

7) Показать, что произвольные дважды дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

8) Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Показать, что функции x и x^2 линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке $x = 0$. Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения?

9) Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения y_1 , y_2 и y_3 .

10) Доказать, что для того чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

§ 5.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$).

1. $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

3. $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

4. $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

5. $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$.

6. $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$.

7. $(e^{2x} + 5) dy + ye^{2x} dx = 0$.

8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

9. $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

10. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$.

11. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$.
12. $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
13. $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$.
14. $x\sqrt{4 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$.
15. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$.
16. $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0$.
17. $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$.
18. $y \ln y + xy' = 0$.
19. $(1 + e^x)y' = ye^x$.
20. $\sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
21. $6x dx - 2y dy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$.
22. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$.
23. $(3 + e^x)yy' = e^x$.
24. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}yy' = 0$.
25. $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$.
26. $\sqrt{5 + y^2} dx + 4(x^2 y + y) dy = 0$.
27. $(1 + e^x)yy' = e^x$.
28. $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0$.
29. $2x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$.
30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$.
31. $20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

- | | |
|---|--|
| 1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. | 11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$. |
| 2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$. | 12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$. |
| 3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$. | 13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$. |
| 4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$. | 14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$. |
| 5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$. | 15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$. |
| 6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$. | 16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$. |
| 7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$. | 17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$. |
| 8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$. | 18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$. |
| 9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$. | 19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$. |
| 10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$. | 20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$. |

21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$ 27. $y' = \frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}.$
 22. $xy' = \frac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}.$ 28. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y.$
 23. $y' = \frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}.$ 29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$
 24. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y.$ 30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y.$
 25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$ 31. $y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$
 26. $xy' = \frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}.$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$ 12. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}.$ 22. $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$
 2. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}.$ 13. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$ 23. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$
 3. $y' = \frac{3y-x-4}{2y-2}.$ 14. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}.$ 24. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}.$
 4. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$ 15. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$ 25. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$
 5. $y' = \frac{x+y-2}{2x+y-3}.$ 16. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}.$ 26. $y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$
 6. $y' = \frac{x-1}{x+7y-8}.$ 17. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$ 27. $y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$
 7. $y' = \frac{9x-y-8}{x+3y+4}.$ 18. $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}.$ 28. $y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$
 8. $y' = \frac{3x-6}{3y+3}.$ 19. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$ 29. $y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$
 9. $y' = \frac{2x+y-1}{x+2y-3}.$ 20. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$ 30. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$
 10. $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}.$ 21. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$ 31. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0.$
 2. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y(\pi/2) = 0.$
 3. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0.$
 4. $y' + y \lg x = \cos^2 x, y(\pi/4) = \frac{1}{2}.$
 5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}.$
 6. $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1), y(0) = 1.$
 7. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y(\pi/2) = 1.$
 8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
 9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1.$
 10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$
 11. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4.$

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$.
13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.
15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$.
16. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.
17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.
18. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.
19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.
20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$.
21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.
22. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.
23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$.
24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.
25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
26. $y' - y \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.
27. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.
28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
29. $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}$, $y(0) = 0$.
30. $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.
31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$, $y(1) = 1$.

Задача 5. Решить задачу Коши.

1. $y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0$, $y|_{x=e} = 2$.
2. $(y^4 e^y + 2x)y' = y$, $y|_{x=0} = 1$.
3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$, $y|_{x=1} = e$.
4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1$, $y|_{x=0} = 0$.
5. $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$, $y|_{x=1/4} = \pi/3$.
6. $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y$, $y|_{x=\pi} = \pi/4$.
7. $e^{y^2}(dx - 2xy dy) = y dy$, $y|_{x=0} = 0$.
8. $(104y^3 - x)y' = 4y$, $y|_{x=8} = 1$.
9. $dx + (xy - y^3) dy = 0$, $y|_{x=-1} = 0$.
10. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y$, $y|_{x=16} = \pi/4$.
11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1$, $y|_{x=0} = 0$.
12. $(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy$, $y|_{x=4} = e^2$.

13. $2(x + y^4)y' = y, y|_{x=-2} = -1.$
14. $y^3(y - 1)dx + 3xy^2(y - 1)dy = (y + 2)dy, y|_{x=1/4} = 2.$
15. $2y^2 dx + (x + e^{1/y})dy = 0, y|_{x=e} = 1.$
16. $(xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0, y|_{x=-1/2} = 4.$
17. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, y|_{x=-1/2} = \pi/4.$
18. $(y^2 + 2y - x)y' = 1, y|_{x=2} = 0.$
19. $2y\sqrt{y} dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, y|_{x=-4} = 1.$
20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy, y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$
21. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y, y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$
22. $\operatorname{ch} y dx = (1 + x \operatorname{sh} y)dy, y|_{x=1} = \ln 2.$
23. $(13y^3 - x)y' = 4y, y|_{x=5} = 1.$
24. $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, y|_{x=\pi/8} = 2.$
25. $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, y|_{x=2} = 1.$
26. $(2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2 dx = 0, y|_{x=-1/2} = 1.$
27. $y dx + (2x - 2\sin^2 y - y \sin 2y)dy = 0, y|_{x=3/2} = \pi/4.$
28. $2(y^3 - y + xy)dy = dx, y|_{x=-2} = 0.$
29. $(2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy = dx, y|_{x=0} = \pi.$
30. $4y^2 dx + (e^{\frac{1}{2y}} + x)dy = 0, y|_{x=e} = \frac{1}{2}.$
31. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, y|_{x=-1} = 0.$

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

1. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$
2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$
3. $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$
4. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, y(0) = 1.$
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, y(1) = 1.$
6. $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$
7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$
8. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1.$
9. $y' + 4x^3y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$
10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$
11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$
13. $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$

14. $3(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 3$.
15. $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$, $y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
17. $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$.
18. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$.
19. $2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x}y^{-1}$, $y(0) = 2$.
20. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2$, $y(0) = 1$.
21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$, $y(1) = \sqrt{2}$.
22. $2(y' + y) = xy^2$, $y(0) = 2$.
23. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 1$.
24. $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$.
25. $y' - y = xy^2$, $y(0) = 1$.
26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$.
27. $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.
28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x$, $y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}$.
29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 2$.
30. $y' - y \operatorname{tg} x = -\left(\frac{2}{3}\right)y^4 \sin x$, $y(0) = 1$.
31. $xy' + y = xy^2$, $y(1) = 1$.

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$.
2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$.
3. $(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0$.
4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2x - \frac{1}{x}\right) dy = 0$.
5. $y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0$.
6. $(3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0$.
7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$.
8. $(\sin 2x - 2 \cos(x + y)) dx - 2 \cos(x + y) dy = 0$.
9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right) dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right) dy = 0$.
10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^3}\right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0$.
11. $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right) dy = 0$.
12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy = 0$.
13. $\frac{1+xy}{x^2 y} dx + \frac{1-xy}{xy^2} dy = 0$.
14. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2} dy = 0$.

15. $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0$.
16. $(xe^x + \frac{y}{x^2}) dx - \frac{1}{x} dy = 0$.
17. $(10xy - \frac{1}{\sin y}) dx + (5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3) dy = 0$.
18. $(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x) dx - \frac{x dy}{x^2+y^2} = 0$.
19. $e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0$.
20. $(y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0$.
21. $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0$.
22. $(5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0$.
23. $(\cos(x+y^2) + \sin x) dx + 2y \cos(x+y^2) dy = 0$.
24. $(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0$.
25. $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}) dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}) dy = 0$.
26. $(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}) dx + (1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}) dy = 0$.
27. $\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$.
28. $2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0$.
29. $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2 y) dy = 0$.
30. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$.
31. $\frac{x dx + y dy + (x dy - y dx)}{(x^2 + y^2)} = 0$.

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

- | | |
|---|--|
| 1. $y' = y - x^2, M(1, 2)$. | 14. $y' = xy, M(0, 1)$. |
| 2. $yy' = -2x, M(0, 5)$. | 15. $yy' = -\frac{x}{2}, M(4, 2)$. |
| 3. $y' = 2 + y^2, M(1, 2)$. | 16. $2(y + y') = x + 3, M(1, \frac{1}{2})$. |
| 4. $y' = \frac{2x}{3y}, M(1, 1)$. | 17. $y' = x + 2y, M(3, 0)$. |
| 5. $y' = (y - 1)x, M(1, \frac{3}{2})$. | 18. $xy' = 2y, M(1, 3)$. |
| 6. $yy' + x = 0, M(-2, -3)$. | 19. $3yy' = x, M(-3, -2)$. |
| 7. $y' = 3 + y^2, M(1, 2)$. | 20. $y' = y - x^2, M(-3, 4)$. |
| 8. $xy' = 2y, M(2, 3)$. | 21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,$
$M(-2, 1)$. |
| 9. $y'(x^2 + 2) = y, M(2, 2)$. | 22. $y' = x^2 - y, M(2, \frac{3}{2})$. |
| 10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(2, 1)$. | 23. $y' = y - x, M(2, 1)$. |
| 11. $y' = y - x, M(\frac{9}{2}, 1)$. | 24. $yy' = -x, M(2, 3)$. |
| 12. $y' = x^2 - y, M(1, \frac{1}{2})$. | 25. $y' = y - x, M(4, 2)$. |
| 13. $y' = xy, M(0, -1)$. | 26. $3yy' = x, M(1, 1)$. |

27. $y' = x^2 - y$, $M(0, 1)$.

28. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $M(1, 3)$.

29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$,
 $M(-2, -1)$.

30. $y' = x(y - 1)$, $M(1, \frac{1}{2})$.

31. $y' = x + 2y$, $M(1, 2)$.

Задача 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор \overline{MN} с концом на оси Oy имеет длину, равную a , и образует острый угол с положительным направлением оси Oy .

1. $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

4. $M_0(6, 4)$, $a = 10$.

2. $M_0(12, 2)$, $a = 20$.

5. $M_0(3, 5)$, $a = 5$.

3. $M_0(9, 3)$, $a = 15$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

6. $M_0(1, 1)$, $a : b = 1 : 2$.

9. $M_0(1, 0)$, $a : b = 3 : 2$.

7. $M_0(-2, 3)$, $a : b = 1 : 3$.

10. $M_0(2, -1)$, $a : b = 3 : 1$.

8. $M_0(0, 1)$, $a : b = 2 : 3$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

11. $M_0(2, -1)$, $a : b = 1 : 1$.

14. $M_0(2, 1)$, $a : b = 1 : 2$.

12. $M_0(1, 2)$, $a : b = 2 : 1$.

15. $M_0(1, -1)$, $a : b = 1 : 3$.

13. $M_0(-1, 1)$, $a : b = 3 : 1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

16. $M_0(1, 2)$, $a : b = 1 : 1$.

19. $M_0(2, -3)$, $a : b = 3 : 1$.

17. $M_0(2, 1)$, $a : b = 1 : 2$.

20. $M_0(3, -1)$, $a : b = 3 : 2$.

18. $M_0(1, 3)$, $a : b = 2 : 1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overline{MN} с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox , обратно пропорциональную абсциссе точки M . Коэффициент пропорциональности равен a .

21. $M_0(1, e), a = -\frac{1}{2}$.

24. $M_0(2, \frac{1}{e}), a = 2$.

22. $M_0(2, e), a = -2$.

23. $M_0(-1, \sqrt{e}), a = -1$.

25. $M_0(1, \frac{1}{e^2}), a = \frac{1}{4}$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Ox , равную a .

26. $M_0(1, 2), a = -1$.

29. $M_0(1, 3), a = -4$.

27. $M_0(1, 4), a = 2$.

30. $M_0(1, 6), a = 3$.

28. $M_0(1, 5), a = -2$.

31. $M_0(1, 1), a = 1$.

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'''x \ln x = y''$.

2. $xy''' + y'' = 1$.

3. $2xy''' = y''$.

4. $xy''' + y'' = x + 1$.

5. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.

6. $x^2 y'' + xy' = 1$.

7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.

8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$.

9. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$.

10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$.

11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.

12. $xy''' + 2y'' = 0$.

13. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.

15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.

16. $xy''' + y'' + x = 0$.

17. $\operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y'''$.

18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.

19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$.

20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$.

21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$.

22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

23. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.

24. $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$.

25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.

26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

27. $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$.
28. $\operatorname{cth} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x$.
29. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.
30. $y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' = 2x$.
31. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3 y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$.
2. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. $y'' y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
4. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.
6. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
7. $y'' y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
8. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
9. $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
11. $y'' y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
12. $y'' = 18 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$.
13. $4y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
15. $y'' y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
16. $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
17. $y'' = 8 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$.
18. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
19. $y'' y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
20. $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
21. $y'' + 50 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.
22. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
23. $y'' y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
24. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
25. $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
27. $y'' y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
28. $y'' = 2 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$.
29. $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
30. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.
31. $y'' y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
3. $y''' - y' = x^2 + x$.
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
5. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$.
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$.
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.
8. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$.
9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.
10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
13. $7y''' - y'' = 12x$.
14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.
17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.
19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
24. $y^{IV} + y''' = x$.
25. $y''' - y'' = 6x + 5$.
26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.
27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.
28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.
29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.
31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.
2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$.

3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$.
4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$.
5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$.
6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$.
7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x$.
8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.
9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$.
10. $y''' - 3y'' - 2y = -4xe^x$.
11. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.
12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x$.
13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.
14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x$.
15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$.
16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$.
17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$.
18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.
19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$.
20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$.
21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32)$.
22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$.
23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$.
24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$.
25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$.
26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.
27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$.
28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$.
29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$.
30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$.
31. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$.

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.
2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$.
3. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.
4. $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
6. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5 \sin x - 3 \cos x)$.

7. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.
9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.
10. $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$.
11. $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$.
12. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3 \sin x + 4 \cos x)$.
13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.
14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.
15. $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$.
16. $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x$.
17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$.
18. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3 \sin x + 5 \cos x)$.
19. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.
20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.
21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$.
22. $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$.
23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
24. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2 \sin x - \cos x)$.
25. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.
26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$.
27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.
28. $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$.
29. $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$.
30. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2 \cos x)$.
31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$.

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' = 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x$.
2. $y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.
3. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.
4. $y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x$.
5. $y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}$.
6. $y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x$.
7. $y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4x$.
8. $y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$.
9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x$.
10. $y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x$.

11. $y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x}$.
12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18 \sin 3x - 9 \cos 3x$.
13. $y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x$.
14. $y'' + 25y = 20 \cos 5x - 10 \sin 5x + 50e^{5x}$.
15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64 \cos 4x - 64 \sin 4x$.
16. $y'' + 2y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.
17. $y'' + 36y = 24 \sin 6x - 12 \cos 6x + 36e^{6x}$.
18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.
19. $y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x$.
20. $y'' + 49y = 14 \sin 7x + 7 \cos 7x - 98e^{7x}$.
21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.
22. $y'' + 4y' = 16 \operatorname{sh} 4x$.
23. $y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}$.
24. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.
25. $y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x$.
26. $y'' + 81y = 9 \sin 9x + 3 \cos 9x + 162e^{9x}$.
27. $y''' - 64y' = 128 \cos 8x - 64e^{8x}$.
28. $y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x$.
29. $y'' + 100y = 20 \sin 10x - 30 \cos 10x - 200e^{10x}$.
30. $y''' - 81y' = 162 \cdot e^{9x} + 81 \sin 9x$.
31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100 \cos 10x$.

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

1. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.
3. $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$, $y(\frac{\pi}{4}) = 5$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 6 \ln 2$.
5. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}$.
7. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
8. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0) = 4 \ln 4$, $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.
9. $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.
10. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 10 \ln 3$.
11. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
12. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = 3\pi/2$.

13. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
14. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.
15. $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 3$, $y'(\pi/4) = 2$.
16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8 \ln 2$, $y'(0) = 14 \ln 2$.
17. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
18. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$, $y(\pi/8) = 3$, $y'(\pi/8) = 2\pi$.
19. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
20. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.
21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2}\right)$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.
22. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 5 \ln 3$.
23. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2+e^x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
24. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$, $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = \pi$.
25. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
26. $y'' + y' = \frac{e^x}{2+e^x}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$.
27. $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 2$.
28. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 3 \ln 2$.
29. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
30. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = \pi/2$.
31. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.