Linear Programming (LP)

2024 Fall

Doo Ho Lee

1. How to solve LP problems

(1) Graphical method (도해법) (when we have two or three decision variables)

- Feasible region(실행가능영역): set of the decision variables which satisfies all constraints
- Define the two-dimensional region in the coordinate system and find the optimal solution (point) that maximize or minimize the objective function
  → Usually, crossing point of two constraint functions

(2) Simplex (Simple + Complex) Algorithm.

- By using Gauss-Jordan elimination method, find optimal solution of the objective function
- Searching all vertices of feasible region and select the vertex that gives the optimal point (Similar to the graphical method)

(3) OR SWs

- EXCEL, K-OPT, **LINDO**, CPLEX, R
- LINDO: Make a code for computer to use the Simplex method
- EXCEL: Use solver function

➢ Goal of this class

- Understanding the graphical method: Principals of Simplex method
- Enhancing the ability to use SW: **Mathematical Modeling** → **Coding** → **Analyzing results**

2. Graphical method (도해법) – (1) Maximization problem

Solve the following LP problem.

$$\boxed{\max}\quad Z = 1.5x + y$$

$$\text{s.t.}\quad x \le 4$$

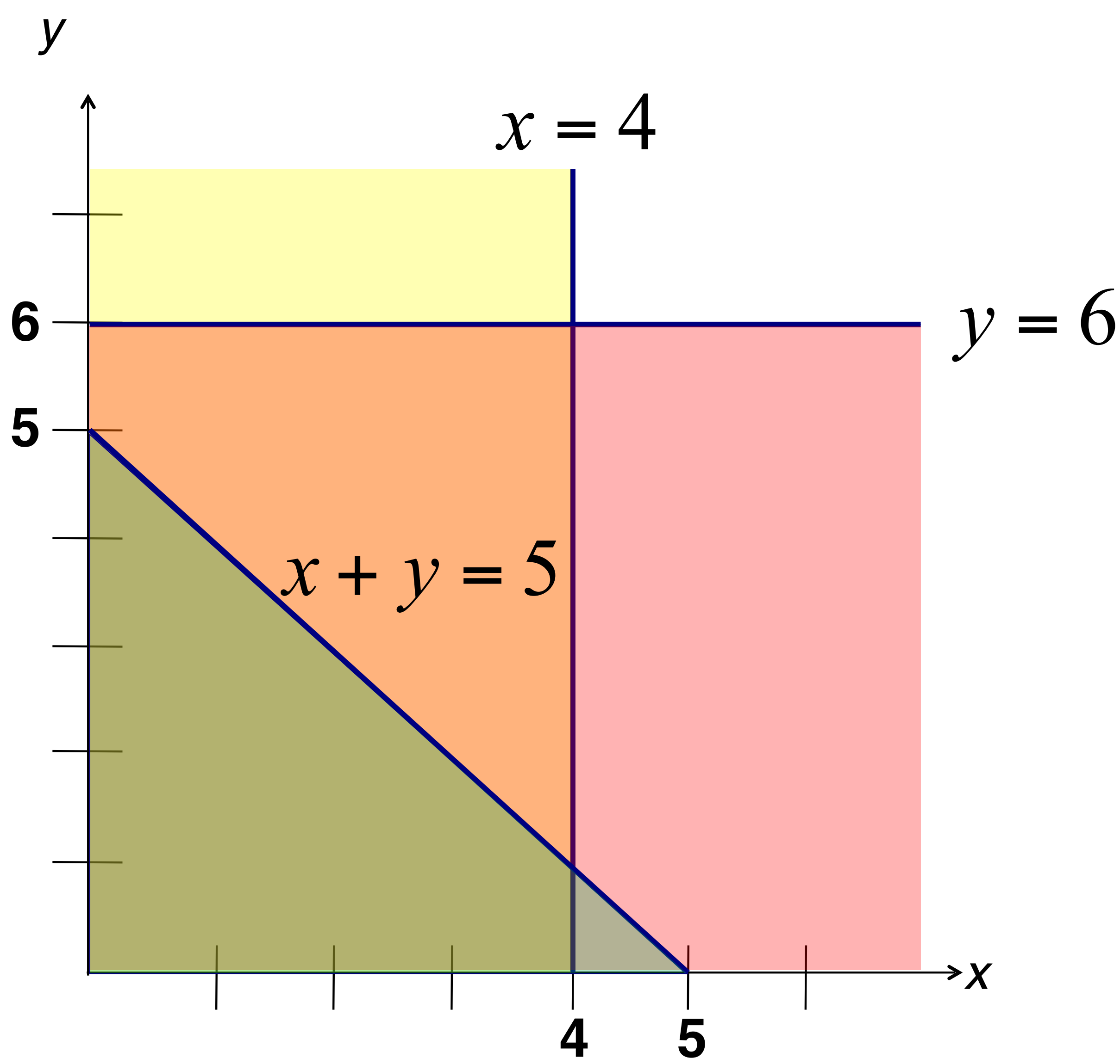
$$y \le 6$$

$$x + y \le 5$$

$$x,\ y \ge 0$$

1st STEP: Define Feasible Region

: Plot all constraints (inequalities)



What is the common and overlapped area?

Solve the following LP problem.

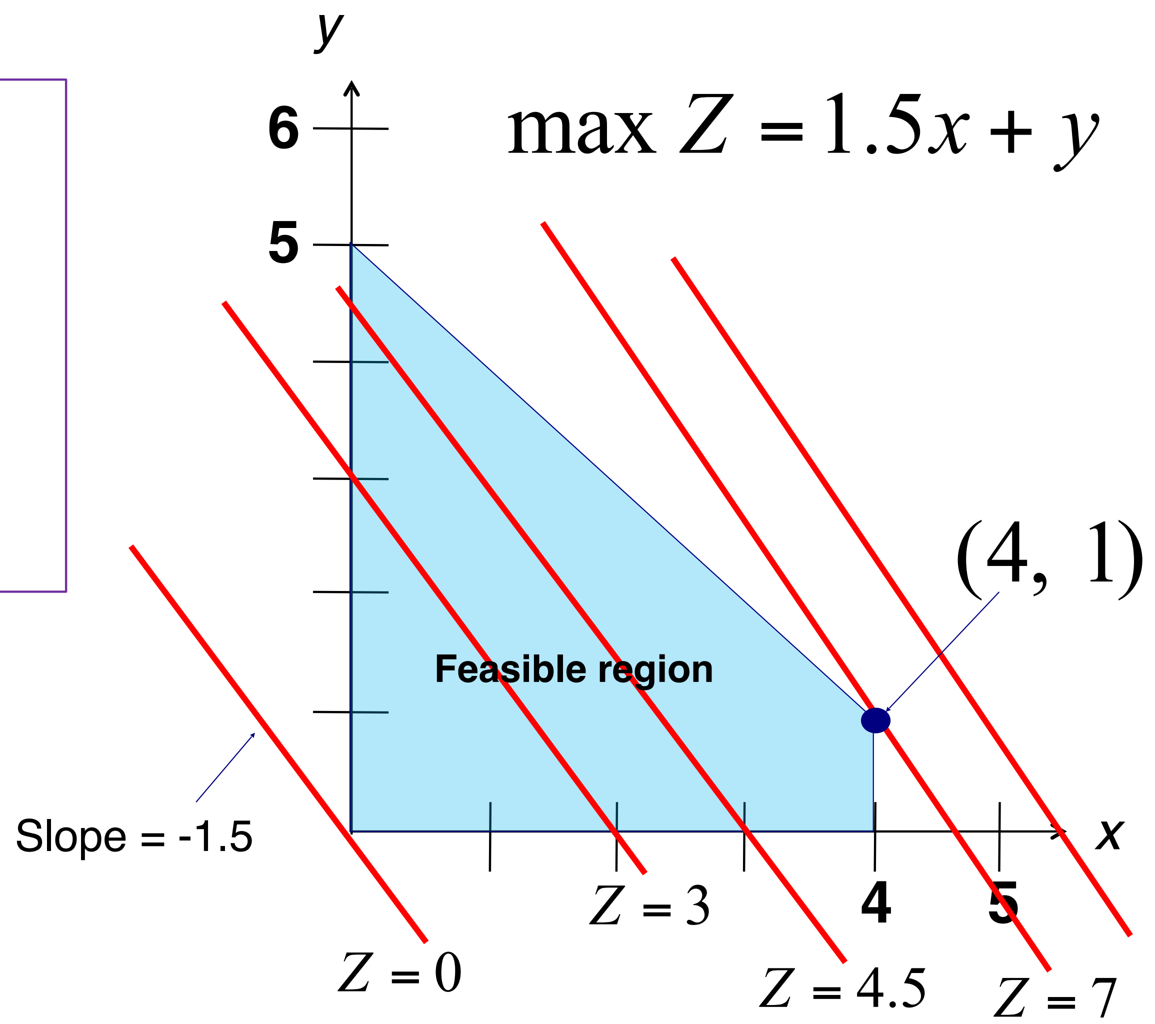
2nd STEP: To locate objective function

i) Satisfying all constraints

ii) **Maximizing** the value of the objective function

→ Find the optimal solution (point)

$$Z^* = \max\ Z$$
$$= 1.5x^* + y^*$$
$$= 1.5 \times 4 + 1 = 7$$



2. Graphical method – (2) Minimization problem

Solve the following LP problem.

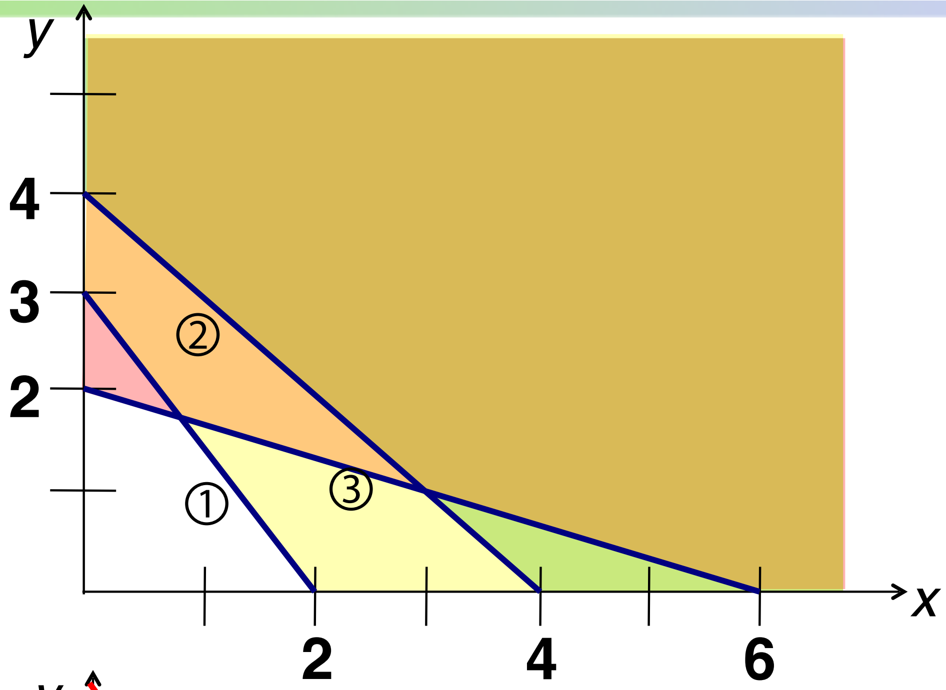
$$\boxed{\min}\quad Z = 8x + 5y$$

$$\text{s.t.}\quad 3x + 2y \geq 6 \quad ①$$

$$x + y \geq 4 \quad ②$$

$$2x + 6y \geq 12 \quad ③$$

$$x,\ y \geq 0$$

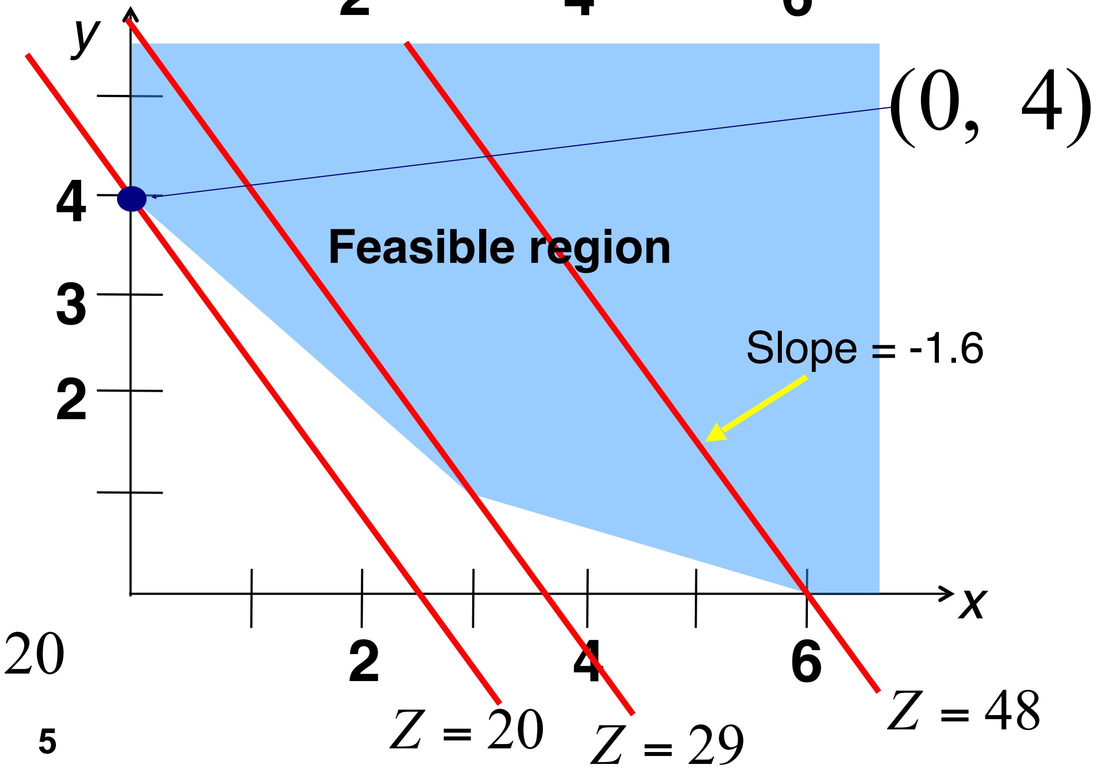


2nd STEP: To locate objective function

i) Satisfying all constraints

ii) **Minimizing** the value of the objective function

→ Find the optimal solution (point)



$$Z^* = \min\ Z = 8x^* + 5y^* = 8 \times 0 + 5 \times 4 = 20$$

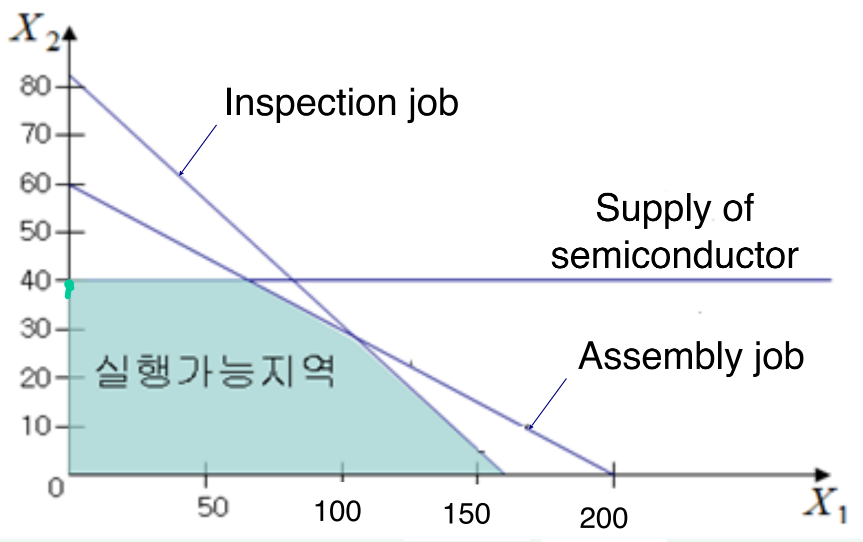
3. Example of LP model analysis

[EX 3-1]

일반앰프와 고성능앰프를 생산하는 소규모 전자회사인 F전자는 현재의 생산능력 안에서 이익이 최대가 되도록 각 제품의 생산량을 결정하려 하고 있다. 앰프생산은 조립공정(assembly job)과 검사공정(inspection job)을 거치게 되는데, 각 공정에서 하루에 이용 가능한 인력은 각각 240시간 및 81시간이고, 일반앰프를 생산하는 데에는 개당 1.2시간의 조립공정과 0.5시간의 검사공정의 인력이 소요되며, 고성능앰프 생산의 경우 개당 4시간의 조립공정과 1시간의 검사공정의 인력이 소요된다. 특히 고성능앰프의 경우 특수 반도체(semiconductor) 칩이 1개씩 소요 되는데 최근 이 칩의 공급이 원활치 못하여 하루에 40개씩만을 조달할 수 있다. 이 회사에서 생산된 앰프는 품질이 좋아서 전량 판매되고 있으며 일반앰프는 개당 20만 원, 고성능앰프는 개당 50만 원의 이익을 내고 있다.

$$
\begin{array}{llr}
\max & Z = 20X_1 + 50X_2 & \text{(total profit)} \\
s.t. & 1.2X_1 + 4X_2 \le 240 & \text{(assembly job)} \\
 & 0.5X_1 + X_2 \le 81 & \text{(inspection job)} \\
 & X_2 \le 40 & \text{(supply of semiconductor)} \\
 & X_1, X_2 \ge 0 & \text{(non-negative)}
\end{array}
$$

3. Example of LP model analysis



1ST STEP: Define feasible region

$$1.2X_1 + 4X_2 \le 240 \qquad \text{(assembly job)}$$

$$0.5X_1 + X_2 \le 81 \qquad \text{(inspection job)}$$

$$X_2 \le 40 \qquad \text{(supply of semiconductor)}$$

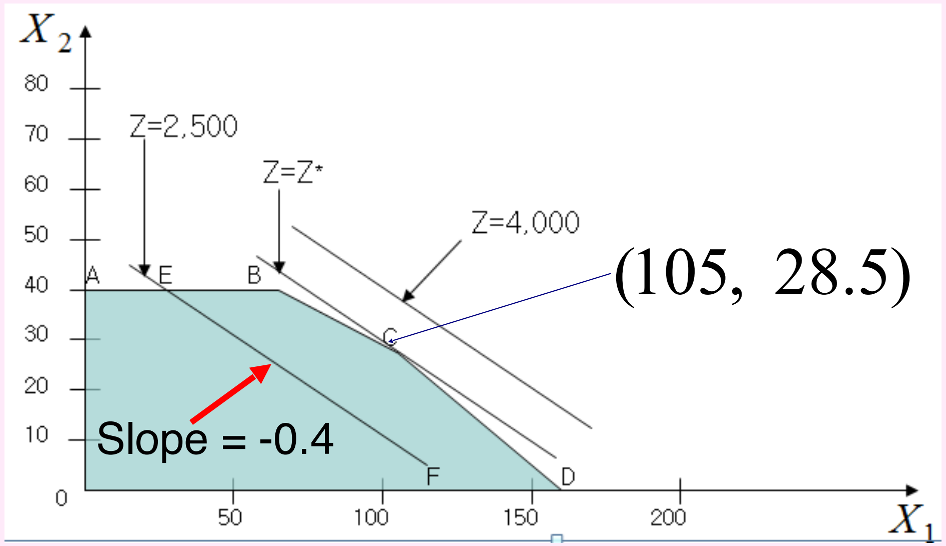
$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad \text{(non-negative)}$$

2ND STEP: Locate objective function

$$Z = 20X_1 + 50X_2$$

$$Z^* = \max\ Z = 20X_1^* + 50X_2^*$$

$$= 20 \times 105 + 50 \times 28.5 = 3,525$$



3. Example of LP model analysis

➢ **Constraints and surplus(잉여, slack)**

$$\boxed{1.2X_1 + 4X_2 \leq 240 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = 240 - (1.2X_1 + 4X_2),\ S_1 \geq 0}$$

– Surplus of 1st constraint at the optimal point:

$$\boxed{S_1 = 240 - (1.2 \times 105 + 4 \times 28.5) = 0}$$

- Surplus of the 1st constraint is 0 ⇔ Binding constraint

– The 2nd one is also a binding constraint.

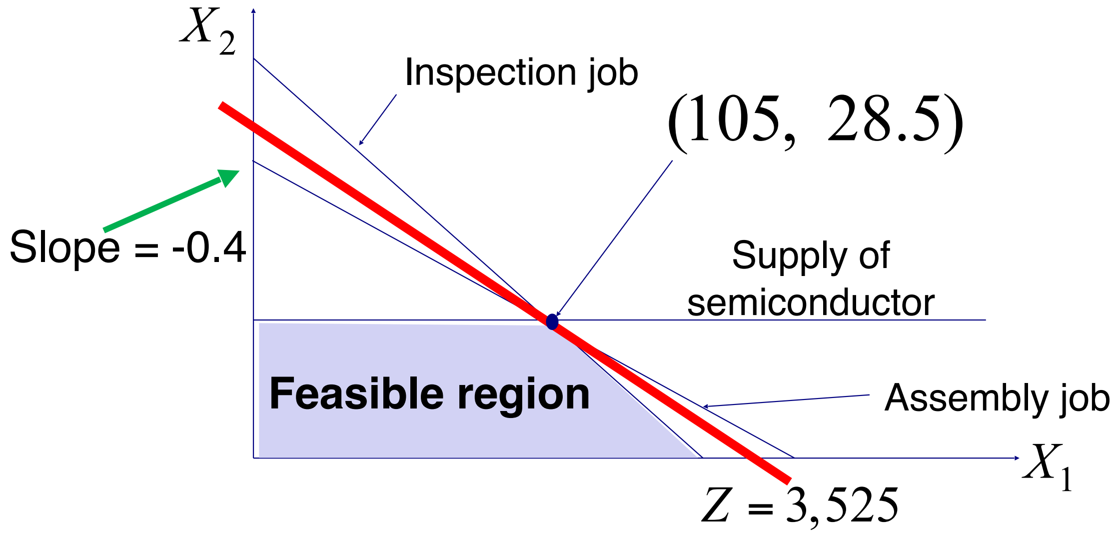
$$\boxed{S_2 = 81 - (0.5 \times 105 + 28.5) = 0}$$

– Surplus of 3rd constraint :

→ The 3rd one is non-binding.

$$\boxed{S_3 = 40 - 28.5 = 11.5 > 0}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z = 20X_1 + 50X_2 \\
\text{s.t.} \quad & 1.2X_1 + 4X_2 \leq 240 - 0 \\
& 0.5X_1 + X_2 \leq 81 - 0 \\
& X_2 \leq 40 - 11.5 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}$$



3. Example of LP model analysis

[EX 3-2]

A 대학 구내식당의 영양사인 김양은 학생들이 적절한 건강을 유지하기 위해서는 매일 단백질 66g과 철분 9mg을 섭취하여야 한다는 것을 알고 있다. 이 영양분들은 고기와 야채를 통해 제공되는데 고기는 1kg에 300g의 단백질과 30mg의 철분을 함유하고 있으며, 야채는 1kg에 20g의 단백질과 10mg의 철분을 함유하고 있다. 이 식당에서는 고기는 1kg에 6,000원, 야채는 1kg에 1,000원씩에 구입하고 있다. 김양은 학생들의 건강을 적절히 유지하면서 식품 구입비를 최소로 하는 구매계획을 세우고자 한다.

❖ **Solve above problem by using graphical method.**

X_1 : meat

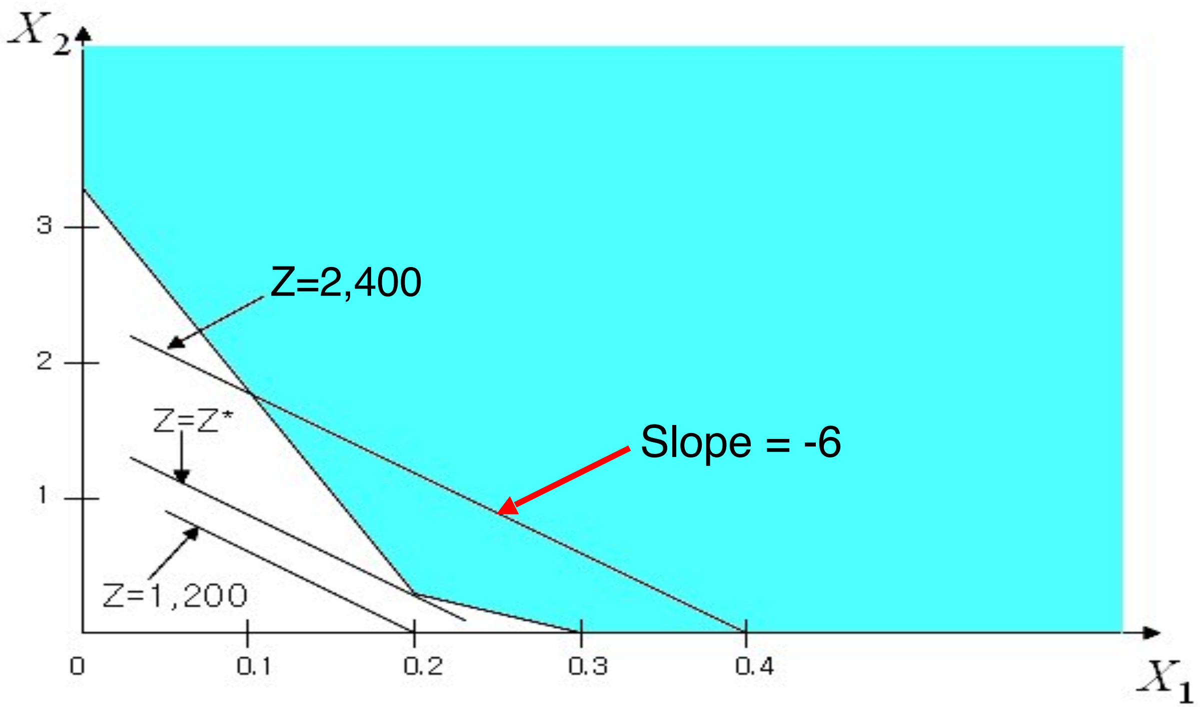
X_2 : vegetable

$$\min \ Z = 6,000X_1 + 1,000X_2$$

$$\text{s.t.} \quad 300X_1 + 20X_2 \geq 66$$

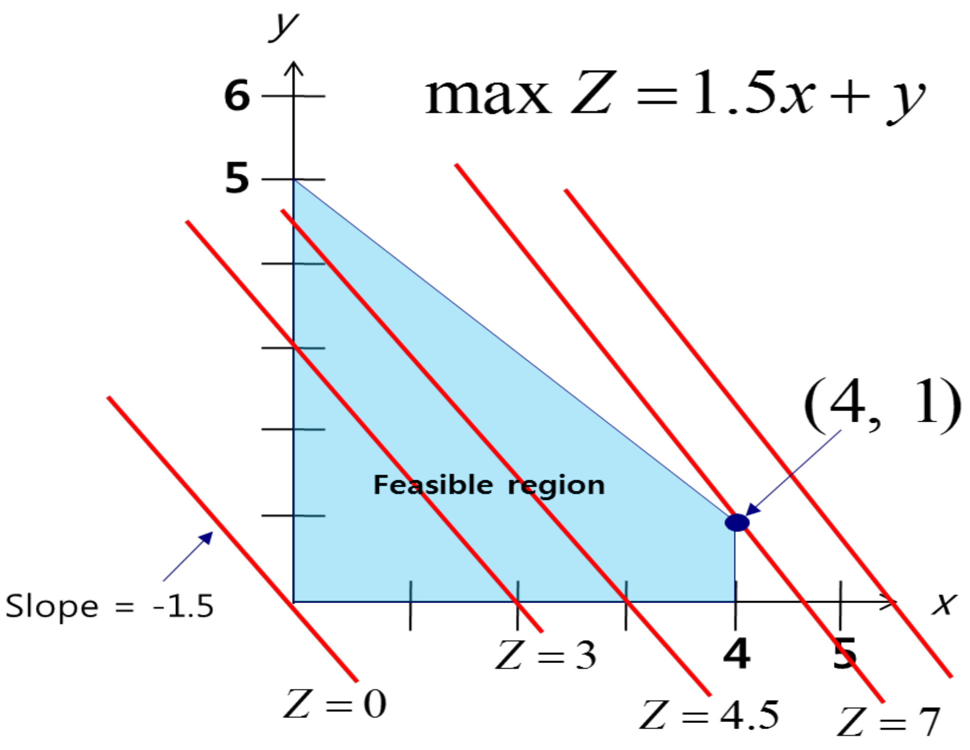
$$30X_1 + 10X_2 \geq 9$$

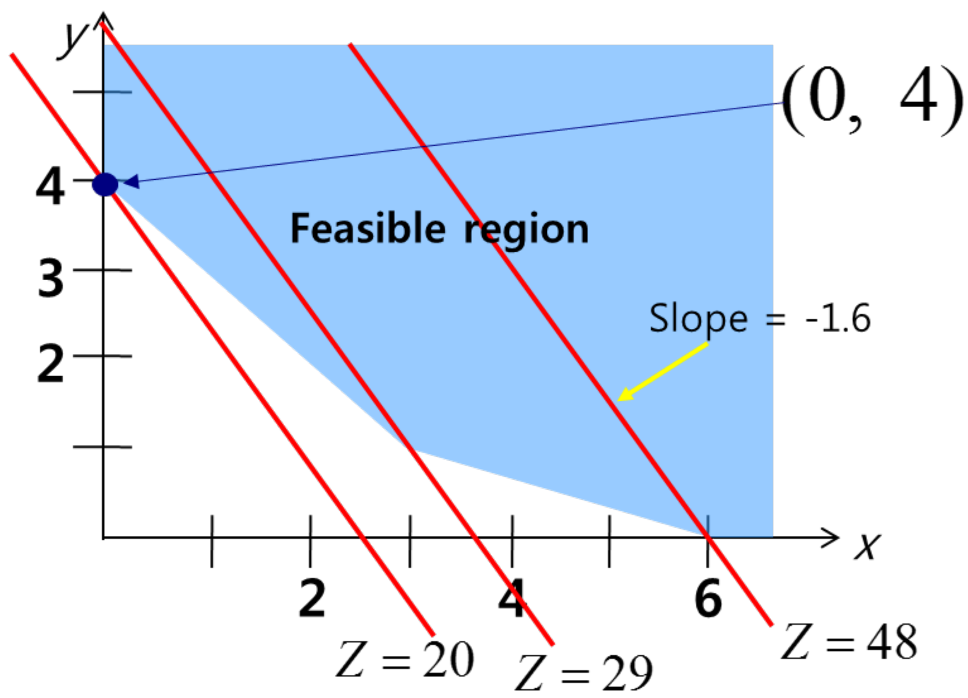
$$X_1, X_2 \geq 0$$



Extreme point theorem (극점정리)

Any LP problem with a nonempty bounded feasible region has an optimal solution; moreover, **an optimal solution can always be found at an extreme point(vertex)of the problem's feasible region.**





[EX 3-3] Workforce problem (인력관리 문제)

K전자는 새로운 사업을 확장함에 따라 기능공(expert)과 견습공(apprentice)을 채용할 계획에 있다. 기능공을 고용하는 경우 시간당 10,000원의 비용이 들고 견습공의 경우 5,000원의 비용이 든다. K전자가 신규고용계획에 사용할 수 있는 자금은 1억 5천만 원으로 노동조합과의 계약에 의해 이 자금은 전량 신규고용계획에 사용되어야 한다. 고용된 기능공에 대해 2,500시간은 견습공을 훈련시키는 데에 사용되고, 나머지는 작업에 투입되며 노동조합에서는 견습공의 고용시간을 작업에 투입된 기능공의 시간의 두 배 이상이 될 것을 요구하고 있다. 또한 K전자는 현재 최소한 10,000시간의 견습공시간을 필요로 하고 있다. 현재의 원가분석에 의하면 기능공은 시간당 3,000원, 견습공은 시간당 1,250원의 이익을 가져다 주고 있다. 경영진은 총이익을 최대로 하는 고용계획을 세우려 한다.

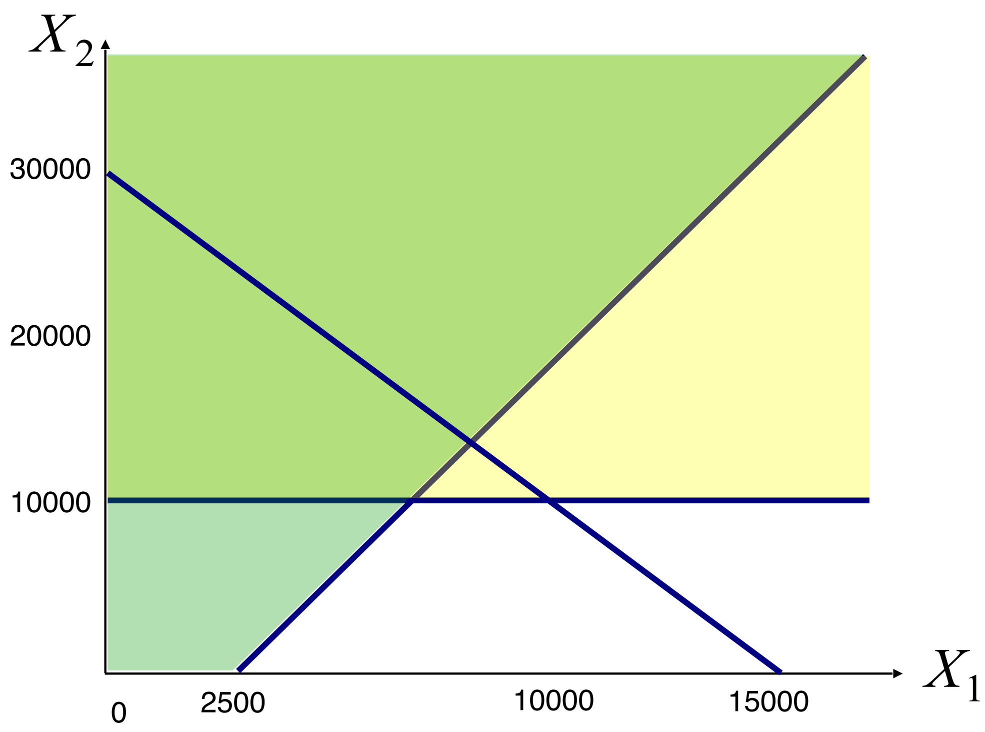
- Decision variables : $X_1 = \text{time of employment for expert}$

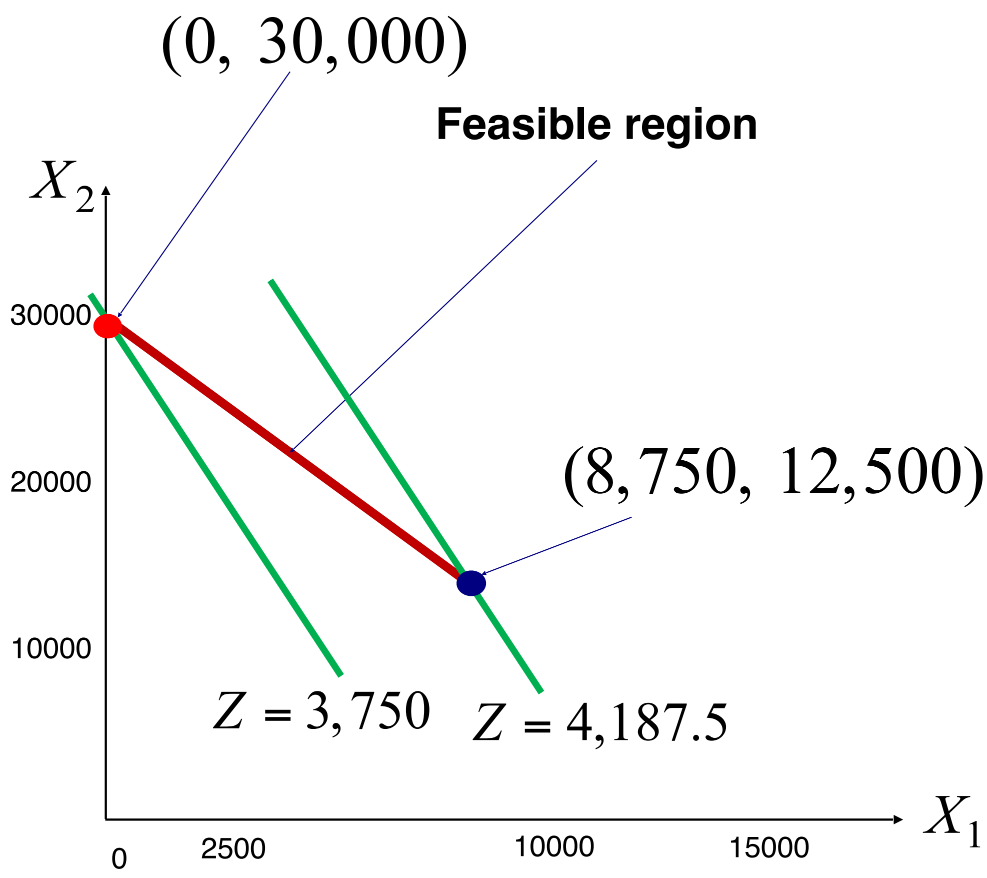
  $X_2 = \text{time of employment for apprentice}$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = 0.3X_1 + 0.125X_2 \\
\text{s.t.} \quad & X_1 + 0.5X_2 = 15,000 \\
& X_2 \geq 2(X_1 - 2,500) \\
& X_2 \geq 10,000 \\
& X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\max \quad & Z = 0.3X_1 + 0.125X_2 \\
\text{s.t.} \quad & X_1 + 0.5X_2 = 15,000 \\
& 2X_1 - X_2 \leq 5,000 \\
& X_2 \geq 10,000 \\
& X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

5. General LP analysis – (1) equality form of constraints

➢ Graphical method





$$Z^* = \max\ Z = 0.3x_1^* + 0.125x_2^* = 0.3 \times 8{,}750 + 0.125 \times 12{,}500 = 4{,}187.5$$

5. General LP analysis – (2) Decision variable without non-negativity condition

- Example

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 2X_1 + X_2 \\ \text{s.t.} \quad & -X_1 + X_2 \le 10 \\ & X_1 + X_2 \ge 0 \\ & X_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & Z = 2y_1 - 2y_2 + X_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 + X_2 \le 10 \\ & y_1 - y_2 + X_2 \ge 0 \\ & y_1, y_2, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Replace

$X_1 = y_1 - y_2$

$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0$

- Result

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) -5.000000

VARIABLE	VALUE
Y1	0.000000
Y2	5.000000
X2	5.000000

$$X_1^* = -5, \; X_2^* = 5$$

6. Special cases – (1) Infeasibility (최적해가 존재하지 않음, 답이 없다.)

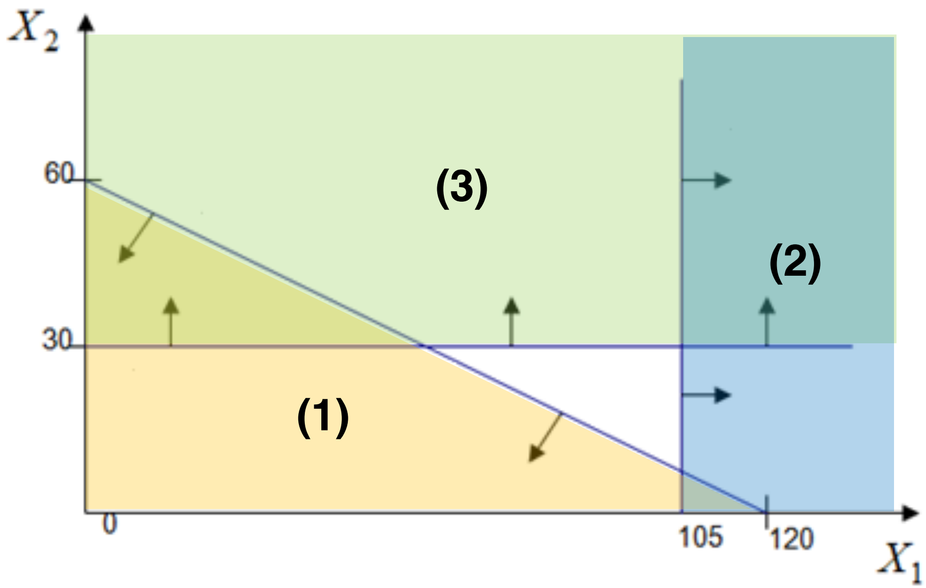
[EX 3-4]

건축설계가인 박씨는 보급형 태양에너지 주택의 설계를 정부로부터 의뢰 받았다. 이 주택은 주거지역과 에너지관리지역으로 구성되는데 주거지역은 최소한 105m^2 이상, 에너지관리지역은 최소한 30m^2 이상 되어야 한다. 건설비는 주거지역이 200만원/m^2, 에너지관리지역은 400만원/m^2 이 소요된다. 정부에서는 총 건축비 24,000만 원 이내에서 총면적이 최대가 되도록 설계하기를 요구하고 있다.

X_1 = Area of residence (m^2)

X_2 = Area of Energy management (m^2)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = X_1 + X_2 \\
\text{s.t.} \quad & 200X_1 + 400X_2 \le 24{,}000 && (1) \\
& X_1 \ge 105 && (2) \\
& X_2 \ge 30 && (3) \\
& X_1,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



No overlapped area = infeasible

6. Special cases – (2) Infinite optimal solution (최적해가 존재하되 최적해의 값은 무한대)

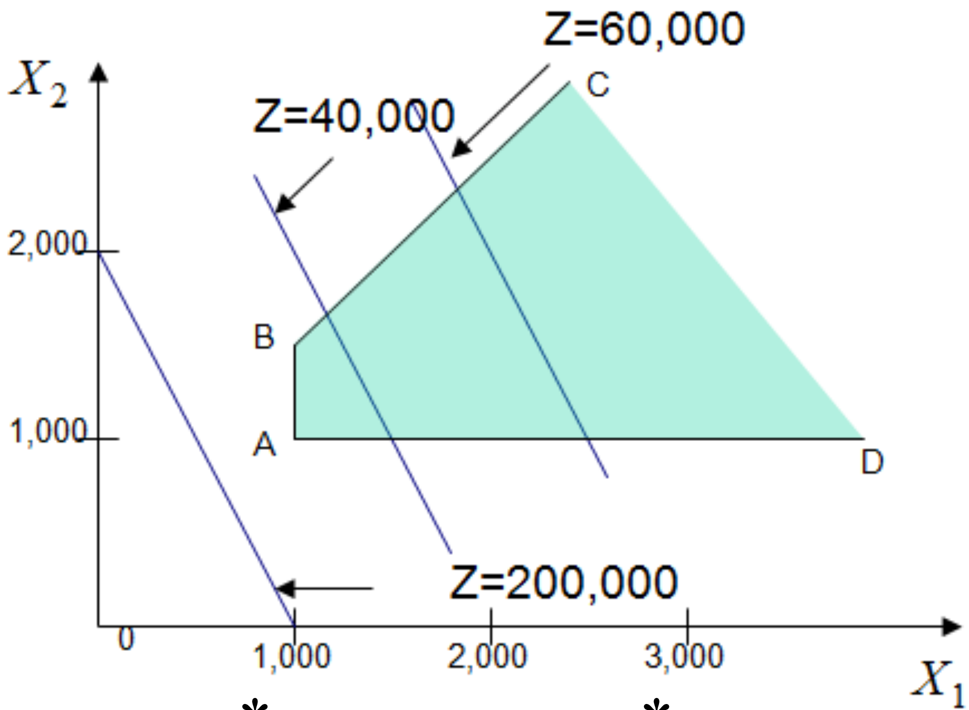
[EX 3-5]

S공업에서는 A형과 B형의 두 가지 특수모터를 생산하고 있다. 다음달 공급계약을 이행하기 위해서는 최소한 각각 1,000대 이상씩을 생산하여야 하며 회사의 정책상 B형 모터를 A형 모터보다 500대 이상 많이 생산하는 것은 피할 생각이다. A형, B형 모터의 개당 이익은 각각 20만원 및 10만원이다. S공업에서는 이익을 최대로 하는 생산계획을 수립하고자 한다.

X_1 = production volume of type A motor

X_2 = production volume of type B motor

$$\begin{aligned} \max\ & Z = 20X_1 + 10X_2 \\ \text{s.t.}\ & X_1 \geq 1,000 \\ & X_2 \geq 1,000 \\ & -X_1 + X_2 \leq 500 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

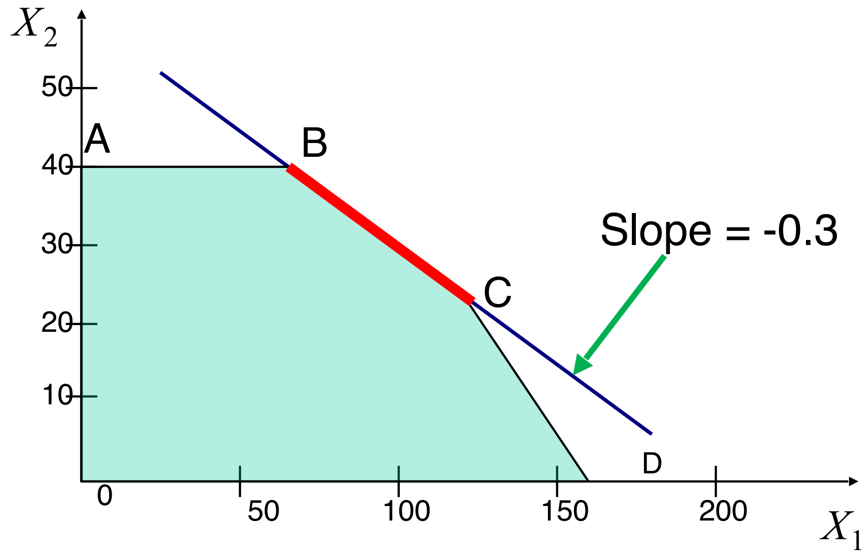


$$X_1^* \rightarrow \infty,\ X_2^* \rightarrow \infty$$

6. Special cases – (3) Multiple optimal solutions

➢ In EX 3-1, replace the objective function by the following equation: $Z = 15X_1 + 50X_2$

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 15X_1 + 50X_2 \\ \text{s.t.} \quad & 1.2X_1 + 4X_2 \le 240 \\ & 0.5X_1 + X_2 \le 81 \\ & X_2 \le 40 \\ & X_1,\ X_2 \ge 0 \end{aligned}$$



- Any points which lies on the red line can be optimal.

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3000.000

VARIABLE	VALUE
X1	105.000000
X2	28.500000

Point C

Let's learn how to use LINDO