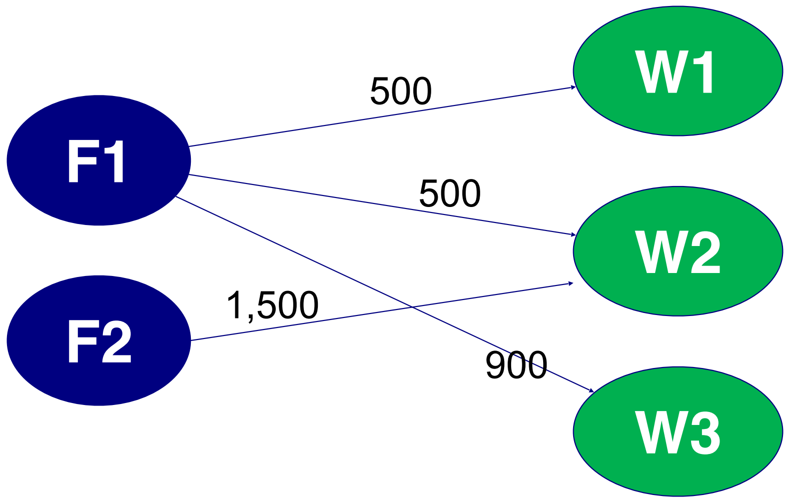
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 2,300$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 1,500$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 74700.00

VARIABLE	VALUE
X11	500.000000
X12	500.000000
X13	900.000000
X21	0.000000
X22	1500.000000
X23	0.000000



6. Examples of LP model (5/8)

[EX 2-4] [Blending problem (배합문제)]

B사는 금년에 두 종류의 비료(fertilizer)를 생산하여 팔려고 한다. 하나는 일반(general) 비료이며 또 하나는 특수(special) 비료이다. 비료는 두 가지 원료(raw material)를 섞어서 만드는데 각 원료는 질소(Nitrogen)와 인산(phosphoric acid)의 함유비율이 다르다. 각 원료의 가격 및 성분 함유비율은 다음 표와 같다.

원 료	가 격 (원/kg)	질 소 (%)	인 산 (%)
1	1,000	60	10
2	1,500	10	40

이번 달에는 **특수비료가 25kg짜리 부대로 5,000 부대, 일반용이 7,000 부대가 팔릴** 것으로 보인다. **특수비료는 질소의 함유량이 40~50%이어야 하며 일반용 비료는 20% 이상의 인산을 함유**하여야 한다. **최소의 비용**으로 수요를 만족시키려면 어떻게 혼합하여 생산해야 할 것인가?

(1) Variables:

Input volume of raw material 1 and 2 to produce **special** fertilizer: X_1 , X_2

Input volume of raw material 1 and 2 to produce **general** fertilizer : Y_1 , Y_2

(2) Objective:

Produce special and general fertilizer with **minimal cost** by blending raw material 1 and 2

Minimize $1{,}000X_1+1{,}500X_2+1{,}000Y_1+1{,}500Y_2$ (purchasing cost of raw material x input volume)

(3) Constraints:

Expected demand volume for special and general fertilizer:

$X_1 + X_2 \geq 125{,}000$ (for special fertilizer)

$Y_1 + Y_2 \geq 175{,}000$ (for general fertilizer)

6. Examples of LP model (6/8)

(3) Constraints:

Containing concentrations for nitrogen and phosphoric acid:

$$0.4 \le \frac{0.6X_1+0.1X_2}{X_1+X_2} \le 0.5 \text{ (for special fertilizer)}$$

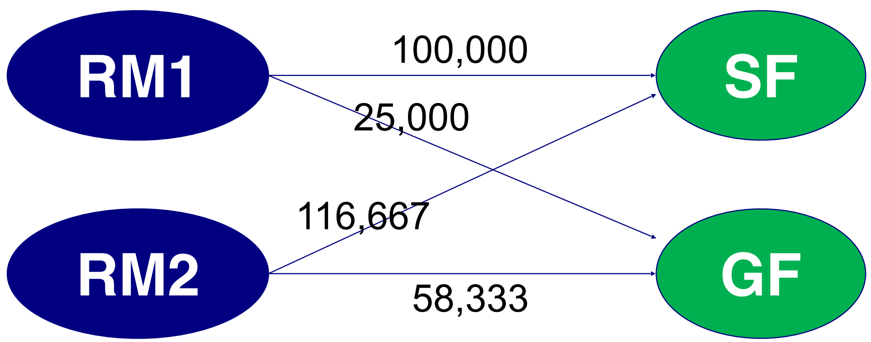
$$\frac{0.1Y_1+0.4Y_2}{Y_1+Y_2} \ge 0.2 \text{ (for general fertilizer)}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & 1{,}000x_1 + 1{,}500x_2 + 1{,}000y_1 + 1{,}500y_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \ge 125{,}000 \\
& y_1 + y_2 \ge 175{,}000 \\
& 0.4 \le \frac{0.6x_1 + 0.1x_2}{x_1 + x_2} \le 0.5 \\
& \frac{0.1y_1 + 0.4y_2}{y_1 + y_2} \ge 0.2 \\
& x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \ge 0
\end{aligned}$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.3416667E+09

VARIABLE	VALUE
X1	99999.992188
X2	25000.003906
Y1	116666.664062
Y2	58333.332031



6. Examples of LP model (7/8)

[EX 2-5] [Production scheduling problem (생산계획 문제)]

C사에서는 여러 가지의 작업을 각기 어느 기계를 통하여 수행하는 것이 전체 **비용을 최소**로 할 것인가를 결정하고자 한다. C사에서는 두 종류의 기계를 이용하여 3가지 제품들을 생산하고 있는데 각 제품을 어느 기계로 생산하느냐에 따라서 생산비 및 소요시간에 차이가 있다. 최근 평균 **하루에 제품 1, 2, 3을 각각 300개, 700개, 400개씩 생산**하고 있다. 이 회사에는 **기계 1은 100대, 기계 2는 80대**가 있는데 모두 **하루에 8시간**까지 가동할 수 있다. 다음 표는 생산비용과 생산소요시간을 보여주고 있다.

	i번째 기계로 j번째 제품을 생산할 때의 생산비용 (만원/개)			i번째 기계로 j번째 제품을 생산할 때의 소요시간 (시간/개)		
제품 / 기계	1	2	3	1	2	3
1	13	9	10	0.4	1.1	0.9
2	11	12	8	0.5	1.2	1.3

(1) Variables: X_{ij} : manufactured volume of goods j on machine i

(2) Objective: Minimize $13X_{11}+9X_{12}+10X_{13}+11X_{21}+12X_{22}+8X_{23}$

(3) Constraints:

Daily manufactured volume of goods:

$X_{11} + X_{21} = 300$ (for goods 1)

$X_{12} + X_{22} = 700$ (for goods 2)

$X_{13} + X_{23} = 400$ (for goods 3)

6. Examples of LP model (8/8)

(3) Constraints:

Available operation time for machines:	$0.4X_{11} + 1.1X_{12} + 0.9X_{13} \le 800$ (for machine 1) $0.5X_{21} + 1.2X_{22} + 1.3X_{23} \le 640$ (for machine 2)

$$\begin{aligned}
\min \quad & 13x_{11} + 9x_{12} + 10x_{13} + 11x_{21} + 12x_{22} + 8x_{23} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{21} = 300 \\
& x_{12} + x_{22} = 700 \\
& x_{13} + x_{23} = 400 \\
& 0.4x_{11} + 1.1x_{12} + 0.9x_{13} \le 800 \\
& 0.5x_{21} + 1.2x_{22} + 1.3x_{23} \le 640 \\
& x_{ij} \ge 0, \ \forall i, \ \forall j
\end{aligned}$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 12846.15

VARIABLE	VALUE
X11	0.000000
X12	700.000000
X13	23.076923
X21	300.000000
X22	0.000000
X23	376.923065

Homework 1

[Portfolio selection problem (포트폴리오 선택 문제)]

M 에셋에서는 **200억 달러**의 신규 자금을 확보하고 이를 다음의 4가지 주식에 투자할 생각을 가지고 있다.

주식	A	B	C	D
주당 가격($)	10	5	8	4
연간 예상수익률(%)	12	8	3	10
만원당 위험지수	0.1	0.07	0.01	0.08

위험지수는 각 주식이 예상수익을 벗어날 가능성의 척도로서 이 값이 크면 1년 후 실제로 얻는 수익이 지금의 예상수익률을 벗어날 가능성이 더 높다는 것을 의미한다. 예를 들어 주식 A의 경우 연간 예상수익률은 가장 높지만 위험지수도 높아서 1년이 지난 후 실제로 얻는 수익은 때로는 12%보다 훨씬 높을 수도 있지만 12%보다 훨씬 낮을 수도 있고 때로는 손실이 일어날 수도 있다.

반면에 주식 C는 예상수익률은 낮지만 위험지수도 매우 낮아서 1년 후에 발생하는 실제 수익은 현재 예상하고 있는 3%와 거의 같게 될 것으로 판단할 수 있다. 이 위험지수는 투자분석실에서 제공된 값이다. 선택 된 **포트폴리오**(portfolio: 투자하기로 결정된 주식들의 분포)의 총 위험지수는 각 주식에 투자된 금액의 위험지수들의 합이다. 경영진에서는 첫째, 포트폴리오의 **연간 예상수익은 최소한 18억 달러 이상** 되어야 하며 둘째, **어느 주식에도 총 투자금액의 50% 이상을 투자해서는 안 된다**는 투자지침을 제시하였다. 이러한 지침 하에서 **위험을 최소로 줄일 수 있는 포트폴리오를 수립**하려면 어떻게 하여야 하는가?

Describe decision variables, objective function, and constraints.