

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

**Mathématiques et Informatique pour les Sciences Physiques**

École doctorale Informatique, Télécommunications et Électronique (Paris)

Présentée par

**Antoine Falaize**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios: Approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports**

soutenue le 12 juillet 2016

devant le jury composé de :

<b>M. Aziz HAMDOUNI</b>	<u>Professeur, LABORATOIRE DES SCIENCES DE L'INGÉNIER POUR L'ENVIRONNEMENT, UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE</u>	Président
<b>M. Stefan BILBAO</b>	<u>Professeur, ACOUSTICS AND AUDIO GROUP, EDINBURGH UNIVERSITY</u>	Rapporteur
<b>M. Pierre ROUCHON</b>	<u>Professeur, CENTRE AUTOMATIQUE ET SYSTÈMES, MINES-PARISTECH</u>	Rapporteur
<b>M. Benoît FABRE</b>	<u>Professeur, ÉQUIPE LUTHERIE ACoustIQUE MUSIQUE, IJLRA, UNIVERSITÉ PARIS 6</u>	Examinateur
<b>M. Yann LE GORREC</b>	<u>Professeur, ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET DES MICROTECHNIQUES, FEMTO-ST/AS2M</u>	Examinateur
<b>M. Hervé LISSEK</b>	<u>Professeur, LTS2, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE</u>	Examinateur
<b>M. Thomas HÉLIE</b>	<u>Chargé de recherche, UMR STMS (9912), IRCAM, Paris</u>	Directeur de thèse

Antoine Falaize : *Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audio: Approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports*, , © 16 décembre 2016

À ma fille,  
À ma mère,  
À la mémoire de mon père.



## RÉSUMÉ

---

Les *systèmes audios* incluent les instruments de musique traditionnels (percussions, cordes, vents, voix) et les systèmes électro-acoustiques (amplificateurs de guitares, pédales d'effets, synthétiseurs analogiques). Ces systèmes *multi-physiques* possèdent une propriété commune : hors des sources d'excitation (les générateurs), ils sont tous *passifs*. Nous présentons un ensemble de méthodes automatiques dédiées à leur modélisation, leur simulation et leur contrôle, qui garantissent explicitement et exploitent la passivité du système original.

La complexité et la finesse de la modélisation ont un impact direct sur les sonorités : les *non-linéarités* sont nécessaires pour restituer les variations de timbres apparaissant aux nuances « fortissimo », et l'on sait d'expérience que la qualité d'un *amortissement* joue un rôle crucial dans le réalisme sonore. Pour les systèmes *conservatifs*, des méthodes spécifiques (et très efficaces) existent. On discrétise alors une formulation variationnelle adéquate qui encode plus d'information structurelle que la formulation différentielle, dont le *hamiltonien* pour la conservation de l'énergie. Les systèmes physiques étudiés incluent des phénomènes de dissipation/échauffement, et n'admettent donc pas de formulation hamiltonienne. Nous utilisons dans ce travail un formalisme qui généralise cette approche, et qui permet d'intégrer des amortissements, de considérer des entrées, et de connecter plusieurs systèmes entre eux tout en respectant les bilans énergétiques. Il s'agit des *systèmes hamiltoniens à ports* (SHP), introduits en automatique et théorie des systèmes au début des années 1990.

Pour la *modélisation*, on exploite le fait que la connexion de systèmes décrits dans ce formalisme préserve explicitement la dynamique de la puissance dissipée de l'ensemble, pour développer une méthode automatique de modélisation d'instruments complets à partir de modèles élémentaires rassemblés dans un dictionnaire. Pour la *simulation*, une méthode numérique qui préserve la structure passive des SHP à temps discret a été développée, garantissant ainsi la stabilité des simulations (pour lesquelles le *code C++* est généré automatiquement). Concernant le *contrôle*, on exploite la structure d'interconnexion afin de déterminer automatiquement une forme découplée (sous-systèmes hiérarchisés) pour une certaine classe de SHP. Les systèmes de cette classe sont dits *systèmes hamiltonien à ports plats*, au sens de la propriété de *platitude différentielle*, à partir de laquelle une loi de commande en boucle ouverte exacte sur le modèle est générée.

## ABSTRACT

---

The class of *audio systems* includes traditional musical instruments (percussion, string, wind, brass, voice) and electro-acoustic systems (guitar amplifiers, analog audio processings, synthesizers). These multi-physical systems have a common property : out of excitation sources (generators), they are all *passive*. We present a set of automatic methods dedicated to their modeling, simulation and control, which explicitly guarantee and exploit the passivity of the original system.

The complexity and accurateness of modeling have a direct impact on the simulated tones : *nonlinear* models are required to recover timbre variations that occur at *fortissimo*, and it is well known from experience that the quality of *damping* plays a crucial role in the sound realism. For conservative systems, specific (and very effective) methods exist, which are based on the discretization of an adequate variational formulation. This formulation encodes more structural information than the original differential formulation. As an example, such a formulation explicitly captures the conserved quantities, here the *Hamiltonian* for the conservation of energy. Damped systems are not Hamiltonian systems, and we use in this work a formalism that generalize these ideas to incorpore damping phenomena, to considere inputs, and to connect multiple systems together while fulfilling energy balances. This class of systems is that of *port-Hamiltonian systems* (PHS), introduced in system theory in the early 1990s.

Regarding the models, we exploit the fact that the interconnection of systems described in this formalism explicitly preserves the dynamics of total dissipated power. This enabled the development of an automated method that builds models of complete instruments based on a dictionary of elementary models. Regarding the simulations, we developed a numerical method that preserves the passive structure of PHS in discrete-time domain. This ensures the stability of simulations (for which the C++ code is automatically generated). Regarding the control, we exploit the interconnection structure to automatically build an input-to-output decoupled form for a class of PHS. Systems of this class are *flat*, within the meaning of the *differential flatness* approach. A formula that yields the (open loop) control law for these systems is provided.

## RÉFÉRENCES PERSONNELLES

---

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont fait l'objet des productions scientifiques suivantes :

- deux rapports de stages de fin d'étude (références [A12, A1]),
- deux articles acceptés pour publication dans deux revues avec comité de lecture (références [A6, A7]),
- un article soumis pour publication dans une revue avec comité de lecture (référence [A5]),
- trois actes de conférences avec comité de lecture (références [A11, A9, A4]),
- quatre actes de conférence sans comité de lecture (références [A10, A2, A3, A8]).

Les articles [A6], [A7] et [A5] constituent les chapitres 3, 6 et 7 du présent manuscrit.

- [A1] Antoine Deschamps, Antoine Falaize, and Thomas Hélie. Estimation des paramètres d'un modèle physique dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports : application au haut-parleur électrodynamique. Master's thesis, Mémoire de stage de recherche, fin de cycle ingénieur ENSEA (Cergy-Pontoise), 2015.
- [A2] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Modélisation d'un haut parleur électrodynamique : approche dans le cadre des systèmes à hamiltoniens à ports. Proceedings of 12e Congrès Français d'Acoustique, 2014.
- [A3] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Passive simulation of electrodynamic loudspeakers for guitar amplifiers : a port-hamiltonian approach. In International Symposium on Musical Acoustics, pages 1–5, 2014.
- [A4] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Guaranteed-passive simulation of an electro-mechanical piano : A port-hamiltonian approach. In 18th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15), Trondheim, Norway, Nov 30 - Dec 3, 2015.
- [A5] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Modeling and simulation of the electrodynamic loudspeaker : A port-hamiltonian approach. Journal of Sound and Vibration, 2016. Soumis.
- [A6] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Passive guaranteed simulation of analog audio circuits : A port-hamiltonian approach. Applied Science, Applied Acoustics, special issue Audio Signal Processing, 2016.
- [A7] Antoine Falaize and Thomas Hélie. Passive simulation of the nonlinear port-hamiltonian modeling of a rhodes piano. Journal of Sound and Vibration, 2016.
- [A8] Antoine Falaize, Nicolas Lopes, Thomas Hélie, Denis Matignon, and Bernhard Maßchke. Energy-balanced models for acoustic and audio systems : a port-hamiltonian approach. In Unfold Mechanics for Sounds and Music, pages 1–8, 2014.
- [A9] Antoine Falaize, Nicolas Papazoglou, Thomas Hélie, and Nicolas Lopes. Compensation of loudspeaker's nonlinearities based on flatness and port-hamiltonian approach. In Congrès Français de Mécanique, Lyon, 24–28 aout 2015 (CFM2015). Association Française de Mécanique, 2015.
- [A10] Antoine Falaize-Skrzek and Thomas Hélie. Simulation of an analog circuit of a wah pedal : A port-Hamiltonian approach. In Audio Engineering Society Convention 135, Oct 2013.

- [A11] Nicolas Lopes, Thomas Hélie, and Antoine Falaize. Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-Hamiltonian systems. In 5th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control (Lyon, France), July 2015.
- [A12] Nicolas PAPAZOGLOU, Thomas Hélie, and Antoine Falaize. Linéarisation par asservissement d'un haut-parleur électrodynamique : approche par les systèmes hamiltoniens à ports. Master's thesis, 2014.

*"Dans la vie, les hommes sont tributaires les uns des autres.  
Il y a donc toujours quelqu'un à maudire ou à remercier."*  
M. Ferron, *Le Chemin des dames*, 1977.

## REMERCIEMENTS

---

Au terme de ce travail, mon attention se porte sur l'ensemble des personnes qui y ont contribué, de manière plus ou moins indirecte. Et j'en arrive vite à la conclusion que toutes ne pourront pas être citées ici.

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur, Thomas Hélie, pour son implication dans la conduite de cette thèse. Un bon directeur ne se contente pas de donner une direction : il accompagne, rassure, propose et s'oppose. Je n'aurais pu espérer meilleur encadrant, et ne saurais transcrire ici toute la reconnaissance que je lui porte. En plus du travail accompli, nos discours philosophico-scientifiques m'accompagneront encore longtemps.

Dans un second temps, je remercie Nicolas Lopes et David Roze, pour avoir été mes très fidèles compagnons de galère. Trinquer en bonne compagnie reste un bon remède à quelques découragements passagers.

Ensuite, je remercie tout le personnel de l'IRCAM, grâce à qui ce travail a pu être mené dans les meilleures conditions. En particulier, je remercie Charles Picasso, Frédéric Cornu, Joël Bensoam, Alain Terrier et Gérard Bertrand pour leur disponibilité et leurs conseils techniques et scientifiques ; je remercie Martine Grospiron et Carole Tan pour leur efficacité et leur gentillesse. Pour tous les à côtés, je remercie les abonnés de la mailing list sassar ; et en particulier Mattia, Éric, Clément, Pierre, Marguerite, Philippe, et Louis.

J'ai aussi une pensée pour mes anciens professeurs, qui ont forgé mon intérêt scientifique. Premièrement, je remercie ma professeur de physique de terminale, Mademoiselle Rébeyrolle, pour (sa patience ! et) m'avoir glissé dans la tête que, peut-être, j'avais une destinée scientifique. Profondément, je remercie l'ensemble du personnel du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (Le Mans, 72), où je suis arrivé avec une vocation d'ingénieur du son, et suis reparti avec une vocation de scientifique ; la passion se transmet comme un (bon) virus.

Je remercie ici ceux qui ne verront jamais ce travail achevé, mais qui y ont contribué jusqu'à la fin puisqu'ils sont à l'origine de l'homme que je suis aujourd'hui : mon père Jöel le téméraire, mon grand-père Marcel le sage, et mon grand-père Joseph l'astucieux.

Finalement, je remercie ma mère, mes sœurs et mon frère, dont la confiance et le support ont rendu ce travail possible. Je suis fière qu'ils soient fières de moi.



## TABLE DES MATIÈRES

---

Publications	vii
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvi
Introduction	1
<b>I DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES</b>	5
<b>1 MODÉLISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES PASSIFS</b>	7
1.1 Introduction et organisation du chapitre . . . . .	7
1.2 Rappels sur les systèmes dynamiques . . . . .	8
1.3 Les systèmes hamiltoniens à Ports . . . . .	15
1.4 Exemples . . . . .	21
1.5 Conclusions du chapitre . . . . .	26
<b>2 MÉTHODES NUMÉRIQUES PRÉSERVANT LA PASSIVITÉ</b>	27
2.1 Introduction et organisation du chapitre . . . . .	27
2.2 Rappels sur les méthodes numériques . . . . .	29
2.3 Méthode à une étape préservant la passivité . . . . .	34
2.4 Méthode à deux étapes préservant la passivité . . . . .	42
2.5 Illustration . . . . .	47
2.6 Conclusions du chapitre . . . . .	51
<b>3 MISE EN ÉQUATION AUTOMATIQUE ET PREMIÈRE APPLICATION : LES CIRCUITS AUDIOS</b>	53
3.1 Motivation . . . . .	53
3.2 Introduction . . . . .	54
3.3 Port-Hamiltonian Systems . . . . .	56
3.4 Generation of Equations . . . . .	59
3.5 Guaranteed-Passive Simulation . . . . .	69
3.6 Applications . . . . .	73
3.7 Conclusions . . . . .	77
3.8 Appendix - Reduction . . . . .	78
3.9 Appendix - Dictionary of Elementary Components . . . . .	79
3.10 Appendix - Discrete Gradient for Multi-Variate Hamiltonian . . . . .	81
<b>4 SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS ET PLATITUDE</b>	83
4.1 Introduction et organisation du chapitre . . . . .	83
4.2 Rappels de linéarisation par bouclage des systèmes dynamiques . .	84
4.3 Analyse de platitude pour les SHP . . . . .	89
4.4 Application à la linéarisation tension-déplacement du haut-parleur électrodynamique . . . . .	99
4.5 Conclusions du chapitre et perspectives . . . . .	103
<b>II APPLICATIONS</b>	105
<b>5 PYPHS : UNE BIBLIOTHÈQUE POUR LA GÉNÉRATION DE CODE TEMPS RÉEL</b>	107
5.1 Introduction . . . . .	107
5.2 Description . . . . .	107
5.3 Exemple . . . . .	108
5.4 Perspectives . . . . .	110

<b>6 DEUXIÈME APPLICATION : LE PIANO FENDER RHODES</b>	<b>113</b>
Motivation et guide de lecture . . . . .	113
Introduction . . . . .	114
6.1 Problem statement . . . . .	115
6.2 Port-Hamiltonian Systems . . . . .	117
6.3 Models of components . . . . .	121
6.4 Complete system . . . . .	128
6.5 Guaranteed passive numerical method . . . . .	129
6.6 Results . . . . .	131
6.7 Appendix - Modal decomposition . . . . .	137
Conclusion du chapitre et perspectives . . . . .	137
<b>7 TROISIÈME APPLICATION : MODÉLISATION ET SIMULATION D'UN HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE NON IDÉALISÉ</b>	<b>139</b>
7.1 Motivation et guide de lecture . . . . .	140
7.2 Introduction . . . . .	140
7.3 Problem statement . . . . .	141
7.4 Port-Hamiltonian systems . . . . .	144
7.5 The Thiele/Small model and first refinement (model 0) . . . . .	148
7.6 Refined mechanics (model 1) . . . . .	150
7.7 Refined electromagnetic (model 2) . . . . .	156
7.8 Refined thermodynamics (model 3) . . . . .	164
7.9 Discussion . . . . .	170
7.10 Conclusion . . . . .	170
7.11 Acknowledgments . . . . .	172
7.12 Appendix - Numerical method . . . . .	172
7.13 Appendix - Recalls on magnetic . . . . .	173
7.14 Appendix - State saturating storage function . . . . .	174
7.15 Appendix - Fractional order dynamics . . . . .	175
7.16 Appendix - Physical and technological parameters . . . . .	178
7.17 Appendix - Additional simulation results . . . . .	180
Conclusion générale	183
<b>III ANNEXE</b>	<b>187</b>
<b>8 CODE C++ GÉNÉRÉ PAR PYPHS</b>	<b>189</b>
8.1 THIELESMALL.cpp . . . . .	189
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>203</b>

## TABLE DES FIGURES

---

FIGURE 1.1	Trajectoires pour l'oscillateur de Van de Pol, pour 50 conditions initiales tirées dans le disque de rayon 3. . . . .	14
FIGURE 1.2	Représentation schématique d'une structure de Dirac $\mathcal{D}$ . . . . .	18
FIGURE 1.3	Représentation schématique d'un système hamiltonien à ports comme l'interconnexion conservative de composants stockants, dissipatifs et sources. . . . .	19
FIGURE 1.4	Exemples pour l'illustration de l'approche par les systèmes hamiltoniens à ports. . . . .	22
FIGURE 1.5	Structure de Dirac associée à l'interconnexion d'un circuit RL et d'un oscillateur mécanique amorti. . . . .	25
FIGURE 2.1	Expérience numérique pour un circuit RC autonome. . . . .	41
FIGURE 2.2	Foncitos de stockage pour les tests numériques. . . . .	49
FIGURE 2.3	Hamiltonien pour les tests numériques. . . . .	49
FIGURE 2.4	Comparaison des méthodes d'Euler implicite, du point milieu et des trapèzes avec la méthode d'Euler avec gradient discret. . . . .	50
FIGURE 2.5	Erreur sur l'énergie pour les méthodes de point milieu, de trapèze et la méthode d'Euler avec gradient discret. . . . .	51
FIGURE 2.6	Ordre de consistance des méthodes proposées. . . . .	52
Figure 3.1	Resistor-inductor-capacitor (RLC) circuit (notations and orientations). . . . .	59
Figure 3.2	Schematic and corresponding graph of a simple bipolar-junction transistor (BJT) amplifier with feedback. The grey part corresponds to the components, and the outer elements correspond to the external ports, or sources (as in table 3.1). . . . .	61
Figure 3.3	Definitions and orientations for a single current-controlled edge $b$ from node $i$ to node $j$ , with nodes potentials $p_i$ and $p_j$ , respectively. The knowledge of the potential $p_j$ is transferred to node $i$ with $p_i = v_b + p_j$ . . . . .	65
Figure 3.4	Simulation results and comparison of the methods in Table 3.3, for a nonlinear conservative system $\frac{dx}{dt} = J_x \cdot \nabla H(x)$ with $H(x)$ given in (3.30): (a) Trapezoidal rule; (b) Mid-point rule; (c) PHS combined with discrete gradient; (d) Relative error on energy balance. The comparison measure is the relative error on the power balance defined by $\epsilon(k) = \frac{ H(x(k+1)) - H(x(k)) }{H(x(0))}$ . We see from Figure 3.4d that the error associated with the proposed method (PHS approach combined with the discrete gradient method) is low compared to the two other methods (with machine precision $\approx 10^{-16}$ ). The accumulation of these errors is responsible for the apparently unstable behavior of the trapezoidal rule. . . . .	73

Figure 3.5	Simulation (Figure 3.5b) of a dissipative diode clipper (Figure 3.5a) at the sample rate $f_s = 96$ kHz, with three Newton-Raphson iterations, for a 10 ms sinusoidal excitation at 1 kHz with linearly increasing amplitude between 0 V and 2 V. (a) Diode clipper schematic; (b) Simulation of the diode clipper of Figure 3.5a. . . . .	74
Figure 3.6	Simulation (Figure 3.6b) of the common-emitter bipolar-junction transistor (BJT) amplifier with feedback (Figure 3.6a) at the sample rate $f_s = 384$ kHz, with 10 Newton-Raphson iterations, for a 10 ms sinusoidal excitation at 1 kHz with linearly increasing amplitude between 0 V and 0.2 V. (a) Schematic of a common-emitter BJT amplifier with feedback; (b) Simulation of the BJT amplifier in Figure 3.6a. . . . .	75
Figure 3.7	Results for the common-emitter BJT amplifier with feedback (Figure 3.6a). The input voltage signal is a 4 s exponential chirp on the audio range (20 Hz–20 kHz) with amplitude 0.05 V (logarithmic frequency scale). Simulation starts at 0.3 s (after the switching transient). (a) Spectrogram of output $v_{\text{OUT}}$ obtained with the proposed method; (b) Spectrogram of output $v_{\text{OUT}}$ obtained with LT-Spice. . . . .	76
Figure 3.8	Simulations of the Cry-Baby's circuit of Figure 3.9, for the potentiometer parameter $\alpha = 0$ (a) and $\alpha = 1$ (b) in the frequency domain, compared with LT-Spice simulations on the audio range 20 Hz–20 kHz. . . . .	77
Figure 3.9	Schematic of the Cry-Baby wah pedal. Note the IN/OUT terminals and the 9 V supply. The potentiometer P controls the effect. . . . .	77
FIGURE 4.1	Diagramme entrée-sortie d'un système linéaire. . . . .	84
FIGURE 4.2	Diagramme entrée-sortie d'un système linéaire sous forme de Brunovsky. . . . .	86
FIGURE 4.3	Linéarisation par bouclage. . . . .	87
FIGURE 4.4	Définitions pour le graphe d'initialisation (définition 4.4) pour l'analyse de platitude d'un SHP mono-entrée/mono-sortie. . . . .	90
FIGURE 4.5	Circuit RLC. . . . .	92
FIGURE 4.6	Graphe d'ordonnancement. . . . .	93
FIGURE 4.7	Diagramme de Hasse. . . . .	93
FIGURE 4.8	Simulation directe (sans planification). . . . .	102
FIGURE 4.9	Simulation avec planification par platitude. . . . .	102
FIGURE 4.10	Erreur sur la trajectoire de la sortie plate . . . . .	102
FIGURE 5.1	Exemple de graphe : le haut-parleur électrodynamique . . . . .	108
FIGURE 6.1	Overview of a single note of a Rhodes piano. . . . .	116
FIGURE 6.2	Schematic of the proposed modeling for the electromechanical piano. . . . .	116
FIGURE 6.3	Damped harmonic oscillator with excitation. . . . .	120
FIGURE 6.4	Nonlinear mass-spring-damper modeling of the Rhodes piano hammer. . . . .	122
FIGURE 6.5	Schematic of the Rhodes piano pickup connected to the RC circuit . . . . .	126
FIGURE 6.6	Description of the Rhodes piano pickup. . . . .	127
FIGURE 6.7	Position, velocity and acceleration of the Rhodes piano hammer. . . . .	132

FIGURE 6.8	Mechanical energy exchanges between the beam and the hammer in the Rhodes piano. . . . .	132
FIGURE 6.9	Power balance for the electro-magnetic part of the Rhodes piano (pickup and analog circuit). . . . .	133
FIGURE 6.10	Displacement and velocity of the free end of the beam of a Rhodes piano, and corresponding output voltage. . . . .	134
FIGURE 6.11	Spectral densities for the measured and simulated Rhodes piano tones. . . . .	134
FIGURE 6.12	Time domain comparison between measured and simulated Rhodes tones. . . . .	135
FIGURE 6.13	Effect of vertical alignment and horizontal distance of the pickup in a Rhodes piano. . . . .	136
FIGURE 7.1	Schematic of the electrodynamic loudspeaker . . . . .	142
FIGURE 7.2	Examples. . . . .	146
FIGURE 7.3	Dynamics for the conservative oscillator driven with the external force. . . . .	147
FIGURE 7.4	Equivalent circuit of loudspeaker model o. . . . .	148
FIGURE 7.5	Effective length of coil wire subjected to the magnetic field in a loudspeaker. . . . .	149
FIGURE 7.6	J . . . . .	151
FIGURE 7.7	Small-signal modeling of the mechanical part of the loudspeaker. . . . .	151
FIGURE 7.8	Equivalent circuit of the loudspeaker model 1. . . . .	156
FIGURE 7.9	Simulation of the small-signal modeling of the mechanical part for a loudspeaker. . . . .	156
FIGURE 7.10	Simulation of the loudspeaker model 1. . . . .	157
FIGURE 7.11	Simplified modeling of the electromagnetic circuit for a loudspeaker. . . . .	158
FIGURE 7.12	Equivalent circuit of loudspeaker model 2. . . . .	162
FIGURE 7.13	Effective number of wire turns involved in the electromagnetic coupling of the loudspeaker. . . . .	164
FIGURE 7.14	Simulation of the loudspeaker model 2. . . . .	165
FIGURE 7.15	Simulation of the loudspeaker model 2. . . . .	166
FIGURE 7.16	Simulation of the loudspeaker model 2. . . . .	166
FIGURE 7.17	Synopsis of the thermal transfers in the loudspeaker. . . . .	168
FIGURE 7.18	Short-time simulation of the loudspeaker model 3. . . . .	171
FIGURE 7.19	Long-time simulation of the loudspeaker model 3. . . . .	171
FIGURE 7.20	Simple electromagnetic circuit. . . . .	174
FIGURE 7.21	Generic state saturating constitutive law. . . . .	175
FIGURE 7.22	Simulation of the small-signal modeling of the mechanical part of the loudspeaker. . . . .	181
FIGURE 7.23	Simulation of the loudspeaker model 2. . . . .	182
FIGURE 7.24	Results for loudspeaker model 2. . . . .	182

## LISTE DES TABLEAUX

---

TABLE 1.1	Formulation SHP de l'oscillateur harmonique. . . . .	23
TABLE 1.2	Formulation SHP du circuit RL. . . . .	24
TABLE 1.3	Formulation SHP d'un modèle simplifié de haut-parleur. . .	25
Table 3.1	Example of a netlist corresponding to the circuit in Figure 3.2. The grey part corresponds to the components, and the other elements correspond to the external ports, or sources (as in figure 3.2). . . . .	61
Table 3.2	Sorting components according to their realizability. . . . .	64
Table 3.3	Updates for the three methods considered in §4.3. PHS stands for port-Hamiltonian system. . . . .	72
Table A1	Dictionary of elementary components. . . . .	80
TABLE A1	Paramètres physiques du haut-parleur FANE Sovereign 12-500LF. . . . .	101
TABLE A1	Port-Hamiltonian formulation of the damped harmonic oscillator with excitation . . . . .	120
TABLE A2	Physical parameters for the Rhodes piano hammer. . . . .	122
TABLE A3	Port-Hamiltonian formulation for the Rhodes piano hammer. .	123
TABLE A4	Physical parameters for the Rhodes piano cylindrical cantilever beam. . . . .	124
TABLE A5	Port-Hamiltonian formulation for the Euler-Bernoulli beam (Rhodes piano model). . . . .	125
TABLE A6	Physical parameters for the Rhodes piano pickup. . . . .	126
TABLE A7	Port-Hamiltonian formulation for the Rhodes piano pickup. .	128
TABLE A8	Port-Hamiltonian formulation for the complete Rhodes piano model. . . . .	129
TABLE A1	Port-Hamiltonian formulation for the harmonic oscillator. .	147
TABLE A2	Port-Hamiltonian formulation for the RL circuit. . . . .	148
TABLE A3	Port-Hamiltonian formulation of the loudspeaker model o. .	150
TABLE A4	Port-Hamiltonian formulation of the mechanical part of the loudspeaker. . . . .	154
TABLE A5	Port-Hamiltonian formulation of the loudspeaker model 1. .	155
TABLE A6	Port-Hamiltonian formulation for the loudspeaker model 2. .	163
TABLE A7	Irreversible port-Hamiltonian formulation for the loudspeaker model 3. . . . .	169
TABLE A8	Phenomena addressed by each port-Hamiltonian model of loudspeaker. . . . .	170
TABLE A9	Port-Hamiltonian formulation for the finite dimensional approximation of the fractional integrator. . . . .	178
TABLE A10	Port-Hamiltonian formulation for the finite dimensional approximation of the fractional differentiator. . . . .	178
TABLE A11	Physical and technological parameters of the loudspeaker model o. . . . .	179
TABLE A12	Physical and technological parameters of the loudspeaker model 1. . . . .	179
TABLE A13	Physical and technological parameters of the loudspeaker model 2. . . . .	180

TABLE A14	Physical and technological parameters of the loudspeaker model 3.	180
-----------	--	-----



## INTRODUCTION

---

### MOTIVATION

Les systèmes audios et acoustiques incluent les instruments de musique traditionnels (percussions, cordes, vents, voix), les systèmes électro-acoustiques (haut-parleur électrodynamique) et les circuits électroniques (amplificateurs de guitares, pédales d'effets, synthétiseurs analogiques). Dans de nombreux cas, ces systèmes sont décrits par un réseau de composants élémentaires (obtenu par une modélisation directe de phénomènes localisés, ou par une discréétisation spatiale de modèles de dimension infinie). Ces composants sont séparés en (ou peuvent être une combinaison de)

- composants qui stockent et restituent une énergie (masses, inductances, etc),
- composants qui dissipent une puissance (amortissements, résistances, etc).

À cette catégorisation s'ajoutent les sources externes (exciteurs), par lesquelles le système est piloté. Ce travail est motivé par l'observation naturelle suivante : les composants stockants ne créent pas d'énergie, et les composants dissipatifs la font décroître ; en ce sens, les systèmes considérés sont tous passifs. Peu d'outils d'analyse/synthèse sonore cherchent à garantir et reproduire cette propriété. Pourtant, exploitée dans la modélisation, cette propriété garantit une forme de stabilité du système à temps continu. Transposée à temps discret, cette propriété garantit la stabilité des simulations. Pour le contrôle, cette propriété est utilisée pour garantir la stabilité du système bouclé.

### CONTEXTE

La synthèse sonore par modélisation physique s'attache à simuler des systèmes producteurs de son, existants ou imaginaires, qui respectent les lois de la physique. L'intérêt de ce type de synthèse est de récupérer non seulement le timbre du son mais aussi tous les comportements naturels (attaques, transitoires, distorsions, etc).

Les outils standard consistent à appliquer au modèle des schémas numériques *ad hoc* (différences finies, éléments finis, décomposition en guides d'ondes numériques, etc) pour lesquels on recherche des conditions de stabilité. Si un modèle est conservatif (une énergie se conserve et on est à la limite de la stabilité), le problème devient délicat. Pour ce cas, des méthodes spécifiques (et très efficaces) de discréétisation existent, qui garantissent la conservation d'énergie (cf. [70]). Le schéma numérique peut alors ne plus être préalable mais découler du modèle original.

Historiquement, la recherche de schémas préservant l'énergie des systèmes conservatifs a été introduite en mécanique analytique et motivée par l'étude numérique de la stabilité de systèmes célestes (système solaire, par exemple). Des recherches sur des schémas dits *symplectiques* (préservant par exemple des symétries, invariants géométriques naturels, etc) sont aussi très actives. Ils se fondent sur une formulation variationnelle adéquate, qui encode plus d'informations structurelles que la formulation différentielle (i.e. aux dérivées partielles).

En résumé, en discréétisant la formulation variationnelle du système plutôt que le problème différentiel, il est possible de garantir un principe physique, et en particulier la conservation de l'énergie pour les systèmes dits Hamiltoniens (ce qu'une autre méthode n'assure pas par défaut). La recherche conduite dans cette thèse est motivée par (i) le fait que les systèmes audios et acoustiques incluent des amortissements et ne sont donc pas à structure hamiltonienne à proprement parler et (ii) le fait qu'il est possible d'utiliser des approches et méthodes de discréétisation semblables. Ces méthodes préservent explicitement la dynamique de la puissance dissipée (c'est-à-dire, respectant le principe physique intrinsèque de dissipation de chaque modèle étudié).

Pour aborder ce sujet, on s'appuie sur un formalisme de la théorie des systèmes et de l'automatique qui permet de bien représenter la propriété de passivité des systèmes, et pour laquelle les recherches actuelles sont très actives : il s'agit du formalisme des *systèmes hamiltoniens à ports* (SHP). Ce formalisme a été introduit au début des années 90 par Bernhard Maschke et Arjan Van der Schaft [119, 120, 178] comme une extension des systèmes hamiltoniens classiques [116] pour la modélisation et le contrôle des systèmes physiques ouverts (c'est à dire pouvant échanger de la matière et de l'énergie avec leur environnement extérieur). Ils sont définis comme *l'interconnexion conservative de composants stockants de l'énergie, de composants dissipants de l'énergie et de sources externes pouvant apporter de l'énergie*. Ce paradigme représente la dynamique des systèmes au travers d'une *structure* qui encode les échanges de puissance entre les différents composants, et assure la préservation, dans le modèle, de la passivité inhérente au système original.

Parce que les phénomènes mis en jeu dans les systèmes audios peuvent être complexes (phénomènes non linéaires associés aux saturations de tous types, amortissements en dérivation fractionnaire dans les ferromagnétiques et les matériaux viscoélastiques, géométries non triviales, etc), ils sont de bons candidats d'étude pour faire avancer les connaissances (appliquées et théoriques) sur les systèmes hamiltoniens à ports.

#### OBJECTIFS DE LA THÈSE

Cette thèse s'intègre dans les travaux de l'équipe Analyse/Synthèse de l'IRCAM (CNRS UMR 9912-UPMC), en parallèle d'une mission de monitorat à l'UPMC. L'objectif est de construire des méthodes automatiques pour la modélisation, la simulation et le contrôle en boucle ouverte de systèmes physiques, qui garantissent explicitement et exploitent la passivité du système original.

Pour la modélisation, on exploite le fait que la connexion de systèmes décrits dans le formalisme des SHP préserve explicitement la dynamique de la puissance dissipée de l'ensemble, pour développer une méthode automatique de modélisation d'instruments complets à partir de modèles élémentaires rassemblés dans un dictionnaire. Pour la simulation, une méthode numérique qui préserve la structure passive des SHP à temps discret a été développée, garantissant ainsi la stabilité des simulations (pour lesquelles le code C++ est généré automatiquement). Pour le contrôle, on exploite la structure d'interconnexion pour déterminer automatiquement une forme découpée (sous-systèmes hiérarchisés) pour une certaine classe de SHP et la loi de commande en boucle ouverte associée.

## STRUCTURE DU DOCUMENT

Ce document s'articule en deux parties :

**PARTIE I** : Développements théoriques,

**PARTIE II** : Applications.

La partie I présente les outils et méthodes développés, dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports, pour la modélisation, la simulation, la génération de codes et la correction de systèmes multi-physiques. Le formalisme des SHP est rappelé et illustré au chapitre 1. En particulier, on introduit une structure de modèles qui garantit la passivité pour les réseaux de composants.

Deux méthodes numériques qui préservent la structure des SHP à temps discret (et donc la passivité du modèle) sont introduites et analysées au chapitre 2. En particulier, une méthode passive de consistance d'ordre 2 qui ne nécessite pas la résolution d'équations non linéaires implicites est proposée.

Au chapitre 3, nous présentons une méthode de mise en équation automatique pour la génération de code de simulation (article [A6]). La construction de cette méthode a nécessité l'introduction d'une classe spéciale de SHP, dits semi-implicites; elle est illustrée sur quelques circuits électroniques d'intérêt dans le domaine de l'audio (et ne s'y limite pas). Cette méthode s'applique à des systèmes décrits par (i) un dictionnaire de composants élémentaires et (ii) un graphe d'interconnexion. On peut alors directement appliquer les méthodes de simulation dédiées aux SHP, et générer le code C++ correspondant.

Le chapitre 4 est dédié au développement de deux méthodes de correction de systèmes non linéaires de la classe introduite au chapitre 3. Plus précisément, cette méthode repose sur une analyse de la propriété de platitude différentielle du système dynamique associé, qui permet de compenser (en boucle ouverte) les non-linéarités modélisées. Ces méthodes sont illustrées sur des systèmes élémentaires (circuit résistance-inductance-capacitance et modèle simplifié quoique non linéaire d'un haut-parleur électrodynamique).

La partie II concerne les applications des outils théoriques présentés en partie I. Le chapitre 5 introduit tout d'abord un outil logiciel développée au cours de la thèse en langage PYTHON, qui implémente la mise en équation automatique et la génération de code. Il s'agit de la bibliothèque PyPHS, distribuée sous licence CeCILL (CEA-CNRS-INRIA Logiciels Libres). Cet outil est utilisé aux chapitres suivants pour traiter deux systèmes d'intérêt en audio.

Le chapitre 6 traite une première application multi-physics : le piano électromécanique Fender Rhodes (article accepté pour publication au JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION). L'approche globale de la thèse y est complètement illustrée : (i) chaque composant est modélisé dans le formalisme des SHP, (ii) tous les composants sont interconnectés pour former le SHP du système global et (iii) les méthodes de simulation proposées au chapitre 2 sont appliquées pour générer des sons de synthèse. La comparaison des résultats obtenus avec des signaux mesurés sur un instrument réel permet de valider le modèle de Fender Rhodes proposé, et l'analyse des propriétés des solutions numériques obtenues permet de valider l'approche de cette première partie.

Finalement, on propose au chapitre 7 un modèle non idéalisé de la partie thermo-électro-magnéto-mécanique du haut-parleur électrodynamique dans le formalisme des SHP (article soumis pour publication au JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION). Ce modèle est validé par des simulations pour lesquelles le code C++ est généré automatiquement par l'outil PyPHS.



## Première partie

# DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

Cette partie commence par introduire le formalisme des *système hamiltoniens à ports* (SHP) pour la modélisation passive des systèmes physiques. On insiste particulièrement sur la description de ses systèmes comme l'*interconnexion conservative* de composants qui *stockent* de l'énergie, de composants qui *dissipent* une puissance, et de ports qui réalisent la connexion avec l'*exterieur* (qui peut être un autre système). Ensuite, nous proposons chapitre 2 deux méthodes numériques pour la simulation. Ces méthodes préservent, à temps discret, la structure SHP du modèle continu, et donc la passivité du système physique. Au chapitre 3, nous présentons une méthode de génération automatique des équations qui gouvernent la dynamique d'un système, dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports. Plus précisément, cette méthode prend en entrée une *netlist* qui décrit la structure en réseau d'un système physique (composants et interconnexion), et retourne une formulation SHP. Finalement, nous présentons au chapitre 4 une méthode de construction de loi de commande qui compense exactement, en boucle ouverte, les non linéarités d'un SHP donné (commande par platitude différentielle).



Aucune stabilité n'est jamais  
qu'équilibre.

M. Druon - *Le pouvoir*, 1965.

## Sommaire

1.1	Introduction et organisation du chapitre . . . . .	7
1.2	Rappels sur les systèmes dynamiques . . . . .	8
1.2.1	Problème de Cauchy . . . . .	9
1.2.2	Stabilité et passivité . . . . .	11
1.2.3	Illustration : l'oscillateur de Van der Pol . . . . .	13
1.3	Les systèmes hamiltoniens à Ports . . . . .	15
1.3.1	Approche par composants . . . . .	16
1.3.2	Interconnexion conservative . . . . .	17
1.3.3	Représentation d'état . . . . .	20
1.4	Exemples . . . . .	21
1.4.1	Système conservatif . . . . .	21
1.4.2	Système strictement passif . . . . .	23
1.4.3	Interconnexion de systèmes . . . . .	24
1.5	Conclusions du chapitre . . . . .	26

### 1.1 INTRODUCTION ET ORGANISATION DU CHAPITRE

Ce chapitre présente le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports (SHP) que nous exploitons dans le reste du document pour la modélisation, la simulation et le contrôle de systèmes audios et acoustiques. Ces systèmes sont des *systèmes physiques*, qui incluent des phénomènes de stockage/restitution d'énergie, des phénomènes de dissipation/échauffement, et sont généralement décrits par des modèles ouverts pour lesquels certaines variables sont laissées libres à la commande. La variation temporelle de l'énergie de ces systèmes correspond à la puissance apportée par les sources (commandes) à laquelle est retranchée la puissance dissipée. En particulier, si les sources sont éteintes, l'énergie ne peut pas croître. Ceci définit un système passif : la *passivité* est une propriété intrinsèque des systèmes physiques, qui garantit qu'il n'y a pas de création spontanée d'énergie. Transposée au temps discret, cette propriété permet de garantir la stabilité des simulations. Exploitée dans la conception de lois de contrôle, elle permet de garantir la stabilité du bouclage.

Le formalisme des SHP a été introduit au début des années 90 par Bernhard Maschke et Arjan Van der Schaft [119, 120, 178] comme une extension des systèmes hamiltoniens classiques [116] pour la modélisation et le contrôle des systèmes physiques ouverts (c'est à dire pouvant échanger de la matière et de l'énergie avec leur environnement extérieur). Ils sont définis comme l'*interconnexion conservative de composants stockants de l'énergie, de composants dissipants de l'énergie*

*et de sources externes pouvant apporter de l'énergie.* Ce paradigme représente la dynamique des systèmes au travers d'une *structure* qui encode les échanges de puissance entre les différents composants, et assure la préservation, dans le modèle, de la passivité inhérente au système original. Cette approche emprunte au formalisme des *graphes de liaisons* (bond graphs en anglais [93, 18]) la séparation *lois constitutives–interconnexion conservative*, et à la mécanique analytique [116] dans son application moderne aux problèmes de contrôle des systèmes non linéaires [85, 128, 15, 25, 110].

La notion d'interconnexion conservative, au coeur de la structure des SHP, est définie géométriquement (au sens d'un produit scalaire), ce qui permet d'étendre cette représentation au systèmes de dimension infinie pour lesquels on peut écrire des lois de conservation (voir [52, chap.4], [A8, §II] pour une écriture du vecteur de Poynting en électromagnétisme, [6, 139] pour des applications en dynamique des fluides et [182] pour une application en thermo-magnéto-hydrodynamique pour le contrôle du Tokamak). Cette formulation dans les termes de la géométrie différentielle [48] permet de faire émerger des propriétés génériques, indépendantes du système de coordonnées. En particulier, cette structure est stable par interconnexion (*i.e.* la connexion de deux SHP est encore un SHP), contrairement à d'autres formalismes pour lesquels la structure doit être repensée entièrement, et la stabilité n'est pas garantie *a priori*. Dans cette première partie de la thèse, la classe de systèmes traités inclut tous les systèmes passifs de dimension finie qui peuvent se mettre sous la forme standard d'un SHP explicite [52, (2.53)], pour une paramétrisation choisie.

Ce chapitre est organisé comme suit. Premièrement, on rappelle quelques résultats standard de la théorie des systèmes (système dynamique, représentation d'état), en mettant en relief des propriétés structurelles telle que la passivité et la stabilité (nous verrons en outre que la première implique la seconde). Ces définitions sont illustrées sur un oscillateur de Van der Pol que nous modifions pour faire apparaître différents comportements des systèmes (notamment stables et instables). Deuxièmement, on introduit les notions de composants stockants, dissipatifs et sources, et d'interconnexion conservative. Ceci permet de définir formellement les systèmes hamiltoniens à ports. La structure [52, (2.53)] considérée dans cette première partie de la thèse est un cas particulier (explicite), que l'on rappelle. Troisièmement, le formalisme des SHP est illustré sur trois systèmes élémentaires standard en mécanique (oscillateur) et en audio (circuit RL et haut-parleur électrodynamique). En particulier, on construit un modèle de haut-parleur à partir de l'interconnexion d'un circuit RL et d'un oscillateur mécanique (modèle de Thiele et Small).

## 1.2 RAPPELS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

On ici rappelle des théorèmes standard pour les systèmes dynamiques (notamment d'existence-unicité), et on introduit les définitions utilisées dans le reste du document (sauf mention contraire). Ces rappels s'appuient sur les ouvrages classiques [156, §3] et [96], régulièrement mentionnés.

Un modèle physique de dimension finie (par exemple un ensemble de composants discrets interconnectés, ou la discréttisation d'un système de dimension infinie) est classiquement donné sous la forme d'un système dynamique, représenté par un système d'équations différentielles d'ordre un. Un tel système s'obtient

par (i) la sélection de  $n_x$  quantités physiques décrivant l'état du système à chaque instant  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  (paramétrisation), puis (ii) par le développement d'un modèle mathématique qui décrit l'évolution des quantités physiques choisies, à partir de lois physiques (modélisation). Lorsque le système n'est pas idéalisé, le modèle obtenu met souvent en jeu des termes non linéaires (par opposition aux systèmes linéaires, pour lesquels le principe de superposition s'applique).

Dans ce chapitre, on suppose le modèle physique établi, et l'on s'intéresse aux propriétés du système dynamique correspondant. En premier lieu, on rappelle les conditions sous lesquelles ce système possède une unique solution. Puis, lorsque l'on est assuré que le modèle est *bien posé*, on s'intéresse à des propriétés plus fines de cette solution. En particulier, on rappelle les conditions sous lesquelles la solution est *stable*, ainsi que le lien avec une propriété inhérente au système physique original : la *passivité*. Enfin, ces notions sont illustrées sur un exemple classique : l'oscillateur de Van der Pol. Il est à préciser que l'on s'intéresse aux propriétés intrinsèques de ces systèmes, et non au calcul effectif de la solution (ce sera l'objet du chapitre 2).

### 1.2.1 Problème de Cauchy

Pour formuler les lois physiques décrivant l'évolution d'un système, il est d'usage de choisir un ensemble de quantités physiques variables (positions, vitesses, courants, tensions, flux magnétiques, température, etc.) et un ensemble de lois associées à des paramètres (masse, élasticité, capacité et résistance électrique, etc.). Chaque variable  $i$  traduit un état  $x_i : t \mapsto x_i(t) \in \mathbb{R}$  du système, et on définit le vecteur d'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_x})^\top \in \mathbb{R}^{n_x}$ . L'ensemble des états forme un espace muni d'une structure d'espace vectoriel, et un vecteur de cet espace est appelé un point de l'espace d'état.

**Définition 1.1 (Système dynamique)** *On appellera système dynamique la donnée d'un état  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et d'un champ de vecteurs  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ . Les trajectoires du système dynamique sont les solutions de l'équation dynamique*

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t). \quad (1.1)$$

- Si le champ de vecteurs ne dépend pas explicitement du temps  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , le système est dit autonome.
- Si le champ de vecteurs dépend explicitement du temps  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , le système est dit instationnaire.
- Si le champ de vecteurs est paramétré par une quantité privilégiée connue ou imposée  $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t)$ , le système est dit commandé, de commande  $\mathbf{u}$ .

Dans cette thèse, nous considérerons des systèmes affines en la commande de la forme  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ .

En vue d'une utilisation pratique du modèle (simulation, contrôle), on peut se poser la question de l'existence et de l'unicité des solutions de (1.1) pour une condition initiale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  donnée. C'est l'objet du problème de Cauchy qui consiste à intégrer entre les instants initial  $t_0$  et final  $T$  le système

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) & \text{pour tout } t \in [t_0, T], \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Théorème 1.1 (Cauchy-Lipschitz)** *Le problème (1.2) est intégrable et il existe une unique fonction solution  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  si la fonction dynamique  $\mathbf{f}$  vérifie une condition de Lipschitz par rapport à sa première variable :*

$$\exists K > 0 : \forall (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{2n_x}, \| \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \| \leq K \| \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \|,$$

où  $\| \cdot \|$  désigne une norme sur  $\mathbb{R}^{n_x}$  (par exemple la norme euclidienne  $\| \cdot \|_2$ ).

En pratique, déterminer la constante de Lipschitz  $K$  n'est pas aisée, mais elle peut être majorée.

**Lemme 1.1 (Continuité)** *Soit  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  de classe  $C^1$ . Alors  $\mathbf{f}$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $\mathbf{x}$  de constante  $K \leq \sup_{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}} \| \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \|$  où  $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$  désigne la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  avec  $[\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)]_{i,j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}$  et  $\| \mathbf{A} \|$  désigne la norme d'opérateur sur  $\mathbb{R}^{n_x}$  (c.f. [67, §2] et [80, §5]).*

Lorsque les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées, la solution au problème de Cauchy (1.2) est donnée par le flot  $\phi$  de  $\mathbf{f}$  pour la condition initiale  $\mathbf{x}_0$  et pour tous les temps  $t_0 \leq t \leq T$  :

$$\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{f}; t_0, \mathbf{x}_0); \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Sans perte de généralité, on prend dans la suite  $t_0 = 0$  et on rend implicite la dépendance du flot au champ de vecteur :  $\phi_t(\mathbf{x}_0) \equiv \phi_t(\mathbf{f}; 0, \mathbf{x}_0)$ . En pratique, on sera intéressé par des systèmes sur lesquels (i) on peut agir au moyen d'actionneurs (e.g. sources de tensions électriques, de forces mécaniques ou de pressions acoustiques) et (ii) on peut observer des quantités (positions, tensions) qui résultent de la dynamique du système en réponse à une certaine excitation.

**Définition 1.2 (Système entrée/sortie affine en la commande)** *Un système d'entrée  $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , d'état  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et de sortie  $\mathbf{y} : t \mapsto \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  est la donnée de trois fonctions  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  et  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  telles que*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)). \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Propriété 1.1 (Solutions d'un système affine en la commande)** *Soient  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  une et  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  de classe  $C^1$ . Alors le système affine  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$  possède une unique solution*

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}, K_{\mathbf{f}} = \| \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \| < \infty, K_{\mathbf{G}} = \| \mathcal{J}_{\mathbf{G}\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \| < \infty;$
- $\forall t \in \mathcal{T}, K_{\mathbf{u}} = \| \mathbf{u} \|_{\infty} < \infty$  avec  $\| \mathbf{u} \|_{\infty} = \sup_i |u_i|$ .

On peut alors prendre comme majorante de la constante de Lipschitz  $K \geq K_{\mathbf{f}} + K_{\mathbf{G}} K_{\mathbf{u}}$  dans le théorème 1.1.

En résumé, on s'intéresse aux systèmes dynamiques affines en la commande (définitions 1.2), bien posés au sens du problème de Cauchy (1.2), par le théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 1.1) pour les conditions de régularité du lemme 1.1.

### 1.2.2 Stabilité et passivité

L'existence et l'unicité du flot d'un système dynamique (1.1) ou (1.4) pour toute condition initiale  $\mathbf{x}_0$  et pour toute commande  $\mathbf{u}(t)$  est une propriété forte qui est rarement *globalement* satisfaite pour les systèmes non linéaires. En pratique, on cherche à définir un *espace de vie* pour la solution  $\mathbf{x}(t)$ , c'est à dire l'ensemble  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{X}, \forall t \geq 0\}$  le plus petit possible pour lequel le lemme de continuité est vérifié (et donc le système intégrable par le théorème 1.1). Il faut donc s'assurer que toute trajectoire initialisée dans  $\mathcal{X}$  reste dans  $\mathcal{X}$  sous l'action du flot (1.3) :  $\phi_t(x_0 \in \mathcal{X}) \in \mathcal{X}$ . Un outil permettant d'analyser cette propriété du flot a été introduite à la fin du XIXème siècle par le mathématicien russe A. M. Lyapunov [114]. La théorie de Lyapunov inclut deux théorèmes pour l'analyse de stabilité, l'un global (méthode directe) et l'autre local (méthode de linéarisation, conséquence de la méthode directe [156, §3.3]). On ne s'intéresse ici qu'à la méthode directe. L'idée est d'associer à la dynamique  $\mathbf{f}$  une fonction  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que l'analyse de  $V \circ \mathbf{x}$  informe sur le comportement attractif (ou non) de l'origine de l'espace d'état. Alors la trajectoire de (1.1) (ou de (1.4) pour  $\mathbf{u} = 0$ ) tend naturellement vers l'origine, et y reste.

Un autre outil à notre disposition pour l'analyse de stabilité est le principe d'invariance de LaSalle, introduit au début des années 1960, et qui étend le concept de Lyapunov en permettant de caractériser une forme de stabilité plus générale puisqu'il y est question d'*ensembles invariants* (ligne, surface), alors que la méthode de Lyapunov s'applique à un unique point de l'espace d'état (e.g. l'origine).

#### 1.2.2.1 Méthode de Lyapunov

L'approche de Lyapunov s'inspire d'une observation : lorsque l'énergie d'un système physique est continuellement dissipée, ce système tend vers une position d'équilibre (ou de repos). On a donc une propriété globale (la stabilité du système à l'origine), caractérisée par une propriété locale en temps d'une fonction scalaire (l'énergie, dissipée à chaque instant). Avant de présenter ce résultat, on introduit quelques définitions.

**Définition 1.3 (Point d'équilibre)** *Un point de l'espace d'état  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$  associé au système dynamique autonome  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  est appelé point d'équilibre si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbb{0}$ .*

Il est toujours possible de ramener un point d'équilibre particulier à l'origine de l'espace des phases par une transformation du type  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ , avec  $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*)$ . On suppose dans la suite qu'une telle transformation a été appliquée de sorte que  $\mathbf{f}(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ .

**Définition 1.4 (Stabilité d'un point d'équilibre)** *Le point d'équilibre  $\mathbf{x} = \mathbb{0}$  est stable si pour  $R > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que si  $\|\mathbf{x}(t=0)\| < r$ , alors  $\|\mathbf{x}(t)\| < R$ , pour tout  $t > 0$ . Sinon, le point d'équilibre est instable.*

L'approche de Lyapunov permet de garantir *globalement* (i. e. pour toute initialisation  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}$ ) la stabilité de l'origine  $\mathbf{x} = \mathbb{0}$ , pourvu que le système soit passif. On adopte la définition de la passivité au sens des systèmes dynamiques (voir les présentations exhaustives dans [156, §4] et [96, def. 6.3]).

**Définition 1.5 (Fonction de stockage)** *Une fonction  $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de stockage sur  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{n_x}$  si*

1.  $V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$  et  $V(\mathbb{0}) = 0$  (fonction définie positive) ;

2.  $V \in C^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}_+)$ , de hessien positif  $\frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \succ 0$  avec  $[\frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}]_{i,j} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$ ;
3.  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} = \infty$  (radialement non bornée sur  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{n_x}$ ).

Cette définition peut être adaptée sur des domaines  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ , comme par exemple dans le cas d'un état  $x_i$  défini sur un intervalle borné (e.g. position d'une membrane de haut-parleur avant déchirement).

**Définition 1.6 (Intégrale première)** On dira qu'une fonction  $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  est une intégrale première du flot  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  pour un système dynamique (1.1) si  $V$  est non constante et si  $W$  est nulle pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , avec

$$W(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.5)$$

c'est à dire  $\frac{dV \circ \mathbf{x}(t)}{dt} = 0$  le long des trajectoires du système. Ceci vaut également pour les systèmes autonomes  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Définition 1.7 (Système passif entrée/sortie)** Un système d'entrée  $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ , d'état  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  et de sortie  $\mathbf{y} : t \mapsto \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  est dit passif si il existe une fonction de stockage  $V$  (définition 1.5) telle que  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq \mathbf{u}^\top \mathbf{y}$ . Si de plus  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq -\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{y}$  avec  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0$  si  $\mathbf{x}, \mathbf{u} \neq 0$ , le système est dit strictement passif.

En résumé, si  $\mathbf{u} \equiv 0_{n_y \times 1}$ , alors  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq 0$  (pour  $\psi \geq 0$ ) et par continuité de  $V$ , l'état  $\mathbf{x}$  décroît aussi vers l'équilibre  $0_{n_x \times 1}$ , qui est stable. La sortie  $\mathbf{y}(t)$  est alors appelée *sortie passive* du système.

**Théorème 1.2 (Stabilité de Lyapunov)** Si un système autonome est strictement passif (définition 1.7) pour la fonction de Lyapunov  $V$  associée à  $\mathbf{f}$  (i.e. si  $W(\mathbf{x}) < 0$  pour tout point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , c.f. (1.5)), alors l'origine est asymptotiquement stable :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\| = 0$ .

### 1.2.2.2 Invariance de LaSalle

L'approche de Lyapunov garantit la stabilité d'un système au prix d'hypothèses très fortes sur (i) la forme de la fonction  $V(\mathbf{x})$  (radialement non-bornée) et (ii) sa variation  $W < 0$ . De plus, seul un point de l'espace d'état (l'origine) est caractérisé, ce qui n'est pas toujours le résultat recherché (un exemple courant en audio est le cas des systèmes auto-oscillants, nécessairement non linéaires [69], pour lesquels on va chercher à caractériser la stabilité d'un cycle fermé, ou orbite, dans l'espace d'état). L'approche de Lyapunov peut être étendue, toujours en étudiant le signe d'une fonction scalaire et de sa dérivée, mais pour décrire la convergence du flot vers un sous-ensemble plus grand que l'origine : l'*ensemble invariant* pour le système dynamique.

**Définition 1.8 (Ensemble invariant par le flot)** Un ensemble  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  est dit invariant par le flot d'un système dynamique autonome si  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{I} \Rightarrow \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{I}, \forall t \in \mathbb{R}$  i.e. la trajectoire d'un point initialisé dans l'ensemble  $\mathcal{I}$  reste dans  $\mathcal{I}$  pour tout  $t$ . De plus l'ensemble  $\mathcal{I}$  est dit positivement invariant si  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{I} \Rightarrow \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{I}, \forall t \in \mathbb{R}_+$  (uniquement pour les temps positifs).

On a alors le résultat suivant [156, §3.4.3], [96, §4.1.4.2 et 6.2] :

**Théorème 1.3 (Invariance de LaSalle)** Soit  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  un ensemble positivement invariant pour le flot d'un système autonome. Soit  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  et telle que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,  $W(\mathbf{x}) \leq 0$ , c.f. (1.5). Soit  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$  l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  pour lesquels  $W(\mathbf{x})$  est nulle :  $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : W(\mathbf{x}) = 0\}$ . Soit  $\mathcal{I}$  le plus grand ensemble invariant de  $\mathcal{V}$  par le flot. Alors toute trajectoire initialisée dans  $\mathcal{X}$  converge asymptotiquement vers  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ , au sens où pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$   $\lim_{t \rightarrow \infty} (\min_{\mathbf{x}^* \in \mathcal{I}} \|\phi_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\|) = 0$ .

**Théorème 1.4 (Stabilité de Barbashin-Krasovskii)** Soit  $\mathcal{X}^* \subset \mathbb{R}^{n_x}$  l'ensemble des points d'équilibre d'un système autonome  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}^*) = \mathbf{0}$ . Soit  $V : \mathbb{R}^{n_x} \supseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction  $C^1$  avec  $\{\mathbf{0}\} \subset \mathcal{X}$ , et telle que  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $V(\mathbf{x}) \leq 0$ . Soit  $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : V(\mathbf{x}) = 0\}$ . Si  $\mathcal{X}^* \cap \mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$  (le seul point à la fois fixe pour la dynamique  $\mathbf{f}$  et pour la fonction  $V$  est l'origine), alors l'origine est asymptotiquement stable. Si de plus  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$  (radialement non-bornée), alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

**Remarque 1.1 (Cas limite)** Si  $V(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , on peut prendre pour le théorème de LaSalle  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{V} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^{n_x}$  avec l'hypersurface (fermée)  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0)\}$  pour chaque condition initiale  $\mathbf{x}_0$  (invariance globale). Les  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_i)$ ,  $i \geq 0$  sont incluses les une dans les autres autours de l'origine (espace feuilleté). La fonctionnelle  $V$  est alors une intégrale première du flot au sens de la définition suivante.

En résumé, la stabilité asymptotique de l'origine est assurée par le théorème de Lyapunov (théorème 1.2) pour une classe de fonction  $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que  $V(\mathbf{x}) < 0$ , et par le théorème de Barbashin-Krasovskii (théorème 1.4) pour  $V(\mathbf{x}) \leq 0$ . Pour une classe encore plus générale de fonctions  $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ , des cycles limites peuvent être mis en évidence par le théorème de LaSalle (théorème 1.3). Ces théorèmes sont illustrés sur un exemple classique dans la section suivante.

**Remarque 1.2** La remarque 1.1 est mise à profit sur les systèmes hamiltoniens à ports, rappelés section 1.3. En prévision de leur présentation, on fait l'observation que tout système dynamique à non-linéarité affine de la forme  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  peut être associé à la fonction de stockage triviale  $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}$ , et décomposé en partie symétrique  $\mathbf{R}_M = -1/2(\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top)$  et anti-symétrique  $\mathbf{J}_M = 1/2(\mathbf{M} - \mathbf{M}^\top)$ . Le système est alors passif (définition 1.7) pour la sortie passive associée à l'entrée  $\mathbf{u}$  définie par  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x})^\top \mathbf{x}$  si et seulement si  $\mathbf{R}_M \geq 0$ , avec  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \nabla V(\mathbf{x})^\top \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\mathbf{x}^\top \mathbf{J}_M \mathbf{x}}_{=0} - \underbrace{\mathbf{x}^\top \mathbf{R}_M \mathbf{x}}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbf{x}^\top \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}}_{=\mathbf{y}^\top \mathbf{u}}$ .

### 1.2.3 Illustration : l'oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est l'idéalisation d'un circuit électrique composé d'un circuit *résistance-inductance-capacitance* et d'une source modulée en tension (triode alimentée). Ce système non linéaire autonome est gouverné par [69, §2.1] :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - \alpha (1 - (\beta x_1)^2) x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

Le paramètre  $\alpha$  est positif pour l'oscillateur de Van der Pol classique ; le paramètre  $\beta$  est quelconque. Dans cette section, nous souhaitons illustrer différents comportements de la solution : stabilité de Lyapunov (théorème 1.2), invariance de LaSalle (théorème 1.3) stable et instable, et invariance globale (remarque 1.1). Pour cette raison, nous choisissons de prendre  $\alpha$  négatif, nul ou positif, et  $\beta$  nul ou non nul. On remarque que pour  $\beta = 0$ , le système est linéaire de sorte que l'analyse de stabilité peut être réalisée par des outils standard. Dans tous les cas (linéaires et non linéaires), le théorème d'invariance de LaSalle (théorème 1.3) permet de caractériser les trajectoires.

Une fonction de stockage triviale est la forme quadratique  $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2} \geq 0$ , et le signe de  $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\alpha (1 - (\beta x_1)^2) x_1^2$  (c.f. (1.5)) caractérise la stabilité du système au sens de Lyapunov (théorème 1.2) et de LaSalle (théorème 1.3). Des trajectoires obtenues par simulation numérique sont présentées en figure 1.1 (la méthode numérique employée est celle présentée au chapitre 2).

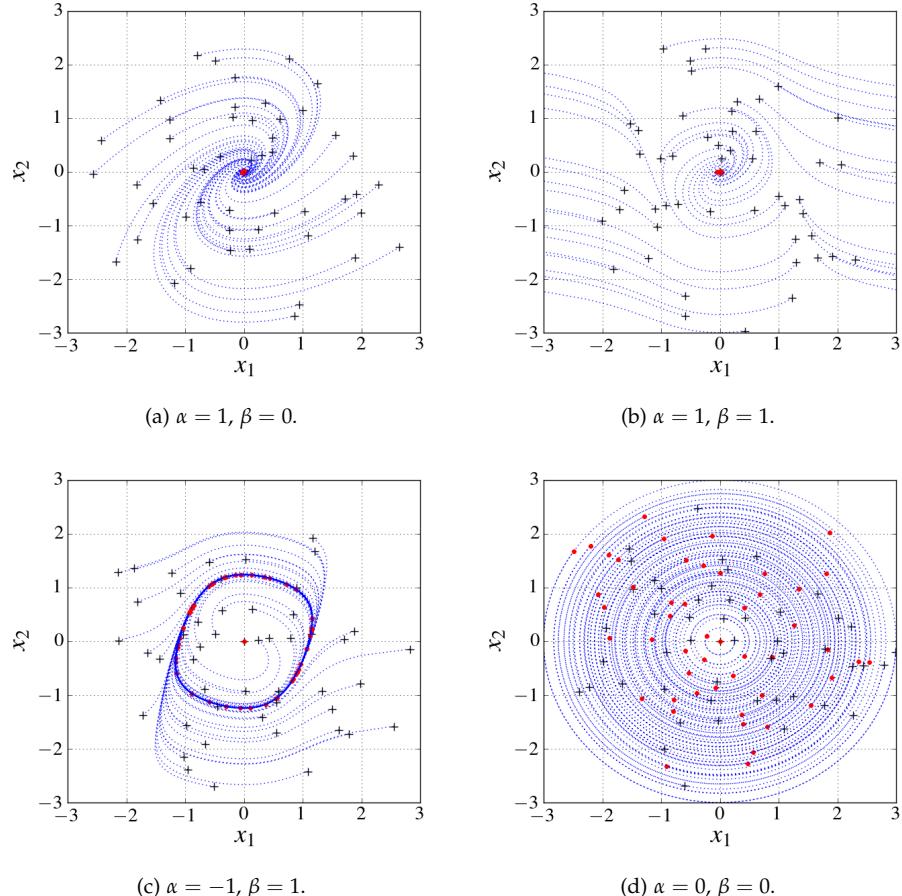


FIGURE 1.1 : Trajectoires pour l'oscillateur de Van de Pol (1.6), pour 50 conditions initiales (croix) tirées au hasard dans le disque de rayon 3. On constate que (a) l'origine est globalement asymptotiquement stable pour  $(\alpha = 1, \beta = 0)$ , (b) l'origine est seulement localement stable pour  $(\alpha = 1, \beta = 1)$ , (c) un cycle limite (attracteur) se développe pour  $(\alpha = -1, \beta = 1)$  et (d) les trajectoires sont fermées (orbites) pour  $\alpha = 0$ . On peut remarquer dans tous les cas que l'origine est un point d'équilibre  $\left. \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \right|_{\mathbf{x}=0} = 0$ .

1.2.3.1 Cas  $\alpha > 0$  et  $\beta = 0$  :  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -\alpha x_1^2$ .

C'est précisément le cas d'un système passif autonome avec  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$  et  $\frac{dV(0)}{dt} = 0$ . On a alors directement par le théorème 1.2 que l'origine est globalement asymptotiquement stable (voir figure 1.1a).

1.2.3.2 Cas  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  :  $\operatorname{sgn}\left(\frac{dV(x)}{dt}\right) = -\operatorname{sgn}((1 - (\beta x_1)^2))$ .

L'espace d'état est divisé en trois bandes délimitées par  $|x_1| = 1/\beta$  avec  $\frac{dV(x)}{dt} < 0$  pour  $|x_1| < 1/\beta$  et  $\frac{dV(x)}{dt} > 0$  pour  $|x_1| > 1/\beta$ . Toute trajectoire initialisée dans  $] -\infty, -1/\beta[ \cup ] 1/\beta, \infty[$  est instable, et l'origine est localement asymptotiquement stable, c'est à dire qu'il existe un certain *bassin d'attraction*  $\mathcal{X}^*$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0 \in \mathcal{X}^*) = \emptyset$ , avec  $\mathcal{X}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2 : x_1^* \in \mathcal{X}_1^*, x_2^* \in \mathcal{X}_2^*\}$ , pour  $\mathcal{X}_1^* = ] -1/\beta, 1/\beta[$  et  $\mathcal{X}_2^*$  qu'on ne caractérise pas ici (voir figure 1.1b).

1.2.3.3 Cas  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$  :  $\operatorname{sgn}\left(\frac{dV(x)}{dt}\right) = \operatorname{sgn}((1 - (\beta x_1)^2))$ .

C'est l'inverse du cas précédent : l'origine est instable  $\frac{dV(x)}{dt} > 0$  pour  $|x_1| < 1/\beta$  et globalement stable pour  $|x_1| > 1/\beta, \forall x_2$ . On a alors par le théorème 1.3 que la trajectoire tend vers un *cycle limite* (voir figure 1.1c) : le système auto-oscille.

1.2.3.4 Cas  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$  :  $\frac{dV(x)}{dt} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

On a alors que  $\forall t > t_0, V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0)$ , soit  $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = V(\mathbf{x}_0)$ , c'est à dire que la trajectoire initialisée en  $\mathbf{x}_0$  évolue sur l'ensemble invariant associé au cercle de centre  $\mathbf{x} = \emptyset$  et de rayon  $R = \sqrt{2V(\mathbf{x}_0)}$  (remarque 1.1 et figure 1.1d).

### 1.3 LES SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS

On a vu section précédente que la stabilité d'un système peut être induite par une propriété globale : la passivité. Hors, tout système physique est passif par nature, au sens où aucun système ne crée spontanément de l'énergie et inclut des phénomènes dissipatifs. Alors, plutôt que d'évaluer la stabilité d'un système *a posteriori*, il est préférable de garantir *a priori* que la passivité inhérente au système physique original est *préservée* au cours de la modélisation. C'est l'objet du formalisme des systèmes hamiltoniens à ports, introduit dans les années 90 [120, 153, 52] comme une approche systématique pour la modélisation et le contrôle de systèmes physiques. Ce formalisme repose sur (i) la formulation de *lois constitutives* élémentaires associées aux phénomènes de stockage/restitution d'énergie, de dissipation et de source, et (ii) une structure d'interconnexion garantissant des échanges de puissance équilibrés entre les composants connectés via des *ports* d'interaction. Cette formulation donne une description intrinsèque permettant de garantir des propriétés génériques (telle que la conservation de l'énergie) indépendamment du système de coordonnées choisi (théorie géométrique du contrôle non linéaire [85, 128, 15, 25, 110]). Une autre particularité de cette structure est sa stabilité par interconnexion : la connexion de deux systèmes hamiltoniens à ports est encore un système hamiltonien à ports.

Notre présentation des SHP est articulée de la manière suivante. Premièrement, on discute la formalisation des lois constitutives pour les composants stockants, dissipatifs et sources. Deuxièmement, on définit les systèmes hamiltoniens à ports comme l'interconnexion conservative de composants stockants, dissipatifs et sources. Troisièmement, on discute de la réalisation des systèmes hamiltoniens à ports sous la forme d'un système affine en la commande (définition 1.2).

### 1.3.1 Approche par composants

On note  $E(t)$  l'énergie stockée dans un système physique autonome (il n'y a pas de communication avec l'extérieur) et conservatif (aucun phénomène dissipatif). Alors la variation  $\frac{dE(t)}{dt}$  est nulle :  $E(t) = E(t_0), \forall t \geq t_0$ . Si maintenant le système échange avec l'extérieur (système commandé), la variation  $\frac{dE}{dt}(t)$  est donnée par la puissance  $S(t)$  entrante sur les ports d'interconnexion. Si de plus le système inclut des phénomènes dissipatifs, de puissance dissipée  $D(t) \geq 0$ , la variation d'énergie est donnée par le bilan de puissance

$$\frac{dE(t)}{dt} = S(t) - D(t). \quad (1.7)$$

On a directement que ces systèmes sont passifs ([96, § 6] et définition 1.7) pour une classe de fonctionnelles de Lyapunov naturelles qui vérifient  $V(x(t)) = E(t)$  avec  $\frac{dV}{dt} \leq S$ . En particulier,  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  si les sources sont éteintes  $S = 0$ .

L'approche par les systèmes hamiltoniens à ports consiste à assurer cette propriété dans une structure qui encode les échanges de puissance entre composants isolés (conservatifs, dissipatifs et sources). Pour les systèmes de dimension finie, ces composants sont (ou peuvent être une combinaison de)

$n_E$  composants stockant l'énergie  $E \geq 0$  (énergie cinétique pour une masse en mouvement, énergie électrostatique pour une capacité) ;

$n_D$  composants qui dissipent la puissance  $D \geq 0$  (amortisseur mécanique, effets visco-élastiques, transistor) ;

$n_P$  ports externes qui fournissent la puissance  $S$  ( $\in \mathbb{R}$ ) (force d'un actionneur externe au système, source idéale de tension, force magnétomotrice d'un aimant permanent, ou port ouvert à l'interconnexion).

Le comportement de chaque composant  $i$  est décrit par une relation entre deux ensembles de variables : les flux  $f_i = (f_1 \cdots f_{n_i})^\top$  (e.g. vitesses, courants), et les efforts  $e_i = (e_1 \cdots e_{n_i})^\top$  (forces, tensions), dont le produit a la dimension d'une puissance. Toute ces quantités sont définies en convention récepteur, i.e. la puissance reçue par chaque composant est  $P_i = f_i^\top e_i$ .

Soit une paramétrisation  $x_i : t \mapsto x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  de chaque composant  $1 \leq i \leq n_E$  stockant l'énergie  $E_i$  (e.g. l'élargissement  $x_i = \ell$  pour une raideur, la charge  $x_i = q$  pour une capacité, les flux magnétiques  $x_i = (\phi_1, \phi_2)^\top$  pour une inductance mutuelle). La fonction de stockage associée est  $H_i(x_i) = E_i$  (e.g.  $H_i(\ell) = (K\ell^2)/2$  pour une raideur  $K$ ,  $H_i(q) = q^2/(2C)$  pour une capacité  $C$ ,  $H_n(\phi_1, \phi_2) = \frac{\phi_1^2}{2L_1} + \frac{\phi_2^2}{2L_2} + \frac{\alpha\phi_1\phi_2}{\sqrt{L_1 L_2}}$  pour une inductance mutuelle d'inductances  $L_1, L_2$  et de transfert de flux  $\alpha$ ). L'énergie totale est alors paramétrée par l'état  $x : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  de dimension  $n_x = \sum_{i=1}^{n_E} n_i$  et donnée par la somme de toutes les énergies (grandeur extensive) par la fonction  $E = H \circ x = \sum_{i=1}^{n_E} H_i(x_i) \geq 0$ . Sa variation temporelle est

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^\top \frac{dx}{dt}, \quad (1.8)$$

qui correspond à la puissance reçue par les composants stockants. Pour une paramétrisation de l'énergie  $(x, H)$  choisie<sup>1</sup>, les  $n_x$  flux  $f_E$  et  $n_x$  efforts  $e_E$  associés aux

<sup>1</sup> Par exemple, des paramétrisations obtenues par une multiplication à gauche par  $\text{diag}(\alpha, 1/\alpha)$  et telles que  $\left( \frac{dx_j}{dt}, \frac{\partial H_j}{\partial x_j} \right) \equiv (\alpha f_j, e_j/\alpha)$  ou  $(\alpha e_j, f_j/\alpha)$  fonctionnent également.

composants stockants sont donc donnés pour  $1 \leq j \leq n_x$  par  $\left( \frac{dx_j}{dt}, \frac{\partial H_j}{\partial x_j} \right) \equiv (\mathbf{f}_j, \mathbf{e}_j)$  ou  $(\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_j)$ , et (1.8) se réécrit  $\frac{dE}{dt} = \mathbf{f}_E^\top \mathbf{e}_E$ .

La puissance externe  $S$  est l'opposé de la puissance reçue par les sources. On choisit donc les  $n_p$  flux  $\mathbf{f}_S$  et efforts  $\mathbf{e}_S$  associés aux ports de sorte que  $S = -\mathbf{f}_S^\top \mathbf{e}_S$ . Ces flux et efforts sont organisés en deux vecteurs  $\mathbf{u}$  (considéré comme l'entrée du système) et  $\mathbf{y}$  (la sortie associée), c'est à dire  $(u_k, -y_k) = (\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_k)$  ou  $(u_k, -y_k) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{f}_k)$  pour chaque paire dans  $(\mathbf{f}_S, \mathbf{e}_S)$ , soit

$$S = \mathbf{u}^\top \mathbf{y}. \quad (1.9)$$

Enfin, les  $n_D$  flux  $\mathbf{f}_D$  et  $n_D$  efforts  $\mathbf{e}_D$  sont reliés par un ensemble de relations de dissipation de la forme  $\mathbf{r}(\mathbf{f}_D, \mathbf{e}_D) = \mathbb{0}_{n_D \times 1}$  ( $\mathbf{r}(i, v) = R i - v$  pour une résistance  $R$ , de sorte que la puissance dissipée est  $D = R i^2$ ) et telle que

$$D = \mathbf{f}_D^\top \mathbf{e}_D \geq 0, \text{ pour tous } (\mathbf{f}_D, \mathbf{e}_D) \text{ tels que } \mathbf{R}(\mathbf{f}_D, \mathbf{e}_D) = 0. \quad (1.10)$$

On définit maintenant formellement l'interconnexion de tous les flux  $(\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_S, \mathbf{f}_D)$  et efforts  $(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_D)$  de sorte à régénérer le bilan de puissance (1.7) ; c'est l'approche par les systèmes hamiltoniens à ports.

### 1.3.2 Interconnexion conservative

On considère ici  $n_p$  composants connectés aux  $n_p$  ports d'un réseau, composants auxquels on associe les flux  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_p})^\top$  et efforts  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n_p})^\top$  définis en convention récepteur : la puissance reçue par chaque composant  $i$ , ou sortante par chaque port  $i$  du réseau est  $P_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{e}_i$ .

**Définition 1.9 (Interconnexion conservative)** Une interconnexion de  $n_p$  composants est dite *conservative* si

$$\sum_{i=1}^{n_p} P_i = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad (1.11)$$

Cela correspond au théorème de Tellegen en électronique (voir [167] et [45, §9.5] et figure 1.2), qui traduit que toute la puissance transite par le réseau : il n'y a pas de stockage, de création spontanée ou de perte d'énergie dans l'interconnexion, et ces phénomènes ont lieu dans les composants.

Typiquement pour  $n_p = 2$ ,  $\mathbf{e}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{f}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1 \mathbf{f}_1 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{f}_2$ , c'est à dire que toute la puissance perdue par le composant 1 est récupérée par le composant 2. Les deux connexions possibles sont (i)  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 0$  (connexion série en électronique avec  $\mathbf{f}$  un courant et  $\mathbf{e}$  la tension associée, ou connexion rigide en mécanique avec  $\mathbf{f}$  une vitesse et  $\mathbf{e}$  la force associée) ou (ii)  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0$  (connexion parallèle en électronique, ou connexion série de raideurs en mécanique). On peut remarquer que dans chaque cas, on a deux équations qui mettent en jeu quatre variables, ce qui définit un sous-espace de dimension 2. C'est la dimension maximale pour une interconnexion conservative des 2 flux et deux efforts, avec  $\mathbf{f}_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{f}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 \mathbf{e}_2 \Rightarrow P_1 + P_2 = 0$  (voir [52, §2.1.2]). En dimension  $n_p$ , ces connexions s'écrivent (i)  $\mathbf{f}_1 = \dots = \mathbf{f}_{n_p}$ ,  $\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n_p} = 0$  et (ii)  $\mathbf{e}_1 = \dots = \mathbf{e}_{n_p}$ ,  $\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_{n_p} = 0$ , respectivement. On a donc  $n_p$  relations indépendantes sur  $2n_p$  variables, ce qui définit un sous espace de dimension  $n_p$  dans le produit d'espaces  $\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \mathcal{P}$  (espace des variables de puissance).

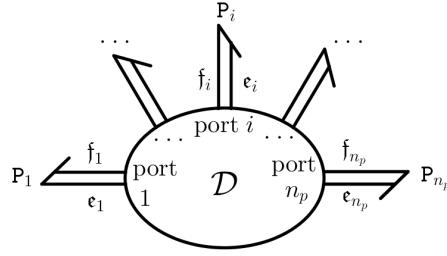


FIGURE 1.2 : Représentation schématique d'une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  (interconnexion conservative), avec  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n_p})^\top$ ,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n_p})^\top$  et  $\sum_{i=1}^{n_p} P_i = \mathbf{f}^\top \mathbf{e} = 0$  (voir définitions 1.9 et 1.10, et propriété 1.2).

Ce type d'interconnexion peut être formalisé au moyen d'une structure de Dirac (voir les références [37, 178, 175, 41, 28] sur lesquelles les présentations suivantes s'appuient). Avant d'en donner la définition, on rappelle quelques notations d'algèbre linéaire.

On introduit l'espace des flux  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  muni du produit de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E} \times \mathcal{F}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  défini pour un élément de  $\mathcal{F}$  et son *dual*  $\mathbf{e} \in \mathcal{F}^* = \mathcal{E}$ , c'est à dire  $\mathbf{e} : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{e}(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \in \mathbb{R}$ . En dimension finie  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est simplement le produit scalaire  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{e}^\top \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n_p} f_i e_i$ . L'espace dual de  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$  correspond à l'espace des efforts  $\mathbf{e} \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ , et l'on introduit l'espace total des variables de ports  $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{2n_p}$ . Ainsi, la puissance dans  $\mathcal{P}$  est donnée par le produit scalaire  $P = \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = \sum_{i=1}^{n_p} e_i f_i$ .

**Définition 1.10 (Structure de Dirac)** Une structure de Dirac (constante) sur  $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{F}^* = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  est un sous-espace  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$  où  $\perp$  désigne le complément orthogonal par rapport à la forme bilinéaire  $\ll \mathbf{e}, \mathbf{f} \gg$  indéfinie (positive ou négative) et non dégénérée ( $\ll (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a), (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \gg = 0 \forall (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \Rightarrow (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a) = 0$ ) définie par  $\ll (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a), (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \gg = \langle \mathbf{e}_a, \mathbf{f}_b \rangle + \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_a \rangle$ ,  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a), (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \in \mathcal{P}^2$ , c'est à dire  $\mathcal{D}^\perp = \{(\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \in \mathcal{P} : \forall (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a) \in \mathcal{D}, \ll (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a), (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \gg = 0\}$ .

**Propriété 1.2 (Structure conservative)** Le sous-espace  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  défini par une structure de Dirac (définition 1.10) possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{D}, \mathbf{f}^\top \mathbf{e} = 0$ ,
2.  $\dim(\mathcal{D}) = \dim(\mathcal{F})$ ,

C'est à dire que  $\mathcal{D}$  encode une interconnexion conservative des flux et efforts définis à ses ports en convention récepteur au sens de la définition 1.9.

**Preuve** Soit une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  définie sur un espace des variables de puissance  $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^{2n_p}$  (définition 1.10) ; toute combinaison linéaire d'éléments  $(\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a) \in \mathcal{D}$  et  $(\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \in \mathcal{D}$  est encore dans  $\mathcal{D}$  :  $(\mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b) \in \mathcal{D}$ , et

$$\langle \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b \rangle = \langle \mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a \rangle + \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{e}_a, \mathbf{f}_b \rangle + \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_a \rangle}_{\ll (\mathbf{e}_a, \mathbf{f}_a), (\mathbf{e}_b, \mathbf{f}_b) \gg = 0}. \quad (1.12)$$

Cette relation est vraie en particulier pour  $\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_b$ ,  $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_b$ , et la seule solution est  $\langle \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b, \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b \rangle = 0$ . Pour  $\mathbf{e}_b = \mathbf{f}_b = \mathbf{0}_{n_p}$ , ceci implique  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = 0, \forall (\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathcal{D}$  et prouve la propriété 1.2. De plus, par définition du complément orthogonal  $\dim(\mathcal{D}^\perp) = 2 \dim(\mathcal{F}) - \dim(\mathcal{D})$  et par définition 1.10  $\dim(\mathcal{D}^\perp) = \dim(\mathcal{D})$ , ce qui prouve la propriété 2.

Ainsi, une structure de Dirac capture géométriquement le théorème de Tellegen [45, §9.5] (au sens d'une forme bilinéaire définie sur  $\mathcal{P}$ ), ce qui permet de transposer la notion d'interconnexion conservative (définition 1.9) à des espaces plus généraux que  $\mathbb{R}^{n_p}$  (e.g. en dimension infinie pour les structures de Stokes-Dirac, voir [180, § 1.3] [180], [52, §4]) Dans ce travail, nous considérons des systèmes hamiltoniens à ports en dimension finie. Un système hamiltonien à ports est formellement construit comme l'interconnexion conservative (structure de Dirac  $\mathcal{D}$ , définition 1.10 et figure 1.3) de composants stockants une énergie  $E = H(x)$  (1.8), de composants dissipant une puissance  $D = f_D^\top \epsilon_D$  (1.10) et de sources de puissance  $S = f_S^\top \epsilon_S$  (1.9).

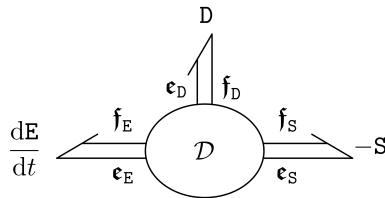


FIGURE 1.3 : Représentation schématique d'un système hamiltonien à ports comme l'interconnexion保守的 (structure de Dirac  $\mathcal{D}$ , définition 1.10 et figure 1.3) de composants stockants une énergie  $E = H(x)$  avec  $\frac{dE}{dt} = f_E^\top \epsilon_E$  (1.8), de composants dissipant une puissance  $D = f_D^\top \epsilon_D$  (1.10) et de sources de puissance  $S = f_S^\top \epsilon_S$  (1.9) (voir définitions 1.10 et 1.11, et propriété 1.2).

**Définition 1.11 (Système hamiltonien à ports)** *Un système hamiltonien à ports est la donnée d'un espace de puissance  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_E \times \mathcal{P}_D \times \mathcal{P}_S$  et d'une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{P}$  avec*

1.  $(f_E, \epsilon_E) \in \mathcal{P}_E \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  les variables de puissance associées au composants stockants pour la fonction de stockage ( $x \in \mathbb{R}^{n_x}, H \geq 0$ ) avec  $f_E^\top \epsilon_E = \nabla H(x)^\top \frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dt}$ ,
2.  $(f_S, \epsilon_S) \in \mathcal{P}_S \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$  les variables de puissance associées aux  $n_p$  ports externes avec la puissance entrante sur le système  $S = -f_S^\top \epsilon_S$ ,
3.  $(f_D, \epsilon_D) \in \mathcal{P}_D \subseteq \mathbb{R}^{n_D}$  les variables de puissance associées aux  $n_D$  relations dissipatives  $r(f_D, \epsilon_D) = 0$  avec la puissance dissipée  $D = f_D^\top \epsilon_D \geq 0$ ,
4.  $(f_E, f_S, f_D, \epsilon_E, \epsilon_S, \epsilon_D) \in \mathcal{D}$ .

**Propriété 1.3 (Passivité d'un système hamiltonien)** *Un système hamiltonien à port (définition 1.11) vérifie le bilan de puissance (1.7).*

**Preuve** On a par le point 4 de la définition 1.11 que  $f^\top \epsilon = 0$  avec  $f = (f_E^\top, f_S^\top, f_D^\top)^\top$  et  $\epsilon = (\epsilon_E^\top, \epsilon_S^\top, \epsilon_D^\top)^\top$ , soit par les points 1 à 3 :

$$\underbrace{f_E^\top \epsilon_E}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{f_S^\top \epsilon_S}_{-S} + \underbrace{f_D^\top \epsilon_D}_{D} = 0 \quad (1.13)$$

Il s'agit donc d'une extension de la structure géométrique des systèmes hamiltoniens standards [116] sur l'espace des phases à une géométrie sur l'espace d'état des variables de puissance, et déterminée par la structure d'interconnexion  $\mathcal{D}$ .

**Propriété 1.4 (Interconnexion de structures de Dirac)** *Soient deux structures de Dirac  $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{P}_i, i = 1, 2$  définies pour deux jeux de variables de puissance  $\mathcal{P}_1 = \{f_1, f_c, \epsilon_1, \epsilon_c\}$*

et  $\mathcal{P}_2 = \{\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_c, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_c\}$  avec  $\dim(\mathbf{f}_i) = \dim(\mathbf{e}_i) = n_i$  et  $\dim(\mathbf{f}_c) = \dim(\mathbf{e}_c) = n_c$  le nombre de ports communs servant à l'interconnexion des deux systèmes. Les puissances associées aux ports d'interconnexion de chaque structure de Dirac est donnée par  $\mathbf{f}_1^\top \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_c^\top \mathbf{e}_c = 0$  et  $\mathbf{f}_2^\top \mathbf{e}_2 - \mathbf{f}_c^\top \mathbf{e}_c = 0$ , soit  $\mathbf{f}_1^\top \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_2^\top \mathbf{e}_2 = 0$ . Pour une description détaillée de l'interconnexion de structures de Dirac, on pourra consulter [28] et [52, théorèmes 2.1 et 2.2 §2].

### 1.3.3 Représentation d'état

La réalisation d'un système hamiltonien à ports (définition 1.11 et [120, 153, 52, 177]) correspond en général à un ensemble mixte d'équations différentielles et algébriques (voir la représentation noyau/image des structures de Dirac et leur interconnexion dans [28] et [52, théorèmes 2.1 et 2.2], et structure *algébro-différentielle* au chapitre 5). On se restreint dans cette partie aux systèmes réalisables sous la forme d'un système hamiltonien à ports dit *entrée u-état x-sortie y*, c'est à dire pouvant se mettre sous la forme *déifferentielle* [52, (2.53)] :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ -y \end{pmatrix} = (\mathbf{J}(x) - \mathbf{R}(x)) \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

avec  $[\nabla H(x)]_i = \frac{\partial H(x)}{\partial x_i}$  le gradient du hamiltonien  $H$ ,  $\mathbf{J}(x)$  une matrice antisymétrique ( $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^\top \Rightarrow \mathbf{x}^\top \mathbf{J} \mathbf{x} = 0$ ) et  $\mathbf{R}(x)$  une matrice autoadjointe positive ( $\mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{x} \leq 0$ ). La structure (1.14) est obtenue par réduction de la structure de Dirac pour une relation de dissipation de la forme  $\mathbf{e}_D \equiv \mathbf{M}_R(x)\mathbf{f}_D$  avec  $\mathbf{f}_D = \mathbf{K}(x)(\nabla H(x), u)^\top$ ,  $\mathbf{M}_R(x) \succeq 0$ , et  $\mathbf{R}(x) = \mathbf{K}^\top \mathbf{M}_R \mathbf{K}$ . Les lois constitutives des composants stockants et dissipatifs sont encodées dans  $\nabla H(x)$  et  $\mathbf{R}(x)$ , respectivement. La structure de Dirac  $D$  est encodée dans les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{R}$ , qui sont décomposées comme

$$\mathbf{J}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x(x) & \mathbf{G}(x) \\ -\mathbf{G}(x)^\top & -\mathbf{J}_y(x) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x(x) & \mathbf{R}_{xy}(x) \\ \mathbf{R}_{xy}(x)^\top & \mathbf{R}_y(x) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

La propriété 1.3 est directement vérifiée, pour le bilan de puissance (1.7) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ -y \end{pmatrix} &= \underbrace{\nabla H(x)^\top \frac{dx}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} - \underbrace{u^\top y}_s \\ &= - \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}^\top}_{D} \mathbf{R}(x) \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

#### 1.3.3.1 Interconnexion

Par la définition formelle 1.11 d'un système hamiltonien à ports et la propriété de stabilité d'une structure de Dirac lors d'une l'interconnexion, on a directement que la connexion de deux système hamiltoniens à ports est encore un système hamiltonien à ports [28].

**Propriété 1.5 (Stabilité par interconnexion)** *L'interconnexion de deux systèmes hamiltoniens à ports (1.14)  $i = 1, 2$*

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_i}{dt} \\ -y_i^{\text{ext}} \\ -y_i^{\text{co}} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_i - \mathbf{R}_i & \mathbf{G}_i^{\text{ext}} & \mathbf{G}_i^{\text{co}} \\ \hline -(\mathbf{G}_i^{\text{ext}})^\top & \mathbf{D}_i & 0 \\ \hline -(\mathbf{G}_i^{\text{co}})^\top & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \nabla H_i(x_i) \\ u_i^{\text{ext}} \\ u_i^{\text{co}} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

réalisée pour la partie commune co

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^{\text{co}} &= \mathbf{y}_2^{\text{co}} = (\mathbf{G}_2^{\text{co}})^{\top} \nabla H_2(\mathbf{x}_2), \\ \mathbf{u}_2^{\text{co}} &= -\mathbf{y}_1^{\text{co}} = -(\mathbf{G}_1^{\text{co}})^{\top} \nabla H_1(\mathbf{x}_1),\end{aligned}\quad (1.18)$$

conduit au SHP

$$\left( \begin{array}{c} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} \\ -\mathbf{y}_1^{\text{ext}} \\ -\mathbf{y}_2^{\text{ext}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{J}_1 - \mathbf{R}_1 & \mathbf{G}_1^{\text{co}} (\mathbf{G}_2^{\text{co}})^{\top} & \mathbf{G}_1^{\text{ext}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_2^{\text{co}} (\mathbf{G}_1^{\text{co}})^{\top} & \mathbf{J}_2 - \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{\text{ext}} \\ \hline -(\mathbf{G}_1^{\text{ext}})^T & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{G}_2^{\text{ext}})^T & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \nabla H_1(\mathbf{x}_1) \\ \nabla H_2(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{u}_1^{\text{ext}} \\ \mathbf{u}_2^{\text{ext}} \end{array} \right). \quad (1.19)$$

### 1.3.3.2 Changement d'état

La forme (1.14) assure la passivité du système, inhérente à sa nature physique. C'est une propriété géométrique, au sens où tout se passe dans le produit scalaire pour la définition de la structure de Dirac qui est indépendant du choix de coordonnées. Cela se traduit par la préservation de la structure SHP (1.14) et donc de la propriété de passivité pour tout difféomorphisme (changement de variable bijectif  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_x})$  d'inverse  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_x})$ ).

On considère un changement de variable inversible  $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  de primaire  $\mathbf{x}$  et d'image  $\hat{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x})$ , d'inverse  $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})$ . Le système (1.14) est équivalent au système décrit par les quantités  $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$  et le hamiltonien  $\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}) = H(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}))$ , avec

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &\text{ est remplacé par } (\mathcal{J}_{\phi}(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})))^{-1} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}, \\ \nabla H(\mathbf{x}) &\text{ est remplacé par } (\mathcal{J}_{\phi}(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})))^{\top} \nabla \hat{H}(\hat{\mathbf{x}}),\end{aligned}\quad (1.20)$$

où  $\mathcal{J}_{\phi}(\mathbf{x})$  désigne la matrice Jacobienne de  $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$  avec  $[\mathcal{J}_{\phi}(\mathbf{x})]_{i,j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$  et  $\nabla H(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_H(\mathbf{x})^{\top}$ . La structure (1.14–1.15) se réécrit alors

$$\left( \begin{array}{c} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \\ -\mathbf{y} \end{array} \right) = (\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{x}})) \left( \begin{array}{c} \nabla \hat{H}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{u} \end{array} \right), \quad (1.21)$$

avec  $\Lambda(\hat{\mathbf{x}}) = \text{diag}(\mathcal{J}_{\phi}(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})), \mathbf{I}_d)$ , et la nouvelle structure  $\hat{\mathbf{J}} = -\hat{\mathbf{J}}^{\top} = \Lambda(\mathbf{J} \circ \hat{\phi}) \Lambda^{\top}$  et  $\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{x}}) = \Lambda(\mathbf{R} \circ \hat{\phi}) \Lambda^{\top} \succeq 0$ . Ce changement d'éta sera pîs à profit pour traiter des problèmes de simulation et de correction aux chapitres 2 et 4 (respectivement).

## 1.4 EXEMPLES

L'approche par les systèmes hamiltoniens à ports est maintenant illustrée sur des systèmes élémentaires : un oscillateur harmonique (système hamiltonien classique), puis un circuit RL est donnée. On montre comment la structure de Dirac garantit la passivité. Finalement, ces deux systèmes sont connectés pour former un modèle simplifié de haut-parleur électrodynamique à passivité garantie.

### 1.4.1 Système conservatif

On considère un système hamiltonien à ports isolé ( $S = 0$ ) et conservatif ( $D = 0$ ). La structure de Dirac est alors donnée par la matrice anti-symétrique  $\mathbf{J}_x(\mathbf{x}) =$

$-\mathbf{J}_x(\mathbf{x})^\top$  avec  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}_x(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x})$  et  $\frac{dE}{dt} = \nabla H(\mathbf{x})^\top \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla H(\mathbf{x})^\top \mathbf{J}_x \nabla H(\mathbf{x}) = 0$ . On considère ici l'oscillateur harmonique de la figure 7.2a, avec  $n_x = 2$  composants stockants (masse  $M$  et raideur  $K$ ), et  $n_D = 0$  composants dissipatifs (système conservatif). On décrit dans un premier temps la dynamique de la partie auto-nomme ( $n_p = 0$ ).

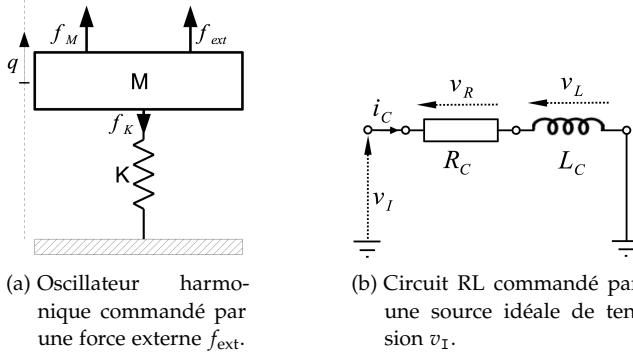


FIGURE 1.4 : Exemples pour l'illustration de l'approche par les systèmes hamiltoniens à ports 1.4. La structure de Dirac est donnée par les lois de Newton dans le cas 7.2a et par le lois de Kirchhoff dans le cas 7.2b.

**OSCILLATEUR LINÉAIRE :** L'élargissement d'un ressort est donnée par la position  $q$  de la masse mesurée par rapport à l'équilibre du système. Le hamiltonien est la somme des énergies cinétique et potentielle :  $H(\mathbf{x}) = H_M(x_1) + H_K(x_2)$ , pour l'état  $\mathbf{x} = (p, q)^\top$ , avec la quantité de mouvement  $p = M \frac{dq}{dt}$ , l'énergie cinétique  $H_M(x_1) = \frac{x_1^2}{2M}$  ( $M$  désigne la masse) et l'énergie potentielle  $H_K(x_2) = \frac{Kx_2^2}{2}$  ( $K$  désigne la raideur). La force d'inertie de la masse est  $f_M = M \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt}$ , et sa vitesse est donnée par  $v_M = \frac{dq}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ . La force de rappel est  $f_K = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1} = Kx_1$ . La masse est solidaire du ressort (connexion rigide), de sorte que  $v_K = v_M$ , et la structure de Dirac associée est obtenue par le principe fondamental de la dynamique  $\frac{dp}{dt} = -f_K$ . Cette description régénère la dynamique hamiltonienne classique [116] :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix}}_{\frac{d\mathbf{x}}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_x} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\nabla H(\mathbf{x})}. \quad (1.22)$$

**OSCILLATEUR NON LINÉAIRE :** La loi constitutive linéaire du ressort est ici changée en une loi non linéaire avec  $f_{NL}(q) = \sum_{n=0}^N K_n q^{2n+1}$ , et d'énergie potentielle associée  $H_{NL}(q) = \int_0^q f_{NL}(x) dx = \sum_{n=0}^N \frac{K_n}{2(n+1)} q^{2(n+1)}$  construite de sorte à être positive (ce qui conditionne les  $K_n \geq 0$ ). Pour avoir la nouvelle équation de la dynamique, il suffit de remplacer la fonction  $H$  du cas précédent par  $H(\mathbf{x}) = H_M(x_1) + H_{NL}(x_2)$  et de reprendre l'équation (C5) : on bénéficie directement de la séparation de lois constitutives  $H$  de la structure d'interconnexion donnée par la structure de Dirac  $\mathcal{D}$ .

**PORTE EXTERNE :** On considère maintenant le système commandé de la figure 7.2a. Les variables définies par le port d'interconnexion sont séparées en entrée  $\mathbf{u} = (f_{ext})^\top$  (force appliquée) et sortie  $\mathbf{y} = (v_{ext})^\top = (v_M)^\top$  (vitesse asso-

ciée) de sorte que le travail de la force extérieure est  $f_{\text{ext}} q$  et la puissance externe fournie est  $\mathbf{S} = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ . La dynamique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \\ -\mathbf{v}_{\text{ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{M} \\ Kq \\ f_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

qui régénère la forme (1.14–1.15) pour la structure donnée table A1.

État : $\mathbf{x} = (p, q)^T$	Énergie : linéaire $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{Kx_2^2}{2}$ non linéaire $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{K_0x_2^2}{2} + \frac{K_1x_2^4}{4}$
Entrée : $\mathbf{u} = (f_{\text{ext}})^T$	Sortie : $\mathbf{y} = (\mathbf{v}_{\text{ext}})^T$
Structure : $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \emptyset_{3 \times 3}$	

TABLE 1.1 : Formulation port-hamiltonienne (1.14–1.15) pour l'oscillateur harmonique de la figure 7.2a, avec la position de la masse  $q$  et quantité de mouvement associée  $p = M \frac{dq}{dt}$ , force externe  $f_{\text{ext}}$  et aucun phénomène dissipatif.

#### 1.4.2 Système strictement passif

La définition des systèmes hamiltoniens à ports comme l'interconnexion conservative de composants stockants, dissipatifs et sources permet d'étendre la géométrie des système hamiltonien classiques [116] et  $n_D = 0$ , pour lesquels  $n_x$  est nécessairement pair (espace des phases  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  avec  $\dim(\mathbf{q}) = \dim(\mathbf{p})$ ) et  $\mathbf{J}_x$  est donnée par la structure *symplectique*  $\mathbf{J}_x^* = \begin{pmatrix} \emptyset_{n_x/2} & -\mathbf{I}_{d_{n_x/2}} \\ \mathbf{I}_{d_{n_x/2}} & \emptyset_{n_x/2} \end{pmatrix}$ , pour une configuration canonique. Dans le formalisme des SHP,  $\mathbf{J}_x$  peut être de rang non maximal. Ceci est illustré sur le circuit RL de la figure 7.2b qui correspond à un fil conducteur de résistance totale  $R$  formé en bobinage d'inductance totale  $L$ .

Ce système inclut  $n_x = 1$  composant stockant (inductance  $L$ ),  $n_D = 1$  composant dissipatif (résistance  $R$ ) et  $n_p = 1$  port externe (tension d'entrée  $v_{\text{ext}}$ ). L'état associé à l'inductance correspond au flux magnétique total  $\mathbf{x} = (\phi)^T$  avec  $\phi = \int_0^t v_L(\tau) d\tau$ , et le hamiltonien est donné par l'énergie électrodynamique stockée dans le matériau (air) parcouru par le flux avec  $H(\mathbf{x}) = \frac{\phi^2}{2L}$ , de sorte que  $i_L = \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\phi_1}{L}$ . Les flux et effort associés au composant dissipatif sont  $\mathbf{f}_R = (i_L)^T$ ,  $\mathbf{e}_R = (v_R)^T$  avec la relation de dissipation  $\mathbf{r}(\mathbf{f}_R, \mathbf{e}_R) = R \mathbf{f}_R - \mathbf{e}_R = 0$ . Les variables sur les ports sont l'entrée  $\mathbf{u} = (v_{\text{ext}})^T$  et la sortie  $\mathbf{y} = (i_{\text{ext}})^T = (i_L)^T$ . La structure de Dirac de ce système est donnée par les lois de Kirchhoff (loi des mailles, loi des noeuds). Ceci régénère la forme SHP (1.14–1.15) pour la structure de la table A2.

État : $\mathbf{x} = (\phi)^\top$	Énergie : $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L}$
Input : $\mathbf{u} = (v_{\text{ext}})^\top$	Output : $\mathbf{y} = (i_{\text{ext}})^\top$
Structure : $\mathbf{J} = \left( \begin{array}{c c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), \mathbf{R} = \left( \begin{array}{c c} R_c & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right).$	

TABLE 1.2 : Formulation SHP pour le circuit RL de la figure 7.2b, avec le flux magnétique dans la bobine  $\phi$ , la tension d'entrée  $v_{\text{ext}}$  et la tension de la résistance  $v_R = R i_L$  pour la loi constitutive  $i_L = \frac{\partial H}{\partial x_1}$ .

#### 1.4.3 Interconnexion de systèmes

L'approche par les SHP permet le traitement naturel des systèmes multiphy- siques. Un exemple classique en audio est le haut-parleur électrodynamique, qui inclut des phénomènes d'origine électromagnétique, mécanique, acoustique et thermique. On présente ici un modèle simplifié de la partie électromécanique, basé sur le modèle standard (linéaire invariant) de Thiele et Small [168, 169, 157, 158]. Ce modèle est construit comme l'interconnexion conservative de (i) un circuit RL associé au bobinage de fil conducteur et (ii) un système oscillateur harmonique amorti associé à la masse du diaphragme maintenue par la suspension et à la charge acoustique. L'interconnexion conservative est réalisée par la connexion des flux et efforts électriques (courant, tension) aux flux et efforts mécaniques (vitesse, force) par un gyrateur qui encode le couplage électromagnétique (force de Laplace  $f_{\mathcal{L}}$  et tension contre-électromotrice  $v_{\mathcal{L}}$  dues à l'aimant permanent).

La partie électrique correspond à l'exemple de la figure 7.2b, table A2 auquel on ajoute un port pour la connexion, avec  $\mathbf{x}_1 = (\phi)^\top$  le flux magnétique dans la bobine,  $H_1(\mathbf{x}_1) = \frac{[x_1]^2}{2L}$  l'énergie électromagnétique,  $R_e$  la résistance du fil,  $v_{\text{ext}}$  la tension d'entrée et  $v_{\mathcal{L}}$  la tension contre électromotrice due au déplacement forcé du bobinage dans le champ magnétique :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi}{dt} \\ -i_L \\ i_L \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} -R_e & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\phi}{L} \\ v_{\text{ext}} \\ v_{\mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Le système mécanique correspond à l'oscillateur harmonique de la figure 7.2a, table A1 auquel on ajoute un amortissement  $R_a$ , avec la masse  $M$  et la raideur  $K$ . L'état  $\mathbf{x}_2 = (p, q)^\top$  réuni la quantité de mouvement associée à la masse du diaphragme  $p = M \frac{dq}{dt}$  et la position du diaphragme  $q$  (mesurée par rapport à l'équilibre de la suspension). Le hamiltonien est la somme de l'énergie cinétique  $H_M(x_1) = \frac{x_1^2}{2M}$  et de l'énergie potentielle  $H_K(x_2) = \frac{K x_2^2}{2}$  avec  $H_2(\mathbf{x}_2) = H_M([x_2]_1) + H_K([x_2]_2)$ . L'effort associé à l'amortissement (force) est  $\epsilon_D = R_a \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial [x_2]_1}$ , et la structure de Dirac est donnée par le principe fondamental de la dynamique, avec  $\epsilon_M = \frac{d[x_2]_1}{dt} = -\epsilon_K - \epsilon_R + \epsilon_{\text{ext}}$  dont une réalisation est

$$\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \\ -\frac{dq}{dt} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} -R_a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{p}{M} \\ K q \\ f_{\mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

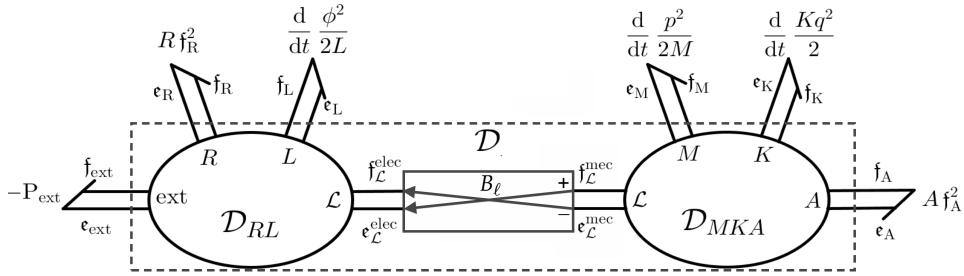


FIGURE 1.5 : Structure de Dirac  $\mathcal{D}$  associée à l'interconnexion d'un circuit RL  $\mathcal{D}_{RL}$  (1.24) et d'un oscillateur mécanique amorti  $\mathcal{D}_{MKA}$  (1.25). Le couplage électromécanique traduit une interconnexion conservative par gyrateur (1.26) de ratio  $B_\ell$  (force de Laplace  $f_L = -\mathbf{e}_L^{mec}$  et force contre électromotrice  $v_L = -\mathbf{e}_L^{elec}$ ).

L'interconnexion des structures de Dirac associées à la partie électrique (1.24) et à la partie mécanique (1.25) sont connectées par un gyrateur (voir figure 1.5). L'intensité du couplage est caractérisée par le *ratio* du gyrateur, qui correspond dans le cas du haut-parleur au *facteur de force*  $B_\ell$ , produit de l'intensité du champ magnétique  $B$  auquel est soumis la longueur  $\ell$  de fil conducteur :

$$\begin{pmatrix} f_L \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_\ell \\ -B_\ell & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ i_L \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Cette interconnexion est保守的, avec  $(f_L, v_L)^\top \left( \frac{dq}{dt}, i_L \right) = 0$  par antisymétrie. À partir de (1.24–1.26) et des lois constitutives pour les composants, on obtient

$$\begin{cases} f_L &= B_\ell \frac{\partial H_1(\phi)}{\partial \phi} \\ v_L &= -B_\ell \frac{\partial H_2(p, q)}{\partial p} \end{cases} \quad (1.27)$$

et le modèle de Thiele et Small s'écrit sous la forme SHP (1.14–1.15) pour la structure donnée table A3.

État : $\mathbf{x} = (\phi, p, q)^\top$	Énergie : $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L} + \frac{x_2^2}{2M} + K \frac{x_3^2}{2}$
Input : $\mathbf{u} = (v_{ext})^\top$	Output : $\mathbf{y} = (i_L)^\top$
Structure : $J = \left( \begin{array}{ccc c} 0 & -B_\ell & 0 & 1 \\ B_\ell & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), R = \left( \begin{array}{ccc c} R_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$	

TABLE 1.3 : Formulation SHP (1.14–1.15) d'un modèle simplifié de haut-parleur, avec  $\phi$  le flux magnétique de la bobine d'inductance  $L$ ,  $q$  la position du diaphragme mesurée par rapport à l'équilibre de la suspension de raideur  $K$ ,  $p = M \frac{dq}{dt}$  la quantité de mouvement associée à la masse du diaphragme,  $R_e$  et  $R_a$  les coefficients de dissipation associés à la résistance du fil et aux frottements mécaniques (respectivement), et  $v_{ext}$  la tension d'entrée. Le couplage électromécanique est encodé dans le gyrateur (1.26) de coefficient  $B_\ell$  (facteur de force de Laplace/contre-électromotrice).

### 1.5 CONCLUSIONS DU CHAPITRE

Après un rappel sur les systèmes dynamiques, et en particulier sur les systèmes passifs, nous avons introduit les systèmes hamiltonien à ports. Ces systèmes sont décrits comme l'interconnexion conservative de composants stockants, dissipatifs et sources, ce qui garantit la passivité du modèle. Une classe particulière de SHP (entrée-état-sortie explicite) à la base des développements subséquents a été rappelée. Nous proposons au chapitre suivant deux méthodes numériques qui préservent la structure SHP, et en particulier des systèmes de cette classe.

# 2

## MÉTHODES NUMÉRIQUES PRÉSERVANT LA PASSIVITÉ

Aucune machine ne peut mentir.  
Ni dire la vérité non plus.

G. K. Chesterton - *Father Brown*,  
1954.

### Sommaire

---

2.1	Introduction et organisation du chapitre . . . . .	27
2.2	Rappels sur les méthodes numériques . . . . .	29
2.2.1	Schéma numérique à un pas . . . . .	29
2.2.2	Convergence, consistance et stabilité aux erreurs . . . . .	30
2.2.3	Rappel des méthodes à un pas . . . . .	32
2.3	Méthode à une étape préservant la passivité . . . . .	34
2.3.1	Gradient discret . . . . .	35
2.3.2	Construction de la méthode . . . . .	36
2.3.3	Analyse de la méthode . . . . .	37
2.3.4	Cas d'un hamiltonien quadratique . . . . .	40
2.4	Méthode à deux étapes préservant la passivité . . . . .	42
2.4.1	Construction de la méthode . . . . .	43
2.4.2	Analyse de la méthode . . . . .	44
2.4.3	Cas d'un hamiltonien quadratique . . . . .	47
2.5	Illustration . . . . .	47
2.5.1	Système simulé . . . . .	47
2.5.2	Comparaison à quelques méthodes standard . . . . .	48
2.5.3	Résultats sur le système quadratisé . . . . .	49
2.6	Conclusions du chapitre . . . . .	51

---

#### 2.1 INTRODUCTION ET ORGANISATION DU CHAPITRE

Ce chapitre est dédié à la simulation à temps discret du système différentiel passif (1.14–1.15), dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports. Ce formalisme garantit la stabilité à temps continu d'un système autonome en préservant la passivité du système physique original au cours de la modélisation (voir chapitre 1). Nous présentons ici une classe de méthodes numériques qui transposent cette passivité du temps continu au temps discret, de sorte à assurer la stabilité du système numérique, et donc des simulations.

Un méthode numérique fournit une approximation de la solution  $\mathbf{x}(t_n) \in \mathbb{R}^{n_x}$  sur la grille  $t_n = n t_e$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  pour la période d'échantillonnage (constante)  $t_e = t_{n+1} - t_n \in \mathbb{R}_+^*$ , et une entrée connue  $\mathbf{u}(t_n) \equiv \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{n_y}$ . En vue d'une implémentation temps réel, les objectifs sont les suivants.

(P1) Préserver la passivité du système continu (un système conservatif reste conservatif en numérique, et plus généralement un système passif reste passif).

- (P2) Faible erreur entre la trajectoire continue et la trajectoire approchée (ordre de consistance élevé).
- (P3) Faible complexité de l'algorithme (pas d'équation implicite à résoudre).

Le *nombre de pas* d'une méthode est le nombre de pas de temps mis en jeu dans une itération de la méthode. Le *nombre d'étapes* est le nombre d'évaluations intermédiaires réalisées à chaque itération de la méthode. L'ensemble des méthodes multi-pas et multi-étapes est regroupé sous l'appellation des *méthodes générales à plusieurs pas* (*general linear multistep methods*, c. f. [27]). Dans cette thèse, nous considérons des méthodes à un pas et multi-étapes (e.g. les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta). La stabilité de ces méthodes est traditionnellement testée sur un système trivial  $\frac{dx}{dt} = \lambda x$  avec  $x(0) = x_0$  : si la séquence d'approximations  $(x_n)_{0 < n}$  converge vers 0 pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}_-$ , alors la méthode est absolument stable (Lyapunov ou A-stability, i.e. la passivité du système original est préservé, avec  $\Re(\lambda) < 0$ ). Cette propriété n'est pas garantie pour toutes les méthodes de la classe des méthodes générales à plusieurs pas. En particulier, G. Dahlquist a montré qu'il n'existe pas de méthodes multi-pas d'ordre de consistance supérieur à 2 qui préservent la stabilité asymptotique pour *tous* les systèmes passifs [40]. De même, les formules de Runge-Kutta implicite d'ordre 6 (BDF6, pour *backward differentiation formula*) ne sont pas A-stables (i.e. ne préservent pas la passivité de *tous* les systèmes passifs, voir [163]). Pour une description exhaustive des concepts relatifs à l'analyse des schémas numériques à un pas (tels qu'utilisés ici), on pourra se référer à [44, § VIII.2] pour le cas général et à [27, §2] pour l'analyse de quelques schémas usuels (notamment les schémas d'Euler et de Runge-Kutta).

En vue de l'objectif (P1), on s'intéresse à la classe des méthodes dites *passives*, c'est à dire des méthodes qui préservent, à temps discret, la passivité d'un système passif à temps continu. On notera qu'une classe de méthode de Runge-Kutta absolument stable est donnée par les méthodes de Runge-Kutta symplectiques [27, §3.7] (dont les méthodes de collocation de Gauss sont un cas particulier [27, p.277]). Pour les systèmes conservatifs, on peut construire des *méthodes symplectiques* par une séparation de l'énergie en énergie cinétique et potentielle. On applique alors une méthode aux différences finies sur les deux parties du système, évaluées sur des grilles temporelles entrelacées (méthode d'Euler symplectique, méthode de Störmer-Verlet, méthodes géométriques [70] et méthodes aux différences finies [10]). Cette séparation n'est pas appliquée ici : toutes les composantes de l'énergie ont le même rôle.

Dans cette thèse, l'approche est de reconstruire à temps discret la structure de SHP, par une définition adaptée de versions discrètes pour les quantités  $\frac{dx}{dt}$  et  $\nabla H$ . Le bilan de puissance discret est alors garanti par (i) une forme discrète de dérivation d'une fonction composée et (ii) la structure SHP (de manière similaire au cas continu, voir preuve de la propriété 1.3). Cette approche est connue comme la méthode du gradient discret [87] (voir aussi [141, 122], [24, §4.3] et [3, §2.2]). Nous proposons (i) une méthode de gradient discret à 1 pas et 1 étape (ordre 1) et (ii) une méthode de gradient discret à 1 pas et 2 étapes (ordre 2).

Ce chapitre est organisé comme suit. Section 2.2, un rappel des méthodes à un pas et des outils pour leur analyse est donné. On rappelle en particulier les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta. Section 2.3, on construit une méthode numérique à une étape qui préserve la passivité des SHP. Cette méthode est consistante à l'ordre 1 avec le problème continu. Section 2.4, on construit une méthode

numérique à deux étapes qui préserve la passivité des SHP. Cette méthode est consistante à l'ordre 2 avec le problème continu. Section 2.5, des résultats de simulations obtenus par ces méthodes sont présentés.

## 2.2 RAPPELS SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES

On s'intéresse au problème de Cauchy (1.2), c'est à dire à la solution sur l'intervalle de temps  $\mathcal{T} = [t_0, T]$  d'un système dynamique de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t). \quad (2.1)$$

d'état  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  pour la condition initiale  $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ . On suppose le problème bien posé *i.e* la fonction  $f$  vérifie les hypothèses de régularité du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 1.1). Une méthode numérique consiste à déterminer une séquence  $(x_n)_{0 \leq n \leq n_t}$  qui approxime la solution de (2.1) sur une grille temporelle, par exemple à pas constant  $t_n = t_0 + n t_e$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  pour la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/t_e$ . Dans cette thèse, nous ne considérons que des méthodes à un pas, pour lesquelles l'approximation  $x_{n+1} \simeq x(t_{n+1})$  est obtenue à partir de celle du pas de temps  $t_n$ .

Cette section est dédiée à un rappel (i) de la construction de ces méthodes et (ii) des outils pour les analyser. Elle s'appuie largement sur les références [104], [27, §2], [39, §5] et [44, §VIII.2]. Premièrement, nous rappelons la construction d'une méthode à un pas à partir du développement de Taylor du champ de vecteurs  $f$ . Deuxièmement, on rappelle les outils disponibles pour l'analyse de ces schémas en termes de précision (liée à l'écart entre les taux d'accroissement des solutions exacte et approchée). Troisièmement, on rappelle des schémas à un pas standards : (i) la classe des méthodes d'Euler (dont la méthode du point-milieu est un cas particulier) et (ii) la classe des méthodes de Runge-Kutta (dont les méthodes d'Euler sont un cas particulier).

### 2.2.1 Schéma numérique à un pas

Le domaine  $\mathcal{T} = [t_0, T]$  est discrétisé en  $n_t$  sous-domaines  $\mathcal{T}_n = [t_{n-1}, t_n]$ ,  $n \in [1, n_t]$  pour le pas d'échantillonnage  $t_e = \frac{T}{n_t}$  et les temps  $t_n = n t_e$ ,  $0 \leq n \leq n_t$ . Dans cette thèse, nous considérons des systèmes affines en la commande (définition 1.2) pour lesquelles la dépendance temporelle est donnée par  $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t)$ . On suppose dans la suite un bloqueur d'ordre 0 :  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_n)$  pour tout  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , on note  $\mathbf{f}_n(\mathbf{x})$  la dynamique *autonome* associée à la valeur bloquée  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$  :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{f}_n(x(t)), \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (2.2)$$

On souhaite donc intégrer le système (2.2) sur la grille  $t_n = n t_e$ , avec  $t_e > 0$  et  $n \in [1, \dots, n_t]$ , c'est à dire calculer itérativement

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + t_e \Delta_n(t_e), \quad \text{pour } 0 \leq n \leq n_t - 1, \quad (2.3)$$

où le taux d'accroissement continu sur la durée  $t_e$  est donné par

$$\Delta_n(t_e) = \frac{1}{t_e} \int_{t_n}^{t_n + t_e} \mathbf{f}_n(x(\tau)) d\tau. \quad (2.4)$$

Une méthode numérique à un pas consiste à fournir un taux d'accroissement numérique  $\sigma_n(x(t_n), t_e)$ , dépendant uniquement du point courant et de la durée du pas, qui approxime le *taux d'accroissement continu*  $\Delta_n(t_e)$  et qui permet d'approcher les points de la trajectoire  $x(t_n)$  par les points  $\mathbf{x}_n$  ( $0 \leq n \leq n_t$ ) grâce au calcul itératif

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \underbrace{t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)}_{\delta \mathbf{x}_n}, \text{ pour } 0 \leq n \leq n_t - 1, \quad (2.6)$$

similaire à (2.3). La section suivante présente les définitions et propriétés qui permettent d'étudier la qualité de telles approximations.

### 2.2.2 Convergence, consistance et stabilité aux erreurs

En supposant que les trajectoires continue et discrète sont identiquement initialisées avec  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , on est intéressé par la qualité de l'approximation finale  $\mathbf{x}_{n_t} \simeq \mathbf{x}(n_t t_e)$ . On distingue l'erreur locale (ou erreur de consistance) liée à la qualité de l'approximation  $\sigma_n(t_e)$  sur un pas de temps, de l'erreur globale (ou erreur de stabilité) liée à l'*accumulation* des erreurs locales et des erreurs de représentation machine tout au long de la simulation, sur  $n_t$  pas de temps. Ces deux erreurs sont inéluctables (on ne peut pas les annuler), et l'objectif est de les maîtriser (i.e. les majorer). Pour caractériser ces erreurs, on a recours à des concepts tels que la consistance et la stabilité aux erreurs (qu'on prendra soin de ne pas confondre avec la stabilité de la solution du système dynamique définie section 1.2.2). Ces concepts sont définis ci-après.

#### 2.2.2.1 Consistance

Nous prenons la définition suivante de l'erreur de consistance :

**Définition 2.1 (Erreur de consistance)** L'erreur de consistance d'une méthode numérique  $\sigma$  est l'erreur commise sur le taux d'accroissement pour une itération, lorsqu'on suppose que l'on a commis aucune erreur jusqu'au temps courant  $t_n$ , c'est à dire que  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$ . Cette erreur  $(\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}_{n+1})/t_e$  est alors donnée par la fonction

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \Delta_n(t_e) - \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) \quad (2.7)$$

**Remarque 2.1 (Erreur  $\mathbf{e}_n$ )** L'erreur  $\mathbf{e}_n$  choisie ici porte sur le taux d'accroissement et non sur la trajectoire  $\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}_{n+1}$ , comme c'est le cas par exemple dans [44, définition p.220]. Ce choix est motivé par la simplification de la présentation subséquente.

**Définition 2.2 (Consistance)** Une méthode numérique est dite consistante avec le problème de Cauchy (1.2) si la somme des erreurs de consistance tend en norme vers 0 lorsque le pas de temps tend vers 0 :  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{n_t-1} \| \mathbf{e}_n(\mathbf{x}_n, t_e) \| = 0$ .

On prendra ici la norme euclidienne  $\| \cdot \|_2$ .

**Définition 2.3 (Ordre de consistance)** Une méthode numérique est dite consistante d'ordre  $p$  (avec  $p \geq 1$ ) si l'erreur de consistance vérifie  $\| \mathbf{e}_n(\mathbf{x}_n, t_e) \| \leq C t_e^p$ ,  $0 \leq n \leq n_t$ . Cette condition est équivalente à  $\| \mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}_{n+1} \| \leq C t_e^{p+1}$  qui est la formulation majoritairement retrouvée dans la littérature (c.f. remarque 2.1).

D'après la définition 2.3 et les équations (2.4), (2.6) et (2.7), on a pour une méthode consistante ( $p \geq 1$ ) :

$$\lim_{t_e \rightarrow 0} \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), t_e) = \lim_{t_e \rightarrow 0} \Delta_n(\mathbf{x}(t_n), t_e) = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n)), \quad (2.8)$$

c'est à dire que le taux d'accroissement discret (2.6) converge vers le champ de vecteurs  $\mathbf{f}_n$  lorsque le pas de temps est diminué.

On rappelle maintenant la construction d'une condition nécessaire et suffisante de consistance à l'ordre  $p$  (c. f. [44, §VIII.2.4]). Si  $\mathbf{f}_n$  est de classe  $C^p$  (i. e. la solution est de classe  $C^{p+1}$  avec  $\frac{d^{i+1}\mathbf{x}(t)}{dt^{i+1}} = \frac{d^i\mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t))}{dt^i}$ ), on peut procéder à un développement de Taylor d'ordre  $p+1$  en  $t_n$  de la solution continue par rapport au temps  $t$  :

$$\mathbf{x}(t_n + t_e) = \mathbf{x}(t_n) + \sum_{i=1}^{p+1} \frac{t_e^i}{i!} \frac{d^i \mathbf{x}(t_n)}{dt^i} + o(t_e^{p+1}) \mathbb{1}_{n \times 1}. \quad (2.9)$$

Alors, d'après (2.3), le *taux d'accroissement continu*  $\Delta_n(t_e)$  est tel que

$$\Delta_n(t_e) = \frac{1}{t_e} \left( \sum_{i=0}^p \frac{t_e^{i+1}}{(i+1)!} \frac{d^i \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n))}{dt^i} + o(t_e^{p+1}) \right). \quad (2.10)$$

Par ailleurs, soit une méthode numérique à un pas caractérisée par un taux d'accroissement numérique (2.6) de régularité  $C^{p+1}$  en la variable  $t_e$ . Son développement de Taylor à l'ordre  $p+1$  autour de  $t_e = 0$  est donné par :

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \left( \sum_{i=0}^p \frac{t_e^i}{i!} \frac{\partial^i \sigma_n(\mathbf{x}_n, 0)}{\partial t_e^i} + o(t_e^p) \right). \quad (2.11)$$

D'après (2.7), l'erreur de consistance se réécrit alors

$$\mathbf{e}_n(t_e) = \sum_{i=0}^p \frac{t_e^i}{i!} \left( \frac{1}{i+1} \frac{d^i \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n))}{dt^i} - \frac{\partial^i \sigma_n(\mathbf{x}_n, 0)}{\partial t_e^i} \right) + o(t_e^p) \mathbb{1}_{n \times 1}, \quad (2.12)$$

dont découle la propriété suivante.

**Propriété 2.1 (Condition nécessaire et suffisante de consistance)** *La méthode numérique  $\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  est consistante d'ordre (au moins)  $p$  si et seulement si*

$$\frac{\partial^i \sigma_n(\mathbf{x}_n, 0)}{\partial t_e^i} = \frac{1}{i+1} \frac{d^i \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n))}{dt^i}; \quad 0 \leq i \leq p-1. \quad (2.13)$$

En résumé, la consistance caractérise l'erreur commise par la méthode sur le développement de Taylor de la solution, sur un unique pas de temps.

### 2.2.2.2 Stabilité

La stabilité d'une méthode numérique caractérise le comportement de la séquence  $(\mathbf{x}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$  sous l'accumulation des erreurs de toute origine (erreurs de consistance, mais aussi erreurs de représentation machine et d'initialisation). Cette propriété dépend de la méthode, et de la dynamique autonome (2.2).

**Définition 2.4 (Stabilité d'une méthode numérique)** *On dit qu'une méthode  $\sigma$  est stable par rapport aux erreurs si les erreurs d'initialisation  $|\mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_0|$  et l'erreur locale due (i) aux petites erreurs d'arrondis et (ii) aux erreurs de consistance  $t_e \mathbf{e}_n(t_e)$  (définition 2.1)*

induisent une erreur finale  $|\mathbf{v}_{n_t} - \mathbf{x}_{n_t}|$  contrôlable, c'est à dire qu'il existe une constante  $S \geq 0$  (constante de stabilité) telle que pour toute suite définie pour  $0 \leq n < n_t$  par

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + t_e \sigma_n(\mathbf{v}_n, t_e) + \epsilon_n\end{aligned}$$

on a  $\max_n |\mathbf{v}_n - \mathbf{x}_n| \leq S (|\mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_0| + \sum_n |\epsilon_n|)$ .

**Propriété 2.2 (Condition suffisante de stabilité)** Si la pente  $\sigma$  vue comme une fonction de la valeur initiale  $\sigma_n \equiv \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  est lipschitzienne par rapport à sa première variable :

$$\|\sigma_n(\mathbf{x}, t_e) - \sigma_n(\tilde{\mathbf{x}}, t_e)\| \leq K \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|,$$

alors la méthode est stable par rapport aux erreurs d'arrondis et de condition initiale, et l'on peut prendre  $S = \exp(KT)$  comme constante de stabilité.

La preuve de la propriété 2.2 est obtenue par application de la version discrète du lemme de Grönwall (voir par exemple [44, p.229]).

#### 2.2.2.3 Convergence

Lors des simulations, on va souhaiter quantifier l'écart de la trajectoire numérique à la trajectoire du système continu. Ceci amène à la notion de convergence qui traduit le comportement de l'erreur globale, qui est la seule qui importe en pratique (puisque l'on simule sur un nombre de pas de temps  $n_t$  généralement très grand).

**Définition 2.5 (Erreur globale)** L'erreur globale par rapport à la solution exacte  $\mathbf{x}(t_n)$  de la suite  $\mathbf{x}_n$  obtenue pour la méthode  $\sigma_n$  est  $e = \max_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(t_n)\|$ .

**Définition 2.6 (Convergence)** Une méthode est convergente si l'erreur globale (définition 2.5) tend à s'annuler lorsque (i) la condition initiale tend vers la vraie condition initiale et (ii) le pas de temps tend vers 0 :  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \max_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(t_0)} e = 0$ .

Le lien entre consistance, stabilité et erreur globale est le suivant (c. f. [44, corollaire p.227]). Par définition de l'erreur de consistante (définition 2.1), et avec l'hypothèse  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{n+1}) &= \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{e}_n(\mathbf{x}_n, t_e) \\ &= \mathbf{x}_n + t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) \\ &= \mathbf{x}(t_n) + t_e \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), t_e)\end{aligned}$$

Si la méthode est stable de constante de stabilité  $S$ , on peut considérer  $\mathbf{v}_n \sim \mathbf{x}(t_n) + \epsilon_{n-1}$  et l'erreur globale s'écrit  $\max_n |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(t_n)| \leq S (|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(t_0)| + \sum_n |\epsilon_n|)$ . Si de plus la méthode est consistante (définition 2.2), alors  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \max_n |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(t_n)| \leq S |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(t_0)|$ , et le théorème suivant.

**Théorème 2.1 (Lax)** Si une méthode est (i) stable par rapport aux erreurs et (ii) consistante, alors elle est convergente.

#### 2.2.3 Rappel des méthodes à un pas

On rappelle ici deux classes de méthodes numériques à un pas : les méthodes d'Euler et les méthodes de Runge-Kutta. Pour une présentation exhaustive, consulter [104], [27, §2], [39, §5] et [44, §VIII.2].

### 2.2.3.1 Méthodes d'Euler

On appelle méthode d'Euler une méthode paramétrée par  $\alpha \in [0, 1]$  et définie par le taux d'accroissement numérique suivant

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)), \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)$  désigne  $\mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha t_e \sigma_n$ . En posant  $\delta\mathbf{x}_n = t_e \sigma_n$ , cette méthode revient à résoudre en  $\delta\mathbf{x}_n$  l'équation dynamique

$$\delta\mathbf{x}_n = t_e \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n), \quad (2.15)$$

et à évaluer l'équation de mise à jour suivante :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n. \quad (2.16)$$

Pour  $\alpha = 0$ , la méthode est *explicite* : la connaissance de  $\mathbf{x}_n$  suffit à déterminer  $\mathbf{x}_{n+1}$ . Pour  $\alpha > 0$ , la méthode est *implicite*, et l'on doit utiliser des méthodes de résolutions numérique (typiquement la méthode de Newton-Raphson [94, §5]).

Par hypothèse, la fonction  $\mathbf{f}_n$  vérifie une condition de Lipschitz, donc  $\sigma_n$  est bornée et on a directement que les méthodes d'Euler sont consistantes d'ordre au moins 1, avec  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\mathbf{x}_\alpha(t_e) = 0$  et  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \sigma_n(t_e) = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)$  (propriété 2.1). Et puisque  $\mathbf{f}_n$  est Lipschitzienne, les méthodes d'Euler sont stables par rapport aux erreurs (propriété 2.2), et donc convergentes (théorème 2.1).

Pour analyser la consistance d'ordre 2, on compare la dérivée de  $\sigma_n(t_e)$  par rapport à  $t_e$ , à la dérivée par rapport au temps de  $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n))$ ; c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n(t_e)}{\partial t_e} &= \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_\alpha(t_e)) \frac{\partial \delta\mathbf{x}_\alpha(t_e)}{\partial t_e} \\ &= \alpha \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_\alpha(t_e)) \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_\alpha(t_e)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

à

$$\frac{d\mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n))}{dt} = \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{x}(t_n)) \mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n)). \quad (2.18)$$

Par la propriété 2.1, on trouve que la seule méthode d'Euler consistante à l'ordre au moins 2 est la méthode du point milieu, donnée pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

### 2.2.3.2 Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes à un pas et multi-étapes, i. e. qui mettent en jeu plusieurs approximations de la solution sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . Le taux d'accroissement finalement retenu est obtenu par moyenne pondérée de tous les taux d'accroissement intermédiaires. Une méthode à  $K$  étapes est définie par deux ensembles de paramètres  $\alpha \in \mathbb{R}^{K \times K}$  et  $\beta \in \mathbb{R}^K$ .

- Les  $\alpha \in \mathbb{R}^{K \times K}$  définissent les  $K$  points d'évaluation  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  de la fonctions  $\mathbf{f}_n$  pour obtenir  $K$  approximations du taux d'accroissement  $\tilde{\sigma}_{n,k} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ .
- Les  $\beta \in \mathbb{R}^K$  définissent les poids pour la moyenne pondérées des  $K$  taux d'accroissement intermédiaires.

Les mises à jour intermédiaires sont données pour  $k \in [1, \dots, K]$  par

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{f}_n(\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e)), \\ \tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} t_e \tilde{\sigma}_{n,l}(\mathbf{x}_n, t_e), \end{cases} \quad (2.19)$$

et la mise à jour de la méthode (2.6) est donnée par

$$\begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) &= \sum_{k=1}^K \beta_k \tilde{\sigma}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e), \\ \mathbf{x}_{n+1}(\mathbf{x}_n, t_e) &= \mathbf{x}_n + t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e). \end{cases} \quad (2.20)$$

Par hypothèse,  $\mathbf{f}_n$  est lipschitzienne, donc les méthodes de Runge-Kutta sont stables (propriété 2.2 et [44, page 241]), et  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \delta \mathbf{x}_n(t_e) = 0$ . Si  $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$ , alors  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \sigma_n(t_e) = \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)$  : les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes (propriété 2.1), et donc convergentes (théorème 2.1). Pour illustrer l'analyse qui sera appliquée aux méthodes dédiées aux SHP, on redonne ici la preuve de la consistance d'ordre 2. La dérivée de la pente  $\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  par rapport au pas de temps est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e} &= \sum_{k=1}^K \beta_k \frac{\partial}{\partial t_e} \mathbf{f}_n(\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e)) \\ &= \sum_{k=1}^K \beta_k \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e)) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e} \\ &= \sum_{k=1}^K \beta_k \left( \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, t_e)) \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \mathbf{f}_n(\tilde{\mathbf{x}}_{n,l}(\mathbf{x}_n, t_e)) \right); \end{aligned} \quad (2.21)$$

La consistance d'ordre 1 implique  $\tilde{\mathbf{x}}_{n,k}(\mathbf{x}_n, 0) = \mathbf{x}_n$ , soit

$$\frac{\partial \sigma_n(\mathbf{x}_n, 0)}{\partial t_e} = \left( \sum_{k=1}^K \beta_k \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \right) \mathcal{J}_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{x}_n) \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n), \quad (2.22)$$

donc les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes à l'ordre au moins 2 par la propriété 2.1 si  $\sum_{k=1}^K \beta_k \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} = \frac{1}{2}$ . On peut dériver des conditions de même type pour obtenir des méthodes de Runge-Kutta d'ordre supérieur [27, §2]. Dans cette thèse, nous ne considérons que des méthodes à  $K = 2$  étapes d'ordre maximal 2 (pour les méthodes d'ordres  $\geq 2$ , on pourra consulter [27] et [44, §VIII.3]).

Les méthodes de Runge-Kutta généralisent les méthodes d'Euler, et on retrouve en particulier la méthode implicite du point milieu pour  $K = 1$ , avec  $\beta_1 = 1$  et  $\alpha_{1,1} = \frac{1}{2}$ . On remarque que les évaluations (2.19) sont explicites si et seulement si  $(\alpha_{k,l})_{k \leq l} = 0$ , et qu'une classe de méthodes explicites d'ordre 2 paramétrée par  $\alpha \in [0, 1[$  est définie par les coefficients  $\beta_1 = \alpha$ ,  $\beta_2 = 1 - \alpha$ ,  $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 0$  et  $\alpha_{2,1} = \frac{1}{2(1-\alpha)}$  (méthodes de Heun).

### 2.3 MÉTHODE À UNE ÉTAPE PRÉSERVANT LA PASSIVITÉ

On développe ici une méthode numérique dédiée à la simulation des systèmes hamiltoniens à ports (1.14-1.15) de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{J}_x(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_x(\mathbf{x}), & \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_{xy}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_{xy}(\mathbf{x}))^\top, & \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \mathbf{J}_y(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_y(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_y$  sont des matrices antisymétriques,  $\nabla H$  désigne le gradient du hamiltonien  $H(\mathbf{x}) \geq 0$  de Hessien positif  $\nabla^2 H(\mathbf{x}) \succeq 0$  et où  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{xy}^\top & \mathbf{R}_y \end{pmatrix} \succeq 0$ .

On propose ci-dessous une méthode basée sur la méthode du gradient discret [87] (voir aussi [141, 122], [24, §4.3] et [3, §2.2]). On montre que cette méthode préserve la passivité de la structure SHP, et est au moins d'ordre 1 (définitions 2.2 et 2.3) dans le cas général. Dans le cas d'un hamiltonien quadratique  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$  avec  $\mathbf{Q} \succ 0$ , on montre que cette méthode est explicite. Pour les systèmes linéaires à structure constante  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbb{0}$ ,  $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbb{0}$ , on montre que cette méthode régénère la méthode du point milieu (c. f. §2.2.3).

### 2.3.1 Gradient discret

La passivité des SHP s'établit en utilisant la règle de *dérivation en chaîne* appliquée à la fonction  $H \circ \mathbf{x} = E$  (1.8), et en exploitant les propriétés d'anti-symétrie de  $J(\mathbf{x})$  et de positivité de  $R(\mathbf{x})$  (c. f. (1.16)). Pour préserver cette propriété à temps discret, on reconstruit une règle de *différentiation en chaîne* appliquée à la même fonction  $H \circ \mathbf{x} = E$ . Ici, on approxime la variation d'énergie entre deux pas de temps  $\frac{E_{n+1} - E_n}{t_e} \simeq \frac{dE(t_n)}{dt}$  de sorte à garantir un bilan de puissance numérique de la forme

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{t_e} = -D_n + S_n; \quad D_n \geq 0, \quad \forall 0 \leq n \leq n_t. \quad (2.24)$$

Une approximation au premier ordre des opérateurs différentiels  $d\mathbf{x}(t, dt) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} dt$  et  $dH(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top d\mathbf{x}$  sur la grille temporelle  $t_n = n t_e$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  sont

$$\delta\mathbf{x}_n(t_e) = \mathbf{x}_{n+1}(t_e) - \mathbf{x}_n, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \delta H_n(t_e) &= H(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n(t_e)) - H(\mathbf{x}_n), \\ &= \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n(t_e))^\top \delta\mathbf{x}_n(t_e). \end{aligned} \quad (2.26)$$

pour le gradient discret  $\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})$  adapté au problème. Pour définir cet opérateur, on introduit la notation suivante :  $\bar{\delta}\mathbf{x}_i = (\delta x_1, \dots, \delta x_i, 0 \dots, 0)^\top$  avec  $\bar{\delta}\mathbf{x}_0 = \mathbb{0}$  et  $\bar{\delta}\mathbf{x}_{n_x} = \delta\mathbf{x}$ . L'incrément d'énergie associé à un déplacement  $\mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_i$  dans la direction  $x_i$  de l'espace d'état est alors donné par

$$\Delta_i(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_i) - H(\mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_{i-1}) \quad (2.27)$$

et la variation totale sur le chemin

$$0 = \mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_i \dots \rightarrow \mathbf{x} + \bar{\delta}\mathbf{x}_{n_x} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \quad (2.28)$$

dans l'espace d'état s'écrit (c. f. [A11] et [3, p. 32–35]) :

$$\delta(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_x} \Delta_i(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x}). \quad (2.30)$$

Ceci conduit à une première définition du gradient discret  $\bar{\nabla} \equiv \bar{\nabla}_a$ .

**Définition 2.7 (Gradient discret  $\bar{\nabla}_a$ )** *On définit le gradient discret  $\bar{\nabla}_a$  composante par composante  $1 \leq i \leq n_x$  par*

$$[\bar{\nabla}_a H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})]_i = \begin{cases} \frac{\Delta_i(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{\delta x_i} & \text{si } \delta x_i > 0, \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Ce gradient discret est de régularité  $\mathcal{C}^{k-1}$  si  $H$  est de régularité  $\mathcal{C}^k$ . Cependant, l'opérateur (2.31) est sensible au chemin défini par (2.28) : pour toute permutation  $\pi \in \mathcal{P}(n_x)$ , avec  $\mathcal{P}(n_x)$  l'ensemble des  $n_x!$  permutations possibles d'un ensemble de  $n_x$  éléments, on note l'état permué  $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n_x)})^\top$  et  $H_\pi$  le hamiltonien associé à la permutation, c'est à dire telle que  $H_\pi(\mathbf{x}_\pi) = H(\mathbf{x})$ . Ainsi, bien que l'incrément  $\delta(H_\pi; \mathbf{x}_\pi, \delta\mathbf{x}_\pi)$  est insensible aux permutations  $\pi$ , ce n'est en général pas le cas du gradient discret défini par (2.31) :  $\bar{\nabla}(H_{\pi_1}; \mathbf{x}_{\pi_1}, \delta\mathbf{x}_{\pi_1}) \neq \bar{\nabla}(H_{\pi_2}; \mathbf{x}_{\pi_2}, \delta\mathbf{x}_{\pi_2})$  pour un hamiltonien non séparé  $H(\mathbf{x}) \neq \sum_{i=1}^{n_x} H_i(x_i)$ . Pour remédier à cette sensibilité à l'indexation des composantes de l'état, on redéfinit l'incrément (2.29) comme la moyenne des incréments obtenus pour toutes les permutations  $\pi \in \mathcal{P}(n_x)$  :

$$\Delta_i(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \frac{1}{n_x!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n_x)} \Delta_i(H_\pi; \mathbf{x}_\pi, \delta\mathbf{x}_\pi) \quad (2.32)$$

**Définition 2.8 (Gradient discret  $\bar{\nabla}_b$ )** On définit le gradient discret  $\bar{\nabla}_b$  composante par composante  $1 \leq i \leq n_x$  par

$$[\bar{\nabla}_b H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})]_i = \begin{cases} \frac{\Delta_i(H; \mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{\delta x_i} & \text{si } \delta x_i > 0, \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.33)$$

**Propriété 2.3 (Consistance du gradient discret)** Les gradients discrets (2.31) et (2.33) sont consistants en  $\delta\mathbf{x}$  par rapport au gradient continu, c'est à dire  $\lim_{\|\delta\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \bar{\nabla} H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \nabla H(\mathbf{x})$  pour  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_a$  et  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_b$ .

Cette propriété découle du fait que  $\bar{\nabla}_a$  est un taux d'accroissement du hamiltonien et  $\bar{\nabla}_b$  est une moyenne de tels taux d'accroissement.

**Remarque 2.2 (Point milieu)** Pour un système linéaire, le hamiltonien est quadratique  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$  avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top \succ 0$ . Dans ce cas, le gradient discret est donné par  $\bar{\nabla}_a H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \left( \mathbf{x} + \frac{\delta\mathbf{x}}{2} \right) = \nabla H \left( \mathbf{x} + \frac{\delta\mathbf{x}}{2} \right)$  : on retrouve le gradient continu du point milieu de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ . Il est à noter que ce n'est plus le cas pour un système non linéaire (à hamiltonien non quadratique).

Dans la suite,  $\bar{\nabla}$  désigne indifféremment  $\bar{\nabla}_a$  ou  $\bar{\nabla}_b$ .

### 2.3.2 Construction de la méthode

Pour construire une méthode numériques à partir du gradient discret  $\bar{\nabla} H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})$  (définition 2.7 ou 2.8), il reste à déterminer les matrices de structure du système  $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t))$  et  $\mathbf{D}(\mathbf{x}(t))$ . Plusieurs stratégies sont possibles, donnant lieu à une classe de méthodes numériques préservant la passivité de (1.14–1.15). Ici, nous choisissons une méthode d'Euler (section 2.2.3.1) : la structure est évaluée en  $t_n + \alpha t_e$  pour le paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  et constante sur un pas de temps :  $\mathbf{M}_n \equiv \mathbf{M}(\mathbf{x}(t_n + \alpha t_e))$ , avec  $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ . La méthode numérique proposée s'obtient en effectuant dans (1.14) les remplacements suivants :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt} &\rightarrow \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{t_e}, \\ \nabla H(\mathbf{x}(t_n)) &\rightarrow \bar{\nabla} H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{u}(t_n) &\rightarrow \mathbf{u}_n. \end{aligned} \quad (2.34)$$

**Méthode numérique 2.1 (Méthode d'Euler à gradient discret)** Soit un système hamiltonien à ports (1.14–1.15), de hamiltonien  $H$  de régularité  $C^2$  satisfaisant la définition d'une fonction de stockage (définition 1.5), et de structure  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ , à valeurs bornées sur  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ . On appelle méthode d'Euler à gradient discret une méthode paramétrée par  $\alpha \in [0, 1]$  et définie (implicitement) par le taux d'accroissement numérique suivant

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)) \mathbf{u}_n, \quad (2.35)$$

formule dans laquelle  $\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)$  désigne  $\mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha t_e \sigma_n$ .

En posant  $\delta\mathbf{x}_n = t_e \sigma_n$ , cette méthode revient à résoudre en  $\delta\mathbf{x}_n$  l'équation dynamique

$$\delta\mathbf{x}_n = t_e \left( \mathbf{A}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n \right), \quad (2.36)$$

et à évaluer les équations de mise à jour et d'observation suivantes

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n. \quad (2.38)$$

Cette méthode est associée à l'algorithme 5.

**Propriété 2.4 (Passivité de la méthode numérique 2.1)** La méthode d'Euler à gradient discret (méthode 2.1) vérifie le bilan de puissance (2.24) pour l'énergie  $E_n = H(\mathbf{x}_n)$ , la puissance dissipée  $D_n = \begin{pmatrix} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}^\top \mathbf{R}(\mathbf{x}_{n+\alpha}) \begin{pmatrix} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \geq 0$  pour  $\mathbf{R}$  définie par (1.15), et la puissance source  $S_n = \mathbf{u}_n^\top \mathbf{y}_n$ .

**Preuve** La discréttisation de la structure SHP (1.14) selon la méthode 2.1 se réécrit à l'instant  $t_n = n t_e$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta\mathbf{x}_n}{t_e} \\ -\mathbf{y}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}_{n+\alpha}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_{n+\alpha})) \begin{pmatrix} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

d'où, en notant  $\bar{\nabla}H_n \equiv \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n)$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\nabla}H_n \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{\delta\mathbf{x}_n}{t_e} \\ -\mathbf{y}_n \end{pmatrix} &= \underbrace{\bar{\nabla}H_n^\top \frac{\delta\mathbf{x}_n}{t_e}}_{\frac{E_{n+1}-E_n}{t_e}} - \underbrace{\mathbf{u}_n^\top \mathbf{y}_n}_{S_n} \\ &= - \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\nabla}H_n \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}^\top \mathbf{R}(\mathbf{x}_{n+\alpha}) \begin{pmatrix} \bar{\nabla}H_n \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}}_{D_n}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.3.3 Analyse de la méthode

On analyse ici la consistance de la méthode (2.1) par les outils rappelés section 2.2.2. La dynamique continue autonome (bloqueur d'ordre 0 sur les entrées) associée au SHP (1.14–1.15) est donnée pour  $t \in [t_n, t_n + 1]$  par

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t_n). \quad (2.41)$$

Par la propriété 2.3, le gradient discret est consistant avec le gradient continu ; ainsi, il suffit de montrer que le taux d'accroissement  $\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  est borné pour prouver la consistance de la méthode, avec dans ce cas  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\mathbf{x}_n = \lim_{t_e \rightarrow 0} t_e \sigma_n = 0$  et  $\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, 0) = \mathbf{x}_n$ . Pour montrer que le taux d'accroissement  $\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  est borné, nous avons besoin du lemme suivant.

---

**Algorithme 1 :** Simulation du système hamiltonien à ports (1.14–1.15) par la méthode d'Euler à gradient discret (méthode 2.1) sur  $n_t$  instants. La solution de l'équation implicite (étape 2) est obtenue par e. g. la méthode de Newton-Raphson (standard, voir [94, §5]).

---

**Données :** Gradient discret  $\bar{\nabla}H(\cdot, \cdot)$ , structure  $\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot), \mathbf{C}(\cdot), \mathbf{D}(\cdot)$ , initialisation  $\mathbf{x}_0$ , séquence  $(\mathbf{u}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$  et paramètre  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Résultat :** Séquences  $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n \leq n_t+1}$  et  $(\mathbf{y}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$ .

- 1 pour  $n = 0$  à  $n_t$  faire
- 2     $\delta\mathbf{x}_n \leftarrow$  résoudre  $\frac{\delta\mathbf{x}_n}{t_e} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n = \mathbb{0}$
- 3     $\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n$
- 4     $\mathbf{y}_n \leftarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n)^\top \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\mathbf{x}_n) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n$
- 5 retourner  $\mathbf{x}_{n+1}$  et  $\mathbf{y}_n$

---

**Lemme 2.1 (Continuité d'un produit de fonction)** Soient deux fonctions  $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ , lipschitziennes de rapport au plus  $K_f$  et  $K_g$  sur  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , respectivement, et bornées avec  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) = S_f$  et  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} g(\mathbf{x}) = S_g$ . Le produit évalué en deux points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  se réécrit comme

$$(f g)(\mathbf{x}_2) - (f g)(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)g(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)g(\mathbf{x}_1) = \frac{f(\mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_1)}{2}(g(\mathbf{x}_2) - g(\mathbf{x}_1)) + \frac{g(\mathbf{x}_2) + g(\mathbf{x}_1)}{2}(f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1))$$

et  $|(f g)(\mathbf{x}_2) - (f g)(\mathbf{x}_1)| \leq K_g S_f + K_f S_g < \infty$ , c'est à dire que le produit  $(f g)$  est lipschitzien au plus de constante  $K_{fg} = K_g S_f + K_f S_g$ .

**Propriété 2.5 (Continuité de la méthode 2.1)** L'incrément  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e) = t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)$  associé à (2.36) approche continuellement  $\mathbb{0}$  avec  $t_e : \lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbb{0}$

**Preuve** On note  $a_{i,j} = [\mathbf{A}]_{i,j}$ ,  $b_{i,j} = [\mathbf{B}]_{i,j}$ , et chaque composante du taux de variation discret (2.35) s'écrit

$$[\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)]_i = \sum_{j=1}^{n_x} a_{i,j}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)) [\bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e))]_j + \sum_{k=1}^{n_y} b_{i,k}(\mathbf{x}_n(t_e)) u_{n,k}. \quad (2.42)$$

Par hypothèse (i)  $H$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  donc  $\bar{\nabla}(H)$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\lim_{\delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{0}} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \bar{\nabla}H(\mathbf{x})$  (propriété 2.3), (ii) chaque composante du gradient discret  $[\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})]_i$  est au plus  $K$ -lipschitzienne par rapport à  $\delta\mathbf{x}$  (voir lemme de continuité 1.1), et (iii) chaque coefficient des matrices  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et on prend  $K_A$  et  $K_B$  comme majorantes de toutes les constantes de Lipschitz sur  $\mathbf{A}$  et sur  $\mathbf{B}$  pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , respectivement. Pour appliquer le lemme 2.1, on introduit les majorantes suivantes :

$$\begin{aligned} S_A &= \sup_{\substack{\mathbf{x}, \delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n_x}, \\ 1 \leq i, j \leq n_x}} a_{i,j}(\mathbf{x} + \alpha \delta\mathbf{x}), \\ S_{\bar{\nabla}(H)} &= \sup_{\substack{\mathbf{x}, \delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n_x}, \\ 1 \leq i \leq n_x}} [\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})]_i, \\ S_u &= \sup_{1 \leq k \leq n_y} u_{n,k}. \end{aligned}$$

Alors, par le lemme 2.1, on a que  $[\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)]_i$  est lipschitzienne au plus de constante  $K_\sigma = n_x (K_S_M + \alpha K_A S_{\bar{\nabla}(H)}) + n_y \alpha K_B S_u$  par rapport à  $t_e$ . En particulier  $|[\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)]_i| \leq$

$K_\sigma S_{\delta\mathbf{x}}$  pour  $S_{\delta\mathbf{x}} < \infty$  le rayon d'une boule contenant  $\delta\mathbf{x}$ . Finalement, on a pour l'incrément de l'état  $\| \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e) \| \leq t_e K_\sigma S_{\delta\mathbf{x}}$  et  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{0}$ , ce qui conclut la preuve.

La propriété 2.5 induit directement la consistance de la méthode numérique à l'ordre 1 par la propriété 2.1, puisque  $\lim_{\delta\mathbf{x} \rightarrow 0} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \nabla H(\mathbf{x})$  (propriété 2.3) et

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, 0) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, 0)) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, 0)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, 0)) \mathbf{u}_n \quad (2.43)$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \nabla H(\mathbf{x}_n) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n. \quad (2.44)$$

**Propriété 2.6 (Consistance de la méthode 2.1)** *La méthode d'Euler à gradient discret (méthode 2.1) est consistante à l'ordre 1 avec le système (1.14–1.15) (c.f. (2.44) et propriété 2.1).*

**Propriété 2.7 (Consistance d'ordre 2 de la méthode 2.1)** *Si  $\alpha = 1/2$ , la méthode d'Euler avec gradient discret (2.36) est consistante d'ordre 2 par la propriété 2.1.*

**Preuve** Pour déterminer la consistance d'ordre 2, on dérive par rapport au temps le champ de vecteur  $\mathbf{f}_n$  par rapport au pas de temps  $t_e$  le taux d'accroissement  $\sigma_n$  (c. f. propriété 2.1). La comparaison est réalisée composante par composante, avec  $f_i = [\mathbf{f}_n]_i$  :

$$\frac{df_i(\mathbf{x}(t_n))}{dt} = \sum_{l=1}^{n_x} M_{i,l}(\mathbf{x}(t_n)) \frac{dx_l(t_n)}{dt}, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} M_{i,l}(\mathbf{x}(t_n)) &= \sum_{j=1}^{n_x} \left( \frac{\partial a_{i,j}(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l} \frac{\partial H(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_j(t_n)} + a_{i,j}(\mathbf{x}(t_n)) \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l \partial x_j} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,k}(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l} u_{n,k}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)]_i}{\partial t_e} &= \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial(a_{i,j}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e)) [\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e))]_j)}{\partial t_e} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,k}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} u_{n,k}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Le développement de Taylor du hamiltonien donne

$$H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}) = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^\top \nabla^2 H(\mathbf{x}) \delta\mathbf{x} + o(\delta\mathbf{x}^\top \delta\mathbf{x}), \quad (2.48)$$

d'où par définition du gradient discret

$$\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) \sim_0 \nabla H(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \nabla^2 H(\mathbf{x}) \delta\mathbf{x}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_e} \bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e)) \sim_0 \frac{1}{2} \nabla^2 H(\mathbf{x}) \frac{\partial \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e}, \quad (2.50)$$

et on notera les variations suivantes (avec  $\frac{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}}{\partial t_e} = \alpha \frac{\partial \delta\mathbf{x}}{\partial t_e}$ ) :

$$\frac{\partial a_{i,j}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} = \alpha \sum_{l=1}^{n_x} \frac{\partial a_{i,j}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial x_l} \frac{\partial \delta x_l(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial b_{i,k}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} = \alpha \sum_{l=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,k}(\mathbf{x}_{n+\alpha}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial x_l} \frac{\partial \delta x_l(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e}. \quad (2.52)$$

La consistance d'ordre 1 implique  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), t_e) = \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$ , soit  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x}(t_n), 0) = t_e \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$  et  $\frac{\partial \delta\mathbf{x}(\mathbf{x}(t_n), 0)}{\partial t_e} = \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$ . Finalement, la dérivée du taux de variation par rapport au pas de temps et évalué en  $t_e = 0$  s'écrit pour une initialisation parfaite  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$  :

$$\frac{\partial [\sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0)]_i}{\partial t_e} = \sum_{l=1}^{n_x} \bar{M}_{i,l}(\mathbf{x}(t_n)) \frac{dx_l(t_n)}{dt}, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i,l}(\mathbf{x}(t_n)) &= \alpha \sum_{j=1}^{n_x} \left( \frac{\partial a_{i,j}(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l} \frac{\partial H(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_j} + \frac{a_{i,j}(\mathbf{x}(t_n))}{2\alpha} \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l \partial x_j} \right) \\ &\quad + \alpha \sum_{k=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,k}(\mathbf{x}(t_n))}{\partial x_l} u_{n,k}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

D'après (2.46) et (2.54),  $\bar{M}_{i,l} = \frac{1}{2} M_{i,l}$  si  $\alpha = 1/2$ , d'où la propriété 2.7 par la propriété 2.1 avec

$$\frac{\partial \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0)}{\partial t_e} = \frac{1}{2} \frac{df(\mathbf{x}(t_n))}{dt}, \quad (2.55)$$

ce qui conclut la preuve.

En résumé, la méthode d'Euler avec gradient discret (méthode 2.1) est passive (propriété 2.4) et consistante à l'ordre 1 (propriété 2.6) pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ . Si de plus  $\alpha = 1/2$ , alors la méthode est consistante à l'ordre 2 (propriété 2.7).

**Remarque 2.3 (Stabilité asymptotique)** La stabilité asymptotique du système est garantie par la passivité de la méthode (propriété 2.4), et ce pour tout pas de temps  $t_e > 0$ . Cependant, le pas de temps doit être choisi suffisamment petit pour que la solution numérique se comporte comme la solution continue. Pour l'exemple, on choisit un circuit RC de constante de temps  $\frac{C}{R} = \tau$ , et l'on définit  $t_\tau = \frac{t_e}{\tau}$ . Une itération par la méthode 2.1 se résume à  $\delta x_n = -\frac{2t_\tau}{2+t_\tau} x_n$  et

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{2-t_\tau}{2+t_\tau}}_{\lambda} x_n.$$

On constate que la méthode est inconditionnellement stable puisque  $|\lambda| < 1$ . Par contre, si  $t_e > 2\tau$ , il apparaît des oscillations qui ne sont pas présentes dans la solution du système continu (voir figure 2.1).

La détermination du pas de temps optimal n'est pas étudiée dans ce document (voir e.g. [44, § VIII]).

#### 2.3.4 Cas d'un hamiltonien quadratique

La relation (2.36) qui fournit l'accroissement  $\delta\mathbf{x}_n$  de la méthode 2.1 est implicite pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ . Pour un hamiltonien quadratique  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$  et séparé avec  $\mathbf{Q} = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_{n_x}) \succ 0$ , cette relation peut être rendue explicite.

##### 2.3.4.1 Algorithme explicite

Dans le cas d'un hamiltonien quadratique et séparé, les gradients discrets  $\bar{\nabla}_a$  et  $\bar{\nabla}_b$  (définitions 2.7 et 2.8) s'écrivent composante par composante (avec  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_a$  ou  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_b$ ) :

$$[\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})]_i = \frac{Q_i}{2} \frac{(x_i + \delta x_i)^2 - x_i^2}{\delta x_i} = \frac{Q_i}{2} (2x_i + \delta x_i). \quad (2.56)$$

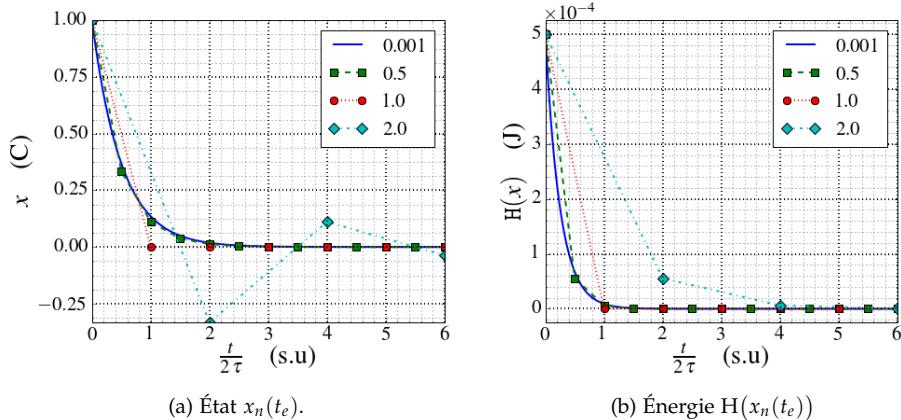


FIGURE 2.1 : Expérience numérique pour un circuit RC autonome, pour le pas d'échantillonnage  $t_e = \alpha \frac{2C}{R}$ .

L'étape 2 de l'algorithme 5 se réécrit alors

$$\delta \mathbf{x}_n = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) \mathbf{x}_n + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n, \quad (2.57)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) = (\mathbf{L} \mathbf{A})(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) \mathbf{Q}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) = (\mathbf{L} \mathbf{B})(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n)$ ,  $\mathbf{L} = \left( \frac{\mathbf{I}_d}{t_e} - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{x}_n + \alpha \delta \mathbf{x}_n) \mathbf{Q} \right)^{-1}$ . En particulier, l'algorithme devient explicite pour  $\alpha = 0$ , i. e. pour une évaluation explicite des matrices de structure  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$  et  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_n)$ . La méthode 2.1 est alors consistante à l'ordre 1 (propriété 2.7), et préserve toujours la passivité (propriété 2.4). Il est à remarquer que la méthode n'est plus symétrique ; mais le système discret est (i) conservatif si le système continu est conservatif ( $\mathbf{J}$  antisymétrique) ou (ii) dissipatif si le système continu est dissipatif ( $\mathbf{R} \succ 0$ ). Ceci donne lieu à l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2 :** Simulation du système hamiltonien à ports (1.14) par la méthode d'Euler à gradient discret (méthode 2.36) explicite pour un système quadratique séparé  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$ ,  $\mathbf{Q} = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_{n_x})$ , sur  $n_t$  instants. On notera qu'il n'y a pas d'équation implicite à résoudre ( $\alpha = 0$ ).

---

**Données :** Coefficients  $\mathbf{Q}$ , structure  $\mathbf{A}(\cdot)$ ,  $\mathbf{B}(\cdot)$ ,  $\mathbf{C}(\cdot)$ ,  $\mathbf{D}(\cdot)$ , initialisation  $\mathbf{x}_0$ , séquence  $(\mathbf{u}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$ .

**Résultat :** Séquences  $\mathbf{x}_{n+1}$  et  $\mathbf{y}_n$  pour  $n \in [0, \dots, n_t]$ .

```

1 pour n = 0 à n_t faire
2   L ←  $\left( \frac{\mathbf{I}_d}{t_e} - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \mathbf{Q} \right)^{-1}$ 
3   A ← L A(x_n) Q
4   B ← L B(x_n)
5   delta_x_n ← A x_n + B u_n
6   x_{n+1} ← x_n + delta_x_n
7   y_n ← C(x_n)^T Q / 2 (2 x_n + delta_x_n) + D(x_n) u_n
8 retourner x_{n+1} et y_n

```

---

### 2.3.4.2 Quadratification du hamiltonien

La méthode 2.1 est explicite dans le cas d'un hamiltonien quadratique et séparé (algorithme 2). Il est alors naturel de chercher à trivialiser le hamiltonien dans les autres cas, par un difféomorphisme  $\hat{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x}$  d'inverse  $\mathbf{x} = \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})$  (changement de variables régulier, c. f. section 1.3.3.2).

**Définition 2.9 (Système quadratisable)** Un système hamiltonien à port (1.14) est dit *quadratisable* si il existe un changement de variables  $\phi : \mathcal{X} \ni \mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  tel que le hamiltonien est trivial dans les nouvelles coordonnées :  $H(\mathbf{x}) = \hat{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\hat{\mathbf{x}}^\top \hat{\mathbf{x}}}{2}$ .

**Propriété 2.8 (Quadratification d'un hamiltonien séparé)** Si le hamiltonien est la somme de fonctions d'énergie toutes monovariantes, on parle de *hamiltonien séparé* pour la configuration  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_x}$  avec  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} H_i(x_i)$ . Tout système hamiltonien à port (1.14) à hamiltonien séparé vérifiant les conditions d'une fonction de stockage (définition 1.5) et en particulier  $\det(\nabla^2 H) > 0$ , est quadratisable pour le changement de variable  $\phi : \mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$  défini coordonné par coordonnée  $1 \leq i \leq n_x$  par

$$[\hat{\mathbf{x}}]_i = \phi_i(x_i) = \operatorname{sgn}(x_i) \sqrt{2H_i(x_i)}. \quad (2.58)$$

Le hamiltonien est alors  $\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\hat{\mathbf{x}}^\top \hat{\mathbf{x}}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} [\phi(\mathbf{x})]_i^2 = \sum_{i=1}^{n_x} H_i(x_i)$ , et la nouvelle structure (1.21) absorbe les lois constitutives.

On notera qu'un hamiltonien non séparé de la forme  $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}(\mathbf{x})^\top \mathbf{Q} \mathbf{q}(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{q} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x}$  une fonction inversible et  $\mathbf{Q}$  une matrice constante définie positive peut être séparé par le changement de variable  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \mathbf{q}(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{P}$  une matrice de changement de base :  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{P}$  pour  $\mathbf{M}$  une matrice diagonale. Alors  $\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{P}^{-1} \hat{\mathbf{x}})$  et  $H(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})) = \frac{\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}}{2}$ . Dans tous les autres cas, on peut tenter de vérifier les conditions de la propriété suivante, au moins sur un domaine restreint de l'espace d'état.

**Propriété 2.9 (Quadratification d'un hamiltonien non séparé)** Un système à hamiltonien non séparé  $H(\mathbf{x}) \neq \sum_{i=1}^{n_x} H_i(x_i)$  vérifiant les conditions d'une fonction de stockage (définition 1.5) est quadratisable si il existe une indexation particulière de l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_x})^\top$  telle que pour chaque  $1 \leq i \leq n_x$  :

$$\Delta_i(H; x_i, \dots, x_{n_x}) = H(0, \dots, x_i, \dots, x_{n_x}) - H(0, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{n_x}) \geq 0. \quad (2.59)$$

pour le changement de variable  $\phi : \mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$  défini coordonné par coordonnée  $1 \leq i \leq n_x$  par  $[\hat{\mathbf{x}}]_i = \phi_i(x_i, \dots, x_{n_x}) = \operatorname{sgn}(x_i) \sqrt{2\Delta_i(H; x_i, \dots, x_{n_x})}$ . La nouvelle structure est donnée par (1.21) pour le hamiltonien :

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} [\phi(\mathbf{x})]_i^2 &= H(\mathbf{x}) - H(0, x_2, \dots, x_{n_x}) \\ &\quad + H(0, x_2, \dots, x_{n_x}) - \dots - H(0). \end{aligned}$$

## 2.4 MÉTHODE À DEUX ÉTAPES PRÉSERVANT LA PASSIVITÉ

La méthode d'Euler avec gradient discret (méthode 2.1) permet de résoudre explicitement la dynamique dans le cas d'un hamiltonien quadratisable (définition 2.9), par l'algorithme 2. Cependant, la méthode associée est consistante à d'ordre 1 seulement, du fait de l'évaluation explicite des matrices de structure  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$  et  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_n)$ . Une méthode à deux étapes permettant d'assurer la consistante du second ordre est proposée dans cette section. Ce résultat, obtenu au sein de l'équipe

S3<sup>1</sup> a fait l'objet de la publication [A11]. Nous en donnons ici une construction différente, en combinant une méthode Runge-Kutta (section 2.2.3.2) au gradient discret (section 2.3.1).

#### 2.4.1 Construction de la méthode

L'idée est de combiner (i) une méthode de type Runge-Kutta (section 2.2.3.2) à deux étapes sur la structure  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})$ , avec (ii) le gradient discret (définition 2.8), pour construire une méthode *explicite* et d'*ordre* 2. Une application *naïve* d'une méthode de Runge-Kutta à  $K$  étapes à la structure (1.14-1.15) pour les paramètres  $\alpha \in \mathbb{R}^{K \times K}$  et  $\beta \in \mathbb{R}^K$  donne les pentes intermédiaires :

$$\tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \bar{\nabla} H(\mathbf{x}_n, t_e \tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \mathbf{u}_n, \quad (2.60)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} t_e \tilde{\sigma}_l(\mathbf{x}_n, t_e); \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

et la mise à jour finale :

$$\delta \mathbf{x}(t_e) = \sum_{k=1}^K \beta_k t_e \tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}(t_e). \quad (2.64)$$

Pour les  $(\alpha_{k,l})_{k \geq l} = 0$ , ces évaluations sont explicites. On note que la méthode s'applique sur la structure uniquement, et non sur le gradient discret évalué pour tout  $k$  sur le pas de temps complet. La mise à jour finale s'obtient par une moyenne pondérée des estimations intermédiaires (2.64), qui ne préserve pas la structure SHP, et donc ne préserve pas le bilan de puissance. Pour le voir, il suffit de considérer un système conservatif de hamiltonien quadratique normalisé  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}$ , pour lequel les trajectoires sont contenues sur l'hypersphère de centre  $\mathbf{0}$  et de rayon  $\sqrt{2H(\mathbf{x}_0)}$ . Chaque étape coïncide avec l'évaluation par la méthode 2.1 qui préserve la structure, et donc chaque état  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x} + \delta \tilde{\mathbf{x}}_k(t_e)$  appartient à l'hypersphère ; mais leur moyenne (2.64) sera à l'intérieur, strictement.

Pour conserver la passivité, il faut considérer un chemin connexe dans l'espace d'état. On introduit les  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_K]$  avec  $\beta_k < \beta_{k+1}$  et  $\sum_k \beta_k = 1$ , qui définissent les temps intermédiaires successifs  $\bar{t}_k = t_n + \beta_k t_e$ , avec  $\bar{t}_0 = t_n$  et  $\bar{t}_K = t_{n+1}$ . On va chercher à approximer la trajectoire sur les points  $\bar{\mathbf{x}}_k \simeq \mathbf{x}(\bar{t}_k)$ . On note  $\bar{\delta t}_k = \bar{t}_k - \bar{t}_{k-1} = (\beta_k - \beta_{k-1}) t_e$  la durée de chaque étape, et  $\bar{\delta \mathbf{x}}_k$  l'accroissement de la solution entre  $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$  et  $\bar{\mathbf{x}}_k$ . Ceci définit un chemin

$$\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}}_0 \xrightarrow{\bar{\delta \mathbf{x}}_1} \bar{\mathbf{x}}_1 \xrightarrow{\bar{\delta \mathbf{x}}_2} \cdots \bar{\mathbf{x}}_{K-1} \xrightarrow{\bar{\delta \mathbf{x}}_K} \bar{\mathbf{x}}_K = \mathbf{x}_{n+1}. \quad (2.65)$$

Le taux d'accroissement  $\bar{\sigma}_k = \frac{\bar{\delta \mathbf{x}}_k}{\bar{\delta t}_k}$  de chaque étape est défini ci-après comme la pente obtenue par la méthode du gradient discret (2.1) où la structure est évaluée au point  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  fourni par une méthode de Runge-Kutta *naïve* (2.61) avec  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_n + \delta \tilde{\mathbf{x}}_k$  :

$$\begin{cases} \bar{\delta \mathbf{x}}_k &= \bar{\delta t}_k (\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \bar{\nabla} H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \bar{\delta \mathbf{x}}_k) + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \mathbf{u}), \\ \bar{\sigma}_k &= \bar{\delta \mathbf{x}}_k / \bar{\delta t}_k. \end{cases} \quad (2.66)$$

<sup>1</sup> Systèmes et Signaux Sonores, CNRS UMR 9912, Ircam : <http://s3.ircam.fr/>.

**Méthode numérique 2.2 (Méthode de Runge-Kutta à gradient discret)** Soit un système hamiltonien à ports ([1.14-1.15](#)), de hamiltonien  $H$  de régularité  $C^2$  satisfaisant la définition d'une fonction de stockage ([définition 1.5](#)), et de structure  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ , à valeurs bornées sur  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ . Soient deux jeux de coefficients  $\beta \in \mathbb{R}^K$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^{K \times K}$ , avec  $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$ ,  $\beta_{k+1} > \beta_k$ , et  $\alpha_{k,l} \in [0, 1]$ . On appelle méthode de Runge-Kutta à gradient discret à  $K$  étapes la méthode paramétrée par  $\beta$  et  $\alpha$  décrite ci-dessous.

1. Évaluation des  $K$  taux d'accroissements  $\tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)$  sur le pas de temps complet  $t_e$

$$\tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, t_e \tilde{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \mathbf{u}_n, \quad (2.67)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)$  désigne  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} t_e \tilde{\sigma}_{n,l}$ .

2. Évaluations du taux d'accroissement  $\bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)$  sur les  $K$  étapes du chemin ([2.65](#))

$$\bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e) = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e), \bar{\delta}t_k \bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \mathbf{u}, \quad (2.68)$$

où  $\bar{\delta}t_k = (\beta_k - \beta_{k-1}) t_e$  désigne la durée de chaque étape et  $\bar{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)$  désigne  $\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\delta}t_k \bar{\sigma}_k$ .

3. Reconstruction du chemin ([2.65](#))

$$\begin{cases} \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \sum_{k=1}^K \beta_k \bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + t_e \sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e). \end{cases} \quad (2.69)$$

Cette méthode est associée à l'algorithme [12](#).

La méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode [2.2](#)) revient à résoudre en  $\delta\tilde{\mathbf{x}}_k = t_e \tilde{\sigma}_{n,k}$  l'équation dynamique

$$\frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_k}{t_e} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l\right) \bar{\nabla}H(\mathbf{x}_n, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{B}\left(\mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l\right) \mathbf{u}_n, \quad (2.70)$$

puis en  $\bar{\delta}\mathbf{x}_k = \bar{\delta}t_k \bar{\sigma}_k$  l'équation dynamique

$$\frac{\bar{\delta}\mathbf{x}_k}{\bar{\delta}t_k} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \bar{\delta}\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \mathbf{u}_n, \quad (2.71)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l$ , et à évaluer les équations de mise à jour et d'observation suivantes

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \sum_k \bar{\delta}\mathbf{x}_k, \quad (2.72)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \bar{\delta}\mathbf{x}_k) + \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \mathbf{u}_n, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^K \beta_k \bar{\mathbf{y}}_k, \quad (2.74)$$

où  $\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\delta}\mathbf{x}_k$ .

#### 2.4.2 Analyse de la méthode

On analyse ici les propriétés de la méthode [2.2](#) en termes de passivité et de consistance.

---

**Algorithme 3 :** Simulation du système hamiltonien à ports (1.14–1.15) par la méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode 2.2) sur  $n_t$  instants. Les solutions des équations implicites (étapes 3 et 7) sont obtenues par e.g. la méthode de Newton-Raphson (standard, voir [94, §5]). La méthode est passive et d'ordre 1 pour  $\beta_k > \beta_{k-1}$  et  $\sum_k \beta_k = 1$  (propriétés 2.10 et 2.11). Elle est d'ordre 2 si de plus  $\sum_k \beta_k \sum_l \alpha_{k,l} = 1/2$  (propriété 2.12).

---

**Données :** Gradient discret  $\bar{H}(\cdot, \cdot)$ , structure  $\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot), \mathbf{C}(\cdot), \mathbf{D}(\cdot)$ ,  
initialisation  $\mathbf{x}_0$ , séquence  $(\mathbf{u}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$  et paramètres  
 $(\beta_k)_{1 \leq k \leq K} \in [0, 1]$  et  $(\alpha_{k,l})_{1 \leq k, l \leq K} \in [0, 1]$ .

**Résultat :** Séquences  $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n \leq n_t+1}$  et  $(\mathbf{y}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$ .

```

1 pour  $n = 0$  à  $n_t$  faire
2   pour  $k = 1$  à  $K$  faire
3      $\delta\tilde{\mathbf{x}}_k \leftarrow$  résoudre l'équation
4      $\frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_k}{t_e} - \mathbf{A} \left( \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l \right) \bar{H}(\mathbf{x}_n, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{B} \left( \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l \right) \mathbf{u}_n = 0$ 
5      $\bar{\mathbf{x}}_0 \leftarrow \mathbf{x}_n$ 
6     pour  $k = 1$  à  $K$  faire
7        $\tilde{\mathbf{x}}_k \leftarrow \mathbf{x}_n + \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} \delta\tilde{\mathbf{x}}_l$ 
8        $\delta\tilde{\mathbf{x}}_k \leftarrow$  résoudre l'équation
9        $\frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_k}{\delta t_k} - \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \mathbf{u}_n = 0$ 
10       $\bar{\mathbf{x}}_k \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{x}}_k$ 
11       $\bar{\mathbf{y}}_k \leftarrow \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \mathbf{u}_n$ 
12     $\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_K$ 
13     $\mathbf{y}_n \leftarrow \sum_{k=1}^K \beta_k \bar{\mathbf{y}}_k$ 
14 retourner  $\mathbf{x}_{n+1}$  et  $\mathbf{y}_n$ 
```

---

#### 2.4.2.1 Analyse de passivité

L'évaluation finale  $\mathbf{x}_{n+1}$  est obtenue par le chemin à  $K$  étapes (2.65), avec  $\bar{\mathbf{E}}_k = \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_k)$ . Par la propriété 2.4, chaque étape est passive avec pour tout  $\tilde{\mathbf{x}}_k$

$$\bar{\mathbf{E}}_k - \bar{\mathbf{E}}_{k-1} = \delta t_k \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k)^\top \bar{\sigma}_k, \quad (2.75)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_k = \mathbf{u}^\top \bar{\mathbf{y}}_{k-1}, \quad (2.76)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_k = \begin{pmatrix} \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}^\top \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \begin{pmatrix} \bar{H}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \delta\tilde{\mathbf{x}}_k) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (2.77)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_k = \bar{\mathbf{E}}_{k-1} + \delta t_k \bar{\mathbf{S}}_k - \underbrace{\delta t_k \bar{\mathbf{D}}_k}_{\geq 0}. \quad (2.78)$$

On note  $E_n = \bar{\mathbf{E}}_0$  l'énergie discrète au temps  $t_n$ ,  $E_{n+1} = \bar{\mathbf{E}}_K$  l'énergie discrète au temps  $t_{n+1}$ ; alors, l'accroissement d'énergie sur le chemin est donné par

$$\bar{\mathbf{E}}_K - \bar{\mathbf{E}}_0 = \bar{\mathbf{E}}_K - \bar{\mathbf{E}}_{K-1} + \bar{\mathbf{E}}_{K-1} - \cdots + \bar{\mathbf{E}}_1 - \bar{\mathbf{E}}_0 \quad (2.79)$$

$$= \mathbf{u}^\top \sum_{k=1}^K \delta t_k \bar{\mathbf{y}}_k - \sum_{k=1}^K \delta t_k \bar{\mathbf{D}}_k. \quad (2.80)$$

En rappelant que  $\beta_k = \frac{\delta t_k}{t_e}$ , on a la propriété suivante.

**Propriété 2.10 (Passivité de la méthode numérique 2.2)** *La méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode 2.2) est passive, de bilan de puissance*

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{t_e} = S_n - D_n, \quad (2.81)$$

avec les énergies initiale  $E_n = H(\bar{x}_0)$  et finale  $E_{n+1} = H(\bar{x}_K)$ ,  $S_n = \mathbf{u}^\top \mathbf{y}_n$  la puissance des source pour la sortie passive  $\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^K \beta_k \bar{\mathbf{y}}_k$ , et  $D_n = \sum_{k=1}^K \beta_k \bar{D}_k \geq 0$  la puissance dissipée sur le pas de temps total.

#### 2.4.2.2 Analyse de consistance

Pour analyser la consistance, on reprend les résultats d'analyse des méthodes de Runge-Kutta (section 2.2.3.2) et de la méthode du gradient discret à une étape (propriété 2.3). Les pentes  $\tilde{\sigma}_k$  et  $\bar{\sigma}_k$  sont bornées, donc les accroissements intermédiaires tendent vers 0 avec le pas de temps :  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\tilde{x}_k = \lim_{t_e \rightarrow 0} \delta\bar{x}_k = 0$ , pour tout  $k \in [1, \dots, K]$ . Ceci implique que les évaluations intermédiaires tendent vers l'initialisation  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \tilde{x}_k = \lim_{t_e \rightarrow 0} \bar{x}_k = \mathbf{x}_n$ . Le taux d'accroissement numérique

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e) = \sum_{k=1}^K \beta_k (\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e), \bar{\delta\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e)) \mathbf{u})$$

évalué en  $t_e = 0$  est

$$\sigma_n(\mathbf{x}_n, 0) = \sum_{k=1}^K \beta_k (\mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \nabla H(\mathbf{x}_n) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n).$$

Par hypothèse,  $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$ , donc le taux d'accroissement est consistant avec le taux d'accroissement continu :  $\sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n))$ , avec pour rappel

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{x}(t_n)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t_n)) \nabla H(\mathbf{x}(t_n)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t_n)) \mathbf{u}_n.$$

**Propriété 2.11 (Consistance de la méthode 2.2)** La méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode 2.2) est consistante, avec  $\sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n))$  (propriété 2.1).

**Propriété 2.12 (Consistance à l'ordre 2 de la méthode 2.2)** Soient les  $\alpha \in \mathbb{R}^{K \times K}$  et les  $\beta \in \mathbb{R}^K$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \beta_k & > & \beta_{k-1}, \\ \sum_{k=1}^K \beta_k & = & 1, \\ \sum_{k=1}^K \beta_k \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} & = & \frac{1}{2}. \end{array} \right. \quad (2.82)$$

Alors la méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode 2.2) associée à ces  $\alpha$  et  $\beta$  est consistante à l'ordre 2 avec le système (1.14–1.15) par la propriété 2.1, c'est à dire

$$\frac{\partial \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0)}{\partial t_e} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n))}{dt}, \quad (2.83)$$

**Preuve** L'analyse de consistance d'ordre 2 est pratiquée composante par composante du taux d'accroissement (comme en section 2.3.3), avec  $[\sigma_n(\mathbf{x}_n, t_e)]_i = \sum_{k=1}^K \beta_k [\bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)]_i$ . La dérivée par rapport au pas de temps de la composante  $[\bar{\sigma}_k(\mathbf{x}_n, t_e)]_i$  est donnée par

$$\frac{\partial [\bar{\sigma}_k]_i}{\partial t_e} = \sum_{j=1}^{n_x} \left( \frac{\partial a_{i,j}(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial t_e} [\bar{\nabla}H_k]_i + a_{i,j}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \frac{\partial [\bar{\nabla}H_k]_i}{\partial t_e} \right) + \sum_{m=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,m}(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial t_e} u_{n,m}, \quad (2.84)$$

où  $\bar{\nabla}H_k$  désigne  $\bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e), \bar{\delta\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e))$ . On explicite dans le suite toutes les dérivées par rapport à  $t_e$ . En notant que  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_k}{\partial t_e} = \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \frac{\partial \delta\tilde{\mathbf{x}}_l}{\partial t_e}$ , on a

$$\frac{\partial a_{i,j}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} = \sum_{p=1}^{n_x} \frac{\partial a_{i,j}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial x_p} \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \frac{\partial [\delta\tilde{\mathbf{x}}_l(\mathbf{x}_n, t_e)]_p}{\partial t_e} \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial b_{i,m}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} = \sum_{p=1}^{n_x} \frac{\partial b_{i,m}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial x_p} \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \frac{\partial [\delta\tilde{\mathbf{x}}_l(\mathbf{x}_n, t_e)]_p}{\partial t_e}. \quad (2.86)$$

Pour le gradient discret, on exploite la consistance à l'ordre 1 (propriété 2.11), avec  $\bar{\mathbf{x}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{x}}_k + o(t_e) \times \mathbb{1}_{n_x}$  et  $\bar{\delta\mathbf{x}}_k = \delta\tilde{\mathbf{x}}_k + o(t_e) \times \mathbb{1}_{n_x}$ . Un développement limité du hamiltonien similaire à (2.49) donne alors

$$\frac{\partial \bar{\nabla}H(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e), \bar{\delta\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_n, t_e))}{\partial t_e} \sim_0 \nabla^2 H(\mathbf{x}_n) \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \frac{\partial \delta\tilde{\mathbf{x}}_l(\mathbf{x}_n, t_e)}{\partial t_e}. \quad (2.87)$$

La dérivée du taux de variation par rapport au pas de temps et évalué en  $t_e = 0$  s'écrit sur chaque étape :

$$\frac{\partial [\sigma_k(\mathbf{x}_n, t_e)]_i}{\partial t_e} \sim_0 \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \sum_{p=1}^{n_x} \left( \sum_{j=1}^{n_x} \left( \frac{\partial a_{i,j}(\mathbf{x}_n)}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}_n)}{\partial x_j \partial x_p} \right) + \sum_{m=1}^{n_y} \frac{\partial b_{i,m}(\mathbf{x}_n)}{\partial x_p} \right) \frac{\partial [\delta\tilde{\mathbf{x}}_l(\mathbf{x}_n, t_e)]_p}{\partial t_e}. \quad (2.88)$$

La consistance d'ordre 1 implique  $\lim_{t_e \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_n(\mathbf{x}(t_n), t_e) = \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$ , soit  $\delta\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}(t_n), 0) = t_e \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$  et  $\frac{\partial \delta\tilde{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}(t_n), 0)}{\partial t_e} = \frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt}$ , et on a pour une initialisation parfaite  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$  :

$$\frac{\partial [\sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0)]_i}{\partial t_e} = \sum_{k=1}^K \beta_k \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} \sum_{p=1}^{n_x} M_{i,p}(\mathbf{x}(t_n)) \frac{dx_p(t_n)}{dt}, \quad (2.89)$$

où  $M_{i,p}$  est donnée par (2.46).

Finalement,  $\frac{\partial \sigma_n(\mathbf{x}(t_n), 0)}{\partial t_e} = \frac{1}{2} \frac{df(\mathbf{x}(t_n))}{dt}$  si  $\sum_{k=1}^K \beta_k \sum_{l=1}^K \alpha_{k,l} = 1/2$ , ce qui conclut la preuve.

Un condition similaire à (2.82) peut être construite pour obtenir des schémas consistants à des ordres  $\geq 2$ . Dans cette thèse, nous considérons une méthode à deux étapes.

#### 2.4.3 Cas d'un hamiltonien quadratique

Dans le cas d'un hamiltonien quadratique  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$  et séparé  $\mathbf{Q} = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_{n_x})$ , les gradients discrets  $\bar{\nabla}_a$  et  $\bar{\nabla}_b$  (définitions 2.7 et 2.8) s'écrivent composante par composante (avec  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_a$  ou  $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_b$ ) :

$$\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \left( \mathbf{x} + \frac{\delta\mathbf{x}}{2} \right). \quad (2.90)$$

Dans ce cas, la méthode de Runge-Kutta avec gradient discret (méthode 2.2) est explicite pour les  $\alpha$  tels que  $(\alpha_{k,l})_{l \geq k} = 0$ . Pour une méthode à deux étapes, on peut prendre  $\beta \in [0, 1[$  et  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = 1 - \beta$ ,  $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 0$  et  $\alpha_{2,1} = \frac{1}{2(1-\beta)}$ . La méthode explicite retenue est décrite dans l'algorithme 4.

## 2.5 ILLUSTRATION

Cette section présente les résultats numériques obtenus par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta avec gradient discret (méthodes 2.1 et 2.2).

#### 2.5.1 Système simulé

On présente les résultats pour un système conservatif non linéaire de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{x}) \quad (2.91)$$

---

**Algorithme 4 :** Simulation du système hamiltonien à ports (1.14) de hamiltonien quadratique séparé  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}{2}$ ,  $\mathbf{Q} = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_{n_x})$  par la méthode de Runge-Kutta à gradient discret (méthode 2.2), sur  $n_t$  instants, pour les paramètres  $\beta \in [0, 1[$  et  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = 1 - \beta$ ,  $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 0$  et  $\alpha_{2,1} = \frac{1}{2(1-\beta)}$ . On notera qu'il n'y a pas d'équation implicite à résoudre.

---

**Données :** Coefficients  $\mathbf{Q}$ , structure  $\mathbf{A}(\cdot)$ ,  $\mathbf{B}(\cdot)$ ,  $\mathbf{C}(\cdot)$ ,  $\mathbf{D}(\cdot)$ , initialisation  $\mathbf{x}_0$ , séquence  $(\mathbf{u}_n)_{0 \leq n \leq n_t}$ .

**Résultat :** Séquences  $\mathbf{x}_{n+1}$  et  $\mathbf{y}_n$  pour  $n \in [0, \dots, n_t]$ .

1 **pour**  $n = 0$  à  $n_t$  **faire**

```

2   // Calcul des points intermédiaires  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ 
3    $\tilde{\mathbf{x}}_1 \leftarrow \mathbf{x}_n$ 
4    $\mathbf{L}_1 \leftarrow \left( \frac{\mathbf{I}_d}{t_e} - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \mathbf{Q} \right)^{-1}$ 
5    $\tilde{\mathbf{A}}_1 \leftarrow \mathbf{L}_1 \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \mathbf{Q}$ 
6    $\tilde{\mathbf{B}}_1 \leftarrow \mathbf{L}_1 \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_1)$ 
7    $\delta\tilde{\mathbf{x}}_1 \leftarrow \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}_n + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}_n$ 
8    $\tilde{\mathbf{x}}_2 \leftarrow \mathbf{x}_n + \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_1}{2(1-\beta)}$ 
9   // Calcul des points du chemin  $\bar{\mathbf{x}}_1$  et  $\bar{\mathbf{x}}_2$ 
10   $\bar{\mathbf{L}}_1 \leftarrow \left( \frac{\mathbf{I}_d}{\beta t_e} - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \mathbf{Q} \right)^{-1}$ 
11   $\bar{\mathbf{A}}_1 \leftarrow \bar{\mathbf{L}}_1 \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \mathbf{Q}$ 
12   $\bar{\mathbf{B}}_1 \leftarrow \bar{\mathbf{L}}_1 \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_1)$ 
13   $\bar{\mathbf{x}}_1 \leftarrow (\mathbf{I}_d + \bar{\mathbf{A}}_1) \mathbf{x}_n + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}_n$ 
14   $\bar{\mathbf{L}}_2 \leftarrow \left( \frac{\mathbf{I}_d}{(1-\beta)t_e} - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_2) \mathbf{Q} \right)^{-1}$ 
15   $\bar{\mathbf{A}}_2 \leftarrow \bar{\mathbf{L}}_2 \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}_2) \mathbf{Q}$ 
16   $\bar{\mathbf{B}}_2 \leftarrow \bar{\mathbf{L}}_2 \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}_2)$ 
17   $\bar{\mathbf{x}}_2 \leftarrow (\mathbf{I}_d + \bar{\mathbf{A}}_2) \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}_n$ 
18  // Calcul des sorties intermédiaires  $\bar{\mathbf{y}}_1$  et  $\bar{\mathbf{y}}_2$ 
19   $\bar{\mathbf{y}}_1 \leftarrow \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_1)^\top \mathbf{Q} \left( \bar{\mathbf{x}}_0 + \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_1}{2} \right) + \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{x}}_1) \mathbf{u}_n$ 
20   $\bar{\mathbf{y}}_2 \leftarrow \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_2)^\top \mathbf{Q} \left( \bar{\mathbf{x}}_1 + \frac{\delta\tilde{\mathbf{x}}_2}{2} \right) + \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{x}}_2) \mathbf{u}_n$ 
21  // Mise à jour et observation
22   $\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_2$ 
23   $\mathbf{y}_n \leftarrow \beta \bar{\mathbf{y}}_1 + (1 - \beta) \bar{\mathbf{y}}_2$ 
24 retourner  $\mathbf{x}_{n+1}$  et  $\mathbf{y}_n$ 

```

---

pour  $H(\mathbf{x}) = H_1(\mathbf{x}_1) + H_2(\mathbf{x}_2)$  avec

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} H_1(x_1) &= c_1 (\cosh(x_1) - 1), \\ H_2(x_2) &= c_2 \ln(\cosh(x_2)). \end{cases} \quad (2.92)$$

Ces fonctions de stockages et leur gradient continu sont illustrés en figure 2.2. La surface d'énergie  $H(x_1, x_2)$  est illustrée en figure 2.3.

### 2.5.2 Comparaison à quelques méthodes standard

On compare ici la méthode d'Euler avec gradient discret (méthode 2.1, algorithme 5, implicite, ordre 2) avec trois méthodes implicites usuelles

1. Méthode d'Euler standard (implicite, ordre 1) :  $\frac{\delta\mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n);$

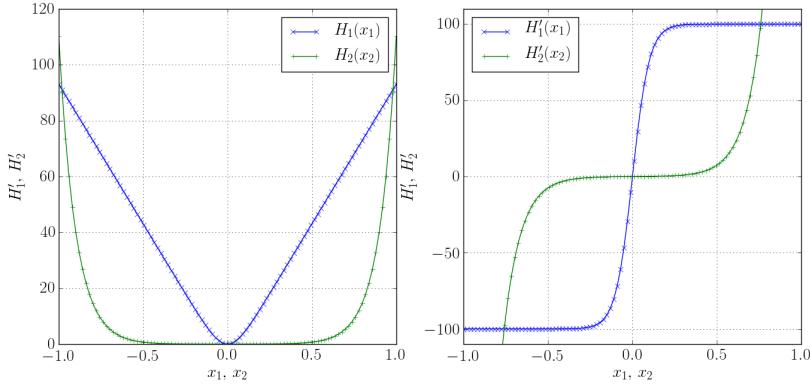


FIGURE 2.2 : Gauche : fonctions de stockages  $H_i(x_i)$  associées au système (2.92). Droite : Gradients continus  $H'_i(x_i)$  associés au système (2.92).

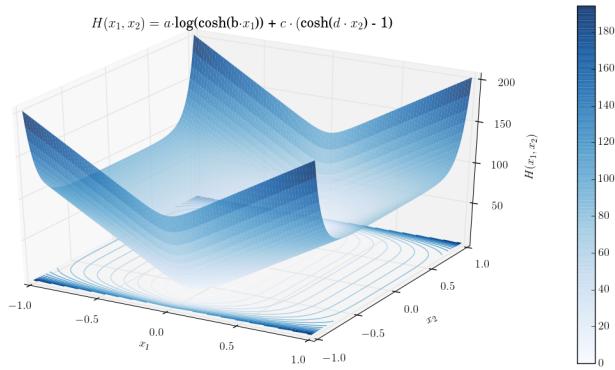


FIGURE 2.3 : Fonction de stockage  $H$  associée au système (2.92) utilisé dans les expériences numériques.

2. Méthode du point milieu (implicite, ordre 2) :  $\frac{\delta \mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \nabla H \left( \mathbf{x}_n + \frac{\delta \mathbf{x}_n}{2} \right)$  ;

3. Méthode du trapèze (implicite, ordre 2) :  $\frac{\delta \mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \frac{\nabla H(\mathbf{x}_n) + \nabla H(\mathbf{x}_n + \delta \mathbf{x}_n)}{2}$ .

Le système est à chaque fois initialisé en  $\mathbf{x}_0 = [0.5, 0]$ , et simulé pour le pas de temps  $t_e = 10^{-3}\text{s}$ . Puisque le système est conservatif, les trajectoires décrivent des orbites (c. f. remarque 1.1). On constate figure 2.4 que l'approche par les systèmes hamiltoniens à port et le gradient discret permet de préserver cette propriété dans les simulations. L'erreur sur le bilan d'énergie est quasiment nulle pour la méthode proposée, en comparaison des erreurs obtenues pour les méthodes de point milieu et de trapèze (c. f. figure 2.5).

### 2.5.3 Résultats sur le système quadratisé

Le système (2.92) est quadratisé (définition 2.9) par le le changement de variables défini par :

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_1) \sqrt{2a \log(\cosh(bx_1))} \\ \operatorname{sgn}(x_2) \sqrt{2c(\cosh(dx_2) - 1)} \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

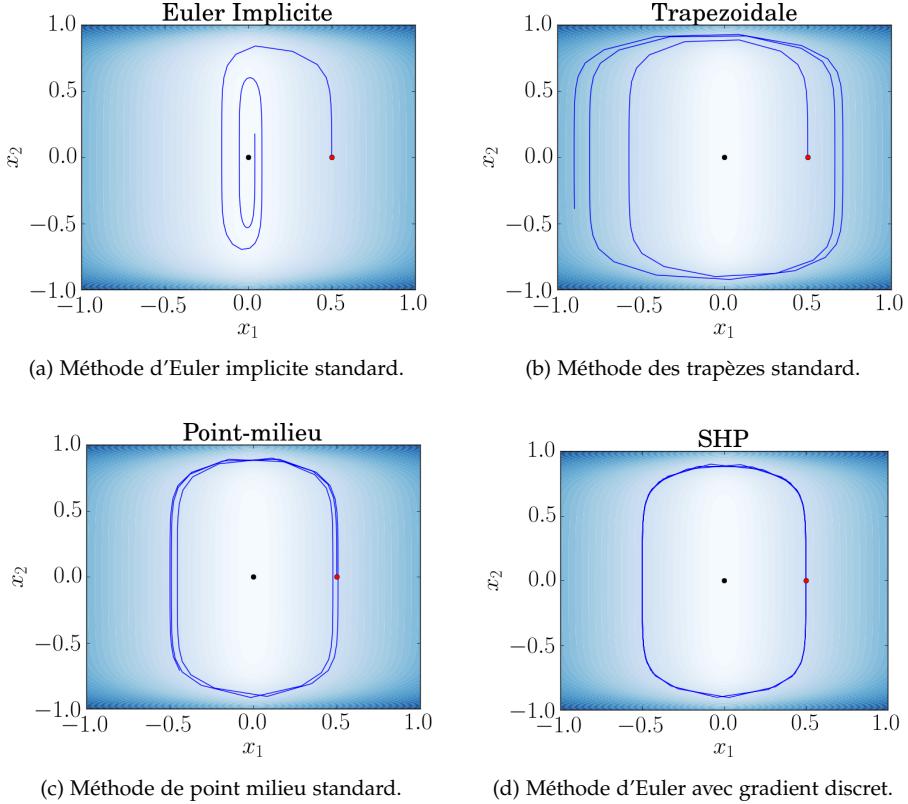


FIGURE 2.4 : Comparaison des méthodes d'Euler implicite, du point milieu et des trapèzes avec la méthode d'Euler avec gradient discret pour le système (2.92) initialisé en  $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0)^\top$ , à la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1\text{kHz}$ . Le système est conservatif donc les trajectoires exactes sont des orbites (c. f. remarque 1.1). On constate que l'approche par les SHP combinée à la méthode du gradient discret (méthode 2.1) permet de préserver exactement cette propriété à temps discret.

d'inverse  $\hat{\phi} = \phi^{-1}$  donnée par

$$\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} \operatorname{sgn}(x_1) \cosh^{-1} \left( e^{\frac{x_1^2}{2a}} \right) \\ \frac{1}{d} \operatorname{sgn}(x_2) \cosh^{-1} \left( \frac{x_2^2}{2c} + 1 \right) \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

La matrice jacobienne du changement de variables  $\phi$  est donnée par

$$\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{ab \operatorname{sgn}(x_1) \tanh(bx_1)}{\sqrt{2} \sqrt{a \log(\cosh(bx_1))}} & 0 \\ 0 & \frac{cd \operatorname{sgn}(x_2) \sinh(dx_2)}{\sqrt{2} \sqrt{c (\cosh(dx_2) - 1)}} \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

et on note  $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}) \mathbf{J} \mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})^\top$  la nouvelle structure pour le système quadratisé

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \hat{\mathbf{J}}(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}})) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.96)$$

avec (c. f. section 1.3.3.2)

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \frac{abcd \operatorname{sgn}(x_1) \operatorname{sgn}(x_2) \sinh(dx_2) \tanh(bx_1)}{2\sqrt{c (\cosh(dx_2) - 1)} \sqrt{a \log(\cosh(bx_1))}} \times \mathbf{J}.$$

Les résultats présentés sont obtenus de la manière suivante. La trajectoire de référence  $(\mathbf{x}_n^*)_{0 \leq n \leq n_t}$  est obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à la fréquence d'échantillonnage 1MHz appliquée au système original (2.92). Les tests réalisés sont :

- (T1) méthode d'Euler à gradient discret sur le système original (2.92) (méthode 2.1, implicite et d'ordre 2 car structure  $\mathbf{J}$  constante),
- (T2) la méthode d'Euler à gradient discret sur le système quadratisé (2.96) (méthode 2.1, explicite et d'ordre 1 car structure  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  non constante),
- (T2) la méthode de Runge-Kutta à deux étapes à gradient discret sur le système quadratisé (2.96) (méthode 2.2, explicite et d'ordre 2).

Chaque test (T1, T2, T3) est réalisé aux fréquences d'échantillonnage  $f_e \in [1, 2, 4, 5, 10]\text{kHz}$ . L'erreur normalisée à la fréquence  $f_e$  est définie comme l'erreur globale à la fréquence  $f_e$  divisée par l'erreur globale à la fréquence 1kHz. L'ordre de chaque méthode est clairement visible sur la figure 2.6a. En particulier, la méthode explicite à deux étapes (T3) est du même ordre de consistance que la méthode implicite à une étape (T1). Dans tous les cas, on constate que l'erreur sur la conservation de l'énergie est proche de la précision machine (figure 2.6b).

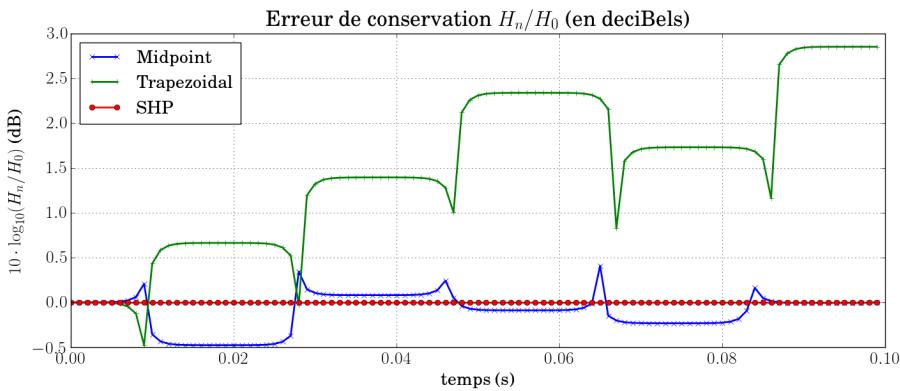
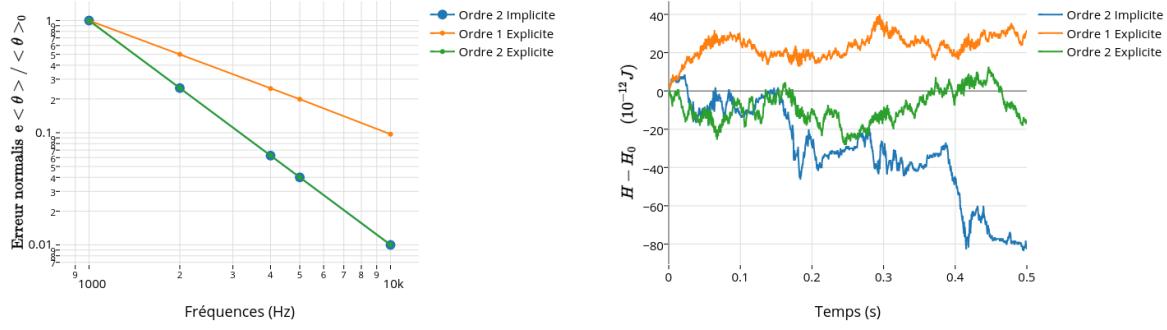


FIGURE 2.5 : Erreur sur l'énergie pour les méthodes de point milieu  $\frac{\delta \mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \nabla \mathbf{H} \left( \mathbf{x}_n + \frac{\delta \mathbf{x}_n}{2} \right)$  et de trapèze  $\frac{\delta \mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \frac{\nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}_n) + \nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}_n + \delta \mathbf{x}_n)}{2}$ , et la méthode proposée d'Euler avec gradient discret appliquée à la structure SHP  $\frac{\delta \mathbf{x}_n}{t_e} = \mathbf{J} \bar{\nabla} \mathbf{H}(\mathbf{x}_n, \delta \mathbf{x}_n)$  (méthode 2.1).

## 2.6 CONCLUSIONS DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons introduits deux méthodes numériques qui préservent la structure des systèmes hamiltoniens à ports à temps discret. Ceci garantit la passivité du système numérique, et la stabilité dans le cas autonome. Ces méthodes combinent l'approche du *gradient discret* (pour préserver la structure SHP) avec les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta. Pour les systèmes hamiltoniens à ports non linéaires et quadratisables (définition 2.9), on a donné une méthode à deux étapes, d'ordre 2 et explicite. Ces méthodes s'appliquent de manière générale à tout SHP de la forme (1.14). Il suffit donc de mettre un système sous cette forme pour bénéficier des outils proposés dans ce chapitre.



(a) Erreur de consistance en fonction de la fréquence d'échantillonnage pour chaque méthode  
(b) Erreur sur le bilan d'énergie pour chaque méthode

FIGURE 2.6 : Résultats numériques pour le système (2.92). La référence est obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la fréquence d'échantillonnage  $10^6\text{Hz}$ . Les résultats sont obtenus pour la méthode d'Euler avec gradient discret implicite (algorithme 5, ordre 2 de consistance), la méthode d'Euler avec gradient discret rendu explicite par quadratrisation (section 2.3.4.2 et algorithme 2, ordre 1 de consistance) et méthode de Runge-Kutta avec gradient discret rendu explicite par quadratrisation (section 2.3.4.2) et algorithme 4, ordre 2 de consistance. Les ordres de consistance sont illustrés figure 2.6a (moyenne de l'erreur à la trajectoire de référence, normalisé par l'erreur à la fréquence d'échantillonnage  $t_e^{-1} = 10^3\text{Hz}$ ). Le bilan d'énergie  $H(\mathbf{x}_n) - H(\mathbf{x}_0)$  (figure 2.6b) est dans chaque cas proche de la précision machine  $10^{-12}$ .

Les perspectives de ce chapitre incluent (i) la formalisation de l'analyse de consistance par les méthodes de graphes développée dans [27] (utilisation de la formule de Faà di Bruno) pour la construction de méthodes d'ordre supérieur à 2, et (ii) les approches géométriques adaptées à la formulation SHP [70].

# 3

MISE EN ÉQUATION AUTOMATIQUE ET PREMIÈRE  
APPLICATION : LES CIRCUITS AUDIOS (ARTICLE "PASSIVE  
GUARANTEED SIMULATION OF ANALOG AUDIO  
CIRCUITS : A PORT-HAMILTONIAN APPROACH" PUBLIÉ  
AU JOURNAL "APPLIED SCIENCES")

---

Divide et impera.

N. Machiavel - *Il Principe*, 1553.

## Sommaire

---

3.1	Motivation . . . . .	53
3.2	Introduction . . . . .	54
3.3	Port-Hamiltonian Systems . . . . .	56
3.3.1	Formalism and Property . . . . .	56
3.3.2	Example . . . . .	59
3.4	Generation of Equations . . . . .	59
3.4.1	Graph Encoding . . . . .	60
3.4.2	Realizability Analysis . . . . .	63
3.5	Guaranteed-Passive Simulation . . . . .	69
3.5.1	Numerical Scheme . . . . .	70
3.5.2	Solving the Implicit Equations . . . . .	71
3.5.3	Comparison with Standard Methods . . . . .	71
3.6	Applications . . . . .	73
3.6.1	Diode Clipper . . . . .	74
3.6.2	Common-Emitter BJT Audio Amplifier . . . . .	74
3.6.3	Wah Pedal . . . . .	75
3.7	Conclusions . . . . .	77
3.8	Appendix - Reduction . . . . .	78
3.9	Appendix - Dictionary of Elementary Components . . . . .	79
3.9.1	Storage Components . . . . .	80
3.9.2	Linear Dissipative Components . . . . .	80
3.9.3	Nonlinear Dissipative Components . . . . .	81
3.9.4	Incidence Matrices $\Gamma$ . . . . .	81
3.10	Appendix - Discrete Gradient for Multi-Variate Hamiltonian . .	81

---

### 3.1 MOTIVATION

Nous avons rappelé le formalisme des *systèmes hamiltoniens à ports* (chapitre 1) dans lequel les systèmes physiques sont décrits comme une *interconnexion conservative* de *composants* stockant, dissipatifs et sources. L'interconnexion est réalisée en appliquant les lois de conservations (Kirchhoff, Newton, Farraday, etc...) sur les variables de flux  $f$  et efforts  $e$  associées aux composants, avec  $f^T e = 0$ . Des méthodes numériques ont été développées pour préserver cette structure à temps discret (chapitre 2), ce qui garantit la stabilité des simulations (cas autonome).

Dans cette partie, on cherche à générer la structure SHP (définition 1.11) à partir de (i) un dictionnaire de composants (conservatifs, dissipatifs, sources) et (ii) un schéma d'interconnexion.

Pour cela, on utilise une structure de SHP différente de (1.14), et plus proche de la définition (1.11), pour laquelle les méthodes numériques du chapitre 2 s'appliquent encore. Le *dictionnaire de composants* inclut les lois constitutives : le hamiltonien  $H(\mathbf{x})$  pour les composants stockants, et les fonctions de dissipations  $\mathbf{z}(\mathbf{w})$  pour les composants dissipatifs dissipant la puissance  $D = \mathbf{w}^\top \mathbf{z}(\mathbf{w})$ . La structure de Dirac  $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = (\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_S, \mathbf{f}_D, \mathbf{e}_E, \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_D) \in \mathcal{D}$  (voir définition 1.11) est donnée par les lois de Kirchhoff appliquées sur le réseau d'interconnexion des flux et des efforts associés aux composants [176]. Le réseau d'interconnexion est décrit par un *graphe* [47] : une branche est associée à chaque couple  $(\mathbf{f}; \mathbf{e}) \in (\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_D, \mathbf{f}_S; \mathbf{e}_E, \mathbf{e}_D, \mathbf{e}_S)$ . Les flux et efforts associés aux composants stockants sont  $(\mathbf{f}_E, \mathbf{e}_E) \equiv (\nabla H(\mathbf{x}), \frac{d\mathbf{x}}{dt})$  avec  $\frac{dE}{dt} = \mathbf{f}_E^\top \mathbf{e}_E = \nabla H(\mathbf{x})^\top \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  la variation d'énergie stockée. Les flux et efforts associés aux composants dissipatifs sont  $(\mathbf{f}_D, \mathbf{e}_D) \equiv (\mathbf{w}, \mathbf{z}(\mathbf{w}))$  avec  $D = \mathbf{f}_D^\top \mathbf{e}_D = \mathbf{w}^\top \mathbf{z}(\mathbf{w})$  la puissance dissipée. Les flux et efforts associés aux sources sont  $(\mathbf{f}_S, \mathbf{e}_S) \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{y})$  avec  $S = \mathbf{f}_S^\top \mathbf{e}_S = \mathbf{u}^\top \mathbf{y}$  la puissance des sources (voir section 1.3). Dans cette thèse, on considère la classe des graphes réalisable sous la forme *algébro-différentielle*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}}_b = \mathbf{J} \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_b,$$

avec  $\mathbf{J}$  une matrice antisymétrique obtenue en appliquant les lois de Kirchhoff sur le graphe, et qui encode la structure de Dirac avec  $\frac{dE}{dt} + D - S = \mathbf{b}^\top \mathbf{a} = \mathbf{b}^\top \mathbf{J} \mathbf{b} = 0$  (théorème de Tellegen).

Le matériel de ce chapitre est une inclusion de l'article [A6] publié à la revue spéciale<sup>1</sup> *Audio Signal Processing* du journal APPLIED SCIENCES, section *Applied Acoustics*. Nous proposons un algorithme qui analyse si un graphe donné est réalisable, et construit la structure SHP pour les graphes réalisables. Une bibliothèque en langage python développée dans cette thèse qui (i) implémente cet algorithme de passage du graphe au SHP et (ii) génère le code LATEX de description du système et le code C++ de simulation passive (chapitre 2) est disponible sur GitHub<sup>2</sup>, avec (iii) un dictionnaire de composants de dimensions finie et multi-physiques (mécanique, électronique, magnétique, thermique).

### 3.2 INTRODUCTION

The characteristic input-to-output behavior of analog audio circuits (timbre, transitory) rests on the possibly highly nonlinear components appearing in such systems. These components make the stability of the simulations difficult to guarantee. The motivation of this work stems from the following observations:

1. Analog circuits combine energy-storing components, dissipative components, and sources.
2. Storage components do not produce energy, and dissipative components decrease it.

<sup>1</sup> [http://www.mdpi.com/journal/applsci/special\\_issues/audio\\_signal\\_processing](http://www.mdpi.com/journal/applsci/special_issues/audio_signal_processing)

<sup>2</sup> <https://github.com/afalaize/pyphs>

In this sense, analog circuits can be considered as passive systems with external power supply. We shall exploit this passivity property by transposing it to the digital domain, ensuring the stability of the simulations (see [11, 9, 31]).

The available approaches for the automated derivation of physical modeling and numerical simulation of audio circuits can be divided in two classes [174]: wave scattering methods (WS) and Kirchhoff's variables methods (KV). Mixed WS/KV methods have also been proposed in references [138, 186]. The well-established wave-digital filter (WDF) formalism [56] belongs to the class of WS methods. For linear circuits, it provides a computationally realizable system of equations: First, by defining parametric wave variables for each elementary component and multiports (serial and parallel); Second, by discretizing the corresponding constitutive laws with the bilinear transform; and Third, by choosing the wave's parameters so as to reduce the computational complexity and to avoid instantaneous feedback loops. An extension to nonlinear circuits has been considered in [151, 136] and applied to, for example, the real-time simulation of vacuum-tube guitar amplifiers in [133, 42]. WDF ensures the passivity of the resulting digital system [56, 55], including systems with scalar nonlinearity [12]. However, the passivity property of WDF structures is not ensured for circuits with more than one nonlinear element (e.g., [154] §3.2 and [183] §6).

The class of KV methods for audio circuits encompasses nonlinear state-space representations [96]. Several modeling techniques are available to derive the discrete-time state-space model, either from the global time-continuous model (e.g., [36]) or from the interconnection of discretized elementary components (e.g., [185]). The resulting set of nonlinear implicit equations solved at each sample can be structured so as to obtain a computationally realizable system by applying the K-method introduced in [16] with developments in [185]. However, this structure does not encode the passivity of the original circuit naturally, and it must be investigated on a case-by-case basis [75].

In this paper, we consider the port-Hamiltonian systems (PHS) approach, introduced in the 1990's [120, 153, 52]. PHS are extensions of classical Hamiltonian systems [116], specifically defined to address open dynamical systems made of energy storage components, dissipative components, and some connection ports through which energy can transit. This approach leads to a state-space representation of physical systems structured according to energy flow, thus encoding the passivity property, even for nonlinear cases. This class of physical systems encompasses not only electrical circuits, but also multi-domain systems, such as loudspeakers, which involves electrical, magnetic, mechanical, acoustical, and thermodynamical phenomena.

The port-Hamiltonian structure is derived by applying the Kirchhoff's laws to a given schematic, similarly to other existing approaches (e.g., WDF and K-method). Here, the advantage of the PHS formulation is the direct encoding of the underlying passive structure. This passivity property is transposed to the discrete-time domain by appropriate numerical methods, so as to ensure the numerical stability. For linear storage components (inductors and capacitors), the combination of the PHS structure with any of the trapezoidal rule or the mid-point rule yields the same numerical scheme that preserves the passivity in discrete-time. For nonlinear storage components, we propose the use of the discrete gradient method [87] combined with the PHS structure to achieve this goal. This result is compared to the aforementioned methods. As a second result, we provide an automated method that derives the PHS structure from a given analog circuit, based on an especially designed graph analysis.

This paper is organized as follows. Section 6.2 presents the class of the port-Hamiltonian systems; Section 3.4 is devoted to the automated derivation of algebraic-differential equations in the continuous time domain from the electronic schematics; Section 3.5 presents the numerical scheme which provides a discrete-time version of the power balance; Then, applications are presented in Section 6.6 and results are compared to LT-Spice simulations, before conclusions and perspectives.

### 3.3 PORT-HAMILTONIAN SYSTEMS

First and foremost, we provide an introduction to the port-Hamiltonian systems (PHS) formalism. It is shown how this structure guarantees the passivity of the model in continuous time. Second, for the sake of intuition, we give an introductory example.

#### 3.3.1 Formalism and Property

Denote  $E(t) \geq 0$  the energy stored in an open physical system (an electronic circuit). If the system is conservative, its time variation  $\frac{dE}{dt}(t)$  reduces to the power  $S(t)$  received from the sources through the external ports. If the system includes dissipative phenomena, the power  $D(t) \geq 0$  is dissipated, and the evolution of energy is governed by the following power balance:

$$\frac{dE}{dt}(t) = -D(t) + S(t). \quad (3.1)$$

The port-Hamiltonian approach is used to decompose such open physical systems in (i) a set of components that are combined according to (ii) a conservative interconnection network. These two ingredients are detailed below in the case of electronic circuits.

##### 3.3.1.1 Components

Electronic circuit components are sorted as (or can be a combination of):

- $n_E$  internal components that store energy  $E \geq 0$  (capacitors or inductors),
- $n_D$  internal components that dissipate power  $D \geq 0$  (resistors, diodes, transistors, etc.),
- $n_P$  external ports that convey power  $S (\in \mathbb{R})$  from sources (voltage or current generators) or any external system (active, dissipative, or mixed).

The behavior of each component is described by a relation between two power variables: the current  $i$  and the voltage  $v$ , defined in receiver convention (the received power is  $P = v \cdot i$ ).

The energy  $E_E$  stored in storage component  $E \in [1 \dots n_E]$  is expressed as a storage function  $h_E$  of an appropriate state  $x_E$ :  $E_E(t) = h_E(x_E(t)) \geq 0$ . Typically, for a linear capacitor with capacitance  $C$ , the state can be the charge  $x = q$  and the positive definite function is  $h(q) = q^2/(2C)$ . Storage power variables  $(v_E, i_E)$  are related to the variation of the state  $\frac{dx_E}{dt}$  and the gradient of the storage function  $h'_E(x_E)$ , the product of which is precisely the received power:  $v_E \cdot i_E = \frac{dE_E}{dt} = h'_E \cdot \frac{dx_E}{dt}$ . For the capacitance, these constitutive laws are  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dx}{dt}$  and  $v = q/C = h'$ . Note that these definitions apply equally for non-quadratic storage functions  $h(x) \geq 0$  for which  $h''(x)$  is not constant.

The power  $D_D$  instantaneously dissipated by the dissipative component  $D \in [1 \dots n_D]$  is expressed with respect to an appropriate dissipation variable  $w_D$ :  $D_D(t) \equiv D_D(w_D(t)) \geq 0$ . Typically, for a linear resistance  $R$ ,  $w$  can be a current  $w = i$  and  $D(i) = R \cdot i^2$ . As for storage components, a mapping of the dissipative power variables  $(v_D, i_D)$  is provided, based on the factorization  $D_D(w_D) = w_D \cdot z_D(w_D)$ , introducing a dissipation function  $z_D$ . For the resistance,  $i = w$  and  $v = R \cdot i = z(w)$ .

The power instantaneously provided to the system through external port  $\text{ext} \in [1 \dots n_p]$  is  $S_{\text{ext}}(t)$ , and we arrange the source variables  $(v_{\text{ext}}, i_{\text{ext}})$  in two vectors: one is considered as an input  $u_{\text{ext}}$ , and the other as the associated output  $y_{\text{ext}}$ , so that the power received from sources on port  $p$  is  $S_{\text{ext}} = y_{\text{ext}} \cdot u_{\text{ext}} = -v_{\text{ext}} \cdot i_{\text{ext}}$  (receiver convention, with  $v_{\text{ext}} \cdot i_{\text{ext}}$  the power received by the sources).

### 3.3.1.2 Conservative Interconnection

The interconnection of the components is achieved by relating all the voltages and currents through the application of the Kirchhoff's laws to the interconnection network (schematic). This defines a conservative interconnection, according to Tellegen's theorem recalled below (see also [167] and [45] §9.4).

**Theorem 3.1 (Tellegen)** Consider an electronic circuit made of  $N$  edges defined in same convention (here receiver), with individual voltages  $v = (v_1, \dots, v_N)^\top$  and currents  $i_n = (i_1, \dots, i_N)^\top$  which comply with the Kirchhoff's laws. Then

$$v^\top \cdot i = 0. \quad (3.2)$$

A direct consequence of (3.2) is that no power is created nor lost in the structure:  $v^\top \cdot i = \sum_{n=1}^N P_n = 0$ , with  $P_n = v_n \cdot i_n$  the power received by edge  $n$ , thus defining a conservative interconnection (Tellegen's theorem is a special case of a more general interconnection structure, namely, the Dirac structure (see [52] §2.1.2 for details)). Now, denote  $(v_s, i_s)$ ,  $(v_d, i_d)$ , and  $(v_p, i_p)$  the sets of all the power variables associated with storage components, dissipative components, and sources (respectively), and  $v = (v_s^\top, v_d^\top, v_p^\top)^\top$ ,  $i = (i_s^\top, i_d^\top, i_p^\top)^\top$  the vectors of all the power variables. Then, Tellegen's theorem restores the power balance (C1) with

$$\begin{aligned} v^\top \cdot i &= v_s^\top \cdot i_s + v_d^\top \cdot i_d + v_p^\top \cdot i_p \\ &= \underbrace{\nabla H^\top(x) \cdot \frac{dx}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{z(w)^\top \cdot w}_{D} - \underbrace{u^\top \cdot y}_{S}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

where  $\nabla H : \mathbb{R}^{n_E} \rightarrow \mathbb{R}^{n_E}$  denotes the gradient of the total energy  $E = H(x) = \sum_{E=1}^{n_E} h_E(x_E)$  with respect to (w.r.t.) the vector of the states  $[x]_E = x_E$ , and function  $z : \mathbb{R}^{n_D} \rightarrow \mathbb{R}^{n_D}$  denotes the collection of functions  $z_D$  w.r.t. the vector  $w \in \mathbb{R}^{n_D}$  of  $[w]_D = w_D$  so that  $z(w)^\top \cdot w = \sum_{D=1}^{n_D} D_D(w_D)$  is the total dissipated power.

The above description of storage components, dissipative components, and source, along with the conservative interconnection stated by the Kirchhoff's laws, constitute the minimal definition of a port-Hamiltonian system (PHS) (see [52] §2.2). In this work, we focus on circuits that admit an explicit realization of PHS, for which the quantities  $b = (b_1, \dots, b_N)^\top = (\frac{dx}{dt}, w, -y)^\top$  (with  $b_n = v_n$  or  $b_n = i_n$ ) can be expressed as linear combinations of the remaining  $N$  powers variables organized in the dual vector  $a = (a_1, \dots, a_N)^\top = (\nabla H(x), z(w), u)^\top$  (with  $a_n = i_n$  if  $b_n = v_n$  or  $a_n = v_n$  if  $b_n = i_n$ ):

$$b = J \cdot a. \quad (3.4)$$

Then,  $\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{a} = 0$  from Tellegen's theorem, so that the matrix  $\mathbf{J}$  is necessarily skew-symmetric ( $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$ ). More precisely, we consider the following algebraic-differential system of equations

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & -\mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^\top & \mathbf{J}_w & -\mathbf{G}_w \\ \mathbf{G}_x^\top & \mathbf{G}_w^\top & \mathbf{J}_y \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}}, \quad (3.5)$$

where matrices  $\mathbf{J}_x$ ,  $\mathbf{J}_w$ ,  $\mathbf{J}_y$  are skew-symmetric. The significance of the structure matrices is the following:

$\mathbf{J}_x \in \mathbb{R}^{n_E \times n_E}$  expresses the conservative power exchanges between storage components (this corresponds to the so-called  $\mathbf{J}$  matrix in classical Hamiltonian systems);

$\mathbf{J}_w \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$  expresses the conservative power exchanges between dissipative components;

$\mathbf{J}_y \in \mathbb{R}^{n_P \times n_P}$  expresses the conservative power exchanges between ports (direct connections of inputs to outputs);

$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_E \times n_D}$  expresses the conservative power exchanges between the storage components and the dissipative components;

$\mathbf{G}_x \in \mathbb{R}^{n_E \times n_P}$  expresses the conservative power exchanges between ports and storage components (input gain matrix);

$\mathbf{G}_w \in \mathbb{R}^{n_D \times n_P}$  expresses the conservative power exchanges between ports and dissipative components (input gain matrix).

The PHS (3.5) fulfills the definition of passivity (e.g., [96]) according to the following property.

**Property 3.1 (Power Balance)** *The variation of the total energy  $E = H(\mathbf{x})$  of a system governed by (3.5) is given by (C1), with  $D = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\top \cdot \mathbf{w} \geq 0$  the total dissipated power, and  $S = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{y}$  the total power incoming on external ports.*

**Preuve** We have  $\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = \frac{dE}{dt} + D - S$ . Now  $\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{a} = 0$  since  $\mathbf{J}$  is skew-symmetric.

**Remark 3.1 (Power variables)** This work is devoted to the treatment of electronic circuits for which power variables are chosen as current and voltage. However, all the aforementioned definitions apply equally to multiphysical systems, provided an adapted set of power variables, generically denoted by flux (currents, velocities, magnetic flux variations) and efforts (voltages, forces, magnetomotive force), the product of which is a power (see [52] Table 1.1). This follows the bond-graph modeling approach [93, 18], on which the PHS formalism is built (see [52] §1.6 and 2.1). The treatment of multiphysical audio systems in the PHS formalism can be found in [A4] (electromechanical piano that includes mechanical, electrical, and magnetic phenomena) and [A8] (§III.B) (modulated air flow for musical acoustics applications that includes mechanical and acoustical phenomena).

### 3.3.2 Example

Consider the resistor-inductor-capacitor (RLC) circuit in Figure 6.3, with  $n_E = 2$ ,  $n_D = 1$ , and  $n_p = 2$ , described as follows. For the linear inductance  $L$ , the state and the positive definite function can be the magnetic flux  $x_1 = \phi$  and  $h_1(\phi) = \phi^2/(2L)$ , so that  $v_L = dh_1/dx_1$  and  $i_L = \frac{dx_1}{dt}$ . For the capacitance and the resistance, quantities are defined with  $x_2 = q$  and  $\mathbf{w} = [i_R]$ . Port variables are arranged as input  $\mathbf{u} = [v_1, v_2]^\top$  and output  $\mathbf{y} = [-i_1, -i_2]^\top$  (edges receiver convention).

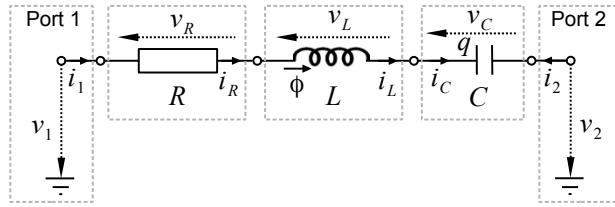


Figure 3.1: Resistor-inductor-capacitor (RLC) circuit (notations and orientations).

Applying Kirchhoff's laws to this simple serial circuit yields

$$\begin{pmatrix} v_L \\ i_C \\ i_R \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \\ v_R \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

From the constitutive laws of components, this equation restores the form (3.5) exactly, block by block. It provides the algebraic-differential equations that govern the system with input  $\mathbf{u}$  and output  $\mathbf{y}$ .

This work aims at simulating such passive systems by firstly generating Equation (3.5) associated to a given circuit, and secondly by deriving its numerical version so that a discrete power balance is satisfied.

**Remark 3.2 (Reduction)** The system (3.5) can be reduced by decomposing function  $\mathbf{z}$  into its linear and nonlinear parts. See Appendix 3.8 for details.

## 3.4 GENERATION OF EQUATIONS

This section provides a method to translate the description of a circuit (components and interconnections) from a netlist in a Spice-style [181] to the Formulation (3.5). Compared to standard methods that express all the currents as a function

of all the voltages (see [181, 45, 185]), Formulation (3.5) expresses vector  $\mathbf{b}$  of selected power variables (voltage or current) as a function of the vector  $\mathbf{a}$  of complementary power variables (if  $[\mathbf{b}]_n$  is a voltage of a branch,  $[\mathbf{a}]_n$  is the associated current with receiver convention). To derive the matrix  $\mathbf{J}$  that relates the voltages and the currents arranged in vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  according to Kirchhoff's laws (as in example §6.2.3), we propose a two-step method:

**STEP 1** : from a netlist ( $\mathcal{L}$ ) to a graph ( $\mathcal{G}$ ) that represents the Kirchhoff's laws for a chosen orientation (convention);

**STEP 2** : from ( $\mathcal{G}$ ) to the skew-symmetric matrix  $\mathbf{J}$  in (3.5).

Step 1 is standard. The presentation focuses on convention choices and details our procedure. In step 2, we propose an algorithm that analyzes if Formulation (3.2) is available (that is, the circuit is realizable into the PHS formalism) and delivers the matrix  $\mathbf{J}$  in this case. Otherwise, the circuit corresponds to an implicit formulation that is not addressed in this paper. In practice, such cases appear for serial(/parallel) connection of voltage(/current)-controlled components. In this case, port-Hamiltonian Formulation (3.5) requires extension (see [153, 52]).

### 3.4.1 Graph Encoding

#### 3.4.1.1 Netlists

Each line of a netlist describes an element of the corresponding schematic, with: identification label, list of connection nodes, type of element, and list of parameters. We divide netlists into two blocks: internal components (dissipative and storage) and external ports (supplies and ground). In the first block (components), each line includes a reference to the appropriate entry in the dictionary and a list of the parameters for the corresponding model. Each line of the second block (external ports) provides the label of the externalized node, the type of supply (voltage or current), and the symbol  $\sim$  if the supply is modulated (typically, the input signal), or a value if constant (typically, a battery).

As an example, the netlist corresponding to the circuit in Figure 3.2 is given in Table 3.1. Here, the components are given lines  $\ell_1$  to  $\ell_3$  (gray). The first two lines describe dipoles: a linear capacitor between  $N_1$  and  $N_2$  with label  $C1$  and capacitance value  $20e^{-9}$  F; and a resistor between  $N_3$  and  $N_4$  with label  $R1$  and resistance value  $1.5e^3$   $\Omega$ . The third line describes a npn bipolar-junction transistor. From the dictionary (Appendix 3.9), the base terminal appears to be connected to the circuit's node  $N_2$ , the emitter terminal to  $N_3$ , and the collector terminal to  $N_5$ . For this component, the list of parameters is: forward and reverse common emitter current gain, reverse saturation current, and thermal voltage. External ports are given lines  $\ell_4$  to  $\ell_7$ . Line  $\ell_4$  describes a constant 9 V voltage supply (labeled  $Vcc$ ) on the circuit's node  $N_4$ .  $\ell_5$  describes a modulated voltage supply (here considered as the input signal) on  $N_4$ .  $\ell_6$  describes a constant 0 A current supply on node  $N_3$ ; this permits the recovery of the voltage on that node  $N_3$  as an output to the circuit.  $\ell_7$  describes the connection of the circuit's node  $N_5$  to the ground.

#### 3.4.1.2 Graph

A graph  $\mathbf{G} = \{\mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  is defined by two lists of nodes  $\mathbf{N}$  (also called vertices) and branches  $\mathbf{B}$  (also called edges), with  $\mathbf{B} \subset \mathbf{N}^2$  (each element of  $\mathbf{B}$  is an object defined on two elements of  $\mathbf{N}$ , see [47] for details). The dictionary (Appendix 3.9) encodes the graph of each elementary component. The branches of such an elementary graph contain the constitutive laws of the corresponding component:

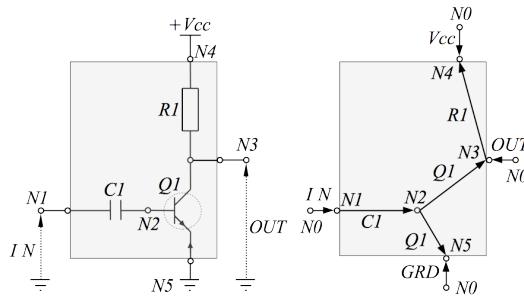


Figure 3.2: Schematic and corresponding graph of a simple bipolar-junction transistor (BJT) amplifier with feedback. The grey part corresponds to the components, and the outer elements correspond to the external ports, or sources (as in table 3.1).

Line	Label	Node List	Type	Parameters
$\ell_1$	C1	$N_1, N_2$	CapaLin	$20e^{-9}$
$\ell_2$	R1	$N_3, N_4$	Resistor	$1.5e^3$
$\ell_3$	Q1	$N_2, N_3, N_5$	NPN_Type1	List of parameters
$\ell_4$	Vcc	$N_4$	Voltage	9
$\ell_5$	IN	$N_1$	Voltage	$\sim$
$\ell_6$	OUT	$N_3$	Current	0
$\ell_7$	GRD	$N_5$	Voltage	0

Table 3.1: Example of a netlist corresponding to the circuit in Figure 3.2. The grey part corresponds to the components, and the other elements correspond to the external ports, or sources (as in figure 3.2).

- Dipoles are made of two nodes and a single branch, defining a single couple of state  $x$  and storage function  $h(x)$  (storage component), or dissipative variable  $w$  and scalar relation  $z(w)$  (dissipative components).
- More generally,  $n$ -ports multipole are made of  $n$  nodes and at least  $n - 1$  branches, defining  $n - 1$  couples of variables and functions. Typically, the graph for the bipolar junction is made of two branches (base-emitter and base-collector).

The graph corresponding to a given circuit is derived from its netlist description in two steps:

1. build the internal graph by connecting the elementary graph of the components from the first block of the netlist,
2. introduce a reference node  $N_0$  (or datum, see [45] §10) to define the external branches from the second block.

Typically,  $N_0$  corresponds to the ground or any local electrostatic potential which does not impact the currents nor voltages. Then,  $N$  is built from the list of nodes appearing at least once in the netlist, plus the reference node  $N \triangleq [N_0, N_1, \dots, N_{n_N}]$ . According to Section 6.2, the set of branches is organized as  $B = \{B_S, B_D, B_P\}$ , with  $B_S$  the  $n_E$  energy storage branches,  $B_D$  the  $n_D$  dissipative branches, and  $B_P$  the  $n_P$  sources.

As an example, the construction of the graph in Figure 3.2 from its netlist 3.1 is as follows. Firstly, the internal graph is built. It is made of  $n_N = 5$  nodes  $\{\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_5\}$  and four branches  $\mathbf{B}_S = \{C_1\}$  and  $\mathbf{B}_D = \{R_1, Q_{1,bc}, Q_{1,be}\}$ . Secondly, we introduce the (virtual) reference node  $\mathbf{N}_0$  to define the four branches corresponding to the external ports  $\mathbf{B}_P = \{IN, Vcc, OUT, GRD\}$ .

### 3.4.1.3 Kirchhoff's Laws on Graphs

We assign to each branch  $b$  both a voltage  $v_b$  and a current  $i_b$  in receiver convention, the direction of the branch indicating the direction of the current. Note that the power supplied to the system on port  $p$  is the power emitted by the port branch  $S_{ext} = u_{ext} \cdot y_{ext} = -v_{ext} \cdot i_{ext}$ . For a circuit made of  $n_N + 1$  nodes and  $n_B = n_E + n_D + n_P$  branches, we define: the set of electrostatic potentials on the nodes  $\omega = (p_1 \dots p_{n_N})^\top$ , the set of voltages  $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_{n_B})^\top$ , and the set of currents  $\mathbf{i} = (i_1 \dots i_{n_B})^\top$ . The orientation of an entire graph is encoded in its incidence matrix  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n_N+1) \times n_B}$ , defined below [45] (§9).

$$[\Gamma]_{n,b} = \begin{cases} -1 & \text{if branch } b \text{ is outgoing node } n, \\ 1 & \text{if branch } b \text{ is ingoing node } n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.6)$$

As an example, the incidence matrix for the circuit described in Table 3.1 is given below (o are replaced by dots). Notice the grey columns correspond to the components, and the other columns correspond to the external ports, or sources (as in table 3.1 and figure 3.2).

$$\Gamma = \left( \begin{array}{ccccccccc} C_1 & R_1 & Q_{1,bc} & Q_{1,be} & V_{cc} & IN & OUT & GRD \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \vdots & \vdots \\ -1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.7)$$

Since the reference potential  $p_0$  does not influence the voltages nor the currents, it is not taken into account in the Kirchhoff's laws, and we define the reduced incidence matrix  $\hat{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n_N \times n_B}$  obtained by deleting the row corresponding to the datum  $N_0$  in  $\Gamma$ . This leads to the following matrix formulation of Kirchhoff's Voltage Law (KVL) and Kirchhoff's Current Law (KCL) [45] (§10), from which the structure (3.5) is derived.

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}^\top \cdot \omega = \mathbf{v}, & (\text{KVL}) \\ \hat{\Gamma} \cdot \mathbf{i} = \mathbb{0}. & (\text{KCL}) \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.4.2 Realizability Analysis

The PHS structure (3.5) relies on (i) an arrangement of currents  $\mathbf{i}$  and voltages  $\mathbf{v}$  in two vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  and (ii) a set of linear relations encoded in the skew-symmetric matrix  $\mathbf{J}$  that corresponds to the conservation laws (3.8) applied on  $(\mathbf{i}, \mathbf{v})$ . For storage and sources components, step (i) is straightforward with the constraints given in Table 3.2. For dissipative components, this step is achieved by selecting each component as voltage-controlled or current-controlled in order to satisfy a criterion on the matrix description of the interconnection scheme. This realizability criterion is given in Section 3.4.2.1, assuming the control type of every edge is known. A method of choosing the control type of dissipative edges so as to satisfy the realizability criterion is addressed in Section 3.4.2.2. This leads to Algorithm 5, which solves (i) and (ii).

Component type	Current-Controlled	Voltage-Controlled
	$[a]_b = i_b$	$[a]_b = v_b$
	$[b]_b = v_b$	$[b]_b = i_b$
storages	capacitor	inductor
resistors	resistance	conductance
nonlinear		diodes, transistors
sources	voltage source	current source

Table 3.2: Sorting components according to their realizability.

## 3.4.2.1 A Criterion for Realizability

In Section 3.4.1, the set of edges  $\mathbf{B}$  has been partitioned based on the differentiation between *internal edges* (or component edges  $\{\mathbf{B}_S, \mathbf{B}_D\}$ , grey) and *external edges* (or ports edges  $\mathbf{B}_P$ , white), in order to build the complete graph from the netlist. In this section, we are interested in the PHS Formulation (3.5) associated to a given complete graph. To that end, we leave out from here the differentiation between internal and external edges in order to focus on the differentiation between voltage-controlled and current-controlled edges.

Suppose the control type of every edge is known, and the set of edges is split according to  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ , with  $\mathbf{B}_1$  the set of  $n_1$  voltage-controlled edges and  $\mathbf{B}_2$  the set of  $n_2$  current-controlled edges (see Table 3.2). Correspondingly, the sets of power variables are split as  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$  and  $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^\top$ , and we define  $\tilde{\mathbf{a}} = (v_1, i_2)^\top$  and  $\tilde{\mathbf{b}} = (i_1, v_2)^\top$ . Since the reference potential  $p_0$  defined on node  $N_0$  does not influence the voltages nor the currents, it is not considered in the sequel, and the incidence matrix splits as follows:

$$\Gamma = \left( \begin{array}{c|c} \gamma_0 & \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right), \quad \text{with } \gamma_0 \in \mathbb{R}^{1 \times n_B}, \gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_1}, \gamma_2 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_2}.$$

This leads to a rewrite of the Kirchhoff laws (3.8) as:

$$(\gamma_1, \gamma_2)^\top \omega = \mathbf{v}, \tag{3.9}$$

$$(\gamma_1, \gamma_2) \mathbf{i} = 0. \tag{3.10}$$

**Proposition 3.1 (Realizability)** *If  $\gamma_2$  is invertible, then the port-Hamiltonian structure (3.5) provides a realization of the graph  $\mathbf{G} = \{N, (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)\}$ .*

**Preuve** From the relation on the voltages in (3.9), we get  $v_1 = \gamma_1^\top \omega$  and  $v_2 = \gamma_2^\top \omega$ . From the relation on the currents (3.10), we get  $\gamma_2 \mathbf{i}_2 = -\gamma_1 \mathbf{i}_1$ . Now, if  $\gamma_2$  is invertible, we denote  $\gamma = \gamma_2^{-1} \gamma_1$  and

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma^\top \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}}. \tag{3.11}$$

The PHS (3.5) is obtained by rearranging the edges according to their role with respect to the power balance, according to the permutation of vector elements

$\Pi(\tilde{\mathbf{a}}) = (\frac{dx}{dt}, \mathbf{w}, \mathbf{y})^\top = \mathbf{a}$  (and correspondingly  $\Pi(\tilde{\mathbf{b}}) = (\nabla H, \mathbf{z}, \mathbf{u})^\top = \mathbf{b}$ ), which is also applied on rows and columns of  $\tilde{\mathbf{J}}$  to yield  $\mathbf{a} = \mathbf{J} \mathbf{b}$ .

From the invertibility condition on  $\gamma_2$  in Proposition 3.1, we state the following remark, which is used in the sequel to derive the realizability analysis algorithm.

**Remark 3.3 (Necessary condition for realizability)** *A necessary condition for the graph  $\mathbf{G}$  to be realizable as a PHS (3.5) is that it includes as many current-controlled edges as nodes  $n_N$ , with  $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_N}$ .*

#### 3.4.2.2 Algorithm

This section introduces an algorithm that selects the appropriate control type for each dissipative edge so that the partition  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$  satisfies Proposition 3.1. From Remark 3.3, the total number  $n_2$  of current-controlled edges should be exactly equal to the number of nodes  $n_N$ . From the special structure of the incidence matrix  $\Gamma$ , this in turn ensures that the potential on each node is uniquely defined by a linear combination of the voltages  $v_2$  (elements in  $\mathbf{a}$  associated to current-controlled edges); i.e.,  $\gamma_2$  is invertible.

Consider the current-controlled edge  $b$  from node  $i$  to node  $j$  in Figure 3.3. If the potential on node  $j$  is known, the remaining potential is obtained from  $p_i = v_b \pm p_j$ , where the sign depends on the orientation. In this case, we say edge  $b$  imposes the potential on node  $i$ . Now, the objective is to perform this analysis globally so that  $\omega$  is a linear combination of  $v_2$  with  $\omega = (\gamma_2^\top)^{-1} \cdot v_2$ . To that end, we introduce the realizability matrix  $\Lambda$  defined element-wise as follows

$$[\Lambda]_{n,b} = \begin{cases} 1 & \text{if branch } b \text{ imposes potential on node } n, \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_0 & \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right), \quad \text{with } \lambda_0 \in \mathbb{R}^{1 \times n_B}, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_1}, \lambda_2 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_2} \quad (3.13)$$

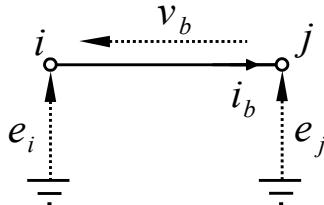


Figure 3.3: Definitions and orientations for a single current-controlled edge  $b$  from node  $i$  to node  $j$ , with nodes potentials  $p_i$  and  $p_j$ , respectively. The knowledge of the potential  $p_j$  is transferred to node  $i$  with  $p_i = v_b + p_j$ .

Then, a given graph is realizable if the type of each resistor can be selected so that the following set of constraints is fulfilled.

- (c1) The potential on each node  $n \in [1, \dots, n_N]$  is uniquely defined so that  $\sum_{b=1}^{n_B} [\Lambda]_{n,b} = 1$ .
- (c2) Each Current-controlled edge  $b \in [n_1 + 1, \dots, n_N]$  propagates the knowledge of the potential on one node to the other, so that  $\sum_{n=1}^{n_N} [\Lambda]_{n,b} = 1$ .
- (c3) No edge imposes the reference potential  $p_0$  so that  $\lambda_0 = \mathbb{0}_{1 \times n_B}$ .
- (c4) No voltage-controlled edge  $b \in [1, \dots, n_1]$  imposes any potential so that  $\lambda_1 = \mathbb{0}_{n_N \times n_2}$ .

Constraints (C<sub>1</sub>–C<sub>2</sub>) ensure that  $\gamma_2$  is invertible, so that  $\omega = (\gamma_2^\top)^{-1} \cdot v_2$ . Constraint (C<sub>3</sub>) ensures that the reference potential on datum does not contribute to the system's dynamics. Constraint (C<sub>4</sub>) ensures that inputs of voltages-controlled edges are explicitly given by a linear combination of the nodes potentials so that  $v_1 = \gamma_1^\top \omega = (\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)^\top \cdot v_2$ . To build and analyze the matrix  $\Lambda$ , we start from the adjacency matrix  $\mathbf{A}$  of the graph, defined as follows:

$$[\mathbf{A}]_{b,n} = \begin{cases} 1 & \text{if branch } b \text{ is connected to node } n, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Then the non-zero elements in  $\mathbf{A}$  are analyzed to cope with the realizability constraints (C<sub>1</sub>–C<sub>4</sub>). This yields Algorithm 5. The PHS (3.5) is finally recovered as discussed in the proof of Property 3.1.

---

**Algorithme 5 :** Analysis of realizability. If successfully complete, the resulting PHS structure is given by the procedure in the proof of Proposition 3.1

---

**Entrées :** A graph  $G = \{N, (B_x, B_w, B_y)\}$  corresponding to the interconnection of storage, dissipative, and source edges.

**Output :** Sets of voltage-controlled edges  $B_1$  and current-controlled edges  $B_2$ .

- 1  $\Lambda \leftarrow$  adjacency matrix of  $G$
- 2  $B_1, B_2 \leftarrow \emptyset, \emptyset$
- 3 pour chaque  $b \in (B_x, B_y)$  See Table 3.2 faire
  - 4 si  $b$  is voltage-controlled alors
    - 5  $B_1 \leftarrow B_1 \cup b$
  - 6 si  $b$  is current-controlled alors
    - 7  $B_2 \leftarrow B_2 \cup b$
- 8  $B_i \leftarrow B_w$
- 9  $\Lambda(N_0, :) \leftarrow 0$
- 10 pour chaque  $b \in B_1$  See constraint (C4) faire
  - 11  $\Lambda(:, b) \leftarrow 0$
- 12 répéter
  - 13  $\Lambda^* \leftarrow \Lambda$
  - 14 pour chaque  $b \in B_2$  See constraint (C2) faire
    - 15 si  $\sum \Lambda(:, b) = 0$  alors
      - 16 break:  $G$  is not realizable
    - 17 sinon si  $\sum \Lambda(:, b) = 1$  alors
      - 18  $n \leftarrow \{n \text{ s.t. } \Lambda(n, b) = 1\}$
      - 19  $\Lambda(n, : \setminus b) \leftarrow 0$
  - 20 pour chaque  $b \in B_i$  faire
    - 21 si  $\sum \Lambda(:, b) = 0$  See constraint (C2) alors
      - 22  $B_1 \leftarrow B_1 \cup b$
      - 23  $B_i \leftarrow B_i \setminus b$
    - 24 sinon si  $\sum \Lambda(:, b) = 1$  See constraint (C4) alors
      - 25  $n \leftarrow \{n \text{ s.t. } \Lambda(n, b) = 1\}$
      - 26  $\Lambda(n, : \setminus b) \leftarrow 0$
      - 27  $B_2 \leftarrow B_2 \cup b$
      - 28  $B_i \leftarrow B_i \setminus b$
  - 29 pour chaque  $n \in N \setminus N_0$  See constraint (C1) faire
    - 30 si  $\sum \Lambda(n, :) = 0$  alors
      - 31 break:  $G$  is not realizable
  - 32 jusqu'à  $\Lambda = \Lambda^*$
  - 33 si  $B_i \neq \emptyset$  alors
    - 34  $b \leftarrow$  first edge in  $B_i$
    - 35  $B_1 \leftarrow B_1 \cup b$
    - 36  $B_i \leftarrow B_i \setminus b$
    - 37 go to 10
  - 38 retourner  $B_1$  and  $B_2$

---

### 3.4.2.3 Example

As an example, the realizability analysis for the system in Figure 3.2 with the choice of inputs/outputs in Table 3.1 is as follows. In step 1, the realizability matrix  $\Lambda$  is initialized with the adjacency matrix  $\mathbf{A}$ , which is built by taking the absolute value of incidence matrix  $[\mathbf{A}]_{n,b} = \text{abs}([\Gamma]_{n,b})$ :

$$\Lambda = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_1 & R_1 & Q_{1,bc} & Q_{1,be} & V_{cc} & IN & OUT & GRD \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.14)$$

In steps 3–7, the set of edges  $\mathbf{B} = \{C_1, R_1, Q_{1,bc}, Q_{1,be}, IN, V_{cc}, OUT, GRD\}$  is split as  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_2\}$  according to the definition of components with voltage-controlled edges  $\mathbf{B}_1 = \{Q_{1,bc}, Q_{1,be}, OUT\}$ , current-controlled edges  $\mathbf{B}_2 = \{C_1, V_{cc}, IN, GRD\}$ , and indeterminate edge  $\mathbf{B}_i = \{R_1\}$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} Q_{1,bc} & Q_{1,be} & OUT & | & R_1 & C_1 & V_{cc} & IN & GRD \\ \vdots & \vdots & 1 & | & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & 1 & \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & | & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 & | & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & 1 & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.15)$$

The realizability matrix after step 11 in Algorithm 5 is

$$\Lambda = \begin{pmatrix} Q_{1,bc} & Q_{1,be} & OUT & | & R_1 & C_1 & V_{cc} & IN & GRD \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & 1 & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & 1 & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.16)$$

After step 19, the algorithm concludes that the potential on node  $N_1$  is imposed by edge  $\mathbf{B}_{IN}$  so that the potential on node  $N_2$  is imposed by the capacitor  $\mathbf{B}_{C1}$ . After step 28, the algorithm concludes that the potential on node  $N_4$  is imposed

by the edge  $\mathbf{B}_{V_{CC}}$  so that the resistor is current-controlled (so as to impose the potential on node  $N_3$ ).

$$\Lambda = \left( \begin{array}{ccc|ccccc} Q_{1,bc} & Q_{1,be} & OUT & R_1 & C_1 & V_{CC} & IN & GRD \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.17)$$

This concludes the realizability analysis. To recover the associated port-Hamiltonian structure, we return to the incidence matrix  $\Gamma$ . With the new edges ordering  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$  prescribed by the above analysis, it is rewritten as

$$\Gamma = \left( \begin{array}{ccc|ccccc} Q_{1,bc} & Q_{1,be} & OUT & R_1 & C_1 & V_{CC} & IN & GRD \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & -1 & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \vdots & -1 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \vdots & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} \quad (3.18)$$

Finally, the structure (3.5) is recovered by computing the matrix  $\gamma = \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1$  in (3.11) with

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

### 3.5 GUARANTEED-PASSIVE SIMULATION

This section is devoted to the discrete-time simulation of the algebraic-differential system (3.5); that is, the computation of  $\mathbf{x}(k) \equiv \mathbf{x}(k \cdot T)$  from  $\mathbf{u}(k) \equiv \mathbf{u}(k \cdot T)$ , with  $k \in \mathbb{N}$ , for the constant sampling frequency  $f_s = 1/T$ .

First, we present the design of a numerical scheme that properly transposes the power balance (C1) to the discrete time domain: this choice makes the passivity property preserved, from which stability issues stem. Second, a numerical method is used to solve the implicit equations due to the numerical scheme (on  $\mathbf{x}$ ) and the algebraic equations (on  $\mathbf{w}$ ).

### 3.5.1 Numerical Scheme

To ensure the stable simulation of stable dynamical system  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , many numerical schemes focus on the approximation quality of the time derivative (or integration), combined with operation of the vector field  $f$ . Here, we adopt an alternate point of view, by transposing the power balance (C1) into the discrete time-domain to preserve passivity. This is achieved by numerical schemes that provide a discrete version of the chain rule for computing the derivative of the composite function  $E = H(x)$ .

This is the case of the forward difference scheme, for which first order approximation of the differential applications  $dx(t, dt) = \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$  and  $dH(x, dx) = \nabla H(x)^T \cdot dx$  on the sample grid  $t \equiv kT, k \in \mathbb{Z}$  are given by

$$\delta x(k, T) = x(k+1) - x(k), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \delta H(x(k), \delta x(k, T)) &= H(x(k) + \delta x(k, T)) - H(x(k)) \\ &= \nabla_d H(x(k), x(k) + \delta x(k, T))^T \cdot \delta x(k, T). \end{aligned} \quad (3.21)$$

where, for mono-variate energy storing components ( $H(x) = \sum_{n=1}^{n_E} h_n(x_n)$ ), the  $n$ -th coordinate is given by

$$[\nabla_d H(x, x + \delta x)]_n = \begin{cases} \frac{h_n(x_n + \delta x_n) - h_n(x_n)}{\delta x_n} & \text{if } \delta x_n \neq 0, \\ h'_n(x_n) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.22)$$

A discrete chain rule is indeed recovered

$$\frac{\delta E(k, T)}{T} = \bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))^T \cdot \frac{\delta x(k, T)}{T} \quad (3.23)$$

so that the following substitution in (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &\rightarrow \frac{\delta x(k, T)}{T} \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x) &\rightarrow \bar{\nabla} H(x(k), x(k+1)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

leads to

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{b}(k)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(k)^T \cdot \mathbf{a}(k) \\ &= \underbrace{\left[ \bar{\nabla} H^T \cdot \frac{dx}{dt} \right] (k)}_{\frac{\delta E(k, T)}{T}} + \underbrace{\mathbf{z}(\mathbf{w}(k))^T \cdot \mathbf{w}(k)}_{D(k)} - \underbrace{\mathbf{u}(k)^T \cdot \mathbf{y}(k)}_{S(k)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Remark 3.4 (Multi-variate components)** *The case of mono-variate energy storing components covers most of the applications in electronics. Additionally, a generalization of the discrete gradient for multi-variate Hamiltonians such that Equations (C41) and (C42) are satisfied is given in Appendix 3.10.*

In this paper, we consider the class of the PHS composed of a collection of linear energy storing components, with quadratic Hamiltonian  $h_n(x_n) = \frac{x_n^2}{2C_n}$  ( $C_n$  is a capacitance or an inductance and we define  $\mathbf{Q} = \text{diag}(C_1 \cdots C_{n_E})^{-1}$ ). Then the discrete gradient (C43) reads

$$\bar{\nabla} H(x, x + \delta x) = \mathbf{Q} \left( x(k) + \frac{\delta x(k)}{2} \right), \quad (3.26)$$

which restores the midpoint rule that coincides in this case with the trapezoidal rule. For nonlinear cases, (C43) leads to another numerical scheme depending on the nonlinearity, still preserving passivity (see (3.25) and §4.3).

### 3.5.2 Solving the Implicit Equations

Injecting the numerical scheme (C47) in (3.5) and solving for the quantity  $\delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$  leads to the following energy-preserving numerical system:

$$\begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_x & \mathbf{C}_x \\ \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_w & \mathbf{C}_w \\ \mathbf{A}_y & \mathbf{B}_y & \mathbf{C}_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}(k)) \\ \mathbf{u}(k) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

where matrices are related to  $\mathbf{J}$  in (3.5) as follows.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \left( \frac{\mathbf{I}_d}{T} - \frac{\mathbf{J}_x \cdot \mathbf{Q}}{2} \right)^{-1} & \mathbf{A}_w &= \frac{1}{2} \mathbf{K}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot (2\mathbf{I}_d + \mathbf{A}_x), \\ \mathbf{A}_x &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{J}_x \cdot \mathbf{Q}, & \mathbf{B}_w &= \mathbf{J}_w + \frac{1}{2} \mathbf{K}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_x, \\ \mathbf{B}_x &= -\mathbf{D} \cdot \mathbf{K}, & \mathbf{C}_w &= -\mathbf{G}_w + \frac{1}{2} \mathbf{K}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_x, \\ \mathbf{C}_x &= -\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}_x, & \mathbf{A}_y &= \frac{1}{2} \mathbf{G}_x^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot (2\mathbf{I}_d + \mathbf{A}_x), \\ && \mathbf{B}_y &= \mathbf{G}_w^\top + \frac{1}{2} \mathbf{G}_x^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_x, \\ && \mathbf{C}_y &= \mathbf{J}_y + \frac{1}{2} \mathbf{G}_x^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_x. \end{aligned}$$

Given  $\mathbf{u}(k)$ , the solution of (3.27) is obtained from the solution of the static nonlinear implicit function  $\mathbf{f}(\mathbf{w}(k)) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ , with

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{w}(k)) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{B}_w \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}(k)), \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) &= \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Remark 3.5 (Explicit mapping)** From the global inverse function theorem (see [48]), there exists an explicit mapping  $\mathbf{w}(k) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))$  provided the Jacobian matrix  $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{w}(k)) = \mathbf{I}_d - (\mathbf{J}_w - \frac{1}{2} \mathbf{K}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathcal{J}_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}(k))$  is invertible for all  $\mathbf{w}(k)$ , connecting the proposed method to the K method [185, 16]. This is true since  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{D}$  and the Jacobian of  $\mathbf{z}$  (for the components of the dictionary in Table A1) prove positive definite, and  $\mathbf{J}_w$  is skew-symmetric.

In this paper, we use the Newton–Raphson algorithm, which iteratively approximates the nearest root of function  $\mathbf{r} : \mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \mathbf{r}(\mathbf{w}(k)) \in \mathbb{R}^{n_d}$  with the following update rule:  $\mathbf{w}_{n+1}(k) = \mathbf{w}_n(k) - \mathcal{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{w}_n(k))^{-1} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{w}_n(k))$ , where  $\mathcal{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{w})$  is the Jacobian matrix of  $\mathbf{r}(\mathbf{w}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{w}(k)) - \mathbf{p}(k)$ . Once a solution  $\mathbf{w}(k)$  to the implicit equation is available, the output and state updates are given by:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_y \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}(k)) + \mathbf{C}_y \cdot \mathbf{u}(k), \\ \delta\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}(k)) + \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(k) + \delta\mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Finally, denoting by  $n_t$  the number of time-steps and  $n_{NR}$  the number of Newton–Raphson iterations per time-step, the simulation is performed according to Algorithm 6.

### 3.5.3 Comparison with Standard Methods

In this section, the proposed approach (PHS structure combined with the discrete gradient method) is compared with two standard methods: the trapezoidal rule

---

**Algorithme 6 :** Simulation, with  $n_t$  the number of time-steps and  $n_{NR}$  the (fixed) number of Newton–Raphson iterations.

---

```

1  $\mathbf{x}_1 \leftarrow 0$ 
2  $\mathbf{w}_0 \leftarrow 0$ 
3 pour  $k = 1$  to  $n_t$  faire
4    $\mathbf{w}_{k,0} \leftarrow \mathbf{w}_{k-1}$ 
5    $\mathbf{p}_k \leftarrow \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{u}_k$ 
6   pour  $n = 0$  to  $n_{NR} - 1$  faire
7      $\mathbf{r}_n \leftarrow \mathbf{w}_{k,n} - \mathbf{B}_w \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}_{k,n}) - \mathbf{p}_k$ 
8      $\mathcal{J}_n \leftarrow \mathbf{I}_d - \mathbf{B}_w \cdot \mathcal{J}_z(\mathbf{w}_{k,n})$ 
9      $\mathbf{w}_{k,n+1} \leftarrow \mathbf{w}_{k,n} - \mathcal{J}_n^{-1} \cdot \mathbf{r}_n$ 
10   $\mathbf{w}_k \leftarrow \mathbf{w}_{k,n_{NR}}$ 
11   $\mathbf{y}_k \leftarrow \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_y \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}_k) + \mathbf{C}_y \cdot \mathbf{u}_k$ 
12   $\delta\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{z}(\mathbf{w}_k) + \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{u}_k$ 
13   $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k$ 

```

---

(average of the vector field at  $\mathbf{x}(k)$  and  $\mathbf{x}(k+1)$ , used in the WDF approach [56]) and the midpoint rule (evaluation of the vector field at  $\frac{\mathbf{x}(k)+\mathbf{x}(k+1)}{2}$ , suitable for any differential-algebraic system of equations). Both are known to preserve the passivity of linear undamped systems (see [70] for a detailed analysis). The updates associated with these three methods are given in Table 3.3. These methods are applied on the same conservative system  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{J}_x \cdot \nabla H(\mathbf{x})$ , the power balance of which is given by  $\frac{dE}{dt} = 0$  (with  $D = S = 0$ ). The comparison measure is then the relative error on energy  $\varepsilon(k) = \frac{|H(\mathbf{x}(k+1)) - H(\mathbf{x}(k))|}{H(\mathbf{x}(0))}$  for  $k \geq 0$ . First, notice that

Method	Update
Trapezoidal rule	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T \cdot \mathbf{J}_x \cdot \frac{\nabla H(\mathbf{x}(k)) + \nabla H(\mathbf{x}(k+1))}{2}$
Midpoint rule	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T \cdot \mathbf{J}_x \cdot \nabla H\left(\frac{\mathbf{x}(k)+\mathbf{x}(k+1)}{2}\right)$
PHS with discrete gradient	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T \cdot \mathbf{J}_x \cdot \nabla_d H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1))$

Table 3.3: Updates for the three methods considered in §4.3. PHS stands for port-Hamiltonian system.

for quadratic Hamiltonian  $H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}}{2}$  with linear gradient  $\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ , the three methods yield the same update:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T \cdot \mathbf{J}_x \cdot \mathbf{Q} \left( \mathbf{x}(k) + \frac{\delta\mathbf{x}(k)}{2} \right). \quad (3.29)$$

As a consequence, these three methods induce the same frequency warping (see [129] for the analysis of the bilinear transform derived from the trapezoidal rule).

We focus on the nonlinear case. For comparison, we choose a simple nonlinear conservative system with state  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ , non-quadratic Hamiltonian

$$H(\mathbf{x}) = 10 \log \left( \cosh(x_1) \right) + \left( \cosh(x_2) - 1 \right), \quad (3.30)$$

and canonical skew-symmetric matrix  $\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

In each case, the resulting implicit equations are solved by Python iterative solver (see [90]). The Python code is available at the url given in [54]. In order to exhibit the behavior of each method in the worst case, simulations are performed with an especially low sample rate of  $f_s = 10$  Hz. The results for each method are given in Figure 3.4, with comparison in Figure 3.4d. We see that the error of the proposed method is low (close to machine precision  $\approx 10^{-16}$ ) compared to standard methods.

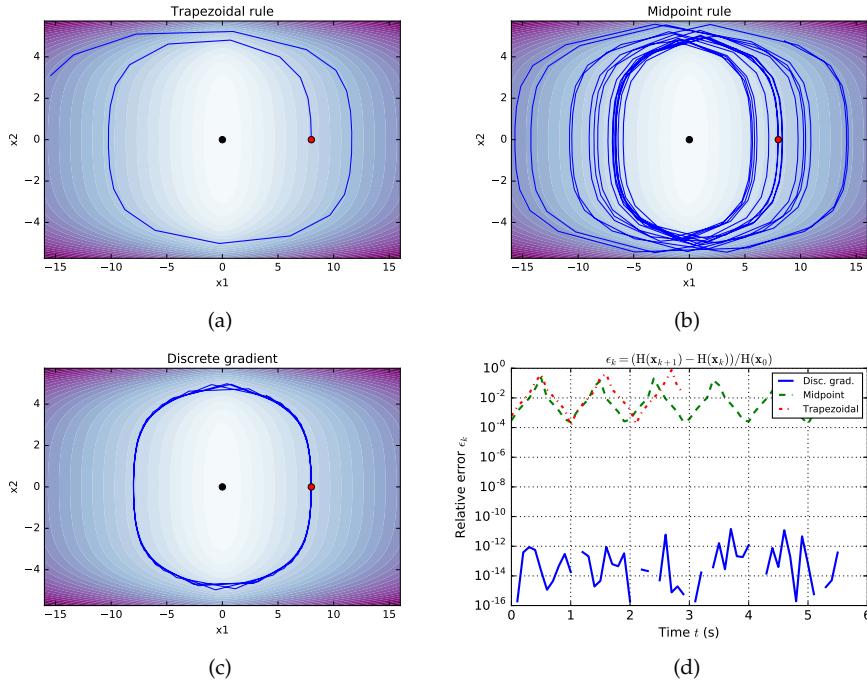


Figure 3.4: Simulation results and comparison of the methods in Table 3.3, for a nonlinear conservative system  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{J}_x \cdot \nabla H(\mathbf{x})$  with  $H(\mathbf{x})$  given in (3.30): (a) Trapezoidal rule; (b) Midpoint rule; (c) PHS combined with discrete gradient; (d) Relative error on energy balance. The comparison measure is the relative error on the power balance defined by  $\epsilon(k) = \frac{|H(\mathbf{x}(k+1)) - H(\mathbf{x}(k))|}{H(\mathbf{x}(0))}$ . We see from Figure 3.4d that the error associated with the proposed method (PHS approach combined with the discrete gradient method) is low compared to the two other methods (with machine precision  $\approx 10^{-16}$ ). The accumulation of these errors is responsible for the apparently unstable behavior of the trapezoidal rule.

### 3.6 APPLICATIONS

This section is devoted to the simulation of three analog audio circuits by the application of Algorithms 5 and 6. Those circuits are a diode clipper, a common-emitter BJT audio amplifier, and a wah-pedal as a full device. Results obtained with (i) the method in Section 3.5 and (ii) with the offline circuit simulator LT-Spice [181] are compared.

### 3.6.1 Diode Clipper

Diode clipper circuits can be found in several audio-distortion devices. They are made of one resistor and two diodes ( $n_E = 0$ ,  $n_D = 3$ ) connected to the ground in reversed bias (see Figure 3.5a). The external ports are the input/output and the ground ( $n_p = 3$ ). The resistor is current-controlled and the ground is removed. The vectors ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ) and the structure  $\mathbf{J}$  returned by Algorithm 5 are:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i_R \\ v_{D1} \\ v_{D2} \\ \hline i_{IN} \\ v_{OUT} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}_{\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_R \\ i_{D1} \\ i_{D2} \\ \hline v_{IN} \\ i_{OUT} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

The simulation is performed according to Algorithm 6 at the sample rate  $f_s = 96$  kHz, with three Newton–Raphson iterations (shown to be enough to converge in practice). We apply a linearly increasing 1 kHz sinusoidal excitation  $u_{IN} = -v_{IN}$  during 10 ms with maximum amplitude 2 V ( $i_{OUT} = 0$  A,  $v_{GRD} = 0$  V). The output  $y_{OUT} = -v_{OUT}$  is given in Figure 3.5b. We see the signal is clamped between  $\pm 0.6$  V, in accordance with LT-Spice results.

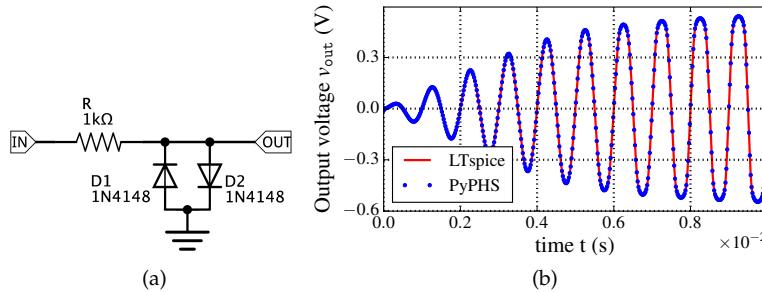


Figure 3.5: Simulation (Figure 3.5b) of a dissipative diode clipper (Figure 3.5a) at the sample rate  $f_s = 96$  kHz, with three Newton–Raphson iterations, for a 10 ms sinusoidal excitation at 1 kHz with linearly increasing amplitude between 0 V and 2 V. (a) Diode clipper schematic; (b) Simulation of the diode clipper of Figure 3.5a.

### 3.6.2 Common-Emitter BJT Audio Amplifier

Common-emitter bipolar-junction transistor (BJT) amplifiers are widely used as amplification stages in analog audio processing. They are made of two capacitors ( $n_E = 2$ ), two resistors, and one NPN transistor which is made of two nonlinear dissipative branches ( $n_D = 4$ , see Figure 3.6a and the dictionary in Table A1). The external ports are the input/output signals, the 9 V supply, and the ground ( $n_p = 4$ ). Note that the ground is removed. The resistor  $R_C$  is current-controlled, and the resistor  $R_F$  is voltage-controlled. The vectors ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ) and the structure  $\mathbf{J}$  returned by Algorithm 5 are given in Equations (3.31) and (3.32).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (i_{C_i}, i_{C_o}|v_{R_f}, i_{R_c}, v_{B_c}, v_{B_e}|i_{IN}, v_{OUT}, i_{VCC}) \\ \mathbf{b} &= (v_{C_i}, v_{C_o}|i_{R_f}, v_{R_c}, i_{B_c}, i_{B_e}|v_{IN}, i_{OUT}, v_{VCC}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{J} = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad (3.32)$$

The system is reduced according to Appendix 3.8, and the simulation is performed according to Algorithm 6 at the sample rate  $f_s = 384$  kHz, with 10 Newton–Raphson iterations. The reason for increasing the sample-rate and the number of Newton–Raphson iterations is twofold. Firstly, it attenuates the effect of aliasing for input signals limited to the audio range (see [?] for details). Secondly, it ensures that the iterative solver converges, which is difficult due to the *numerical stiffness* of the problem; that is, the Lipschitz constant associated to the initial Cauchy problem is very high, see [27]. At first, we turn the supply  $v_{VCC} = -9$  V on, and we wait 0.3 s for the system to reach its steady state. Then, we apply a 10 ms sinusoidal excitation  $u_{IN} = -v_{IN}$  at 1 kHz with linearly increasing amplitude between 0 V and 0.2 V ( $i_{OUT} = 0$  A). The resulting output  $y_{OUT} = -v_{OUT}$  is given in Figure 3.6b. We see that the signal is amplified between 0 V and 9 V, with a strong asymmetrical saturation, in accordance with LT-Spice results. Additionally, spectrograms obtained for an exponential chirp on the audio range are given in Figure 3.7 (see Figure 16 in [?] for comparison).

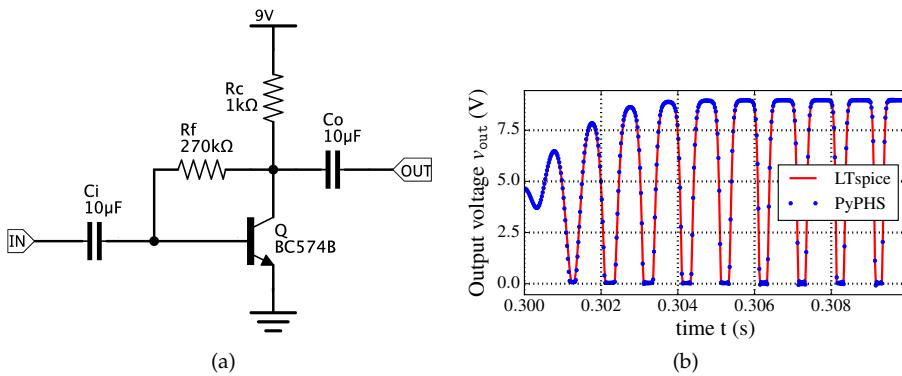


Figure 3.6: Simulation (Figure 3.6b) of the common-emitter bipolar-junction transistor (BJT) amplifier with feedback (Figure 3.6a) at the sample rate  $f_s = 384$  kHz, with 10 Newton–Raphson iterations, for a 10 ms sinusoidal excitation at 1 kHz with linearly increasing amplitude between 0 V and 0.2 V. (a) Schematic of a common-emitter BJT amplifier with feedback; (b) Simulation of the BJT amplifier in Figure 3.6a.

### 3.6.3 Wah Pedal

This section addresses the simulation of a full device (namely the Dunlop Cry-Baby wah pedal) to be used in real time. The circuit is given in Figure 3.9. It

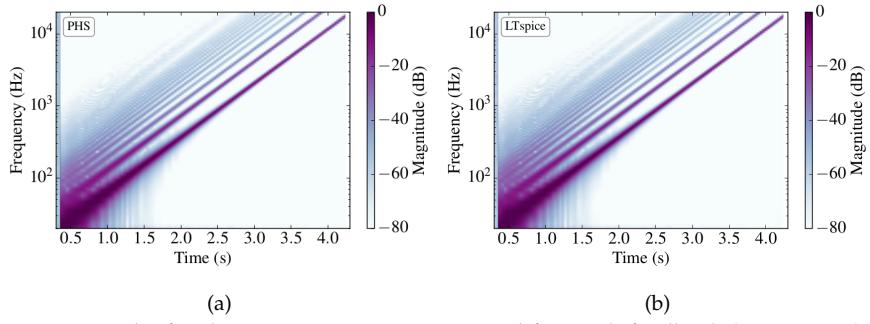


Figure 3.7: Results for the common-emitter BJT amplifier with feedback (Figure 3.6a). The input voltage signal is a 4 s exponential chirp on the audio range (20 Hz–20 kHz) with amplitude 0.05 V (logarithmic frequency scale). Simulation starts at 0.3 s (after the switching transient). (a) Spectrogram of output  $v_{\text{OUT}}$  obtained with the proposed method; (b) Spectrogram of output  $v_{\text{OUT}}$  obtained with LTSpice.

provides a continuously varying characteristic *wah* filtering of the input signal. This circuit has been treated with the nodal discrete K-method in [79] and with the PHS framework in [A10]. It is composed of  $n_E = 7$  storage branches (6 capacitors and 1 inductor),  $n_D = 18$  dissipative branches (11 resistors, 1 PN diode, 2 NPN transistors and a potentiometer), and  $n_P = 3$  ports (input/output signals and battery, discarding the 5 grounds). The *wah* parameter is the potentiometer's coefficient  $\alpha$ . Notice this circuit includes several edges that do not contribute to the device input-to-output behavior, as analyzed in [79]. In this work, we consider the complete original schematic. From Algorithm 5, the resistors  $R_1, R_6 \dots R_9$  and  $R_{11}$  are considered as conductances, and the others as resistances. The structure  $J$  is not shown here. The sets of PHS variables are:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= [i_{C1}, \dots, i_{C_6}, v_{L_1}]^\top, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= [v_{C1}, \dots, v_{C_6}, i_{L_1}]^\top, \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{w}_R | v_d | v_{BC_1}, v_{BE_1} | v_{BC_2}, v_{BE_2} | v_{p1}, i_{p2}]^\top, \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) &= [\mathbf{z}_R | i_d | i_{BC_1}, i_{BE_1} | i_{BC_2}, i_{BE_2} | i_{p1}, v_{p2}]^\top,\end{aligned}$$

where  $\mathbf{w}_R$  is the set of dissipative states and  $\mathbf{z}_R$  the set of characteristics according to each resistor's type, and

$$\begin{aligned}\text{Inputs } \mathbf{u} &= [v_{in}, i_{out}, v_{cc}]^\top, \\ \text{Outputs } \mathbf{y} &= [i_{in}, v_{out}, i_{cc}]^\top.\end{aligned}$$

The system is reduced according to Appendix 3.8 (with potentiometer's time varying resistors kept in  $\mathbf{w}, \mathbf{z}$ ). Firstly, we realize an offline simulation (in Python) with Algorithm 6 for the sampling rate  $f_s = 96$  kHz, and three Newton–Raphson iterations. We apply a white noise normalised to 1 V on the input  $u_{\text{IN}} = -v_{\text{IN}}$  ( $i_{\text{OUT}} = 0$  A). The magnitudes of transfer functions obtained from fast Fourier transform are given in Figure 3.8 for the two extreme positions of the pedal. These results are in accordance with LTSpice. The Cry-Baby in real-time is made from Algorithm 6.

First, a C++ code is automatically generated; Second, this code is encapsulated in a Juce template to compile the audio plugin (see [113]). The sample rate  $f_s$  is imposed by the host digital audio workstation (here Ableton Live!), and we force

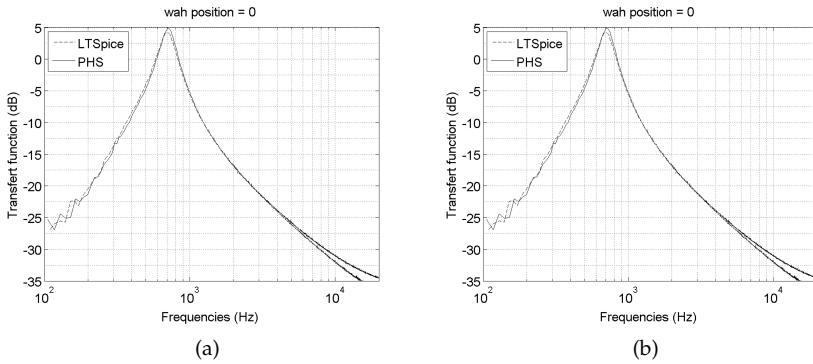


Figure 3.8: Simulations of the Cry-Baby's circuit of Figure 3.9, for the potentiometer parameter  $\alpha = 0$  (**a**) and  $\alpha = 1$  (**b**) in the frequency domain, compared with LT-Spice simulations on the audio range 20 Hz–20 kHz.

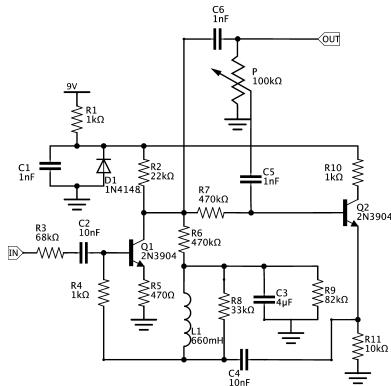


Figure 3.9: Schematic of the Cry-Baby wah pedal. Note the IN/OUT terminals and the 9 V supply. The potentiometer P controls the effect.

five Newton–Raphson iterations. The simulation performed well (audio examples are available at the url [53]). The CPU load on a laptop (Macbook 2.9 GHz Intel Core i7 with 8Go RAM) is 37% for  $f_s = 96$  kHz, and 20% for  $f_s = 48$  kHz.

**Remark 3.6 (Time-varying stability)** The use of the Newton–Raphson method can hamper the stability of the numerical solution for time-varying systems, especially in the case of fast variations (here, of the potentiometer) for which the Jacobian matrix of the implicit Function (3.28) can be ill-conditioned. For linear storage components, a solution is to use the K-method instead (see Remark 3.5).

### 3.7 CONCLUSIONS

We have established a method to automatically recast an analog audio circuit into PHS formalism, which guarantees passivity of the continuous time model. The generation of the PHS from a given schematic lies on two points:

1. the graph theory to describe the interconnection network of a given circuit's schematic,
  2. a dictionary of elementary components which are conformable with PHS formalism.

Then, we transposed this physical principle to the digital domain by properly defining the discrete gradient of the Hamiltonian, such that a discrete time ver-

sion of the power balance is satisfied. The resulting stable numerical scheme is of second order (restoring the midpoint rule for linear systems). It has been shown that the K-method is always applicable to PHS (providing efficient implementations of the implicit relation due to the proposed numerical scheme).

Offline simulations are consistent with LT-Spice results. The whole method allows the automatic generation of C++ simulation code to be used in the core of a real-time VST audio plug-in simulating the Dunlop Cry-Baby wah pedal.

A first perspective on this work is to consider higher-order numerical schemes (namely, the class of Runge–Kutta schemes). Moreover, it would be possible to symmetrize the roles of the voltages and the currents at the interconnection by applying the Cayley transform to the PHS structure, thus adopting wave variables, with possible connection with the WDF formalism. Additionally, an automated analysis of the original schematic could be developed, so as to identify the unimportant or degenerate states and to reduce the dimensionality of the system. Finally, it could be possible to exploit the compatibility of the proposed method with the K-method to alleviate the numerical cost due to Newton–Raphson iterations.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge the members of the french National Research Agency project HaMecMoPSys for support in port-Hamiltonian theory. Also, the authors acknowledge Robert Piechaud and Mattia Bergomi for careful proofreading.

#### AUTHORS CONTRIBUTIONS

The scientific work has been achieved by both authors at IRCAM Laboratory, Paris, within the context of the French National Research Agency sponsored project HaMecMoPSys. Further information is available at <http://www.hamecmopsys.ens2m.fr>. The numerical experiments have been performed by Antoine Falaize.

The authors declare no conflict of interest.

#### 3.8 APPENDIX - REDUCTION

The dimension of system (3.5) can be reduced, considering the following decomposition of variable  $\mathbf{w}$  and function  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_L \\ \mathbf{w}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_L \cdot \mathbf{w}_L \\ \mathbf{z}_N(\mathbf{w}_N) \end{pmatrix},$$

with  $\mathbf{z}_L$  a diagonal matrix whose elements are the resistance or conductance of linear dissipative components, and  $\mathbf{z}_N$  a collection of the nonlinear dissipative relations. Correspondingly, the structure matrices are decomposed as

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_L \\ \mathbf{K}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_w = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_L \\ \mathbf{G}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_w = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{LL} & -\mathbf{K}_{LN} \\ \mathbf{K}_{LN}^\top & \mathbf{J}_{NN} \end{pmatrix}.$$

Defining  $\mathbf{L} = (\mathbf{K}_L^\top, -\mathbf{K}_{LN}, -\mathbf{G}_L)$ , and  $\mathbf{M} = (\mathbf{z}_L^{-1} - \mathbf{J}_{LL})^{-1}$  a positive definite matrix, the system (3.5) is reduced to

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \mathbf{w}_N \\ -y \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_N} = (\tilde{\mathbf{J}} - \mathbf{R}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}_N(\mathbf{w}_N) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_N} \quad (B1)$$

with  $\tilde{\mathbf{J}}$  a skew-symmetric matrix given by

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K}_N & -\mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}_N^\top & \mathbf{J}_{NN} & -\mathbf{G}_N \\ \mathbf{G}_x^\top & \mathbf{G}_N^\top & \mathbf{J}_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{L}^\top \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}^\top) \cdot \mathbf{L}$$

and  $\mathbf{R}$  is a symmetric positive definite matrix given by

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}_{xn} & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{xn}^\top & \mathbf{R}_n & \mathbf{R}_{ny} \\ \mathbf{R}_{xy}^\top & \mathbf{R}_{ny}^\top & \mathbf{R}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^\top \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top) \cdot \mathbf{L}.$$

Indeed, matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  (respectively  $\mathbf{R}$ ) corresponds to the conservative (respectively resistive) interconnection of dynamical storage components, nonlinear dissipative components, and sources.

The system (B1) is simulated by Algorithm 6, with

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \left( \frac{\mathbf{I}_d}{T} - \frac{(\tilde{\mathbf{J}}_x - \mathbf{R}_x) \cdot \mathbf{Q}}{2} \right)^{-1} \\ \tilde{\mathbf{A}}_x &= \tilde{\mathbf{D}} \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_x - \mathbf{R}_x), \\ \tilde{\mathbf{B}}_x &= -\tilde{\mathbf{D}} \cdot (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{R}_{xn}), \\ \tilde{\mathbf{C}}_x &= -\tilde{\mathbf{D}} \cdot (\tilde{\mathbf{G}}_x + \mathbf{R}_{xy}), \\ \tilde{\mathbf{A}}_w &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{R}_{xn})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot (2\mathbf{I}_d + \tilde{\mathbf{A}}_x), \\ \tilde{\mathbf{B}}_w &= \tilde{\mathbf{J}}_w - \mathbf{R}_n + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{R}_{xn})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_x, \\ \tilde{\mathbf{C}}_w &= -\tilde{\mathbf{G}}_w - \mathbf{R}_{ny} + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{R}_{xn})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_x, \\ \tilde{\mathbf{A}}_y &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{G}}_x - \mathbf{R}_{xy})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot (2\mathbf{I}_d + \tilde{\mathbf{A}}_x), \\ \tilde{\mathbf{B}}_y &= (\tilde{\mathbf{G}}_w - \mathbf{R}_{ny})^\top + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{G}}_x - \mathbf{R}_{xy})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_x, \\ \tilde{\mathbf{C}}_y &= \tilde{\mathbf{J}}_y - \mathbf{R}_y + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{G}}_x - \mathbf{R}_{xy})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_x, \end{aligned} \quad (B2)$$

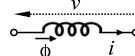
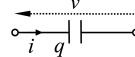
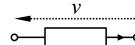
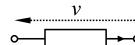
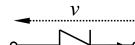
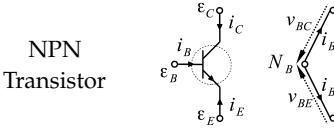
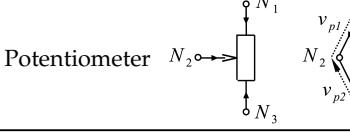
**Remark 3.7 (Reduced explicit mapping)** From the global inverse function theorem (see [48, p.131]), there exists an explicit mapping  $\mathbf{w}_N(k) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))$  provided

$$\det((\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{R}_{xn})^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{R}_{xn})) > 0.$$

### 3.9 APPENDIX - DICTIONARY OF ELEMENTARY COMPONENTS

The dictionary is given in Table A1. We choose variables  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{w}$  so that matrices of the PHS (3.5) are canonical, that is, they do not involve any physical constants.

Table A1: Dictionary of elementary components.

2-Ports						
Storage	Diagram	$x$	Stored Energy $E = h(x)$	Voltage $v$	Current $i$	
Inductance		$\phi$	$\frac{\phi^2}{2L}$		$\frac{d\phi}{dt}$	$\frac{dh}{d\phi}$
Capacitance		$q$	$\frac{q^2}{2C}$		$\frac{dq}{dt}$	$\frac{dh}{dq}$
Dissipative						
Dissipative	Diagram	$w$	Dissipated Power $D(w) = w.z(w)$	Voltage $v$	Current $i$	
Resistance		$i$	$R.i^2$	$z(w)$	$w$	
Conductance		$v$	$v^2/R$	$w$	$z(w)$	
PN Diode		$v$	$v.I_S \left( \exp \left( \frac{v}{\mu v_0} \right) - 1 \right) + v^2.G_{min}$	$w$	$z(w)$	
3-Ports						
Dissipative	Diagram	$w$	$z(w)$			
NPN Transistor		$\begin{pmatrix} v_{BC} \\ v_{BE} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i_{BC} \\ i_{BE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_R & -1 \\ -1 & \alpha_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_S (e^{v_{BC}/v_t} - 1) + v_{BC}.G_{min} \\ I_S (e^{v_{BE}/v_t} - 1) + v_{BE}.G_{min} \end{pmatrix}$			
Potentiometer		$\begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i_{p1} \\ i_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{p1}/(1 + \alpha.R_p) \\ i_{p2}.(1 + (1 - \alpha).R_p) \end{pmatrix}$			

### 3.9.1 Storage Components

Such components are defined by their storage function  $h$  associated with the constitutive laws of Table A1. In this paper, all storage components are linear dipoles. However, nonlinear components can also be considered if appropriate state and corresponding energy function can be found.

### 3.9.2 Linear Dissipative Components

The characteristics of dissipative components are algebraic relations on  $w$ . Potentiometers are modeled as two time-varying resistors, the sum of which is  $R_p$ . To avoid 0 value of the resistors,  $1 \Omega$  have been added to those characteristics. The modulation parameter is  $\alpha \in [0, 1]$ . As an example, in Table A1, we choose a conductance between  $N_1$  and  $N_2$ , and a resistance between  $N_2$  and  $N_3$ , so that  $\mathbf{w}_P = [v_{p1}, i_{p2}]^\top$ .

### 3.9.3 Nonlinear Dissipative Components

PN junctions are modeled as voltage-controlled components by the Shockley equation:

$z_D(w_D) = i_D = I_S \left( e^{\frac{v_D}{\mu v_0}} - 1 \right)$ , where  $I_S$  is the saturation current,  $\mu$  is an ideality factor, and  $v_0$  the reference voltage, specified for each diode type. Note that the passivity property is fulfilled ( $\mathbf{z}_D(\mathbf{w}_D)^\top \cdot \mathbf{w}_D \geq 0$ ). As in LT-Spice simulators, a minimal conductance  $G_{min}$  is added in Table A1. This helps convergence in the simulation process.

NPN junctions are passive 3-ports, with dissipated power  $D_Q = v_B \cdot i_B + v_C \cdot i_C + v_E \cdot i_E \geq 0$ . Here we use the Ebers–Moll model, which preserves this passivity property.  $I_S$  is the saturation current,  $\beta_R$  and  $\beta_F$  are respectively the reverse and forward common emitter current gains, and  $v_t$  is the thermal voltage. The corresponding voltage-controlled dissipative characteristic  $\mathbf{z}_Q(\mathbf{w}_Q) = [i_{BC}, i_{BE}]^\top$  is given in Table A1, denoting  $\alpha_R = \frac{\beta_R+1}{\beta_R}$ ,  $\alpha_F = \frac{\beta_F+1}{\beta_F}$ , and including minimal conductances. Note that  $D_Q = \mathbf{z}_Q(\mathbf{w}_Q)^\top \cdot \mathbf{w}_Q \geq 0$ . In our final simulations, some resistors are added to model the resistance of contacts in the nonlinear components, choosing the same values as in LT-Spice models.

### 3.9.4 Incidence Matrices $\Gamma$

Incidence matrices for 2-ports, potentiometer P, and transistor Q with conventions of Table A1.

$$\Gamma_{2\text{-port}} = \begin{pmatrix} B \\ 1 & N_1 \\ -1 & N_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_P = \begin{pmatrix} B_{p1} & B_{p2} \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_Q = \begin{pmatrix} B_{BC} & B_{BE} \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_B \\ N_C \\ N_E \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

### 3.10 APPENDIX - DISCRETE GRADIENT FOR MULTI-VARIATE HAMILTONIAN

A generalization of the discrete gradient for multi-variate Hamiltonians such that Equations (C41) and (C42) are satisfied is given by replacing definition (C43) by (see [4]):

$$[\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})]_n = \frac{\Delta_n H(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{x})}{\delta x_n}. \quad (\text{C1})$$

with

$$\begin{aligned} \Delta_n H(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) &= H(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n, x_{n+1}, \dots, x_{n_E}) \\ &\quad - H(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n_E}). \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

For mono-variate components, (C43) and (C1) coincide and yield (discrete) constitutive laws that are insensible to the ordering of the state variables. For multi-variate components, this last property is lost, but can be restored by replacing (C2) by the averaged operator:  $\Delta_n H(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{n_E!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n_E)} \Delta_n H^\pi(\mathbf{x}_\pi, \tilde{\mathbf{x}}_\pi)$ , where for all permutation  $\pi \in \mathcal{P}(n_E)$ ,  $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n_E)})^\top$ , and  $H^\pi(\mathbf{x}_\pi) = H(\mathbf{x})$ .



# 4

## SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS ET PLATITUDE

Planifier accapare tout mon temps.

J.-P. Davidts - *Le Petit Prince*  
Retrouvé, 1997.

### Sommaire

4.1	Introduction et organisation du chapitre . . . . .	83
4.2	Rappels de linéarisation par bouclage des systèmes dynamiques . . . . .	84
4.2.1	Systèmes linéaires . . . . .	85
4.2.2	Systèmes non linéaires . . . . .	87
4.2.3	Systèmes plats . . . . .	88
4.3	Analyse de platitude pour les SHP . . . . .	89
4.3.1	Méthode (M1) par analyse de graphe . . . . .	89
4.3.2	Méthode (M2) par analyse matricielle . . . . .	94
4.4	Application à la linéarisation tension-déplacement du haut-parleur électrodynamique . . . . .	99
4.4.1	Modèle . . . . .	99
4.4.2	Détermination de la commande par platitude . . . . .	100
4.4.3	Résultats de simulation . . . . .	101
4.5	Conclusions du chapitre et perspectives . . . . .	103

#### 4.1 INTRODUCTION ET ORGANISATION DU CHAPITRE

Ce chapitre présente une méthode de compensation des non-linéarités d'un haut-parleur électrodynamique, dans le but de linéariser la réponse tension-déplacement. Cette méthode repose sur (i) l'approche par les systèmes hamiltoniens à port pour la modélisation *structurée* des systèmes passif et (ii) l'approche par platitude pour la planification de trajectoire *exacte* des systèmes non linéaires.

Un contrôleur pour les systèmes non linéaires est réalisé en deux temps [156, page 199] : (i) une compensation des phénomènes modélisés est réalisée par un contrôleur en boucle ouverte (inversion du modèle, ou *feed-forward*) et (ii) une compensation des phénomènes non-modélisés est réalisée par un contrôleur en boucle fermée (*feed-back*). Plusieurs méthodes sont disponibles pour le contrôle en boucle fermée des SHP, qui exploitent la structure d'interconnexion (voir notamment l'approche par *interconnexion et assignation de dissipation pour l'approche passive du contrôle*, IDA-PBC en anglais, voir [130, 131, 131]). Dans cette thèse, nous développons une méthode de planification de trajectoire (*feed-forward*) dédiée aux SHP, et qui exploite leur structure d'interconnexion.

L'approche prise ici consiste à transformer le système non linéaire en un système linéaire contrôlable, pour lequel de nombreuses techniques de compensation sont disponibles (voir e.g. [91]). Les transformations considérées consistent (i) à redéfinir la sortie du système, (ii) à appliquer un changement d'état et (iii) à

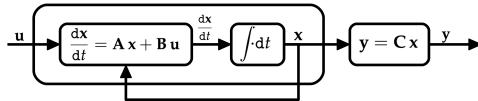


FIGURE 4.1 : Diagramme décrivant la chaîne entrée-sortie d'un système linéaire ( $C_3$ ) d'entrée  $u$ , d'état  $x$  et de sortie  $y$ .

appliquer une transformation de l'entrée qui met en jeu le nouvel état. De nombreux résultats sont disponibles pour déterminer les transformations telles que le nouveau système est *découplé en la commande* [84, 127, 86, 43], c'est à dire que les nouvelles sorties sont liées aux nouvelles entrées par des chaines découplées d'intégrateurs (forme de Brunovsky [23]).

Une classe de systèmes pour lesquels le problème de planification est particulièrement bien posé est la classe des *systèmes différentiellement plats* [148, 60, 117, 111]. En résumé, si l'on peut trouver un ensemble de variables (sortie plate) de même dimension que l'ensemble des entrée, qui (i) s'exprime à partie de l'état, de l'entrée et des dérivées de l'entrée et tel que (ii) l'entrée et l'état du système s'expriment à partie de cette sortie plate et de ses dérivées, alors le système est équivalent à la forme de Brunovski. Cependant, trouver cette sortie plate n'est pas chose aisée dans le cas général (voir [117, §7] pour un catalogue des systèmes plats, et plus précisément [147] pour les systèmes oscillants linéaire et non-linéaire, en dimension finie et infinie et [126] pour les systèmes lagrangiens). Dans la suite, nous ne considérerons que des bouclages dits *statiques*, c'est à dire que la sortie plate s'exprime à partir de l'état uniquement.

Ce chapitre s'organise comme suit. Premièrement, l'approche par platitude pour la planification de trajectoire est rappelée. Deuxièmement, deux méthodes sont présentées pour (i) l'analyse automatique de platitude et (ii) la détermination de la loi de commande associée. La méthode M1 s'applique aux SHP mono-entrée et repose sur la construction et l'analyse d'un graphe qui encode la structure SHP. La méthode M2 s'applique aux SHP multi-entrées et repose sur l'analyse des matrices de structure. Troisièmement, la méthode M2 est appliquée pour linéariser la réponse tension-déplacement du modèle SHP d'un haut-parleur. L'approche est validée sur système simulé.

## 4.2 RAPPELS DE LINÉARISATION PAR BOUCLAGE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Cette section rappelle l'approche par platitude pour la linéarisation et le découplage de systèmes dynamiques non linéaires, en vue de la planification de trajectoire (contrôleur *feed-forward*). Premièrement, le découplage des systèmes linéaires est rappelé. En particulier, cette approche est motivée par la facilité qu'elle apporte pour la planification de trajectoire. Deuxièmement, on s'intéresse au découplage des systèmes non linéaires. L'approche considérée est de linéariser le système par changement d'état et bouclage statique, de sorte à revenir au cas linéaire, bien maîtrisé. Troisièmement, on introduit la propriété de *platitude différentielle* pour les systèmes non linéaires comme une condition suffisante pour le débouclage.

### 4.2.1 Systèmes linéaires

On considère un système dynamique d'état  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  et d'entrée  $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (\text{C1})$$

Étant donné un état initial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  et un état final  $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^n$ , le problème de planification de trajectoire est de déterminer la commande  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  sur l'horizon temporel  $t \in [t_0, T]$ , telle que la trajectoire  $\mathbf{x}(t)$  vérifie  $\mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}(t = T) = \mathbf{x}_T$ . Sans perte de généralité, on fixe dans la suite  $t_0 = 0$ . Il n'est pas toujours possible de trouver une telle commande, d'où la notion de commandabilité des systèmes.

**Définition 4.1 (Commandabilité)** Le système (C3) est dit *commandable en temps  $T > 0$*  s'il existe une loi horaire  $[0, T] \ni t \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  (*commande en boucle ouverte*) telle que le problème de Cauchy (1.2) donné par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \text{ pour } t \in [0, T], \\ \mathbf{x}(t = 0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

vérifie la condition finale  $\mathbf{x}(t = T) = \mathbf{x}_T$ . En d'autres termes, on peut trouver une commande  $\mathbf{u}$  qui emmène le système d'un état initial  $\mathbf{x}_0$  donné à un état final  $\mathbf{x}_T$  donné.

Si le système est *linéaire et stationnaire* [91], il se réécrit sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (\text{C3})$$

La contrôlabilité de ces systèmes est entièrement caractérisée par le critère suivant [91, §2].

**Propriété 4.1 (Critère de Kalman)** Soit la matrice de contrôlabilité associée au système linéaire (C3), définie par

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n_x-1}\mathbf{B}]. \quad (\text{C4})$$

Alors le système (C3) est contrôlable (définition 4.1) si et seulement si  $\mathbf{M}_c$  est de rang  $n = \dim(\mathbf{x})$ .

La propriété 4.1 renseigne sur la faisabilité du contrôle, mais pas sur la construction de la commande  $\mathbf{u}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Cette tâche est grandement facilitée si le système peut se mettre sous la forme normale dite de Brunovsky [23].

**Propriété 4.2 (Critère de Brunovsky)** Si le système linéaire (C3) est commandable (propriété 4.1) et, de plus, la matrice de gains  $\mathbf{B}$  est de rang  $m = \dim(\mathbf{u})$ , alors il existe un changement d'état

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (\text{C5})$$

avec  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice inversible, et un bouclage statique régulier

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (\text{C6})$$

avec  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  une matrice inversible, tels que le système (C3) dans les nouvelles coordonnées  $\tilde{\mathbf{x}}$  et avec la nouvelle commande  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{x})$  se mette sous la forme de  $m = \dim(\mathbf{u})$  chaînes d'intégrateurs (avec la notation  $x^{(i)} \equiv \frac{dx}{dt^i}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}} = \left( \tilde{y}_1, \tilde{y}_1^{(1)}, \dots, \tilde{y}_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, \tilde{y}_m, \tilde{y}_m^{(1)}, \dots, \tilde{y}_m^{(\alpha_m-1)} \right)^T, \\ \tilde{y}_m^{(\alpha_m)} = \tilde{u}_i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{array} \right. \quad (\text{C7})$$

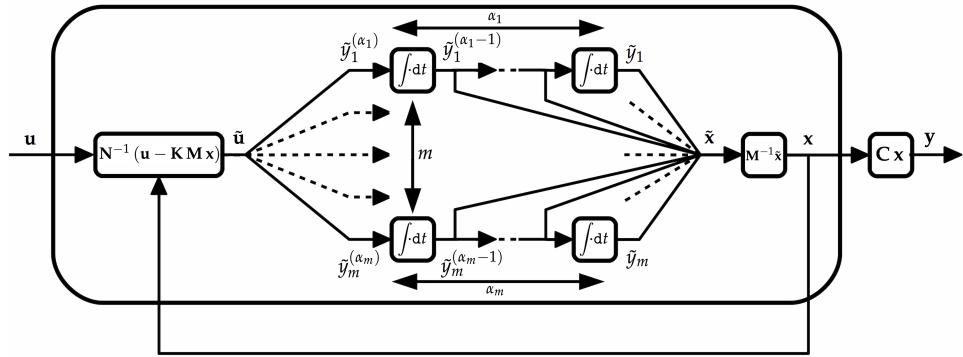


FIGURE 4.2 : Diagramme décrivant la chaîne entrée-sortie d'un système linéaire (C3) d'entrée  $u$ , d'état  $x$  et de sortie  $y$  donné sous forme découplée de Brunovsky de sortie  $\tilde{y}$ , d'entrée  $\tilde{u} = (\tilde{y}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \tilde{y}_m^{(\alpha_m)})^\top$  et d'état  $\tilde{x} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, \tilde{y}_m, \dots, \tilde{y}_m^{(\alpha_m-1)})^\top$ .

La forme composée de  $m$  chaînes découplées d'intégrateurs des  $m$  entrées (C7) est appelée forme normale de Brunovsky ; les quantités  $\tilde{y}_i$ ,  $1 \leq i \leq m = n_u$  sont appelées sorties de Brunovsky, et les éléments de  $\tilde{x}$  sont appelés coordonnées de Brunovsky (voir figure 4.2).

L'intérêt de mettre le système (C3) sous la forme (C7) est de découpler le problème du contrôle et de traiter plus simplement le problème de planification de trajectoire comme suit :

1. les états initial  $x_0$  et final  $x_T$  donnés sont transposés dans les coordonnées de Brunovsky par le changement de variables (C5) ;
2. on construit  $\tilde{x}$  et  $\tilde{u}$  pour relier  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}_T$  (par exemple avec des polynômes adaptés) ;
3. on déduit la commande effective  $u$  par le bouclage statique régulier (C6).

Ainsi, étant donnée une trajectoire de la sortie de Brunovsky  $\tilde{y}(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  de classe  $C^\alpha$  avec  $\alpha = \max(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ , la commande réalisant cette trajectoire est donnée par :

$$u = K \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_1^{(\alpha_1-1)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \\ \vdots \\ \tilde{y}_m^{(\alpha_m-1)} \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_m^{(\alpha_m)} \end{pmatrix}. \quad (C8)$$

Les  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont des invariants qui caractérisent la structure différentielle intrinsèque du système dynamique [144, (1.1)]. Deux systèmes qui possèdent la même forme découplée de Brunovsky sont dits équivalents.

**Remarque 4.1 (Stabilisation d'un système découpé)** La stabilisation de la trajectoire d'un système donné sous forme de Brunovsky est directement réalisée par un contrôleur en boucle fermée, tel que la matrice du système dynamique gouvernant l'erreur ait toutes ses valeurs propres de partie réelle négative (matrice Hurwitz, voir [156, §8]).

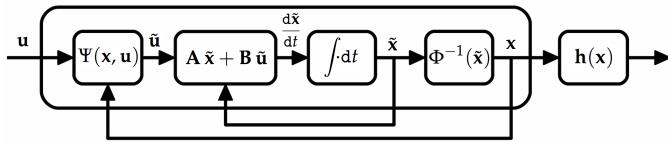


FIGURE 4.3 : Diagramme décrivant la chaîne de linéarisation par bouclage d'un système non linéaire  $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$  de sortie  $y = h(x)$  sous l'action d'un difféomorphisme (C9) et d'un retour d'état (C10). Si de plus la matrice  $B$  du système linéaire équivalent satisfait le critère de Brunovsky (propriété 4.2), alors le problème est découplé (propriété 4.3).

#### 4.2.2 Systèmes non linéaires

Puisque le problème de commandabilité est bien caractérisé pour les systèmes linéaires (propriétés 4.1 et 4.2), il est naturel de se demander si (i) il est possible de transformer un système non linéaire en un système linéaire équivalent et (ii) si ce système équivalent est découplé. Une approche est la méthode de linéarisation par retour d'état [156, §6], qui consiste à passer de la forme (C1) à la forme (C3) par un difféomorphisme

$$\tilde{x} = \Phi(x) \quad (\text{C9})$$

et un retour d'état (*state feed-back linearization* en anglais, voir [156, §6] et figure 4.3).

$$\tilde{u} = \Psi(x, u) \quad (\text{C10})$$

**Remarque 4.2 (Système affine en la commande)** Pour les systèmes affines en la commande (1.4), la transformation de l'entrée permettant de découpler le système sous forme de Brunovsky est elle aussi affine [144] :  $u \rightarrow \tilde{u} = k(x) + N(x)u$ , avec  $N(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  une matrice inversible et  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction non linéaire (à comparer avec (C6)).

Depuis le début des années 1970, et en particulier depuis le travail de A. J. Krener [103], une approche standard au problème de linéarisation est de construire des systèmes équivalents, au sens de la définition suivante (voir aussi e.g. [118, définition 2 et théorème 1]).

**Définition 4.2 (Équivalence de systèmes)** Deux systèmes dynamiques  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, u_i)$ ,  $i = 1, 2$  sont dits équivalents si

1. ils ont la même dimension d'état et de commande :  $\dim(x_1) = \dim(x_2)$  ;  $\dim(u_1) = \dim(u_2)$ , et
2. il existe un difféomorphisme (C9) et un retour d'état (C10) qui permettent de passer des solutions d'un système à celles de l'autre.

En résumé, si un système non linéaire est équivalent à un système linéaire, alors les non-linéarités ne sont pas intrinsèques, mais émergent du choix de coordonnées pour la représentation d'état initiale (C1).

**Propriété 4.3 (Découplage du contrôle)** Le problème de planification de trajectoire pour un système non linéaire (C1) est dit découplé si il existe un difféomorphisme (C9) et un retour d'état (C10) tels que (i) le système dans les nouvelles coordonnées est sous forme linéaire (C3) et (ii) ce système linéaire satisfait au critère de Brunovsky (propriété 4.2).

L'approche par la géométrie différentielle pour la détermination des fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  telles que le système non linéaire soit découpé (propriété 4.3) est particulièrement adaptée, puisque cette formulation capture la structure différentielle (indépendamment du choix de coordonnées). On pourra consulter [84], [128, §5], [156, §6] et [96, §13] pour des présentations détaillées. En particulier, on pourra trouver dans [89] un critère géométrique d'existence d'un tel bouclage pour les systèmes affines en la commande (1.4).

Par ailleurs, des approches généralisant les bouclages statiques (C9–C10) à des bouclages dynamiques ont été proposées par W. Respondek et H. Nijmeijer [127, 128] en considérant une augmentation de la dynamique du système d'un *compensateur dynamique*

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f_z(x, z, v) \\ u = h_z(x, z, v) \end{cases} \quad (\text{C11})$$

Dans ces travaux, on cherche un bouclage linéarisant de la forme (C9–C10), de sorte à découpler le système augmenté, d'état  $(x, z)$  et d'entrée  $v$ . On obtient alors la commande  $v$  par planification, puis  $u$  par intégration.

Dans ce travail, nous nous restreignons au cas de des bouclages statiques (C9–C10) écrits dans un système de coordonnées, en s'appuyant sur l'approche par platitude (décrite ci-après).

#### 4.2.3 Systèmes plats

L'approche par platitude différentielle [148, 60, 117, 111] introduite à la fin des années 1980 est une généralisation de la notion de bouclage linéarisant. L'appellation *sortie plate* est utilisée en référence aux *coordonnées plates* intervenant dans l'approche par la géométrie différentielle pour résoudre le problème de Frobenius (comme indiqué [59]). Nous nous contenterons de rappeler ci-dessous la définition des systèmes plats.

**Définition 4.3 (Système plat)** Un système dynamique non linéaire de la forme (C1)  $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est différentiellement plat si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. Il existe un ensemble fini de variables différentiellement indépendantes<sup>1</sup>  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tel que chaque élément  $\mu_i$  est une fonction de l'état  $x$ , de l'entrée  $u$  et d'un nombre fini  $\beta$  de ses dérivées  $\frac{du}{dt^i} = u^{(i)}$  :

$$\mu = \Phi_\mu(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\beta)}), \quad \mu \in \mathbb{R}^m; \quad (\text{C12})$$

2. chaque quantité du système est une fonction de  $\mu$  et d'un nombre fini  $\alpha$  de ses dérivées :

$$x = \Phi_x(\mu, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(\alpha-1)}), \quad (\text{C13})$$

$$u = \Phi_u(\mu, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(\alpha)}). \quad (\text{C14})$$

L'ensemble  $\mu$  est appelé sortie plate (ou linéarisante) du système non linéaire.

---

<sup>1</sup> Deux quantités sont différentiellement indépendantes si l'une ne peut être déduite de l'autre par application d'équivalence algébriques et/ou différentielles.

**Propriété 4.4 (Débouclage d'un système plat)** *Tout système plat est équivalent par transformation d'état ([C9](#)) et bouclage ([C10](#)) à un système linéaire découpé sous forme de Brunovsky ([C7](#)) [[145](#), §2], [[118](#), définition 3].*

**Remarque 4.3 (Ordre de platitude)** *L'ordre de platitude d'un système plat (définition [4.3](#)) est  $\beta + 1$  si  $\beta \geq 0$ , sinon 0. Ainsi, pour un système plat à l'ordre 0, la variable plate est donnée par une fonction de l'état du système uniquement  $\mu = \Phi_\mu(x)$ . Le bouclage permettant de passer sous forme de Brunovsky est alors de type statique. Pour tout système plat à l'ordre au moins 1, il est nécessaire d'augmenter le système d'un compensateur dynamique ([C11](#)).*

Dans cette thèse nous ne considérons que la platitude d'ordre 0, c'est à dire des bouclages statiques (voir [[127](#), [34](#), [146](#), [144](#)] pour le cas dynamique).

**Remarque 4.4 (Planification de trajectoire pour les systèmes plats)** *Bien que tout système plat soit équivalent au système découpé ([C7](#)), il n'est pas nécessaire de mettre le système sous cette forme pour réaliser la planification de trajectoire pour la sortie plate. En effet, étant donné une trajectoire  $\mu(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  de classe  $C^\beta$ , la commande est entièrement déterminée par la fonction ([C14](#)).*

#### 4.3 ANALYSE DE PLATITUDE POUR LES SHP

Dans cette section, nous élaborons deux méthodes ( $M_1$ ,  $M_2$ ) pour des classes de systèmes hamiltoniens à ports, qui permettent (i) l'analyse de la propriété de platitude et (ii) la détermination automatique de la sortie plate ([C12–C14](#)). La méthode ( $M_1$ ) s'applique aux systèmes hamiltoniens à ports mono-entrée sous forme algébro-différentielle ([3.5](#)), et repose sur l'analyse d'un graphe de dépendance associé au système. La méthode ( $M_2$ ) s'applique aux systèmes hamiltoniens à ports multi-entrée sous forme différentielle ([1.14–1.15](#)), et repose sur l'analyse des matrices d'interconnexion ( $J$ ,  $R$ , voir ([1.14–1.15](#))).

##### 4.3.1 Méthode ( $M_1$ ) par analyse de graphe (SHP mono-entrée)

La méthode présentée dans cette section est inspirée de la méthode par les graphes introduite dans [[109](#)] pour l'analyse du découplage entrée-sortie des systèmes linéaires par bouclage statique. On notera aussi l'existence de méthodes d'analyse de platitude dédiées aux systèmes donnés sous la forme de graphes de liaisons (*bond-graphs* en anglais, voir e.g. [[64](#)]), et une méthode d'analyse de graphe pour la réduction de systèmes hamiltoniens à ports [[8](#)]. Dans chaque cas, la topologie d'interconnexion est analysée pour dresser une carte des chemins menant de l'entrée à certaines quantités privilégiées, qui coïncident sous certaines hypothèses avec la sortie plate.

Ici, le principe est de retrouver une sortie plate à l'ordre 0 (c.f. remarque [4.3](#)) comme la racine d'un arbre construit suivant une procédure décrite ci-dessous. Cette procédure organise itérativement l'ensemble des quantités du système dans un diagramme de Hasse, c'est à dire un ensemble partiellement ordonné [[155](#), définition 4.10]. On aboutit à un arbre si le système est plat.

###### 4.3.1.1 Graphe du système hamiltonien à ports

Comme nous l'avons vu précédemment (chapitres [3](#)), les systèmes hamiltoniens à ports sont définis comme l'interconnexion conservative (structure de Dirac) de

composants stockants, dissipatifs et sources. Cette interconnexion est réalisée au travers de variables de flux (vitesses, courants) et d'efforts (forces, tensions) définies pour chaque composants. Pour la méthode d'analyse de platitude proposée, les hypothèses sur les composants sont les suivantes :

- (H1) le système possède une unique source  $\dim(\mathbf{u}) = \dim(\mathbf{y}) = 1$ ,
- (H2) les composants stockants et dissipatifs sont tous séparables :  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} H_i(x_i)$  et  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = (z_1(w_1), \dots, z_{n_w}(w_{n_w}))^\top$ ,
- (H3) les lois constitutives de tous les composants correspondent à des relations bijectives ( $\nabla^2 H(\mathbf{x})$  et  $J_z(\mathbf{w})$  sont des matrices diagonales et définies positives).

Sous ces hypothèses, la forme algébro-différentielle (3.5) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n_x}}{dt} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n_w} \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_x & -K & G_x \\ K^\top & J_w & G_w \\ -G_x^\top & -G_w^\top & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} H'_1(x_1) \\ \vdots \\ H'_{n_x}(x_{n_x}) \\ z_1(w_1) \\ \vdots \\ z_{n_w}(w_{n_w}) \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{C15})$$

Les éléments de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont les flux et efforts du système, et  $J$  encode l'interconnexion conservative (voir ?? pour rappel). Nous organisons ces quantités selon un graphe défini ci-dessous (voir aussi la figure 4.4).

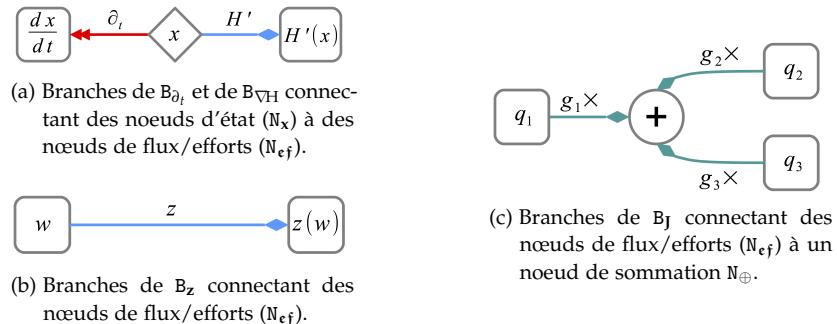


FIGURE 4.4 : Définitions pour le graphe d'initialisation (définition 4.4) pour l'analyse de platitude d'un SHP mono-entrée/mono-sortie. (4.4a-4.4b) Les losanges symbolisent les noeuds d'états ( $N_x$ ) ; les rectangles symbolisent les noeuds ( $N_{ef}$ ) de flux et d'efforts  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ; une double flèche  $\rightarrow$  symbolise une branche portant une relation non bijective (ici une dérivée temporelle) ; l'autre flèche (tête en losange) symbolise une branche portant une relation bijective, en accord avec (H3). (4.4c) le symbole  $\oplus$  symbolise un noeud de sommation et signifie que la somme des quantités incidentes vaut zéro (ici  $\sum_i g_i \times q_i = 0$ ).

**Définition 4.4 (Graphe d'initialisation)** On introduit le graphe d'initialisation  $G_{init} = (N, B_{init})$  constitué d'un ensemble de noeuds  $N$  et d'un ensemble de branches orientées pondérées  $B$ . L'ensemble des noeuds  $N$  est partitionné en trois sous ensembles  $N = N_x \cup N_{ef} \cup N_\oplus$  où

1.  $N_x = \{\xi_1, \dots, \xi_{n_x}\}$  est l'ensemble des nœuds  $\xi_i$  associés aux états  $x_i$  du système ;
2.  $N_{ef} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{tot}}, \beta_1, \dots, \beta_{n_{tot}}\}$  est l'ensemble des nœuds  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  associés aux quantités  $a_i$  et  $b_j$  (flux ou efforts) indiquées dans (C15) ;
3.  $N_{\oplus} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_{tot}}\}$  est l'ensemble des nœuds  $\lambda_i$  qui représentent les relations des lignes  $i$  de (C15).

Les branches orientées pondérées sont représentées par des triplets  $(v_1, v_2, \omega)$  où  $v_1$  représente un noeud de départ,  $v_2$  représente un noeud d'arrivée et où  $\omega$  représente le poids associé à la branche, ici un opérateur qui représente les relations formelles du SHP (C15). Plus précisément, l'ensemble des branches est partitionné en quatre sous ensembles  $B_{init} = B_{\partial_t} \cup B_{\nabla H} \cup B_z \cup B_J$  où, comme illustré en figure 4.4, et en notant  $n_{tot} = n_x + n_w + n_y$ ,

1.  $B_{\partial_t} = \{(\xi_1, \beta_1, \partial_t), \dots, (\xi_{n_x}, \beta_{n_x}, \partial_t)\}$  représentent les relations de dérivation temporelle avec  $b_i = \frac{dx_i}{dt}$  (branche de gauche dans la figure 4.4a) ;
2.  $B_{\nabla H} = \{(\xi_1, \alpha_1, H'_1), \dots, (\xi_{n_x}, \alpha_{n_x}, H'_{n_x})\}$  représentent les relations  $a_i = H'_i(x_i)$  (branche de droite dans la figure 4.4a) ;
3.  $B_z = \{(\beta_{n_x+1}, \alpha_{n_x+1}, z_{n_x+1}), \dots, (\beta_{n_x+n_w}, \alpha_{n_x+n_w}, z_{n_x+n_w})\}$  représentent les relations  $a_{n_x+i} = z_i(b_{n_x+i})$  (figure 4.4b) ;
4.  $B_J = \bigcup_{i=1}^{n_{tot}} B_i$  avec  $B_i = \{(\beta_i, \lambda_i, -1), (\alpha_1, \lambda_i, J_{i,1}), \dots, (\alpha_{n_{tot}}, \lambda_i, J_{i,n_{tot}})\}$  représentent les lignes  $i$  de (C15), avec  $0 = -b_i + \sum_{j=1}^{n_{tot}} J_{i,j} a_j$ , où le troisième élément de chaque branche de  $B_J$  représente son gain (figure 4.4c).

Il est à noter que les relations portées par éléments de  $B_{\partial_t}$  sont non bijectives (dérivées temporelles). Les relations portées par éléments de  $B_{\nabla H} \cup B_z \cup B_J$  sont bijectives, c.f. hypothèse (H3). Ces propriétés (bijectives ou non) sont symbolisées graphiquement par deux types de flèches en figure 4.4.

#### 4.3.1.2 Méthode d'analyse

La sortie plate de dimension 1 (mono-entrée, c.f. définition 4.3) est recherchée parmi les états du système (platitude d'ordre 0, c.f. remarque 4.3). Pour cela, le principe consiste à réorienter les branches portant une relation bijective (seuls degrés de liberté), de sorte à obtenir un arbre dont la racine est un état. Plus précisément, il s'agit de transformer les branches  $(v_1, v_2, \omega)$  de l'ensemble  $B_{\nabla H} \cup B_z \cup B_J$  (flèches à tête en losange en figure 4.4) en  $(v_1, v_2, \omega)$  ou  $(v_2, v_1, \omega^{-1})$  (représentées par des flèches simples en figure 4.6b), via une fonction de réordonnancement  $\Pi : B_{init} \mapsto B_{sol}$  qui construit le graphe solution  $G_{sol} = (N, B_{sol})$ . La fonction  $\Pi$  est déterminée pour résoudre des contraintes sur l'ordre d'incidence de chaque nœud, comme définies ci-dessous.

**Définition 4.5 (Ordres d'un nœud)** L'ordre total d'un nœud est le nombre de branches qui lui sont connectées ; l'ordre d'incidence d'un nœud est le nombre de branches qui lui sont incidentes.

**Définition 4.6 (Graphe solution)** Le graphe solution  $G_{sol} = (N, B_{sol})$  associé au système (C15) de graphe initial (définition 4.4) est tel que les contraintes suivantes sont satisfaites :

- (c1) Les nœuds de flux et d'effort  $N_{ef}$  sont tous d'ordre d'incidence 1 (chaque flux et effort est défini, et de manière unique).

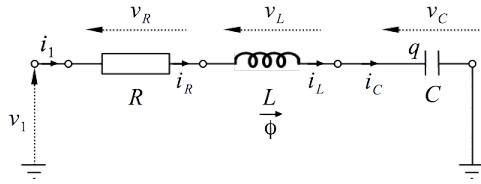


FIGURE 4.5 : Circuit RLC pour l’illustration de la méthode d’analyse de platitude par graphe.

- (c2) La différence de l’ordre total et de l’ordre d’incidence de chaque nœuds de sommation  $N_{\oplus}$  est 1 (toutes les branches connectées sont incidentes, sauf une, de sorte à pouvoir résoudre la relation linéaire définie par la ligne associée dans  $J$ , voir figure 4.4).
- (c3) L’ordre d’incidence de tous les nœuds d’état  $N_x$  est 1, excepté un, qui est d’ordre d’incidence 0 (tous les état sont définis de manière unique, excepté un état qui n’est pas constraint et devient la sortie plate du système).

L’analyse d’incidence est automatisable avec des outils standard d’analyse des graphes [47], de sorte à déterminer la sortie plate. Le diagramme de Hasse correspondant est finalement obtenu en déroulant les relations d’incidence du graphe. Ce diagramme définit de manière unique les fonctions (C12–C14), et donc caractérise complètement la platitude du système. Ceci est illustré sur l’exemple suivant.

#### 4.3.1.3 Exemple

On considère le circuit RLC décrit en figure 4.5. Les composants de ce système sont : une inductance  $L$  de flux magnétique (état)  $x_L = \phi$ , d’énergie  $H_L(x_L)$ , de courant  $i_L = H'_L(x_L)$  et de tension  $v_L = \frac{dx_L}{dt}$ , une capacité  $C$  de charge (état)  $x_C = q$ , d’énergie  $H_C(x_C)$ , de courant  $i_C = \frac{dx_C}{dt}$  et de tension  $v_C = H'_C(x_C)$ , une résistance de courant (variable de dissipation)  $w_R = i_R$  et de tension (fonction de dissipation)  $v_R = z_R(w_R)$ , et une source de tension d’entrée  $u = v_1$  et de sortie  $y = i_1$ . Le système hamiltonien à ports associé est obtenu par application des lois de Kirchhoff aux flux (courants) et efforts (tensions) organisés comme  $\mathbf{b} = (i_L, v_C, v_R, v_1)^T$  et  $\mathbf{a} = (v_L, i_C, i_R, i_1)^T$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_L}{dt} \\ \frac{dx_C}{dt} \\ w_R \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H'_L(x_L) \\ H'_C(x_C) \\ z_R(w_R) \\ u \end{pmatrix}. \quad (\text{C16})$$

Le graphe initial du SHP (C16) est représenté en figure 4.6a. Le graphe solution obtenu après application des contraintes d’orientation pour l’analyse de platitude est représenté en figure 4.6b. Le seul nœud de  $N_x$  d’ordre d’incidence 0 est le nœud associé à l’état de la capacité  $x_C = q$ . Ce nœud est choisi comme la racine du diagramme de Hasse associé, et le diagramme complet (figure 4.7) est obtenu en déroulant les relations d’incidence. Finalement, la structure plate est obtenue en partant de la sortie plate  $\mu = \Phi_\mu(\mathbf{x}) = x_C$  (racine du diagramme), et en

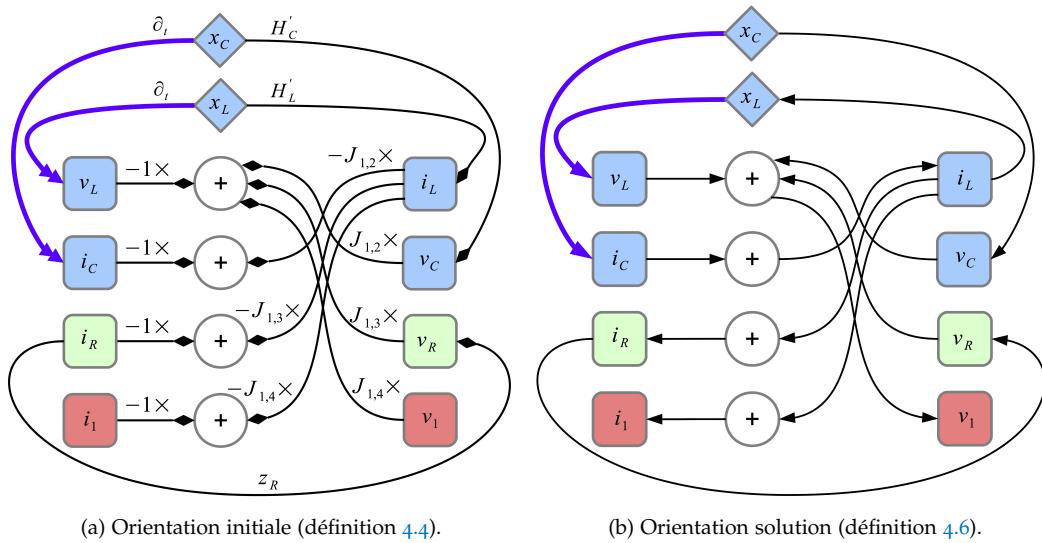


FIGURE 4.6 : Graphe d'ordonnancement associé au circuit RLC de la figure 4.5. L'orientation primaire est directement donnée par la forme algébro-diférentielle (C16). L'orientation contrainte est dictée par les règles d'analyse définie §4.3.1.2. On obtient directement que la sortie plate correspond à l'état de la capacité  $x_C = q$ . On notera que l'antisymétrie de  $J$  est exploitée, en ce sens que seuls les coefficients de la partie triangulaire supérieure apparaissent dans le diagramme, avec les bons signes.

remontant jusqu'aux états (construction de  $x = \Phi_x(\mu, \dots, \mu^{(\alpha-1)})$ ) et l'entrée (construction de  $\Phi_u(\mu, \dots, \mu^{(\alpha)})$ ):

$$\mu = \Phi_\mu(\mathbf{x}) = x_C, \quad (\text{C17})$$

$$x = \Phi_x(\mu, \mu^{(1)}) = \left(\mu, -[H'_L]^{-1}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)\right)^\top, \quad (C18)$$

$$u = \Phi_{\mathbf{u}}(\mu, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) = -(v_L - v_C - v_R) \quad (\text{C19})$$

$$= H'_C(\mu) + z_R \left( \frac{d\mu}{dt} \right) - \frac{d}{dt} [H'_L]^{-1} \left( \frac{d\mu}{dt} \right). \quad (C20)$$

On notera que ces fonctions sont définies formellement à partir des lois constitutives ( $\nabla H$  et  $z$ ) et des coefficients de la structure d'interconnexion  $J$ .

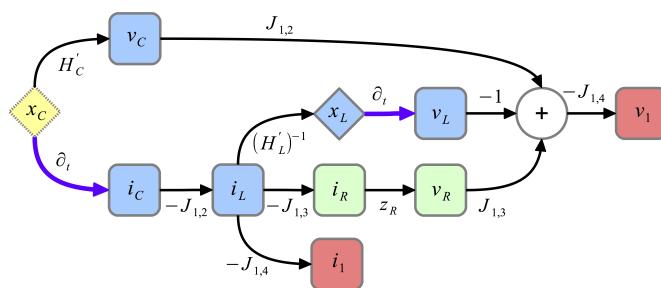


FIGURE 4.7 : Diagramme de Hasse associé au graphe d'ordonnancement de la figure 4.6b.  
Ici, le nœud marqué d'un + traduit la simple sommation des quantités incidentes.

### 4.3.2 Méthode ( $M_2$ ) par analyse matricielle (généralisation aux SHP multi-entrées et algorithme)

La méthode présentée section 4.3.1 ne fonctionne que pour les systèmes mono-entrée. On présente ici une méthode d'analyse de platitude d'ordre  $\alpha$  pour les systèmes hamiltoniens à ports donnés sous forme différentielle (1.14–1.15), qui fournit la sortie plate le cas échéant. La présentation est réalisée pour un système conservatif avec  $\mathbf{R} = \emptyset$  dans (1.14), sans lien direct avec  $\mathbf{J}_y = \emptyset$  et de structure constante  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{J}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_x^\top & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (\text{C21})$$

Une remarque sur la généralisation aux systèmes dissipatifs ou modulés est donnée en fin de section (remarque 4.5).

#### 4.3.2.1 Système globalement commandé

**Définition 4.7 (SHP globalement commandé)** Un SHP (C21) répondant aux hypothèses de la définition 1.11 à  $m$  entrées est dit globalement commandé si  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est de rang maximal et si, de plus, toutes les lignes de  $\mathbf{G}$  sont non nulles.

**Proposition 4.1 (Platitude d'un SHP globalement commandé)** Un SHP globalement commandé (définition 4.7) est plat si  $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{u}) = m$ . Il admet une classe de sorties plates  $\boldsymbol{\mu} = \Phi_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$  avec  $\Phi_\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un difféomorphisme, et  $\Phi_x = \Phi_\boldsymbol{\mu}^{-1}$ .

**Preuve** On choisit  $\Phi_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = -\mathbf{y}$ . Alors  $\boldsymbol{\mu} = \Phi_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^\top \nabla H(\mathbf{x})$  et, d'après (C21),

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\mathbf{x}) (\mathbf{J}_x \nabla H(\mathbf{x}) - \mathbf{G} \mathbf{u}). \quad (\text{C22})$$

Par définition,  $\mathbf{G}$  est inversible (matrice carrée de rang maximal), et

$$\mathbf{x} = \Phi_x(\boldsymbol{\mu}) = \Phi_\boldsymbol{\mu}^{-1}(\boldsymbol{\mu}) = \nabla H^{-1}(\mathbf{G}^{-\top} \boldsymbol{\mu}). \quad (\text{C23})$$

En réécrivant (C22) comme

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \underbrace{\mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\Phi_x(\boldsymbol{\mu})) \mathbf{J}_x \mathbf{G}^{-\top}}_{\mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})} \boldsymbol{\mu} - \underbrace{\mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\Phi_x(\boldsymbol{\mu})) \mathbf{G} \mathbf{u}}_{\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu})}, \quad (\text{C24})$$

on obtient la commande

$$\mathbf{u} = \Phi_u(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^{(1)}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu})^{-1} \left( \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\mu} - \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right), \quad (\text{C25})$$

où  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu})$  est inversible par hypothèse sur  $\mathbf{G}$  (définition 4.7) et puisque la matrice  $\nabla^2 H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est définie positive.

**Définition 4.8 (Système pseudo-plat d'ordre 0)** Un système à représentation d'état classique  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  est dit pseudo-plat d'ordre 0 s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  entiers, un ensemble fini de  $\dim(\boldsymbol{\mu}) = p$  variables différentiellement indépendantes  $\boldsymbol{\mu}$  avec  $p \neq m = \dim(\mathbf{u})$ , et des fonctions  $\Phi_\boldsymbol{\mu}$ ,  $\Phi_x$  et  $\Phi_u$  de sorte que

$$\boldsymbol{\mu} = \Phi_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p, \quad (\text{C26})$$

$$\mathbf{x} = \Phi_x(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\mu}^{(\alpha-1)}), \quad (\text{C27})$$

$$\mathbf{u} = \Phi_u(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}). \quad (\text{C28})$$

**Proposition 4.2 (Pseudo-platitude d'un SHP globalement commandé)** *La différence avec un système plat (définition 4.3) est que la dimension de la sortie  $\mu$  est différente de la dimension de l'entrée.*

*Soit un SHP globalement commandé (définition 4.7) tel que  $\dim(\mathbf{x}) = n > \dim(\mathbf{u}) = m$ , le hamiltonien est séparé  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n H_i(x_n)$  et de régularité  $C^3$ . Alors ce système est pseudo-plat d'ordre 0.*

Nous proposons une preuve qui repose sur une propriété d'inversibilité (locale en  $\mathbf{x}$ ) de la jacobienne  $\mathcal{J}_{\Phi_\mu}(\mathbf{x})$  introduite ci-dessous. La pseudo-platitude est globale sous l'hypothèse que cette inversibilité est globalement satisfaite.

**Preuve** La fonction

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^\top \nabla H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \quad (\text{C29})$$

ne définit plus un difféomorphisme. On introduit le défaut de dimension  $r = n - m > 0$ , et l'on complète les coordonnées  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$  par  $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^r$  pour construire le difféomorphisme

$$\Phi_\mu : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{x}) \\ \psi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mu \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{C30})$$

Par le théorème d'inversion locale [48, page 131], il est suffisant de trouver  $\psi$  tel que la jacobienne de  $\Phi_\mu$  notée  $\left[ \mathcal{J}_{\Phi_\mu}(\mathbf{x}) \right]_{i,j} = \frac{\partial [\Phi_\mu]_i}{\partial x_j}$  est inversible :

$$\mathcal{J}_{\Phi_\mu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\mathbf{x}) \\ \mathcal{J}_\psi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad \text{rang}(\mathcal{J}_{\Phi_\mu}(\mathbf{x})) = n, \quad (\text{C31})$$

ou encore, que  $\mathcal{J}_\psi(\mathbf{x})$  définisse une base du complément orthogonal du sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ . On note  $g_{i,j} = [\mathbf{G}]_{i,j}$ , et on introduit les notations suivantes :

$$\mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} g_{1,j} \\ \vdots \\ g_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad 1 \leq j \leq m, \quad (\text{C32})$$

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \nabla^2 H(\mathbf{x}) \mathbf{g}_j \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{C33})$$

$$\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (\text{C34})$$

La solution  $\psi$  aux  $m \times r$  équations différentielles  $\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}) (\mathcal{J}_\psi(\mathbf{x}))^\top = \mathbb{0}_{m \times r}$  existe si et seulement si l'ensemble de champs de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_m(\mathbf{x})\}$  est *complètement intégrable*. Par le théorème de Frobenius [156, page 234], une condition suffisante est que la *distribution*

$$\delta(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_m(\mathbf{x}))$$

soit *involutive* dans  $\mathbb{R}^n$ , i.e. le crochet de Lie  $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \mathcal{J}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j - \mathcal{J}_{\mathbf{v}_j}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i$  de chaque paire de vecteurs de  $\delta$  est une combinaison linéaire des vecteurs originaux :

$$\text{rang}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \text{rang}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Par hypothèse, le hamiltonien est séparé :  $\frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$  si  $i \neq j$ , et  $[\mathbf{v}_i]_j = \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} [\mathbf{g}_i]_j$ .

Alors,

$$[\mathcal{J}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{x})]_{j,k} = \frac{\partial [\mathbf{v}_i]_j}{\partial x_k} = \begin{cases} \frac{\partial^3 H(\mathbf{x})}{\partial x_j^3} [\mathbf{g}_i]_j & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$[\mathcal{J}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j(\mathbf{x})]_k = \sum_{l=1}^n [\mathcal{J}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{x})]_{k,l} [\mathbf{v}_j(\mathbf{x})]_l \quad (\text{C35})$$

$$= \frac{\partial^3 H(\mathbf{x})}{\partial x_k^3} \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_l^2} [\mathbf{g}_i]_k [\mathbf{g}_j]_l \quad (\text{C36})$$

$$= [\mathcal{J}_{\mathbf{v}_j}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i(\mathbf{x})]_k. \quad (\text{C37})$$

Donc le crochet de Lie est nul  $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \mathbb{0}_n$ , donc il existe des coordonnées complémentaires  $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^r$  telles que  $\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}) (\mathcal{J}_\psi(\mathbf{x}))^\top = \mathbb{0}_{m \times r}$  et  $\Phi_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit un difféomorphisme, d'inverse  $\mathbf{x} = \Phi_\mathbf{x}(\mu) = \Phi_\mu^{-1}(\mu)$ . La fonction  $\Phi_u$  est alors donnée par la variation temporelle de  $\phi(\mathbf{x})$  :

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{P} \frac{d\mu}{dt} = \underbrace{\mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\Phi_\mathbf{x}(\mu)) \mathbf{J}_x}_{\mathbf{M}(\mu)} \nabla H(\Phi_\mathbf{x}(\mu)) - \underbrace{\mathbf{G}^\top \nabla^2 H(\Phi_\mathbf{x}(\mu)) \mathbf{G}}_{\mathbf{D}(\mu)} \mathbf{u}, \quad (\text{C38})$$

avec  $\mathbf{P} = (\mathbf{I}_d \ \mathbb{0}_{m \times r})$  et

$$\mathbf{u} = \Phi_u(\mu, \mu^{(1)}) = \mathbf{D}(\mu)^{-1} \left( \mathbf{M}(\mu) \nabla H(\Phi_\mathbf{x}(\mu)) - \mathbf{P} \frac{d\mu}{dt} \right), \quad (\text{C39})$$

ce qui complète la preuve.

Un corolaire de cette proposition est qu'un SHP globalement commandé est pseudo-plat avec  $\alpha = 1$  dans la définition 4.8. Un cas plus général est traité ci-après.

#### 4.3.2.2 Système partiellement commandé

**Définition 4.9 (SHP partiellement commandé)** On suppose que le hamiltonien  $H(\mathbf{x})$  est séparé par blocs, c'est-à-dire que le système est sous la forme suivante (à une permutation des composantes du vecteur d'état près et un changement de base constant près) :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_0}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{N-1}}{dt} \\ \frac{dx_N}{dt} \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & -G_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ G_0^\top & J_1 & -G_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & G_{N-2}^\top & J_{N-1} & -G_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & G^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_0(\mathbf{x}_0) \\ \nabla H_1(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla H_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) \\ \nabla H_N(\mathbf{x}_N) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{C40})$$

avec  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ , et  $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i+1}}$ , soit

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{J}_0 \nabla H_0(\mathbf{x}_0) - \mathbf{G}_0 \nabla H_1(\mathbf{x}_1), \quad (\text{C41})$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{G}_{i-1}^\top \nabla H_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{J}_i \nabla H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{G}_i \nabla H_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}), \quad (\text{C42})$$

$$\frac{d\mathbf{x}_N}{dt} = \mathbf{G}_{N-1}^\top \nabla H_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}) + \mathbf{J}_N \nabla H_N(\mathbf{x}_N) - \mathbf{G} \mathbf{u}. \quad (\text{C43})$$

La structure (C40) est entièrement définie par les dimensions  $n_i$ ,  $0 \leq i \leq N$  et la dimension des entrée-sortie notée  $n_{N+1}$ . On introduit les sorties intermédiaires  $\phi_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{L}_i^\top \nabla H(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ , le défaut de coordonnées  $r_i = \max(0, n_i - n_{i+1})$ , et le défaut de commande  $p_i = \max(0, n_i - n_{i-1})$  pour chaque bloc  $0 \leq i \leq N$ . La commande de chaque bloc  $1 \leq i \leq N+1$  est construite de manière similaire au cas globalement commandé (section 4.3.2.1).

**Proposition 4.3 (Platitude d'un SHP partiellement commandé)** *Un SHP partiellement commandé (définition 4.9) est pseudo-plat (définition 4.8) si la structure (C40) vérifie les hypothèses suivantes :*

- (H1) *la matrice hessienne associée à chaque hamiltonien partiel  $H_i(\mathbf{x}_i)$ ,  $0 \leq i \leq N$  est définie positive ;*
- (H2) *le système (C40) est sous forme échelonnée réduite avec  $\mathbf{G}_i = [\mathbf{L}_i, \mathbf{0}_{n_i \times (n_{i+1} - n_i)}]$  si  $n_i < n_{i+1}$  et  $\mathbf{G}_i = \mathbf{L}_i$  sinon,  $\mathbf{L}_i$  de rang maximal et chaque ligne de  $\mathbf{L}_i$  est non nulle ;*
- (H3)  *$\forall i \in [0, N] : n_i > n_{i+1}$ , la fonction de stockage est séparée  $H_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n_i} H_k(x_{i,k})$  ;*
- (H4)  *$\forall i \in [0, N] : n_i > n_{i-1}$ , la fonction de stockage est séparée en  $H_i(\mathbf{x}_i) = H_i^\xi(\xi_i) + H_i^\mu(\mu_i)$ , avec  $\xi_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^\top$  et  $\mu_i = (x_{i,n_i}, \dots, x_{i,n_{i+1}})^\top$  ;*
- (H5) *les  $\phi_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{L}_i^\top \nabla H(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{n_{i+1}}$  sont au moins de classe  $C^{N-i+1}$ .*

**Preuve** Si pour chaque  $i \in [0, N]$  tel que  $r_i > 0$  la fonction de stockage est séparée  $H_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n_i} H_{i,j}(x_{i,j})$ , le changement d'état

$$\rho_i = \Phi_i(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} \phi_i(\mathbf{x}_i) \\ \psi_i(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix}, \quad (\text{C44})$$

définit un difféomorphisme pour le complément de coordonnées  $\psi : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{r_i}$  tel que  $\mathcal{J}_{\phi_i}(\mathbf{x}_i) (\mathcal{J}_{\psi_i}(\mathbf{x}_i))^\top = \mathbf{0}_{n_{i+1} \times r_i}$ . On introduit la matrice de projection  $\mathbf{P}_i = [\mathbf{I}_d, \mathbf{0}_{n_i \times r_i}] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i+1}}$  de la nouvelle coordonnée  $\rho_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  sur la sortie  $\phi_i = \mathbf{P}_i \rho_i \in \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ , et

$$\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_i)}{dt} = \mathcal{J}_{\phi_i}(\mathbf{x}_i) \left( \phi_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{J}_i \nabla H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{L}_i \nabla H_{i+1}^\xi(\xi_{i+1}) \right). \quad (\text{C45})$$

L'état

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{pmatrix} \xi_{i+1}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^{(1)}) \\ \mu_{i+1} \end{pmatrix}.$$

est constitué de (i) la sortie plate  $\mu_i = (x_{i,n_{i-1}+1}, \dots, x_{i,n_i})^\top \in \mathbb{R}^{p_i}$  si  $p_i > 0$  et (ii) l'état commandé  $\xi_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_\xi})^\top \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  avec  $n_\xi = \dim(\xi) = \min(n_i, n_{i-1})$ , reconstruit itérativement à partir de (C45) comme

$$\xi_{i+1} = \left( \nabla H_{i+1}^\xi \right)^{-1} \left[ \mathbf{D}_i^{-1}(\mathbf{x}_i) \left( \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) \phi_{i-1}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{M}_i(\mathbf{x}_i) \nabla H_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) \right],$$

avec

$$\mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) = \mathcal{J}_{\boldsymbol{\phi}_i}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{L}_i^\top \nabla^2 \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i), \quad (\text{C46})$$

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{J}_i, \quad (\text{C47})$$

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^\top \nabla^2 \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{L}_i. \quad (\text{C48})$$

On utilise alors la méthode constructive suivante.

(Étape I) Initialisation :

Pour  $i = 0$ , on note  $n_{-1} = 0$  (ce qui implique  $p_0 = n_0$ ) et  $\bar{\boldsymbol{\mu}}_i = (\boldsymbol{\mu}_0^\top, \dots, \boldsymbol{\mu}_i^\top)^\top \in \mathbb{R}^{\sum_i p_i}$  la collection de variables plates jusqu'au bloc  $i$ . La séquence est initialisée avec

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \quad (\text{C49})$$

$$= \Phi_{\mathbf{x}_0}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_0), \quad (\text{C50})$$

$$\xi_1 = \left( \nabla \mathbf{H}_1^\xi \right)^{-1} \left[ \mathbf{D}_0^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0) \left( \mathbf{M}_0(\boldsymbol{\mu}_0) \nabla \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\mu}_0) - \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\mu}_0) \frac{d\boldsymbol{\mu}_0}{dt} \right) \right], \quad (\text{C51})$$

$$\mathbf{x}_1 = (\xi_1^\top, \boldsymbol{\mu}_1^\top)^\top \quad (\text{C52})$$

$$= \Phi_{\mathbf{x}_1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_1, \bar{\boldsymbol{\mu}}_1^{(1)}). \quad (\text{C53})$$

(Étape II) Itération :

Chaque itération fait intervenir un ordre de dérivation supplémentaire avec  $\mathbf{x}_i = \Phi_{\mathbf{x}_i}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_i, \dots, \bar{\boldsymbol{\mu}}_i^{(i)})$  et

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{\mathbf{x}_i}}{dt} &= \mathcal{J}_{\Phi_{\mathbf{x}_i}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_i, \dots, \bar{\boldsymbol{\mu}}_i^{(i)}) \cdot (\bar{\boldsymbol{\mu}}_i^{(1)}, \dots, \bar{\boldsymbol{\mu}}_i^{(i+1)})^\top, \\ \xi_{i+1} &= \left( \nabla \mathbf{H}_{i+1}^\xi \right)^{-1} \left[ \mathbf{D}_i^{-1}(\Phi_{\mathbf{x}_i}) \left( \mathbf{M}_i(\Phi_{\mathbf{x}_i}) \nabla \mathbf{H}_i(\Phi_{\mathbf{x}_i}) + \mathbf{T}_i(\Phi_{\mathbf{x}_i}) \left( \boldsymbol{\phi}_{i-1}(\Phi_{\mathbf{x}_{i-1}}) - \frac{d\Phi_{\mathbf{x}_i}}{dt} \right) \right) \right], \\ \mathbf{x}_{i+1} &= (\xi_{i+1}^\top, \boldsymbol{\mu}_{i+1}^\top)^\top \\ &= \Phi_{\mathbf{x}_{i+1}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_{i+1}, \dots, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{i+1}^{(i+1)}). \end{aligned} \quad (\text{C54})$$

(Étape III) Résultat :

La sortie plate est donnée par

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_N = \Phi_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}), \quad (\text{C55})$$

et la loi de commande associée par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{D}_N^{-1}(\Phi_{\mathbf{x}_N}) \left( \mathbf{M}_N(\Phi_{\mathbf{x}_N}) \nabla \mathbf{H}_N(\Phi_{\mathbf{x}_N}) + \mathbf{T}_N(\Phi_{\mathbf{x}_N}) \left( \boldsymbol{\phi}_{N-1}(\Phi_{\mathbf{x}_{N-1}}) - \frac{d\Phi_{\mathbf{x}_N}}{dt} \right) \right) \\ &= \Phi_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\mu}, \dots, \boldsymbol{\mu}^{(N+1)}), \end{aligned} \quad (\text{C56})$$

ce qui conclut la preuve.

L'algorithme qui génère la sortie plate (C55) et la loi de commande (C56) est donné par la méthode en trois étapes (I, II, II) de la preuve.

**Remarque 4.5 (Généralisation aux cas dissipatifs et modulés)** La méthode proposée s'applique encore si le système n'est plus conservatif et si la structure est modulée par l'état, sous les hypothèses suivantes :

- (H6) les dissipations ne portent pas sur les entrées-sorties, i.e.  $\mathbf{R}_y = \emptyset$  et  $\mathbf{R}_{xy} = \emptyset$  dans la structure (1.15);

(H7) la matrice  $\mathbf{R}_x$  est diagonale par blocs, et compatible avec la décomposition (C40)

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_N & \cdots & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \cdots & \mathbf{R}_0 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{R}_i) = \dim(\mathbf{J}_i), \quad 0 \leq i \leq N;$$

(H8) seules les matrices  $\mathbf{J}_i$  et  $\mathbf{R}_i$  sont modulées (les matrices  $\mathbf{G}_i$ ,  $0 \leq i \leq N$  sont constantes).

Il suffit alors de remplacer (C47) par

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{L}_i^\top \nabla^2 H_i(\mathbf{x}_i) \left( \mathbf{J}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{R}_i(\mathbf{x}_i) \right). \quad (\text{C57})$$

#### 4.4 APPLICATION À LA LINÉARISATION TENSION-DÉPLACEMENT DU HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

Le haut-parleur électrodynamique est un transducteur non idéal, qui fait intervenir de nombreux phénomènes d'origine multi-physique dont la modélisation dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports a été discutée au chapitre 7. Dans cette section, on propose de réaliser un contrôle en boucle ouverte par platitude pour la planification du déplacement de la membrane compatible avec les non-linéarités. Ce travail a fait l'objet du stage de Nicolas Papazoglou [A12] et les résultats ont été présentés en aout 2015 lors du *Congrès Français de Mécanique* [A9].

Premièrement, on présente le modèle simplifié de haut-parleur qui sera compensé. Ce modèle inclut une unique non-linéarité associée à la raideur de la suspension de l'équipage mobile (principale non-linéarité en pratique, [98]). Deuxièmement, on applique la méthode directe de la section 4.3.2 pour (i) déterminer la sortie plate (ici, la position de l'équipage mobile) et (ii) construire la loi de commande en boucle ouverte. Troisièmement, l'approche est validée sur un système simulé.

##### 4.4.1 Modèle

Le modèle de haut-parleur considéré inclut deux composants stockants linéaires (inductance du bobinage et masse mobile), un composant stockant non linéaire (force de rappel de la suspension), deux phénomènes dissipatifs (résistance électrique et amortissement mécanique). Les effets de la charge acoustique sont approximés au premier ordre (masse, raideur et amortissement additionnels) et sont inclus dans les paramètres des composants mécaniques. Ce système possède une unique entrée : la tension d'alimentation  $u$  fournie par l'amplificateur audio. Le couplage électro-mécanique (force de Laplace et force contre-électromotrice) est décrit par un gyrateur de ratio  $B_\ell$  (voir section ?? et chapitre 7).

L'état du système est  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2]^\top$  avec  $x_0 = q$  la position de l'équipage mobile mesurée par rapport à la position d'équilibre de la suspension,  $x_1 = M \frac{dq}{dt}$  la quantité de mouvement associée à la masse  $M$  mobile et  $x_2 = \phi$  le flux magnétique dans le bobinage. Le hamiltonien associé est séparé  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^2 H_i(x_i)$  pour les fonctions de stockage quadratiques  $H_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2M}$  et  $H_2(x_2) = \frac{x_2^2}{2L}$  et la fonction de stockage non-quadratique associée à la loi constitutive non-linéaire

de la suspension de paramètre  $K_0$  (comportement à l'origine),  $K_{\text{sat}}$  (facteur de forme de la non-linéarité) et  $q_{\text{sat}}$  la position de saturation (déchirement), avec

$$H_0(x_0) = \frac{K_0 x_0^2}{2} + \frac{8 K_{\text{sat}} q_{\text{sat}}}{\pi(\pi - 4)} \left( \ln \left( \cos \left( \frac{\pi \cdot x_0}{2 \cdot q_{\text{sat}}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \cdot x_0}{2 \cdot q_{\text{sat}}} \right)^2 \right).$$

La tension associée à la résistance  $R$  du fil conducteur est  $v_R = R i$  avec  $i = \nabla H_2(x_2) = \frac{x_2}{L}$  le courant généré par la bobine, et la force associée à l'amortissement  $A$  est  $f_A = A \frac{dq}{dt}$  avec  $\frac{dq}{dt} = \nabla H_1(x_1) = \frac{x_1}{M}$ . L'entrée est la tension  $u = v$  et la sortie est le courant  $y = i$ .

La structure (1.14–1.15) est obtenue en appliquant les lois de Kirchhoff et de Newton au réseau de composants (voir section ?? et chapitre 7) :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_0}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ -y \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -A & B_\ell & 0 \\ 0 & -B_\ell & -R & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \nabla H_0(x_0) \\ \nabla H_1(x_1) \\ \nabla H_2(x_2) \\ u \end{pmatrix}. \quad (\text{C58})$$

#### 4.4.2 Détermination de la commande par platitude

La structure (C58) est directement donnée sous la forme (C40), avec  $N = 2$ ,  $n_i = 1$  et  $r_i = p_i = 0$  pour  $0 \leq i \leq N$ . Pour  $i = 0$ , on choisit donc la sortie plate  $\mu = \Phi_\mu(\mathbf{x}) = x_0 = q$ , avec  $x_0 = \Phi_{x_0}(\mu) = \mu$ . La matrice de gain du bloc est  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{L}_0 = -1$ , et la sortie est  $\phi_0(x_0) = \mathbf{G}_0^\top \nabla H_0(x_0) = -\frac{\partial H_0(x_0)}{\partial x_0}$ . Les matrices de découplage sont

$$\mathbf{T}_0(x_0) = \mathcal{J}_{\phi_0}(x_0) = -\frac{\partial^2 H_0(x_0)}{\partial x_0^2}, \quad (\text{C59})$$

$$\mathbf{M}_0(x_0) = \mathbf{T}_0(x_0) (\mathbf{J}_0 - \mathbf{R}_0) = 0, \quad (\text{C60})$$

$$\mathbf{D}_0(x_0) = \mathbf{T}_0(x_0) \mathbf{L}_0 = \frac{\partial^2 H_0(x_0)}{\partial x_0^2}. \quad (\text{C61})$$

Pour  $i = 1$ , l'état commandé  $\xi_1 = x_1$  ( $p_1 = 0$ ) est obtenu par (C51) :

$$\xi_1 = x_1 = \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right)^{-1} \left[ \mathbf{D}_0(x_0)^{-1} \left( \mathbf{M}_0(x_0) \frac{\partial H_0(x_0)}{\partial x_0} - \mathbf{T}_0(x_0) \frac{dx_0}{dt} \right) \right] \quad (\text{C62})$$

$$= \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right)^{-1} \left[ \frac{d\mu}{dt} \right] = M \frac{d\mu}{dt}, \quad (\text{C63})$$

$$= \Phi_{x_1}(\mu, \mu^{(1)}). \quad (\text{C64})$$

La matrice de gain du bloc est  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{L}_1 = -B_\ell$ , et la sortie est  $\phi_1(x_1) = \mathbf{G}_1^\top \nabla H_1(x_1) = -B_\ell \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1}$ . Les matrices de découplage sont ( $\mathbf{J}_1 = 0$ ,  $\mathbf{R}_1 = A$ ) :

$$\mathbf{T}_1(x_1) = \mathcal{J}_{\phi_1}(x_1) = -B_\ell \frac{\partial^2 H_1(x_1)}{\partial x_1^2} = -\frac{B_\ell}{M}, \quad (\text{C65})$$

$$\mathbf{M}_1(x_1) = \mathbf{T}_1(x_1) (\mathbf{J}_1 - \mathbf{R}_1) = \frac{B_\ell A}{M}, \quad (\text{C66})$$

$$\mathbf{D}_1(x_1) = \mathbf{T}_1(x_1) \mathbf{L}_1 = \frac{B_\ell^2}{M}. \quad (\text{C67})$$

et l'état commandé  $xi_2 = x_2$  ( $p_2 = 0$ ) est obtenu par (C54), avec  $\frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{L}$  :

$$\xi_2 = x_2 = \frac{L}{B_\ell} \left( A \frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial H_0}{\partial x_0}(\mu) + M \frac{d^2\mu}{dt^2} \right) \quad (\text{C68})$$

$$= \Phi_{x_2}(\mu, \dots, \mu^{(2)}). \quad (\text{C69})$$

Finalement, la matrice de gain du système est  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{L}_2 = -1$ , et la sortie est  $-y = \phi_2(x_2) = \mathbf{G}_2^\top \nabla H_2(x_2) = -\frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2}$ . Les matrices de découplage sont ( $\mathbf{J}_2 = 0$ ,  $\mathbf{R}_2 = R$ ) :

$$\mathbf{T}_2(x_2) = \mathcal{J}_{\phi_2}(x_2) = -\frac{\partial^2 H_2(x_2)}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{L}, \quad (\text{C70})$$

$$\mathbf{M}_2(x_2) = \mathbf{T}_2(x_2)(\mathbf{J}_2 - \mathbf{R}_2) = \frac{R}{L}, \quad (\text{C71})$$

$$\mathbf{D}_2(x_2) = \mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{L}_2 = \frac{1}{L}. \quad (\text{C72})$$

et la commande  $u$  est obtenue par (C56), avec  $\frac{d\Phi_{x_2}}{dt} = \frac{L}{B_\ell} \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_0^2}(\mu) \frac{d\mu}{dt} + A \frac{d^2\mu}{dt^2} + M \frac{d^3\mu}{dt^3} \right)$  :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{D}_2^{-1}(\Phi_{x_2}) \left( \mathbf{M}_2(\Phi_{x_2}) \nabla H_2(\Phi_{x_2}) + \mathbf{T}_2(\Phi_{x_2}) \left( \phi_1(\Phi_{x_1}) - \frac{d\Phi_{x_2}}{dt} \right) \right) \\ &= \frac{R}{B_\ell} \frac{\partial H_0}{\partial x_0}(\mu) + \left( \frac{R A}{B_\ell} - M + \frac{L}{B_\ell} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_0^2}(\mu) \right) \frac{d\mu}{dt} + \frac{R M + A L}{B_\ell} \frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{L M}{B_\ell} \frac{d^3\mu}{dt^3} \\ &= \Phi_u(\mu, \dots, \mu^{(3)}). \end{aligned} \quad (\text{C73})$$

Alors, étant donné un déplacement cible  $\mu^*$  admissible, l'entrée nominale  $u^*$  est donnée par (C73), en remplaçant toutes les occurrences de la sortie plate  $\mu$  par  $\mu^*$ , c'est à dire

$$\mathbf{u}^* = \Phi_u \left( \mu^*, \frac{d\mu^*}{dt}, \frac{d^2\mu^*}{dt^2}, \frac{d^3\mu^*}{dt^3} \right).$$

#### 4.4.3 Résultats de simulation

Le modèle de haut parleur utilisé est un FANE Sovereign 12-500LF, dont les paramètres physiques sont donnés table A1. La méthode de simulation est décrite au chapitre 2. Le résultat d'une simulation directe avec l'entrée non compensée  $u = A_u \sin(2\pi f_u t)$  pour  $A_u = 100V$  et  $f_u = 100Hz$  est donné figure 4.8.

$M$	0.075 (kg)	$B_\ell$	16.37 (T·m)
$L$	2.36 (mH)	$K_0$	7.14 (N·m <sup>-1</sup> )
$R$	5.9 ( $\Omega$ )	$K_{\text{sat}}$	100 (N·m <sup>-1</sup> )
$A$	3 (N·s·m <sup>-1</sup> )	$q_{\text{sat}}$	5.17 (mm)

TABLE A1 : Paramètres physiques du modèle de haut-parleur FANE Sovereign 12-500LF utilisé pour les simulations.

Maintenant, on assigne une trajectoire sinusoïdale pour la sortie plate :  $q^* = \mu^* = A_\mu \sin(2\pi f_\mu t)$  d'amplitude  $A_\mu = 0.7q_{\text{sat}}$  (mètres) et de fréquence  $f_\mu = 100Hz$ . Le système est supposé initialement au repos, c'est à dire qu'une condition initiale admissible pour la sortie plate et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 est donnée par  $\frac{d^i\mu}{dt^i}(t = 0) = 0$ ,  $0 \leq i \leq 3$  [111]. Ensuite, l'ensemble  $(\mu^*, \frac{d\mu^*}{dt}, \frac{d^2\mu^*}{dt^2}, \frac{d^3\mu^*}{dt^3})$  est régularisé entre  $t = 0$  and  $t = 1/f_\mu$  par un polynôme d'ordre 3. L'entrée  $u^*$  résultante est donnée figure 4.9. La comparaison entre la cible  $\mu^*$  et la sortie plate simulée  $\mu$  pour l'entrée  $u^*$  est donnée figure 4.9.

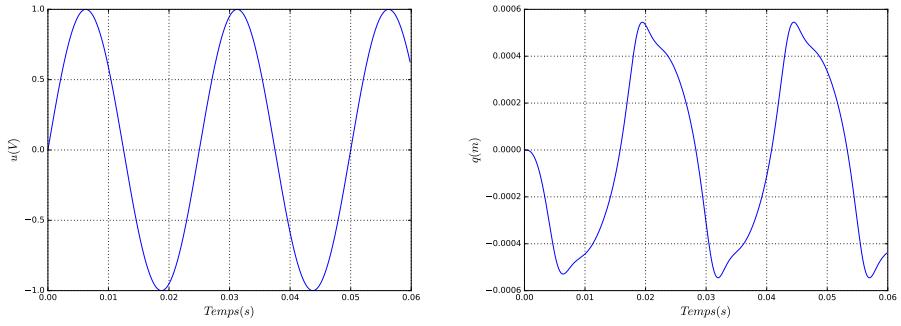


FIGURE 4.8 : Simulation directe (sans planification). Déplacement  $x_0 = q$  simulé pour un haut-parleur FANE Sovereign 12-500LF excité par une tension sinusoïdale (amplitude 100V et fréquence 100Hz). À gauche : tension d'entrée  $u$ . À droite : déplacement  $x_0 = q$ .

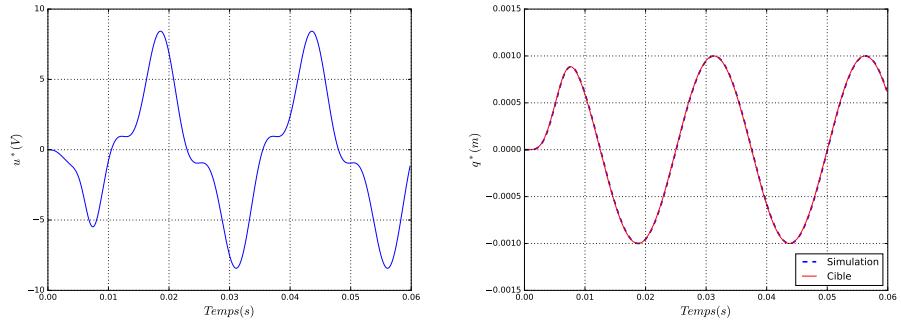


FIGURE 4.9 : À gauche : tension d'entrée  $u^*$  pour une trajectoire cible de la sortie plate donnée par une sinusoïde (régularisée sur la première période), d'amplitude  $A_\mu = 3.62\text{mm}$  et de fréquence  $f_\mu = 100 \text{ Hz}$  (la fréquence d'échantillonnage est  $f_s = 48\text{kHz}$ ). À droite : cible  $\mu^* = q^*$  et résultat de simulation pour la sortie plate  $\mu = q$ .

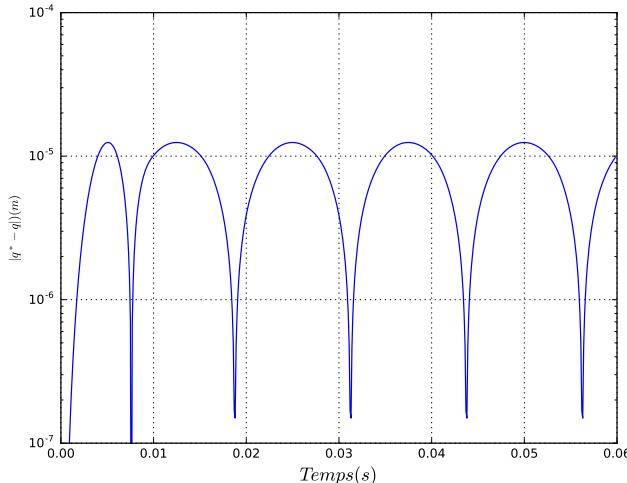


FIGURE 4.10 : Erreur sur la trajectoire de la sortie plate  $\epsilon = |q^* - q|$  avec  $q^*$  la trajectoire cible et  $q$  la trajectoire simulée (sur une échelle logarithmique en ordonnées).

#### 4.5 CONCLUSIONS DU CHAPITRE ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre, nous avons (i) exploité la structure des système hamiltoniens à ports pour déterminer automatiquement une sortie plate et (ii) construit une loi de commande par platitude pour les SHP. L'approche a été validée en simulation sur un modèle non linéaire simplifié de haut-parleur. Quatre perspectives naturelles à ce travail sont :

1. L'application à un modèle de haut-parleur raffiné (chapitre 7).
2. Application à la linéarisation d'un système réel. Cette perspective nécessite une solide procédure d'estimation des paramètres du modèle. Des recherches ont été menées dans ce sens au cours du stage d'Antoine Deschamps [A1], où l'on a considéré les techniques de filtrage particulière adaptées aux SHP pour l'observation d'état et le principe de maximum de vraisemblance pour l'estimation. Le travail se poursuit actuellement au sein de l'équipeS3<sup>2</sup> dans le cadre de la thèse de Damien Bouvier et du stage de Tristan Lebrun.
3. Extension de la méthode M2 aux bouclages dynamiques (i.e. la sortie plate dépend de l'état, de l'entrée et de ses dérivées).
4. L'implémentation de la méthode M2 à la bibliothèque PyPHs (chapitre 5) pour l'analyse automatique de platitude.

---

<sup>2</sup> <http://s3.ircam.fr/>



## Deuxième partie

# APPLICATIONS

Cette partie présente tout d'abord un outil logiciel qui (i) implémente les méthodes présentées en partie I pour la mise en équation automatique et (ii) génère le code LATEX de description et le code C++ de simulation correspondant (chapitre 5). Cet outil est ensuite utilisé aux chapitres 6 et 7 pour le traitement de deux systèmes multiphysiques d'intérêt en audio : le piano électromécanique Fender Rhodes et la partie électro-magnéto-thermo-mécanique du haut-parleur électrodynamique (respectivement).



# 5

## PYPHS : UNE BIBLIOTHÈQUE POUR LA GÉNÉRATION DE CODE TEMPS RÉEL

---

Tout est plus simple qu'on ne peut l'imaginer, et en même temps plus enchevêtré qu'on ne saurait le concevoir.

---

Communément attribué à  
J. W. von Goethe

### Sommaire

---

5.1	Introduction	. . . . .	107
5.2	Description	. . . . .	107
5.3	Exemple	. . . . .	108
5.3.1	Modèle	. . . . .	108
5.3.2	Code L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> Xgénéré	. . . . .	109
5.4	Perspectives	. . . . .	110

---

#### 5.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente la bibliothèque en langage python PypHs développée dans cette thèse pour la génération de code de simulation numérique pour les systèmes donnés dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports. La bibliothèque est disponible librement sur GitHub<sup>1</sup> (licence CeCILL<sup>2</sup> mise en place par les organismes CEA, CNRS et INRIA pour les logiciels libre). Une documentation complète est en cours de rédaction ; ce chapitre donne un aperçu de l'organisation, du fonctionnement et des perspectives de ce code.

#### 5.2 DESCRIPTION

La bibliothèque PypHs est un ensemble de scripts python réunis dans un dossier : aucune installation n'est nécessaire et la bibliothèque peut être simplement téléchargée depuis <https://github.com/A-Falaize/pypHs>. Le dossier PypHs contient un script python pypHs.py et deux dossier : le dossier dictionary qui contient le dictionnaire de composants multi-physiques, et le dossier utils qui contient l'essentiel du code.

Le script principal pypHs.py définit l'objet python PHOBJ qui constitue le point d'entrée pour l'utilisation de l'ensemble de la bibliothèque. Une instance de PHOBJ est la représentation objet d'un système hamiltonien à ports. Les attributs de l'objet sont les éléments caractéristiques du SHP (structure algébro-différentielle, voir section ??) : dimensions et labels des variables **x**, **w**, **u**, **y** ; matrices de structure **J<sub>x</sub>**, **J<sub>w</sub>**, **J<sub>y</sub>**, **G<sub>x</sub>**, **G<sub>w</sub>** et **K**, et lois constitutives **H** et **z**. La bibliothèque fait

---

<sup>1</sup> <https://github.com/A-Falaize/pypHs>

<sup>2</sup> <http://www.cecill.info/licences.fr.html>

une utilisation extensive du module de calcul symbolique SYMPY [165] pour déterminer automatiquement e.g. le gradient discret (définition 2.8) ou la forme quadratisée (définition 2.9).

Cette structure peut être renseignée à *la main*, ou automatiquement générée à partir d'une *netlist* (voir section 3.4.2) pour une implémentation de l'algorithme 5 de passage d'un graphe au SHP (voir section 3.4.2). Tous les composants du graphe doivent être inclus au dictionnaire, qui peut être étendu par l'ajout à la volée de composants spécifiques à l'application considérée. Chaque composant est lui même une instance de l'objet PHOBJ.

Une fois le système encodé dans une instance PHOBJ, on hérite de toutes les méthodes implémentées pour la classe :

- simulation numérique directement en python par les méthodes à un pas (méthode 2.1) et à deux pas (méthode 2.2),
- génération du code L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X de description du système,
- génération du code C<sub>++</sub> de simulation passive (chapitre 2).

### 5.3 EXEMPLE

Pour toutes les applications traitées dans ce manuscrit les équations et le code C<sub>++</sub> de simulation ont pu être générés par la librairie présentée ci-dessus (Fender Rhodes au chapitre 6, circuits analogiques au chapitre 3 et modèles de haut-parleurs au chapitre 7). Nous présentons ici succinctement un exemple multi-physique : le modèle de Thiele et Small

#### 5.3.1 Modèle

Le fonctionnement du code est illustré sur un modèle de Thiele et Small pour le haut-parleur électrodynamique (voir sections 1.4.3 et 7.5). Ce système inclut des composants électriques et mécaniques. Une représentation schématique est donnée figure 5.1.

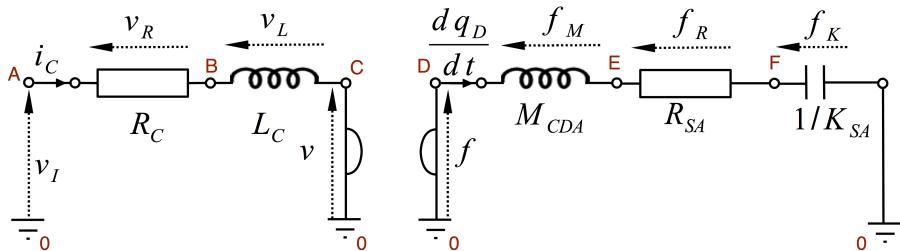


FIGURE 5.1 : Graphe du modèle de Thiele et Small (haut-parleur électrodynamique). La netlist associée est donnée ci-dessous.

Ce système inclut trois composants stockants (inductance  $L_C$  de 0.3mH, masse  $M_{CDA}$  de 10g et raideur  $K_{SA}$  de 2000N.m<sup>-1</sup>), deux composants dissipatifs (résistance  $R_C$  de 10Ω et amortissement fluide  $R_{SA}$  de coefficient 1N.s.m<sup>-1</sup>) et un port externe  $I$  piloté en effort (tension). Le couplage électromagnétique est encodé dans le gyrateur de ratio  $BL = 5$ . La netlist associée à ce système est donnée par

```

port I ['A'] ['e']
resistor RC ['A','B'] [10.0]
inductor LC ['B','C'] [0.0003]
gyrator BL ['C',0,'D',0] [5]
mass MCDA ['D','E'] [0.01]
damper RSA ['E','F'] [1.0]
stiffness KSA ['F',0] [2000.0]

```

Ces lignes sont rentrées dans un fichier au format ASCII avec l'extension \*.net (ici; netlist.net). L'objet phObj est labélisé par thielesmall, et instancié par la commande :

```
phs = phObj(thielesmall)
```

La construction du graphe à partir de la netlist est réalisée par la commande

```
phs = phs.netlist2graph(netlist)
```

Finalement, la structure SHP est générée par la commande

```
phs = phs.graph2phs()
```

Nous donnons ci-dessous les équation générées au format L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (le code C++ généré est présenté en annexe de ce chapitre).

### 5.3.2 Code L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xgénéré

Les équation suivantes sont générées directement au format L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X par le code proposé. On retrouve la formulation hamiltonienne à ports du modèle de Thiele et Small (voir sections 1.4.3 et 7.5). Le code C++ généré est donné en annexe 8.

```
STRUCTURE OF PHS thielesmall
```

```
SYSTEM DIMENSIONS
```

$$n_x = 3.$$

$$n_w = 2.$$

$$n_y = 1.$$

$$n_p = 0.$$

```
SYSTEM VARIABLES
```

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{LC} \\ x_{MCDA} \\ x_{KSA} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{RC} \\ w_{RSA} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_I \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_I \end{bmatrix}.$$

## CONSTITUTIVE RELATIONS

$$H(x) = 1000.0xKSA^2 + 1666.6666666667xLC^2 + 50.0xMCDA^2.$$

$$\nabla H(x) = \begin{bmatrix} 3333.3333333333xLC \\ 100.0xMCDA \\ 2000.0xKSA \end{bmatrix}.$$

$$z(w) = \begin{bmatrix} 10.0wRC \\ 1.0wRSA \end{bmatrix}.$$

## SYSTEM STRUCTURE

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & -5.0 & 0 \\ 5.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$G_x = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$G_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$J_y = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -5.0 & 0 & -1.0 & 0 & -1.0 \\ 5.0 & 0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 5.4 PERSPECTIVES

La bibliothèque PyPHs pour la génération automatique de code a permis de traiter toutes les applications de cette thèse. À chaque fois, le code de simulation C++ utilisé est généré automatiquement. Particulièrement, le code C++ obtenu pour la pédale (circuit analogique pour guitare électrique) *Dunlop CryBaby* (section 3) a été inclus dans un carcan JUCE<sup>3</sup>. Cette bibliothèque C++ tierce fait le lien entre les entrées-sorties audio et le code de calcul fourni par PyPHs. Ceci a permis de construire un logiciel utilisable en temps réel par les musiciens.

---

<sup>3</sup> <https://www.juce.com/>

Les perspectives de ce travail sont les suivantes.

- Génération automatique de code FAUST<sup>4</sup> (pour l'instant, le code FAUST est généré uniquement dans les cas linéaires).
- Génération automatique du projet JUCE pour obtenir directement un logiciel (plugin) utilisable (pour l'instant, l'inclusion se fait *à la main*).
- Compléter le dictionnaire (cordes, plaques, triodes, etc).

---

<sup>4</sup> Bibliothèque C++ dédiée au processus temps réels <http://faust.gramme.fr/>



# 6

DEUXIÈME APPLICATION : LE PIANO FENDER RHODES  
(ARTICLE "PASSIVE SIMULATION OF THE NONLINEAR  
PORT-HAMILTONIAN MODELING OF A RHODES PIANO"  
SOUMIS AU JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION)

---

It was there when it all started, and  
it's still around. That's the mark of  
a great instrument.

Josef E. Zawinul - *Rhodes Mark II*  
*Brochure, 1981.*

## Sommaire

---

Motivation et guide de lecture . . . . .	113
Introduction . . . . .	114
6.1 Problem statement . . . . .	115
6.1.1 Overview and main components . . . . .	115
6.1.2 Objectives . . . . .	117
6.2 Port-Hamiltonian Systems . . . . .	117
6.2.1 Considerations on energy and passivity . . . . .	117
6.2.2 State-space representation of port-Hamiltonian systems	119
6.2.3 Example . . . . .	119
6.3 Models of components . . . . .	121
6.3.1 Hammer $h$ . . . . .	121
6.3.2 Beam $b$ . . . . .	123
6.3.3 Pickup $p$ . . . . .	125
6.4 Complete system . . . . .	128
6.5 Guaranteed passive numerical method . . . . .	129
6.5.1 Numerical scheme . . . . .	130
6.5.2 Convergence analysis . . . . .	131
6.6 Results . . . . .	131
6.6.1 Mechanical energy . . . . .	132
6.6.2 Electromagnetic energy . . . . .	133
6.6.3 Output signal . . . . .	133
6.6.4 Comparison with measurements . . . . .	133
6.6.5 Playing with the model . . . . .	134
6.7 Appendix - Modal decomposition . . . . .	137
6.7.1 Orthonormal basis . . . . .	137
6.7.2 Projection . . . . .	137
Conclusion du chapitre et perspectives . . . . .	137

---

### MOTIVATION ET GUIDE DE LECTURE

Les systèmes audio et acoustiques incluent des phénomènes d'origine électrique, mécaniques, magnétiques, acoustiques, et thermiques. Le formalisme des système

hamiltoniens à ports (chapitre 1) est particulièrement adapté à la modélisation de ces systèmes multi-physiques. Ce chapitre est une inclusion de l'article [A7] *Passive simulation of the nonlinear port-Hamiltonian modeling of a Rhodes Piano<sup>1</sup>*, dédié au traitement d'un instrument complet. Plus précisément, il traite de la simulation temporelle d'un piano électromécanique : le Fender Rhodes. Un modèle simplifié de ce système multi-physique est considéré. Il est composé d'un marteau de piano (composant mécanique non linéaire), d'une poutre encastrée (composant vibratoire linéaire amorti) et d'un capteur (transducteur électromagnétique non linéaire).

Une formulation passive du système complet est proposée, à partir de laquelle une simulation à passivité garantie est construite afin de générer des sons de synthèse réalistes, qui respectent la physique. Ces deux objectifs sont atteints en quatre étapes. Premièrement, nous rappelons la classe des systèmes hamiltoniens à ports (section 6.2, rappels du chapitre 1). Deuxièmement, un modèle physique de chaque composant est sélectionné et réécrit sous forme Hamiltonienne à port. En particulier pour la poutre encastrée, un modèle de dimension finie est construit par décomposition modale du modèle d'Euler-Bernoulli. Troisièmement, ces systèmes sont interconnectés pour former un système Hamiltonien à ports non linéaire de dimension finie. Quatrièmement, une simulation à passivité garantie est proposée (section 6.5, rappels du chapitre 2). Finalement, des résultats numériques sont présentés pour un ensemble de paramètres physiques réalistes. Les signaux audio obtenus sont physiquement et perceptuellement cohérents, et qualitativement proches de signaux mesurés sur un instrument réel.

## INTRODUCTION

Sound synthesis based on physical modeling aims at recovering natural behaviors of existing (or imaginary) instruments. This includes transients, effects due to damping phenomena, timbre variations due to nonlinearities, etc. But, because of nonlinearities, guaranteeing numerical stability is not straightforward. In this context, approaches based on energy have been developed and applied to simulate musical instruments [30, 46, 13, 14]. The principle relies on passivity : conservative (or dissipative) phenomena make the energy time-variation be equal to (or be lower than) the power received from external sources. Passivity provides energy bounds, from which state bounds stem, so that preserving this property in simulations can be used to address stability issues.

Most of these methods involve space-time discretizations and numerical schemes that are devoted to handle conservative problems and that can successfully be applied to more realistic dissipative models. Technically, these methods are usually designed in such a way that a numerical power balance is fulfilled for the discretized quantities (*e.g.* as the product of discrete velocities and forces). In this paper, this point of view is modified and handled in two steps : (I) derive a passive model in the continuous time-domain, through conservative interconnections of passive elementary components ; (II) transpose the complete system in discrete-time domain in such a way that the original power balance is naturally fulfilled and passivity is naturally preserved.

---

<sup>1</sup> Article accepté pour une publication au JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION.

Numerous methods are available to reach step (I). They can be divided in two main classes : (WS) wave scattering methods and (KV) Kirchhoff's variables methods (see e.g. [174]). Mixed WS/KV methods have also been proposed [137]. Several methods are also available for step (II). Some methods that are commonly used in audio and acoustic applications are (WDF) wave-digital filters [56]) and (DWG) digital wave-guide [159]). These formalisms belong to the class of WS methods. They allow block-based modeling approaches [137], by introducing links that mimic the serial and parallel connections, and result in passive models for linear systems [55]. WDF and DWG approaches lead to realizable and explicit numerical systems. They are appreciated in real-time sound synthesis applications. However, their benefits are lost for nonlinear systems.

This paper deals with a nonlinear system : the Fender Rhodes piano. Its passive modeling is derived in the class of Port-Hamiltonian Systems, introduced in the 1990s [120, 153, 52]. These systems can be considered as an extension of Hamiltonian systems [116] in the sense that these dynamical systems can be composed of conservative components. But they also can include dissipative components as well as some ports connected to external sources and through which energy can transit. These systems admit a power balance that can be decomposed into conservative, dissipative and source parts. They also can be simulated in such a way that the power balance (structured into conservative, dissipative and source parts) is preserved in the discrete-time domain, including for nonlinear systems, see [3, p.32] and [A11]. These tools are chosen, adapted and used to address the sound synthesis of the Fender Rhodes piano. Notice preliminary results have been presented in [A4].

The paper is organized as follows. In section 7.3 the problem statement presents a simplified description of the Rhodes piano and sets the objectives. Section 6.2 introduces the port-Hamiltonian (pH) formulation. Section 6.3 is devoted to the physical modeling and the finite-dimensional pH formulation of elementary components. In particular, a finite-dimensional model of an Euler-Bernoulli cantilever beam is derived, based on a standard modal decomposition.

Then, in section 6.4, elementary components are connected, yielding the nonlinear finite-dimensional port-Hamiltonian system to simulate (step I). Section 6.5 details the numerical method that preserves the power balance (step II). Finally, in section 6.6, numerical results are presented and some signals are compared to a few measurements.

## 6.1 PROBLEM STATEMENT

This section describes the Rhodes piano electromechanism. It focuses on the components that are selected to derive the physical model. Then, it states the scientific issues to be addressed to reach guaranteed-passive sound synthesis.

### 6.1.1 Overview and main components

A description of the Rhodes piano is given in figure 6.1. The complete system is quite complex (38 components mentioned for each note in figure 6.1@). The resonator is an asymmetric tuning fork (elements 7 to 13 and 19 in figure 6.1(b)), where one of the prong is call the tine (element 13) and is struck by the hammer (elements 14 and 15), the other prong is called the tone bar (element 11). The constant magnetic induction field due to the pickup magnet in free air is modu-

lated by the movement of the (magnetically conducting) tine, which results in a change of the magnetic flux in the coil, that generates an electromotive force (tension) from Faraday's law of induction.

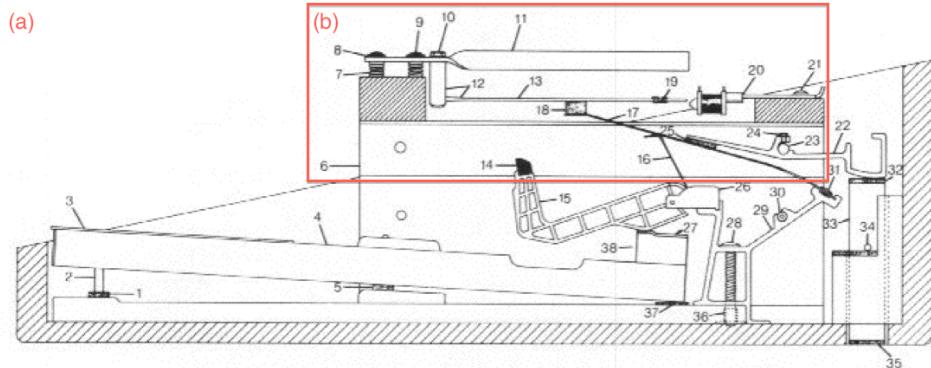


FIGURE 6.1 : Overview of a single note of a Rhodes piano : @ original schematics [83] (extracted from <http://www.fenderrhodes.com> courtesy of Frederik Adlers); Ⓜ part selected for modeling.

This paper focuses on the part depicted in figure 6.1(b), which starts from the hammer (excited by a force) to the pickup (producing an output voltage). This part is simplified following figure 6.2 and modeled by three multi-physical elements :

1. a nonlinear hysteretic hammer  $h$ , with adjustable material characteristics and geometry,
2. a linear damped cantilever beam  $b$ , which can be tuned according to the shape and material properties,
3. a nonlinear pickup  $p$ , the transverse and longitudinal position of which can be adjusted compared to the free-end beam extremity, which is connected to a RC analog filter (not represented in figure 6.2).

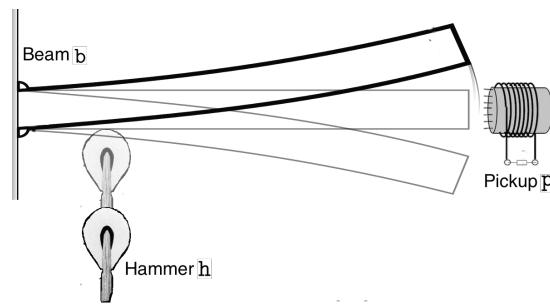


FIGURE 6.2 : Schematic of the simplified electromechanical piano, with hammer  $h$ , beam  $b$  and pickup  $p$ .

This simplification is justified or limited by the following considerations and assumptions. Elements 1–6 and 26–38 are excluded from figure 6.1(ℳ). They are concerned with the body or the key action mechanism. The body is assumed to be ideally rigid. The key action mechanism is ignored in the modeling. Indeed, the exhaust mechanism makes it out of contact with the hammer at the impact time. The hammer (elements 14–15) is then isolated and considered as the excitation part of the proposed model (see [73] for a study on a grand piano). The

tuning fork module (elements 7–13 and 19) is the vibrating part of the system. Its modeling is simplified according to the following assumptions :

- (A1) The cylindrical tine 13 is modeled as a linear damped Euler-Bernoulli beam.
- (A2) The tone bar 11 is neglected, as well as its coupling with the tine through the solid pieces 10 and 12, on which the tine is clamped. Its main role is to store and restore mechanical energy to enhance the sustain. It also has an impact on the transient, the effect of which is not investigated here.
- (A3) Elements 7–9 are composed of screws combined with springs with a high stiffness to adjust the transverse position of the tin with respect to the pickup. They are modeled as an ideally rigid connection with the body, located at an adjustable position.
- (A4) The fine tuning of the beam is addressed by adjusting the length of the beam rather than including the tuning mass (element 19).

These assumptions are motivated by the following reasons. The linear behavior assumed in (A1) has been validated in [125]. Assumption (A2) is the most critical one in practice, as the tone bar pumps and restores mechanical energy to the tine. It has an impact on the transient and enhances the sustain. These effects are not investigated here to simplify the study. Assumptions (A3–A4) correspond to the boundary conditions of a cantilever beam. This allows an exact model order reduction through a decomposition on analytic eigen-functions. The pickup and its placement (elements 20–21) are included in the modeling as they are known to have the main nonlinear impact on the output signal [124]. The damper module (elements 16–18 and 22–25) is ignored in the modeling, meaning that the key release is not taken into account and that the beam is let free until the vibration extinction.

### 6.1.2 Objectives

The main objective of this work is to provide a physically-based sound synthesis that generates a large variety of realistic sounds. The second objective is to derive a simulation that preserves fundamental physical principles (causality, stability and, more soundly, passivity and power balance) and that minimizes the computational load. To this end, the following approach is adopted : port-Hamiltonian formulation of the complete system, model order reduction of the infinite dimensional component (beam b), numerical method that preserves the power balance in the discrete-time domain, derivation of a C<sub>+</sub> code from symbolic calculation to accelerate some costly operations.

## 6.2 PORT-HAMILTONIAN SYSTEMS

This section starts from basic considerations on energy and passivity. It progressively introduces and recalls the port-Hamiltonian (pH) formalism [120, 153, 52]. It also presents an illustrative example. It is shown how this structure guarantees the passivity of the model in the continuous time-domain.

### 6.2.1 Considerations on energy and passivity

Denote  $E(t) \geq 0$  the energy stored in an open physical system. If the system is autonomous and conservative, its time variation  $\frac{dE}{dt}(t)$  is zero. If the system is

controlled (non-autonomous) and conservative,  $\frac{dE}{dt}(t)$  is the power  $S(t)$  supplied by sources through external ports. For systems including dissipative phenomena with dissipated power  $D(t) \geq 0$ , the energy varies according to the power balance :

$$\frac{dE}{dt}(t) = S(t) - D(t). \quad (\text{C1})$$

Such systems are passive in the sense that  $\frac{dE}{dt} \leq S$ . In particular, if the sources are not activated,  $\frac{dE}{dt} \leq 0$ . The dynamic input-to-output behavior of such a system is the result of the power exchanges between isolated lumped or distributed components. For finite-dimensional systems, those components are sorted as (or can be a combination of) :  $n_E$  components that store energy  $E \geq 0$  (moving mass, capacitors),  $n_D$  components that dissipate power  $D \geq 0$  (mechanical damping, transistors),  $n_p$  external ports that convey power  $S$  ( $\in \mathbb{R}$ ) from sources (external forces, electrical batteries, etc) or any external system (active, dissipative or mixed). The behavior of each component is described by a relation between two sets of variables : flows  $f$  (velocities, currents, variations of magnetic flux, etc) and their associated efforts  $e$  (forces, voltages, magneto-motive forces, etc). All these quantities are defined in receiver convention, where  $P = f^T e$  denotes the power received by the components.

The energy level of a storage component  $n$  depends on an appropriate variable  $x_n$  (the elongation  $x_n = \ell$  for a spring, the charge  $x_n = q$  for a capacitor, the magnetic flux  $x_n = \phi$  for a coil, etc). This defines an energy function  $H_n$  ( $H_n(\ell) = (K\ell^2)/2$  for a linear spring with stiffness  $K$ ,  $H_n(q) = q^2/(2C)$  for a linear capacitor with capacitance  $C$ ,  $H_n(\phi) = \phi^2/(2L)$  for a linear coil with inductance  $L$ , etc). The total stored energy  $E$  is a function  $H$  of the state  $x = [x_1, \dots, x_{n_E}]^T$  given by the sum  $E = H(x) = \sum_{n=1}^{n_E} H_n(x_n)$ . The energy variation  $\frac{dE}{dt}$  in (C1) is related to the state  $x$  with

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{dx}{dt} \quad (\text{C2})$$

This variation is precisely the received power, that is sum of the products of flows and efforts for all the components  $\frac{dE}{dt} = f_E^T e_E$  with  $f_E = [f_1, \dots, f_{n_E}]^T$  and  $e_E = [e_1, \dots, e_{n_E}]^T$  (receiver convention). The external power supplied by sources is the sum of the products of flows and efforts localized at the ports (emitter convention), that is,  $S = f_{\text{ext}}^T e_{\text{ext}}$  with  $f_{\text{ext}} = [f_1, \dots, f_{n_p}]^T$  and  $e_{\text{ext}} = [e_1, \dots, e_{n_p}]^T$ . These flows  $f_{\text{ext}}$  and efforts  $e_{\text{ext}}$  can be rearranged in two vectors,  $u$  (considered as a system input) and  $y$  (the associated output). This means that  $(u_n, y_n) = (f_n, e_n)$  or  $(u_n, y_n) = (e_n, f_n)$  for each pair in  $(f_{\text{ext}}, e_{\text{ext}})$  and yields

$$S = u^T y. \quad (\text{C3})$$

Finally, relating the flows and efforts of dissipative components (receiver convention) to the state and port variables, and expressing the total dissipated power as a sum of their product yield

$$D(x, u) = \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}, \quad (\text{C4})$$

the positivity of which is conditioned by that of matrix  $R$ , which can depends on  $x$  (see section 6.2.3 for a simple example and sections 6.3 and 6.4 for the Rhodes piano).

### 6.2.2 State-space representation of port-Hamiltonian systems

The governing equations of a physical system relate the flows and the efforts introduced above. The port-Hamiltonian systems introduced in [120] (see also [153, 52, 177]) provide a formulation of such a class of equations for systems that fulfill the power balance (C1) with (C2), (C3) and (C4). A differential state-space representation is given by (see e.g. [52, eq 2.53]) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ -y \end{pmatrix}}_b = \underbrace{(J(x) - R(x))}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix}}_a, \quad (C5)$$

where  $H$  is the Hamiltonian,  $J$  is a skew-symmetric matrix ( $J^T = -J$  for all  $x$ ) and  $R$  is a positive semidefinite matrix ( $x^T R x \geq 0$  for all  $x$ ). The system matrices are structured as follows :

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_x(x) & G(x) \\ -G(x)^T & J_y(x) \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} R_x(x) & R_{xy}(x) \\ R_{xy}(x)^T & R_y(x) \end{pmatrix}, \quad (C6)$$

with skew-symmetric matrices  $J_x \in \mathbb{R}^{n_E \times n_E}$  and  $J_y \in \mathbb{R}^{n_P \times n_P}$ , positive semidefinite matrices  $R_x \in \mathbb{R}^{n_E \times n_E}$  and  $R_y \in \mathbb{R}^{n_P \times n_P}$ , and  $R_{xy}$  such that  $R$  is positive semidefinite.

As mentioned above, the pH system (C5–C6) fulfills the definition of passivity (see e.g. [96]), according to the following property.

**Property 6.1 (Power Balance)** *The variation of the total energy  $E = H(x)$  of a system governed by (C5–C6) is given by (C1), with total incoming power defined in (C3) and total dissipated power (C4).*

**Preuve** From the above definitions, we have  $a^T b = \frac{dE}{dt} - S$  and  $a^T b = -D$  since  $a^T M a = - \left( \begin{array}{c} \nabla H(x) \\ u \end{array} \right)^T R \left( \begin{array}{c} \nabla H(x) \\ u \end{array} \right)$  from skew-symmetry of  $J$ .

**Remark B1 (Passivity, Lyapunov stability and numerical stability)** *A main interest of port-Hamiltonian systems is that they satisfy property 6.1, which ensures Lyapunov stability stemming from passivity. In short, for a state space representation  $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ ,  $y = g(x, u)$  (with  $\dim(u) = \dim(y)$ ) and storage function  $H$ , passivity means that  $\frac{dH(x)}{dt} \leq y^T u = S$ . Property 6.1 ensures this inequality. This implies that if the excitation stops ( $u = 0$  so that  $S = 0$ ), the storage function  $H$  stops increasing. More precisely,  $E = H(x)$  is constant in the conservative case ( $D = 0$ ) and it decreases in the dissipative case ( $D > 0$ ). In these cases, the LaSalle invariance principle states that the trajectory  $t \mapsto x(t)$  tends toward the maximal invariant subspace  $S$  as  $t \rightarrow +\infty$ , with*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n_E} \text{ s.t. } \nabla H(x)^T f(x, u = 0) = 0\}. \quad (C7)$$

*Then, the Lyapunov theorem ensures the system stability as far as  $H$  is positive definite (see also [96, §4.1, 4.2 and 6.2] for details). If  $H$  is not definite,  $S$  provides the set of reachable asymptotic states. This property can be transferred to simulations, based on the numerical method presented in section 6.5 that preserves the power balance in the discrete time domain.*

### 6.2.3 Example

**In the sequel, for sake of readability, constant values are denoted by capital letters.**

Consider the linear mass-spring-damper system depicted in figure 6.3, where gravity is neglected. The mass position is denoted  $q$ , with  $q = 0$  the spring equilibrium. The system is excited by an external force ( $f_{\text{ext}}$ ).

This system includes  $n_E = 2$  storage components,  $n_p = 1$  external port and  $n_D = 1$  dissipative component. The storage components are : mass  $M$  with momentum  $x_1 = \frac{d(Mq)}{dt}$  and kinetic energy  $H_1(x_1) = x_1^2/(2M)$ , and spring  $K$  with elongation  $x_2 = q$  and potential energy  $H_2(x_2) = (Kx_2^2)/2$ . The external port is made of one input  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\text{ext}} = f_{\text{ext}}$  (external force) and one output  $\mathbf{y} = \frac{dq}{dt}$ . The dissipative component is the damper with dissipated power  $D_A(\mathbf{x}) = H'_1(x_1)AH'_1(x_1) = A\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$ . For the mass,  $f_M = \frac{dx_1}{dt} = M\frac{d^2q}{dt^2}$  is the fictitious force (effort  $\mathbf{e}_1$ ) and  $H'_1(x_1) = \frac{dq}{dt}$  is the velocity (flow  $\mathbf{f}_1$ ). For the spring,  $\frac{dx_2}{dt} = \frac{dq}{dt}$  is the velocity (flow  $\mathbf{f}_2$ ) and  $f_K = H'_2(x_2) = Kq$  is the restoring force (effort  $\mathbf{e}_2$ ). For the damper, the counteracting force is  $f_A = A\frac{dq}{dt}$  so that the associated effort is  $\mathbf{e}_A = AH'_1(x_1)$ .

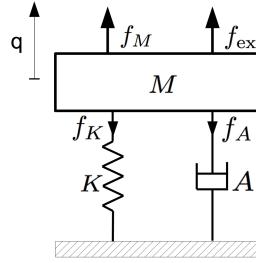


FIGURE 6.3 : Damped harmonic oscillator with excitation.

Applying Newton's second law to this simple system yields

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ -\mathbf{f}_{\text{ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{\text{ext}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C8})$$

From the constitutive laws of components, this equation exactly restores formulation (C5–C6), block by block. This is summarized in table A1.

State : $\mathbf{x} = \left(M\frac{dq}{dt}, q\right)^\top$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{Kx_2^2}{2}$
Input : $\mathbf{u} = f_{\text{ext}}$	Output : $\mathbf{y} = \frac{dq}{dt}$
$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$	

TABLE A1 : Port-Hamiltonian formulation (C5–C6) for the example (C8).

### 6.3 MODELS OF COMPONENTS

This section presents the multi-physical components that compose each note of a Rhodes piano : (h) a hammer in § 6.3.1, (b) a cantilever beam in § 6.3.2 and (p) a pickup connected to a RC analog filter in § 6.3.3. The hammer h is a nonlinear hysteretic model proposed in [162]. This finite-dimensional system is associated with a non-quadratic energy and a nonlinear damping. The beam b is a linear damped Euler-Bernoulli model [68], [95, §4.9]. A model order reduction of this infinite-dimensional model is derived, based on a standard modal decomposition. The pickup p is a finite-dimensional nonlinear model [121]. It is composed of one constant magnetic source (magnet), two linear components that stores energy (coil and capacitor), one linear resistor and one electrical port that delivers the output signal (voltage). Contrarily to the hammer, the nonlinearity of the pickup only comes from the magnetic flux induced in the coil due to the movement of the beam extremity. The models of these three components prove passive so that they admit port-Hamiltonian formulations.

#### 6.3.1 Hammer h

The hammer is composed of a rigid core that is covered by a deformable felt. In this paper, its modeling is inspired from that proposed in [162] and used in e.g. [58, 65, 30] for the acoustic piano. This model describes nonlinear elastic phenomena (see e.g. [63, 17] for experimental validations) and nonlinear damping phenomena [161]. This combination yields realistic nonlinear hysteretic effects that account for the shape memory of the felt.

**GOVERNING EQUATIONS** Denote  $q_{\text{cont}}(t)$ ,  $q_{\text{core}}(t)$  and  $L_h$ , the position of a contact point, the top position of the core and the thickness of the felt at rest, respectively, in an inertial frame of reference (see figure 6.4). For the felt, the crushed thickness is 0 if  $q_{\text{core}}(t) + L_h \leq q_{\text{cont}}(t)$  and is

$$q_h(t) = q_{\text{core}}(t) + L_h - q_{\text{cont}}(t) \quad (\text{C9})$$

otherwise, so that the crushed rate is given by

$$c_h(q_h) = \frac{\max(q_h, 0)}{L_h}. \quad (\text{C10})$$

The elastic force  $f_h^{\text{elast}}$  and the damping force  $f_h^{\text{damp}}$  due to the felt are nonlinear functions of the crush rate given by

$$\begin{aligned} f_h^{\text{elast}}(c_h) &= F_h c_h^{B_h}, \\ f_h^{\text{damp}}(c_h) &= A_h L_h \frac{d(c_h^{B_h})}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{C11})$$

where the inertial force of the felt is neglected and parameters are detailed in table A2. The hammer core can be considered as a mass  $M_h$  submitted to the felt force  $-(f_h^{\text{elast}} + f_h^{\text{damp}})$  and actuated by an external force  $f_{\text{ext}}^{\text{core}}$  (see [73]). Its governing equation is

$$M_h \frac{d^2 q_{\text{core}}}{dt^2} = -f_h^{\text{elast}}(c_h(q_h)) - f_h^{\text{damp}}(c_h(q_h)) + f_{\text{ext}}^{\text{core}}. \quad (\text{C12})$$

The mobile contact point with velocity  $v_{\text{ext}}^{\text{cont}} = \frac{dq_{\text{cont}}}{dt}$  experiences the reaction force  $f_h^{\text{elast}} + f_h^{\text{damp}}$  so that the force exerted by the contact point on the felt is  $f_{\text{ext}}^{\text{cont}} = -(f_h^{\text{elast}} + f_h^{\text{damp}})$ , and the mechanical power provided to the system is  $P_{\text{cont}} = f_{\text{ext}}^{\text{cont}} v_{\text{ext}}^{\text{cont}}$ .

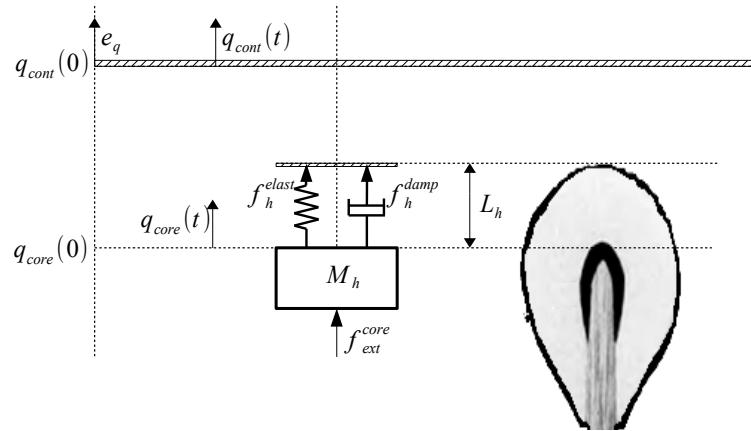


FIGURE 6.4 : Mass-spring-damper model of the hammer and notations.

Label	Description	Typical value	Unit
$M_h$	Total mass	$3 \times 10^{-2}$	Kg
$L_h$	Felt thickness at rest	$15 \times 10^{-3}$	m
$B_h$	Felt characteristic exponent	2.5	Dimensionless
$F_h$	Elastic characteristic force	13.8	N
$A_h$	Felt damping coefficient	0.184	N.s.m <sup>-1</sup>

TABLE A2 : Physical parameters for the hammer h. These parameters correspond to typical values found in [17, 162] or [29, (I.2.2)] with formula  $f_h^{\text{elast}} \equiv Ke^p$ ,  $f_h^{\text{damp}} \equiv R \frac{d(e^p)}{dt}$  and  $e = L_h c_h$ , that is,  $p = B_h = 2.5$ ,  $K = L_h^{-B_h} F_h = 5 \times 10^5$  N.m<sup>-2.5</sup> and  $R = L_h^{1-B_h} A_h = 100$  N.s.m<sup>-2.5</sup>.

**POR-T-HAMILTONIAN FORMULATION** The port Hamiltonian system of the hammer is derived as in example 6.2.3. For the mass of the core, the state is the momentum  $x_{h,1} = \frac{dM_h q_{\text{core}}}{dt}$  with associated kinetic energy

$$H_{h,1}(x_{h,1}) = \frac{x_{h,1}^2}{2M_h}. \quad (\text{C13})$$

For a spring, the potential energy is given by  $H_{\text{spring}}(q) = \int_0^q f_{\text{spring}}(\xi) d\xi$ . In example 6.2.3, the spring is symmetric and linear ( $f_{\text{spring}}(q) = Kq$ ) so that  $H_{\text{spring}}(q) = Kq^2/2$  is quadratic. For the hammer felt, the spring is non-symmetric (C10) and non-linear (C11) so that the associated Hamiltonian  $H_{h,2}$  is a non-even and non-quadratic function of the state  $x_{h,2} = q_h$ :

$$H_{h,2}(x_{h,2}) = \frac{L_h F_h}{B_h + 1} c_h(x_{h,2})^{B_h + 1}. \quad (\text{C14})$$

The flows and efforts of the system are derived as follows. For the mass,  $\frac{dx_{h,1}}{dt} = \frac{d^2(M_h q_{\text{core}})}{dt^2}$  is the inertial force (effort, label  $\epsilon_{h,1}$ ) and  $H'_{h,1}(x_{h,1}) = \frac{d}{dt} q_{\text{core}}$  is the velocity (flow, label  $f_{h,1}$ ). For the spring,  $\frac{dx_{h,2}}{dt} = \frac{dq_h}{dt}$  is homogeneous to a velocity (flow  $f_{h,2}$ ) and  $H'_2(x_{h,2}) = f_h^{\text{elast}}(c_h(q_h))$  is the spring force (effort  $\epsilon_{h,2}$ ). For the damper, the damping force is  $f_h^{\text{damp}}(q_h) = \frac{A_h L_h}{B_h} c_h(q_h)^{B_h - 1} \frac{dq_h}{dt}$  so that the effort is  $\epsilon^{\text{damp}} = r_h(x_{h,2})(H'_{h,1}(x_{h,1}) - v_{\text{ext}})$  with

$$r_h(q_h) = \frac{A_h L_h}{B_h} c_h(q_h)^{B_h - 1}. \quad (\text{C15})$$

The pH system of the hammer has two external ports. One is associated with the core velocity  $\frac{dq_{\text{core}}}{dt}$  (flow  $f_{h,3} = f_{h,1}$ ) and the associated external force  $f_{\text{ext}}^{\text{core}}$  (effort  $e_{h,3}$ ). The other one is associated with the contact point velocity  $v_{\text{ext}}^{\text{cont}}$  (flow  $f_{h,4}$ ) and the associated external force  $f_{\text{ext}}^{\text{cont}}$  (effort  $e_{h,4} = -e_{h,2} - e^{\text{damp}}$  so that  $f_{h,4} e_{h,4}$  is the power provided by the contact point to the system). Inputs and outputs are chosen to be  $\mathbf{u}_h = (e_{h,3}, f_{h,4})$ ,  $\mathbf{y}_h = (f_{h,3}, e_{h,4})$ . This choice restores the governing equation (C12), summarized in table A3.

<p>State :</p> $\mathbf{x}_h = \left( \frac{d}{dt}(M_h q_{\text{core}}), q_h \right)^T$	<p>Energy :</p> $H_h(\mathbf{x}_h) = H_{h,1}(x_{h,1}) + H_{h,2}(x_{h,2})$
<p>Input :</p> $\mathbf{u}_h = (f_{\text{ext}}^{\text{core}}, v_{\text{ext}}^{\text{cont}})^T$	<p>Output :</p> $\mathbf{y}_h = \left( \frac{d}{dt}q_{\text{core}}, f_{\text{ext}}^{\text{cont}} \right)^T$
$\mathbf{J} = \left( \begin{array}{cc cc} 0 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{R} = \left( \begin{array}{cc cc} +r_h(x_{h,2}) & 0 & 0 & -r_h(x_{h,2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_h(x_{h,2}) & 0 & 0 & +r_h(x_{h,2}) \end{array} \right).$	

TABLE A3 : Port-Hamiltonian formulation (C5–C6) for the hammer (see (C9) and (C13–C15) for definitions). In this case, the invariant subspace (C7) is described by (C13–C14) with (C10), that is,  $S_h = \{x_h \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } [x_h]_1 = 0, [x_h]_2 \leq 0\}$ . Inequality  $[x_h]_2 \leq 0$  is due to the fact that the hammer position goes to minus infinity with constant velocity ( $[x_h]_1 = 0$ ), after it has rebounded on the contact point.

### 6.3.2 Beam b

In this paper, the standard Euler-Bernoulli modeling of damped cantilever beam b is used, which results in a linear partial-differential equation (see e.g. [68]). To cope with numerical realizability, we firstly apply a standard modal decomposition and recast the resulting set of ordinary differential equations as a finite dimensional pH system (see [115] and particularly [180, § 1.3] for infinite dimensional pH description). This contrasts with the finite-element spatial discretization [35] considered in e.g. [30, 46, 13, 14].

EULER-BERNOULLI MODELING Denoting  $z \in (0, L_b)$  the spatial coordinate along the beam, the Euler-Bernoulli modeling [68], [95, §4.9] of transverse deflect  $q(z, t)$  is

$$M_b \frac{d^2q}{dt^2} + A_b \partial_t q + K_b \partial_z^4 q = f_b \quad (\text{C16})$$

where parameters are detailed in table A4. Initial conditions are  $q(z, 0) = 0$  and  $\frac{dq}{dt}(z, 0) = 0$ . The configuration space of the deflect  $q$  is a Hilbert space  $\mathbb{H} = L^2(0, L_b)$ . The bounded inertia operator and damping operator associated with (C16) are  $\mathcal{M} = M_b \mathcal{I}$  and  $\mathcal{C} = A_b \mathcal{I}$ , respectively, where  $\mathcal{I}$  denotes the identity operator. The stiffness operator is  $\mathcal{K}q = K_b \partial_z^4 q$  with domain  $\mathcal{D}(\mathcal{K}) = \{q \in H^4(0, L_b) \text{ s.t. } q(0) = 0, \partial_z q(0) = 0, \partial_z^2 q(L_b) = 0, \partial_z^3 q(L_b) = 0\}$  ( $H^4$  denotes the

standard Sobolev space), that includes the boundary conditions for a cantilever beam, namely : (i) no displacement at the base  $q(0, t) = 0$ , (ii) no bending at the base  $\partial_z q(0, t) = 0$ , (iii) no bending moment at the free end  $\partial_z^2 q(1, t) = 0$ , (iv) no shearing force acting at the free end  $\partial_z^3 q(1, t) = 0$ . Operator  $\mathcal{K}$  fulfills standard well-posedness properties such as being densely defined, closed, unbounded and self-adjoint on the Hilbert space  $\mathbb{H}$  (see [38, §2] for technical details, [95, §4.9] for the details on the cantilever beam and [77, §4 and 5] for a complete functional setting of the Euler-Bernouilli modeling with free ends in the port-Hamiltonian formalism). The total mechanical energy is [123, §7] :

$$E_b = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \left( K_b \left( \partial_z^2 q \right)^2 + M_b \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 \right) dz. \quad (\text{C17})$$

Label	Description	Typical value	Unit
$M_{\text{steel}}$	Mass density	7750	$\text{kg.m}^{-3}$
$E_{\text{steel}}$	Young Modulus	$180.10^{-9}$	$\text{N.m}^{-2}$
$R_b$	Radius	$10^{-3}$	m
$A_b$	Damping coefficient	$5.10^{-2}$	$\text{N.s}^{-1}$
$F_b$	Tuning frequency	440	Hz
$M_b$	Mass per unit length	$\pi R_b^2 M_{\text{steel}}$	$\text{kg.m}^{-1}$
$I_b$	Moment of inertia	$\frac{\pi}{4} R_b^4$	$\text{m}^4$
$K_b$	Flexural rigidity	$E_{\text{steel}} I_b$	$\text{N.m}^2$
$L_b$	Length	$5.54.10^{-2}$	m

TABLE A4 : Fixed and deduced physical parameters for a cylindrical beam b. The moment of inertia of the cross section is given for a cylindrical shape. The length for the desired tone  $\omega_b = 2\pi F_b$  is obtain from a numerical evaluation of (C18) with  $\kappa_m = \sqrt[4]{\omega_m^2 M_b / K_b}$  the dispersion relation.

**FINITE DIMENSIONAL APPROXIMATION** The linear boundary value problem (C16) admits an orthogonal basis of eigenfunctions  $B = \{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}_*}$  on the Hilbert space  $\mathbb{H}$ . Functions  $\psi_m$  are the spatial modes, detailed in 6.7.1. They satisfy the boundary conditions (i-iv),  $\partial_z^4 \psi(z) = \kappa^4 \psi(z)$  for appropriate wave number  $\kappa$  and  $\langle \psi_m, \psi_p \rangle = \delta_{m,p}$  (Kronecker's symbol) for all  $(m, p) \in \mathbb{N}_*^2$ , where the scalar product on  $\mathbb{H}$  is defined by  $\langle f, g \rangle = \int_0^{L_b} f(z)g(z)dz$ . Wave numbers  $\kappa_m$  are the solutions of

$$\cosh(\kappa_m L_b) \cos(\kappa_m L_b) + 1 = 0, \quad (\text{C18})$$

with increasing modulus with respect to the index  $m \in \mathbb{N}^*$ .

The projection of the force  $f_b^{\text{ext}}$  located at  $z_h$  and distributed according to  $\sigma_h(z) = \frac{1}{D_h} \mathbf{1}(z - z_h)_{[-D_h/2, +D_h/2]}$  on the basis B is  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)^\top = \Omega f_b^{\text{ext}}$  with  $\Omega = \langle \sigma_h, \Psi \rangle$  for  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_M)^\top$  (see 6.7.2). The relations satisfied by the modal displacements  $\mathbf{q}_b = \langle q, \Psi \rangle$  are obtained by projecting equation (C16) on base B. This yields the following ordinary differential equations :

$$M_b \frac{d^2 \mathbf{q}_b}{dt^2} + A_b \frac{d\mathbf{q}_b}{dt} + K_b \mathbf{L} \mathbf{q}_b = \mathbf{f} = \Omega f_b^{\text{ext}}, \quad (\text{C19})$$

with  $\mathbf{L} = \text{diag}(\kappa_1^4, \dots, \kappa_M^4)$ , which rewrites  $\frac{d\mathbf{x}_b}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}\mathbf{u}_b$  with input  $\mathbf{u}_b = f_b^{\text{ext}}$ , state  $\mathbf{x}_b = \left( \mathbf{q}_b^\top, M_b \frac{d\mathbf{q}_b}{dt} \right)^\top$ ,  $\mathbf{B} = (0, \Omega^\top)^\top$  and

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \emptyset & \frac{1}{M_b} \mathbf{I}_d \\ -K_b \mathbf{L} & -\frac{A_b}{M_b} \mathbf{I}_d \end{pmatrix},$$

where  $\emptyset$  denotes the null matrix and  $\mathbf{I}_d$  denotes the identity matrix.

**POR-T-HAMILTONIAN FORMULATION** The power provided by the external force  $f_b^{\text{ext}}$  is the product of the later with the collocated velocity  $v_b^{\text{ext}}$  reconstructed from the modal velocities  $v_b^{\text{ext}} = \Omega^\top \frac{d\mathbf{q}_b}{dt}$ . This yields to select the output  $\mathbf{y}_b = v_b^{\text{ext}} = \mathbf{B}^\top \nabla H_b$  so that the incoming power is  $P = \mathbf{y}_b^\top \mathbf{u}_b = \int_0^{L_b} \mathbf{y}_b^\top \Psi \Psi^T \mathbf{u}_b dz$  (with  $\mathbf{u}_b = f_b^{\text{ext}}$ ). From (C17) and the modal reconstruction  $q = \mathbf{q}_b^\top \Psi$ , the total energy of the beam is the Hamiltonian  $H_b(\mathbf{x}_b) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_b^\top \mathbf{W} \mathbf{x}_b$ , with

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} K_b \mathbf{L} & \emptyset \\ \emptyset & M_b^{-1} \mathbf{I}_d \end{pmatrix}. \quad (\text{C20})$$

The resulting port-Hamiltonian system is given in table A5.

State : $\mathbf{x}_b = \left( \mathbf{q}_b, M_b \frac{d\mathbf{q}_b}{dt} \right)^\top$	Energy : $H_b(\mathbf{x}_b) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_b^\top \mathbf{W} \mathbf{x}_b$
Input : $\mathbf{u}_b = f_b^{\text{ext}}$	Output : $\mathbf{y}_b = v_b^{\text{ext}}$
$\mathbf{J} = \left( \begin{array}{cc c} \emptyset & \mathbf{I}_d & \emptyset \\ -\mathbf{I}_d & 0 & \Omega \\ \hline \emptyset & -\Omega^\top & 0 \end{array} \right), \mathbf{R} = \left( \begin{array}{cc c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_b \mathbf{I}_d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$	

TABLE A5 : Port-Hamiltonian formulation (C5–C6) for the Euler-Bernoulli beam (see (C20) for definition of  $\mathbf{W}$ ). In this case, the invariant subspace (C7) is  $S_b = \{\emptyset\} \subset \mathbb{R}^{2M}$ .

### 6.3.3 Pickup p

The electromagnetic pickup p includes a magnet (source of constant magnetic field  $B_p^{\text{mag}}$ ) and a coil with  $N_{\text{coil}}$  wire turns (sensor for the magnetic field variation). In this paper, the physical modeling is that proposed for electric guitar pickups in [121], adapted for the system depicted in figure 6.6 (see also the physical model in [81], and physically inspired signal processing modules in [132, 143]). In short, a piece of magnetic material (here the beam) changes the spatial distribution of the magnetic field due to the magnet only, hence a change to the flux in the coil  $\phi_p$ . Additionally, the coil is connected to a linear RC circuit, so that its total flux is  $\phi_{\text{coil}} = \phi_p + \phi_{\text{RC}}$  with  $\frac{d\phi_{\text{RC}}}{dt} = \frac{v_{\text{coil}}}{N_{\text{coil}}}$  (Faraday's law of induction with coil voltage  $v_{\text{coil}}$ ).

First, the coil is modeled as a magnetic capacity in the magnetic domain according to the gyrator-capacitor approach [71, 72]. Second, we recall the main steps

in the derivation of the flux  $\phi_p$  from [121] for the system in figure 6.6. Third, the coil is connected to the RC circuit and the resulting model is recast as a port-Hamiltonian system.

**MAGNETO-ELECTRIC TRANSDUCER** According to the gyrator-capacitor approach detailed in [71, 72], we adopt the magnetic flux variation  $\frac{d\phi}{dt}$  and the magnetomotive force  $h$  as magnetic flow and effort variables, respectively ( $\frac{dh}{dt} \equiv P$ ). This permits to model the coil as a linear magnetic capacity :  $x_{coil} = \phi_{coil}$  and  $\psi_{coil} = H'_{coil}(x_{coil})$  with  $H_{coil}(x_{coil}) = \frac{1}{2C_{coil}}x_{coil}^2$ . The connection to the electrical domain with  $v_{coil}$  the tension and  $i_{coil}$  the current through the coil is obtained from the combination of Ampere's theorem ( $\psi_{coil} = N_{coil}i_{coil}$ ) and Faraday's law ( $v_{coil} = N_{coil}\frac{d\phi_{coil}}{dt}$ ), yielding a magneto-electric gyrator with ratio  $\frac{1}{N_{coil}}$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi_{coil}}{dt} \equiv \frac{dx_{coil}}{dt} \\ -i_{coil} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N_{coil}} \\ -\frac{1}{N_{coil}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{coil} \equiv H'_{coil}(x_{coil}) \\ v_{coil} \end{pmatrix}. \quad (\text{C21})$$

Notice this connection is conservative :  $v_{coil}i_{coil} = \psi_{coil}\frac{d\phi_{coil}}{dt}$ .

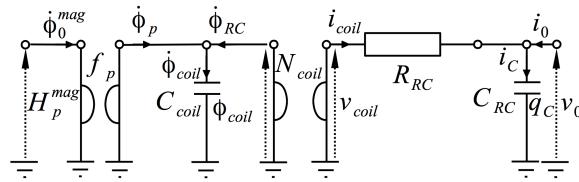


FIGURE 6.5 : Schematic of the pickup connected to the RC circuit, with  $h_0$  the constant magnetomotive force due to the magnet,  $f_p$  as in equation (C25) and  $L$  the magnetic capacitance of the coil with  $N_{coil}$  wire turns. The input current is  $i_0 = 0$  (high resistive load).

Label	Description	Typical value	Unit
$B_p$	Magnetic field of the magnet	$\pi 4.10^{-7}$	T
$U_0$	Magnetic permeability of vacuum	$\pi 4.10^{-7}$	$\text{H.m}^{-1}$
$U_{\text{steel}}$	Magnetic permeability of steel	$5.10^{-3}$	$\text{H.m}^{-1}$
$C_{\text{coil}}$	Magnetic capacity	$3.07.10^{-5}$	H
$R_p$	Coil radius	$5.10^{-3}$	m
$L_{\text{hor}}$	Horizontal decay	$10^{-2}$	m
$L_{\text{ver}}$	Vertical decay	$10^{-3}$	m
$N_{\text{coil}}$	Number of wire turns	100	Dimensionless
$R_{\text{RC}}$	Electrical resistance	$10^3$	$\Omega$
$C_{\text{RC}}$	Electrical capacity	$33.10^{-8}$	F
$U_{\text{rel}}$	Relative magnetic permeability of steel	$\frac{U_{\text{steel}}}{U_0}$	Dimensionless

TABLE A6 : Physical parameters for the pickup p.

**MECHANO-MAGNETIC TRANSDUCER** The two dimensional modeling proposed in [121] for the electric guitar pickup is recalled thereafter. A vibrating sphere with radius  $A_b$  (same as the beam) is immersed in a constant magnetic induction

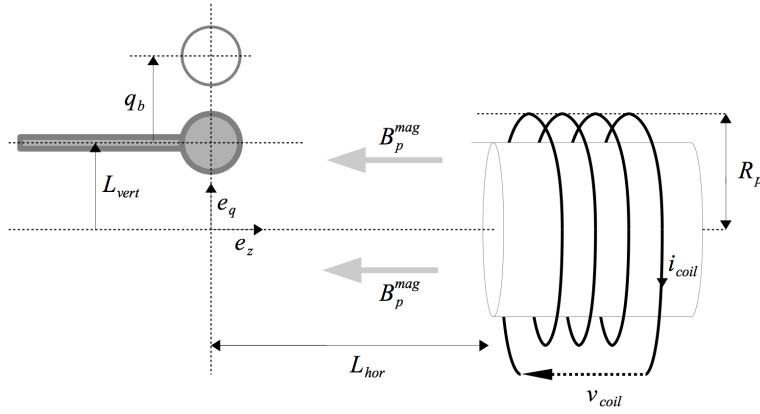


FIGURE 6.6 : Description of the pickup.  $q_p(t)$  is the position of the end of the beam measured from its rest position,  $L_{ver}$  is a vertical decay,  $q_c$  is the position of the center of the magnet from the origin of the frame associated with the beam,  $L_{hor}$  is the distance between the coil and the beam,  $R_p = \frac{a^2}{2}$  is the radius of the coil.

field  $B_p^{\text{mag}}$  due to the magnet. Since there is no conducting current, the total magnetic excitation field is irrotational and derives from a magnetic potential. The magnetization of the sphere with relative magnetic permeability  $U_{\text{rel}}$  results in an additional term to the potential due to the magnet only. The integration of the total magnetic field over the area bounded by a single wire turn yields the following magnetic flux (see coordinate system and description in figure 6.6) :

$$\phi_p = 4B_p^{\text{mag}}R_p^2 \left( 4R_p^3 \Delta_U \left( f_\phi(-(q_p + L_{ver})) + f_\phi(q_p + L_{ver}) \right) - 1 \right), \quad (\text{C22})$$

$$f_\phi(q_p) = \frac{q_p + R_p}{L_{hor}^2 + (q_p + R_p)^2}, \quad (\text{C23})$$

where  $q_p(t)$  is the vertical displacement measured from rest position defined as  $(L_{hor}, L_{ver})$  and  $\Delta_U = \frac{U_{\text{rel}}-1}{U_{\text{rel}}+1}$ . The induced tension depends on the flux variation, which reads

$$\frac{d\phi_p}{dt} = f_p \left( q_p, \frac{dq_p}{dt} \right) H_p^{\text{mag}} \quad (\text{C24})$$

$$f_p \left( q_p, \frac{dq_p}{dt} \right) = 2a_b^2 U_0 \Delta_U R_p \left( \frac{f_1(q_p) - 2L_{hor}^2}{f_1^2(q_p)} - \frac{f_2(q_p) - 2L_{hor}^2}{f_2^2(q_p)} \right) \frac{dq_p}{dt} \quad (\text{C25})$$

$$f_1(q_p) = (q_p - R_p + L_{ver})^2 + L_{hor}^2, \quad (\text{C26})$$

$$f_2(q_p) = (q_p + R_p + L_{ver})^2 + L_{hor}^2. \quad (\text{C27})$$

Notice the movement of the sphere is not affected by the magnetic field. Finally, the system composed of the magnet, the coil and the moving sphere is modeled as a constant source of magneto-motive force  $H_p^{\text{mag}} = \frac{B_p^{\text{mag}}}{U_0}$ , connected to a gyrator modulated by the sphere position and velocity :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi_p}{dt} \\ -\frac{d\phi_0^{\text{mag}}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_p \\ -f_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\text{coil}} \\ H_p^{\text{mag}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C28})$$

**POR-T-HAMILTONIAN MODELING** The port-Hamiltonian modeling of the pickup connected to the RC circuit is made of two storage components (magnetic and electric capacitances with magnetic flux  $\phi_{\text{coil}}$  and electric charge  $q_C$  as respective states), one resistive element (electric resistance  $R_{\text{RC}}$ ) and two ports (constant

magnetomotive force due to the magnet  $H_p^{\text{mag}}$  and zero input current [81]). The nonlinearity of this system is only due to the modulating coefficient  $f_p$  in gain matrix  $\mathbf{G}$ . The resulting port-Hamiltonian system is given in table A7.

State : $\mathbf{x}_p = (\phi_{\text{coil}}, q_C)^\top$	Energy : $H_p(\mathbf{x}_p) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_p^\top \text{diag}(C_{\text{coil}}, C_{\text{RC}}) \mathbf{x}_p$
Input : $= (H_p^{\text{mag}}, i_0)^\top$	Output : $\mathbf{y}_b = \left( \frac{d\phi_0^{\text{mag}}}{dt}, v_0 \right)^\top$
$\mathbf{J} = \left( \begin{array}{cc cc} 0 & -\frac{1}{N_{\text{coil}}} & f_p \left( q_p, \frac{dq_p}{dt} \right) & 0 \\ \frac{1}{N_{\text{coil}}} & 0 & 0 & 1 \\ -f_p \left( q_p, \frac{dq_p}{dt} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right),$ $\mathbf{R} = \left( \begin{array}{cc cc} \frac{R_{\text{RC}}}{N_{\text{coil}}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$	

TABLE A7 : Port-Hamiltonian formulation (C5–C6) for the pickup p, with  $\phi_{\text{coil}}$  the magnetic flux in the coil,  $q_C$  the charge of the capacitor,  $H_p^{\text{mag}}$  the magnetomotive force imposed by the magnet and  $v_0$  the output voltage (see figure 6.5). The expression for  $f_p$  is given in equation (C25), with  $q_p$  the reconstruction of deflect measured at the beam free end ( $z = L_b$ ). In this case, the invariant subspace (C7) is  $S_p = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

#### 6.4 COMPLETE SYSTEM

In this section we derive the global port-Hamiltonian modeling of the system  $(h, b, p)$  from the interconnection of the elementary pH systems derived in section 6.3. First we connect the mechanical components  $(h, b)$  and second the pickup which is not energetically but geometrically coupled to the former part. Notice the connection of two pH systems is again a pH system (see [28]). The total state is the concatenation of the subsystems states, and the total Hamiltonian is the sum of the subsystems Hamiltonians. A conservative interconnection is then achieved by connecting each port of one system to exactly one port of the other.

The connection of the hammer with the beam is as follows. The velocity of the contact point  $v_{\text{ext}}^{\text{cont}}$  that corresponds to the second input of the hammer (see table A3) is the reconstruction of the beam velocity  $v_b^{\text{ext}}$ , that is, the output of the beam (see table A5) :  $v_{\text{ext}}^{\text{cont}} = (\emptyset, \Omega^\top) \nabla H_b(\mathbf{x}_b)$ . Correspondingly, the input force of the beam is the force experienced by the contact point of the hammer  $f_b^{\text{ext}} = -f_{\text{ext}}^{\text{cont}}$ . This yields the following relations (see tables A3 and A5) :

$$\begin{cases} [\mathbf{u}_h]_2 = [\mathbf{y}_b]_1 = (\emptyset, \Omega^\top) \nabla H_b(\mathbf{x}_b), \\ [\mathbf{u}_b]_1 = -[\mathbf{y}_h]_2 = (r_h(x_{h,2}), 1) \nabla H_h(\mathbf{x}_h) - r_h(x_{h,2}) (\emptyset, \Omega^\top) \nabla H_b(\mathbf{x}_b). \end{cases} \quad (\text{C29})$$

Notice this yields a passive interconnection in the sense that the power lost by the hammer is exactly that received by the beam  $[\mathbf{u}_b]_1 [\mathbf{y}_b]_1 = -[\mathbf{u}_h]_1 [\mathbf{y}_h]_1$ . The connection (C29) is then replaced in the diagonal concatenation of structure matrices  $\mathbf{J}$  and  $\mathbf{R}$  from tables A3 and A5.

As already stated, the mechanical part is not energetically coupled to the electromagnetic part, and the complete modeling is obtained by concatenating the interconnection (h, b) with the pickup p. The arguments of the modulation coefficient  $f_p \left( q_p, \frac{dq_p}{dt} \right)$  (see table A7) is obtained from the reconstruction of the movement of the beam free end with  $q_p = q(L_b)$ . Finally, the port-Hamiltonian modeling of the system depicted in figure 6.2 is given in table A8.

State : $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_h^\top, \mathbf{x}_b^\top, \mathbf{x}_p^\top)^\top$	Energy : $H(\mathbf{x}) = H_h(\mathbf{x}_h) + H_b(\mathbf{x}_b) + H_p(\mathbf{x}_p)$
Input : $\mathbf{u} = (f_{\text{ext}}^{\text{core}}, H_p^{\text{mag}}, i_0)^\top$	Output : $\mathbf{y} = \left( \frac{dq_h}{dt}, \frac{dq_b^{\text{mag}}}{dt}, v_0 \right)^\top$
$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\Omega^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_d & 0 & 0 \\ 0 & \Omega & -\mathbf{I}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{N_{\text{coil}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{N_{\text{coil}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_p(q_p, \frac{dq_p}{dt}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} r_h(x_{h,2}) & 0 & 0 & -r_h(x_{h,2})\Omega^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_h(x_{h,2})\Omega & 0 & 0 & A_b \mathbf{I}_d + \Omega r_h(x_{h,2})\Omega^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{\text{RC}}}{N^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$	

TABLE A8 : Port-Hamiltonian formulation (C5–C6) for the complete system (h, b, p, RC) (see tables A3, A5 and A7 for definitions), where unspecified matrices are zeros. Here, the invariant subspace (C7) is the union of the invariant sets of the components so that  $S_{\text{rhodes}} = S_h \times S_b \times S_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2+2+2M} \text{ s.t. } [\mathbf{x}]_2 \leq 0, [\mathbf{x}]_i = 0, i \neq 2\}$ , that is, the hammer goes to minus infinity with constant velocity after it has rebounded on the beam, and the latter with pickup circuit return to equilibrium.

## 6.5 GUARANTEED PASSIVE NUMERICAL METHOD

Numerous numerical methods have been developed to simulate dynamical systems governed by  $\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{f}(x(t), t)$ , to approximate the solution  $x(t_k)$ , on e.g. a regular grid defined by  $t_k = kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Many of these methods are based on an approximation of  $\frac{dx}{dt}$  and exploit the vector field  $\mathbf{f}$  at specific instants  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , but do not preserve passivity. This section introduces a method that preserves

the power balance (C1) in the discrete time-domain, so that a numerical power balance holds :

$$\frac{E(t_{k+1}) - E(t_k)}{T} = -D(t_k) + S(t_k). \quad (\text{C30})$$

The approach presented below is known as the discrete gradient method introduced for classical Hamiltonian systems in [87] (see also [141, 122] and [24, §4.3]).

### 6.5.1 Numerical scheme

Standard first order approximation of the differentials  $d\mathbf{x}(t, dt) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \cdot dt$  and  $dH(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \nabla H(\mathbf{x})^\top \cdot d\mathbf{x}$  are given by  $\delta\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)$ , and

$$\delta H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}) = \nabla_d H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})^\top \cdot \delta\mathbf{x},$$

respectively. For mono-variate storage components with  $H(\mathbf{x}(t_k)) = \sum_{n=1}^{N_E} H_n(x_n(t_k))$  (this is the case for the system described in table A8), a discrete gradient is introduced and defined by

$$[\nabla_d H(\mathbf{x}(t_k), \delta\mathbf{x}(t_k))]_n = \begin{cases} \frac{H_n(x_n(t_k) + \delta x_n(t_k)) - H_n(x_n(t_k))}{\delta x_n(t_k)} & \text{if } \delta x_n(t_k) \neq 0, \\ H'_n(x_n(t_k)) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (\text{C31})$$

so that a discrete chain rule is recovered

$$\frac{\delta E(t_k)}{T} = \bar{\nabla} H(\mathbf{x}(t_k), \delta\mathbf{x}(t_k))^\top \frac{\delta\mathbf{x}(t_k)}{T}. \quad (\text{C32})$$

Then, applying the following substitution in (C5–C6)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t_k)}{dt} &\rightarrow \frac{\delta\mathbf{x}(t_k)}{T}, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_k)) &\rightarrow \bar{\nabla} H(\mathbf{x}(t_k), \delta\mathbf{x}(t_k)) \equiv \bar{\nabla} H_k, \end{aligned} \quad (\text{C33})$$

leads to

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \bar{\nabla} H_k \\ \mathbf{u}(t_k) \end{array} \right)^\top \left( \begin{array}{c} \frac{\delta\mathbf{x}(t_k)}{dt} \\ -\mathbf{y}(t_k) \end{array} \right) &= \underbrace{\bar{\nabla} H_k^\top \frac{\delta\mathbf{x}(t_k)}{dt}}_{\frac{\delta E(t_k)}{T}} - \underbrace{\mathbf{u}(t_k)^\top \mathbf{y}(t_k)}_{S(t_k)} \\ &= - \underbrace{\left( \begin{array}{c} \bar{\nabla} H_k \\ \mathbf{u}(t_k) \end{array} \right)^\top \mathbf{R}(\mathbf{x}(t_k))}_{D(t_k)} \left( \begin{array}{c} \bar{\nabla} H_k \\ \mathbf{u}(t_k) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{C34})$$

(same as proof of property 6.1). For a conservative system ( $\mathbf{R} = \emptyset$ ,  $\mathbf{G} = \emptyset$ ,  $\mathbf{J}_y = \emptyset$ ), this method yields  $\delta E(t_k) = 0$  so that  $E(t_{k+1}) = E(t_k)$  (the energy is conserved). For a passive system ( $\mathbf{R} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{G} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{J}_y \neq \emptyset$ ), this method restores a discrete version of property 6.1 so that observations of remark B1 holds. Notice the invariant set  $S_{rhodes}$  is the same as in the continuous time domain (see caption of table A8). The associated update is

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \delta\mathbf{x}(t_k), \quad (\text{C35})$$

$$\delta\mathbf{x}(t_k) = T(\mathbf{J}_x - \mathbf{R}_x) \nabla_d H(\mathbf{x}(t_k), \delta\mathbf{x}(t_k)) + T(\mathbf{G} - \mathbf{R}_{xy}) \mathbf{u}(t_k), \quad (\text{C36})$$

$$\mathbf{y}(t_k) = (\mathbf{G} + \mathbf{R}_{xy})^\top \nabla_d H(\mathbf{x}(t_k), \delta\mathbf{x}(t_k)) - (\mathbf{J}_y - \mathbf{R}_y) \mathbf{u}(t_k) \quad (\text{C37})$$

where state-dependent matrices are evaluated at  $\mathbf{x}(t_k)$ , and the implicit relation on  $\delta\mathbf{x}(t_k)$  is solved at each time step by a fixed number of Newton-Raphson

iterations. Notice the Rhodes model in table A8 includes a single nonlinear storage component (spring effect associated with the hammer felt). In this case, the Newton-Raphson algorithm only requires the inversion of a scalar function, that allows real-time applications.

### 6.5.2 Convergence analysis

Although the discrete power balance ensures the asymptotic stability of the numerical solution, it does not provide information on the convergence of the sequence  $\mathbf{x}(t_k)$  to the continuous solution. From Lax's theorem, convergence holds provided (i) the method is consistent with the system (C5–C6) and (ii) the total error can be bounded (stability of the method). From [104, (3), §4.2], the method that yields the slope  $\sigma(t_k) = \frac{\delta\mathbf{x}_k}{T}$  is consistent if and only if

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sigma(t_k, T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), t_k). \quad (\text{C38})$$

Assuming that  $H$  satisfies a Lipschitz condition (this is the case for the system in table A8), the discrete gradient is consistent with the continuous gradient :

$$\lim_{\|\delta\mathbf{x}\|_2 \rightarrow 0} \nabla_d H(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \nabla H(\mathbf{x}). \quad (\text{C39})$$

Now, provided the structure matrices  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  and  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  are bounded (this is the case for the system in table A8), the slope  $\sigma(t_k)$  is bounded so that  $\lim_{T \rightarrow 0} \delta\mathbf{x}(t_k) = 0$ . This proves the numerical method is consistent up to order 1. Additionally, the method (C45) proves stable (in the sense that the total error due to the accumulation of round-off and truncation errors is bounded) from the Lipschitz property of the Hamiltonian  $H$  and the structure matrices (see [104, theorem 4.1]). This proves the convergence of the discrete gradient method for port-Hamiltonian systems (C5–C6).

**Remark B1 (Second order)** Order 2 is achieved for constant matrices  $\mathbf{J}$  and  $\mathbf{R}$ , and can be recovered for non constant structure with an additional computation step of Runge-Kutta type (see [A11] for details).

**Remark B2 (Coincidence with the midpoint rule)** For port-Hamiltonian systems composed of a collection of linear energy storing components with quadratic Hamiltonian  $H_n(x_n) = \frac{x_n^2}{2C_n}$ , we define  $\mathbf{Q} = \text{diag}(C_1 \cdots C_{n_E})^{-1}$  so that the discrete gradient (C43) reads

$$\bar{\nabla}H(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \left( \mathbf{x}(k) + \frac{\delta\mathbf{x}(k)}{2} \right). \quad (\text{C40})$$

For a constant structure, this restores the midpoint rule  $\frac{\delta\mathbf{x}_k}{T} = \mathbf{f} \left( \frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1}}{2} \right)$  that coincides in this case with the trapezoidal rule  $\frac{\delta\mathbf{x}_k}{T} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})}{2}$ . However, for nonlinear cases, (C43) leads to a class of numerical schemes depending on the nonlinearity, still preserving passivity. In these cases, the discrete gradient approach does not coincide anymore with the midpoint rule, which also does not coincide anymore with the trapezoidal rule.

## 6.6 RESULTS

In this section, the numerical scheme (C45) is applied on the modeling presented in section 6.4. The sample rate is  $T^{-1} = 48\text{kHz}$ . Physical parameters are given in tables A2, A4 and A6. They are chosen to correspond to the musical note A4

(440Hz). The basis of eigenmodes is truncated so that the highest eigenfrequency is below the Nyquist frequency, which yields  $M = 4$  modes for note A4 at 48kHz. Audio example are available here<sup>2</sup>. The input force  $f_{\text{ext}}^{\text{core}}$  is comprised between 0 and  $10^3$ N, during 1ms. A simple exhaust mechanism is included (not shown in tables A3 and A8) with  $f_{\text{ext}}^{\text{core}} = 0$  if  $q_h > -0.5$ cm.

### 6.6.1 Mechanical energy

The dynamics of the hammer is shown in figure 6.7 for  $f_{\text{ext}}^{\text{core}} = 500$ N. We see it accelerates between 1ms and 2ms and impacts the beam at  $t_i \simeq 2.5$ ms. During

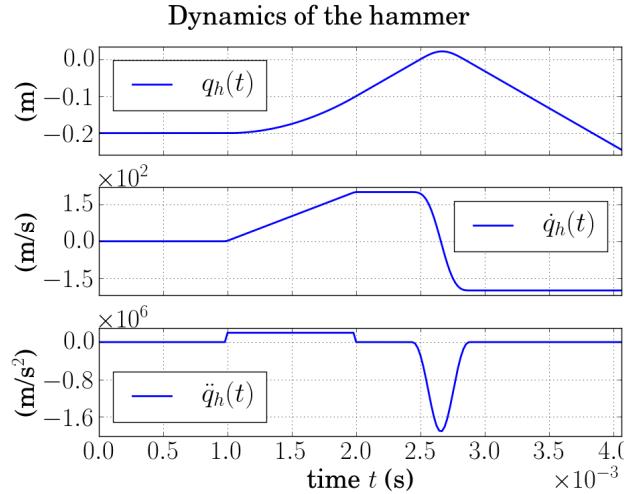


FIGURE 6.7 : Position, velocity and acceleration of the hammer.

the impact, a part of the energy transferred from the hammer to the beam is dissipated (see figure 6.8a). The energy in the beam is shown in figure 6.8b. We see that a numerical energy balance is fulfilled.

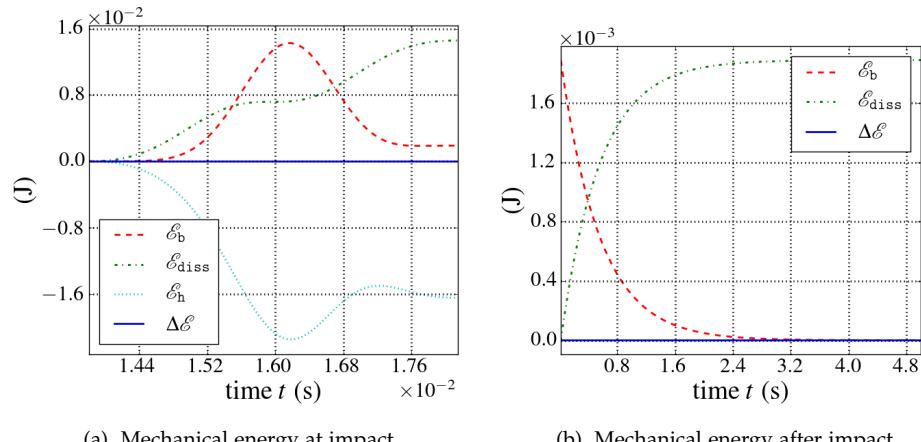


FIGURE 6.8 : Evolution of the mechanical energy.  $E_b$  is the energy the the beam,  $E_{\text{diss}}$  is the dissipated energy  $\int Ddt$ ,  $E_h$  is the increment on the energy of the hammer  $H_h(x_h(t)) - H_h(x_h(t_0))$  with  $t_0$  the impact moment and  $\Delta E$  is the energy balance  $E_b + E_h + E_{\text{diss}}$ .

<sup>2</sup> <http://recherche.ircam.fr/anasy/falaize/applications/rhodes/index.html>

### 6.6.2 Electromagnetic energy

The source of constant magnetomotive force is modulated according to section 6.3.3. Note such a source can be locally a sink of power, as seen in figure 6.9 where the power passes slightly under 0W. Again, the numerical error on the power balance is close to the machine epsilon.

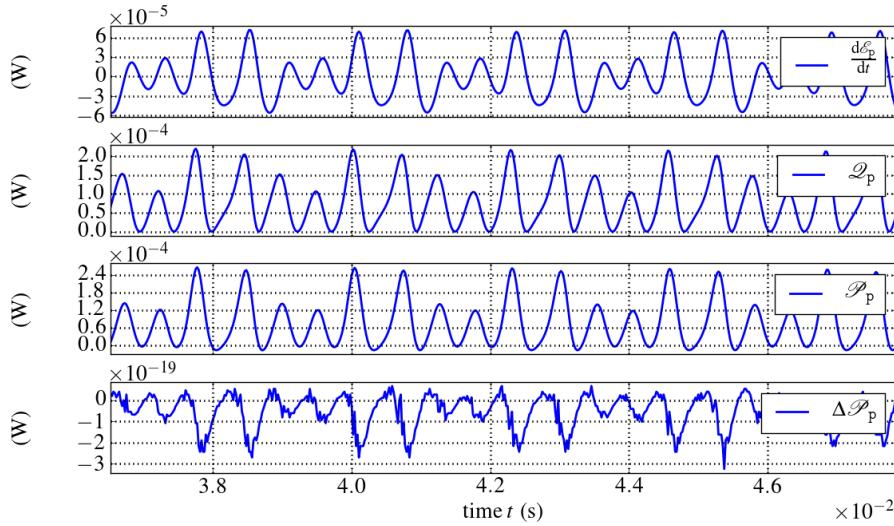


FIGURE 6.9 : (Simulation) Power balance for the electro-magnetic part (pickup and RC analog circuit), with  $\frac{dE_p}{dt} = \nabla H_p^T \frac{dx_p}{dt}$ ,  $D_p = \frac{R_{RC}}{N_{coil}^2} [\nabla H_p]_1^2$ ,  $P_p = u_p^T y_p$  (see table A7), and  $\Delta P_p = \frac{dE_p}{dt} + D_p - P_p$ .

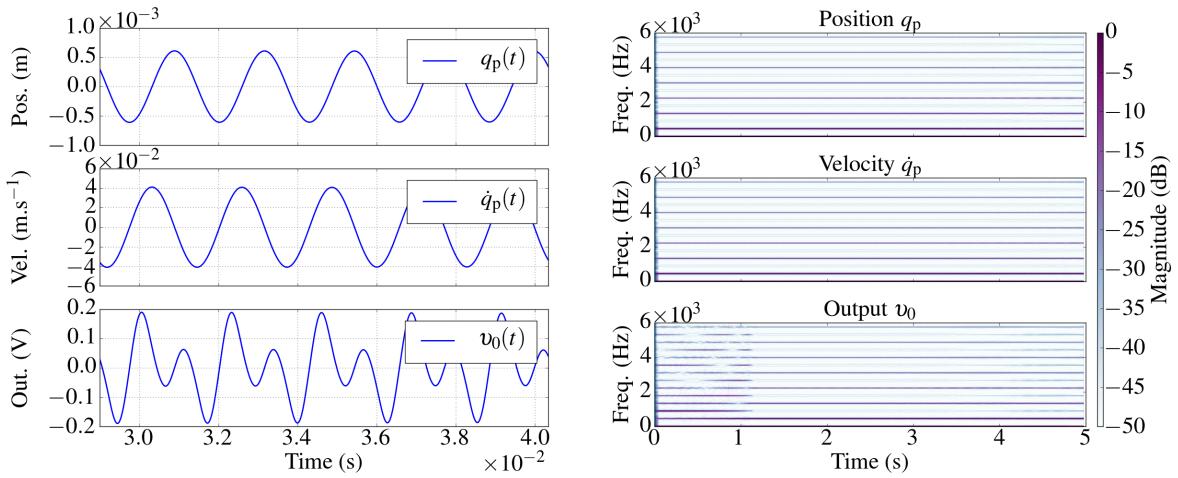
### 6.6.3 Output signal

The output voltage  $v_0$  is proportional to the beam free-end velocity multiplied by a nonlinear function of the position  $q_p = q(z = L_b)$  given by (C25). Since the beam modeling is linear (see section 6.3.2), this transduction mechanism is the only one that is responsible for the characteristic Rhodes piano tones, as noticed in [125, 124]. Figure 6.10 displays the displacement and the velocity of the beam free-end as well as the output voltage  $v_0$  (see figure 6.5 and tables A7 and A8). These signals have been computed for  $f_{ext}^{core} = 500\text{N}$  (note A4). We can notice in figure 6.10b that higher modes of the resonator are not extensively excited, and that the distinctive evolution of the tone is due to the pickup only.

### 6.6.4 Comparison with measurements

The physical modeling approach to sound synthesis provides an easy tuning of the model parameters to simulate a given device. This has been done based on measurements provided by UVI<sup>3</sup>, a company specialized in building sample-based real-time synthesizers of musical instruments. A rough comparison of spectrograms for increasing hammer force (from 100N to 1000N in the pH model) is shown in figure 6.11. A detailed comparison of the normalized waveforms in the cases force 1, force 4 and force 7 is given in figure 6.12.

<sup>3</sup> <http://www.uvi.net/>



(a) Reconstruction of beam displacement and velocity at the beam free end  $z = L_b$ , and output voltage  $v_0$ . (b) Normalized spectra obtained from fast Fourier transform on  $2^{11}$  samples with overlap ratio 50%.

FIGURE 6.10 : (Simulation) Displacement  $q_p = q(z = L_b)$  and velocity  $\frac{dq_p}{dt}$  of the free end of the beam, and corresponding output voltage  $v_0$  that results from the pickup non-linearity (C25).

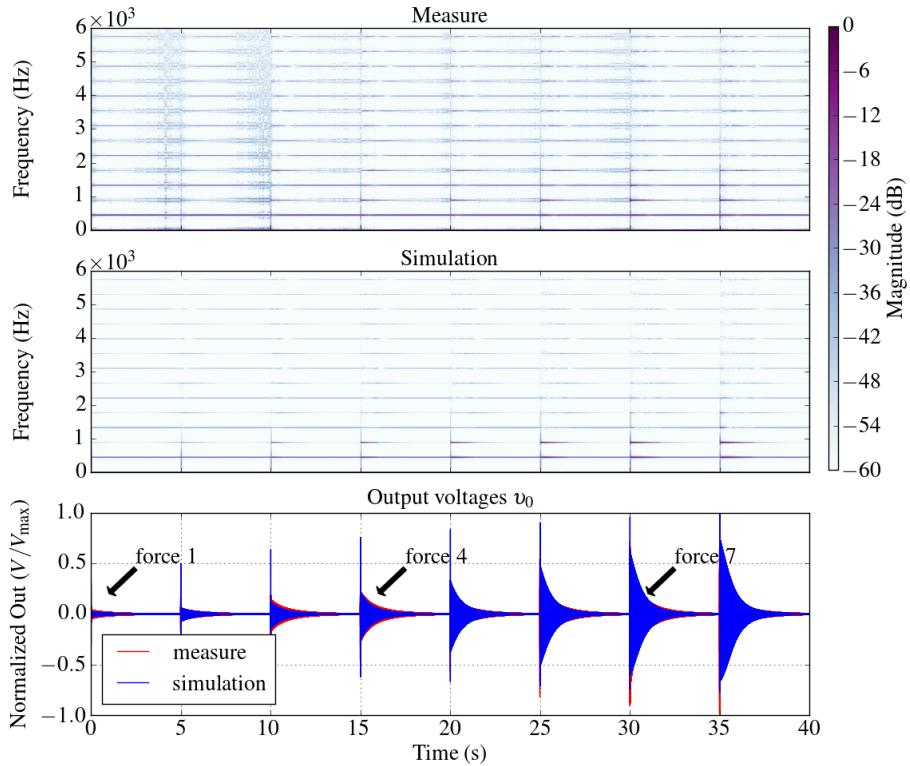


FIGURE 6.11 : Spectral densities for the reference (upper) and simulation (middle), and normalized output voltages ( $v_0$ ) over time (lower). See figure 6.12 for a detailed comparison of waveforms in the cases force 1, force 4 and force 7.

### 6.6.5 Playing with the model

According to the Fender Rhodes manual, the position of the pickup with respect to the beam's axis has a critical effect on the resulting timbre and transients of the

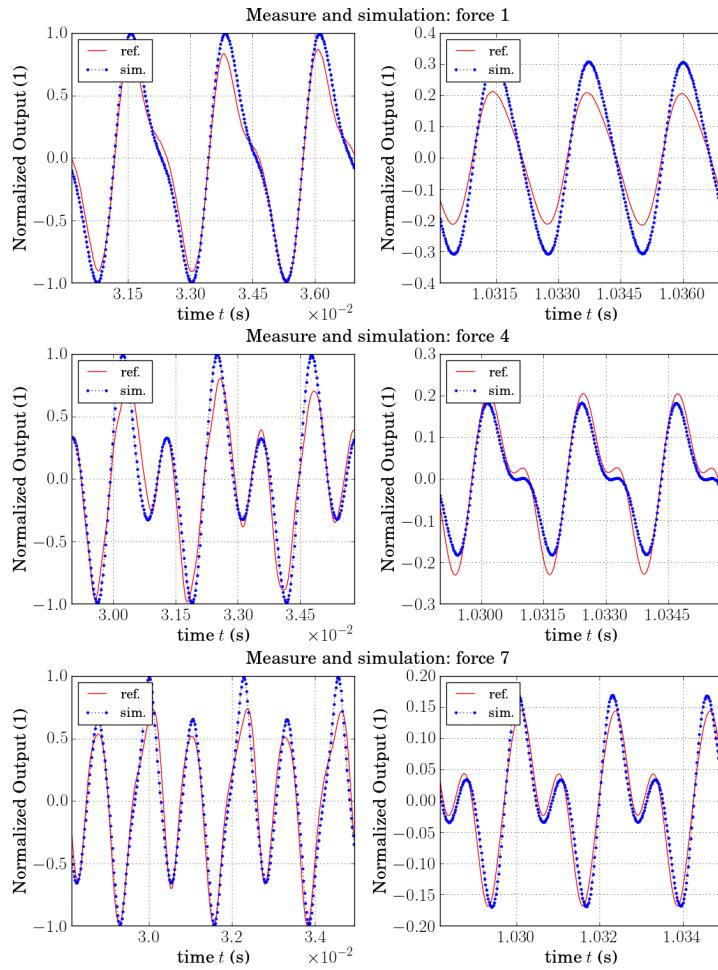


FIGURE 6.12 : Time domain comparison between simulated and measured signals (see figure 6.11 for correspondence of forces).

output voltage. This can be easily verified in our simulations. Results for the horizontal  $L_{\text{hor}}$  and vertical alignment  $L_{\text{ver}}$  prove in good accordance with predicted behaviors as shown in figures 6.13.

#### CONCLUSION

In this paper, a nonlinear finite-dimensional model of a simplified electro-mechanical piano has been developed, based on a set of elementary components (hammer, beam and pickup), in the framework of port Hamiltonian systems. This formalism decomposes the system into conservative, dissipative and source parts. A numerical method has been derived, which preserves this decomposition and the power balance in the discrete time domain. The analysis of numerical results proves the relevancy of the method : first, the analysis of the power exchanges and of the total energy shows that passivity is fulfilled ; second, the numerical scheme proves compatible with real-time purposes ; third, results are consistent with measurements on a real device.

Several model sophistications and refinements could be considered in perspectives of this work, some of which are listed therafter in order of importance with respect to the sound realism. First of all is the modeling of both prongs for the

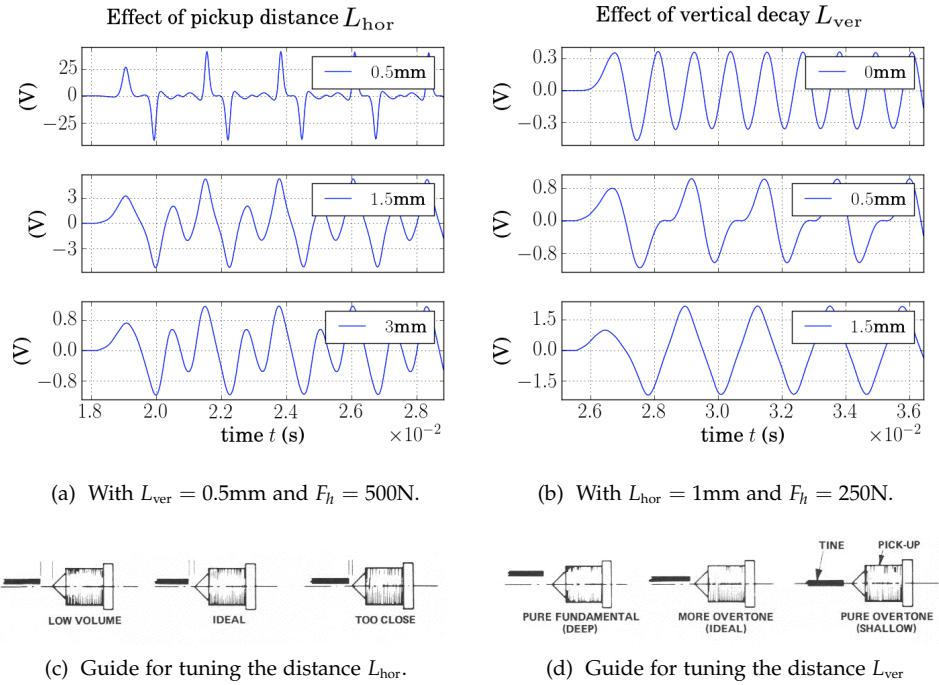


FIGURE 6.13 : Effect of vertical alignment  $L_{\text{ver}}$  and horizontal distance  $L_{\text{hor}}$  on the output signal  $v_0$ .

resonator (elements 7–13 in figure 6.1) with their energy transfert. This should directly impacts the transient and damping of output signal, as pointed out in [125]. Another critical element for playability of the instrument is the damper module (elements 16–18 and 22–25 in figure 6.1), which permits to control the duration of the vibration. The modeling of the hammer felt can be reused to address this issue. A less critical refinement is concerned with the movement of the tine that is not perfectly planar, thus inducing polarization effects that can appear in the output signal. This leads to consider a three-dimensional model for the tine vibration, and to adapt the pickup model accordingly. Additionally, the shear stress due to the deflect of the tine should be included ; it does not seem to be necessary to describe torsion nor compression waves, due to (i) the filiform geometry and (ii) the axial excitation mechanism. The hammer model could be complemented by modeling the key action mechanism (see [173] and references therein), and the hammer felt model could be refined so as to exhibit a realistic asymptotic behavior (that is, the felt can not be infinitely crushed). Least of all, the mechano-electric transducer could be refined to include the energetic exchange due to the coupling between the beam and the magnetic field, by considering the Maxwell force. This should not alter the output signal except for increasing the damping ; this point is to consider only in view of a comprehensive multi-physichal model.

A second perspective is to look for a method to extract the physical parameters from the measurements, in order to increase the sound realism. A third perspective is to examined second order explicit numerical schemes (see e.g. [A11]) to improve accuracy and reduce the computational cost. Finally, a playable instrument plugin could be developed based on C++ implementation.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge the members of the french National Research Agency project HaMecMoPSys for support in port-Hamiltonian theory, Cyril Touzé for lectures on modal decomposition and UVI company (especially Damien Vallet) for providing high quality measurement of Rhodes tones.

## 6.7 APPENDIX - MODAL DECOMPOSITION

## 6.7.1 Orthonormal basis

The spacial eigenvectors  $\psi_m(z)$  which satisfy the boundary conditions of the cantilever beam (i-iv),  $\partial_z^4\psi(z) = \kappa^4\psi(z)$  and  $\langle \psi_m, \psi_p \rangle = \delta_{m,p}$  (Kronecker's symbol) for all  $(m, p) \in \mathbb{N}_*^2$ , where the scalar product on  $L^2(0, L_b)$  is defined by  $\langle f, g \rangle = \int_0^{L_b} f(z)g(z)dz$  are

$$\begin{aligned}\psi_m(z) &= \gamma \hat{\psi}_m(z) \\ \hat{\psi}_m(z) &= \theta_m (\sin \kappa_m z - \sinh \kappa_m z) + \cos \kappa_m z - \cosh \kappa_m z\end{aligned}\quad (C41)$$

for the normalizing constant

$$\gamma = \left( \frac{\kappa_m L_b (\cos 2\kappa_m L_b + \cosh 2\kappa_m L_b - 2)}{2\kappa_m (\cos \kappa_m L_b + \cosh \kappa_m L_b)^2} \right. \left. \frac{\cosh \kappa_m L_b (2 \sin \kappa_m L_b + \cosh \kappa_m L_b \sin 2\kappa_m L_b)}{2\kappa_m (\cos \kappa_m L_b + \cosh \kappa_m L_b)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C42)$$

with  $\cos(\kappa_m L_b) \cosh \kappa_m L_b + 1 = 0$  and  $\theta_m = \frac{\sin(\kappa_m L_b) - \sinh(\kappa_m L_b)}{\cos(\kappa_m L_b) + \cosh(\kappa_m L_b)}$ .

## 6.7.2 Projection

The projection of a point force  $f_b^{\text{ext}}$  located at  $z_h$  and distributed according to  $\sigma_h(z) = \mathbb{1}(z - z_h)_{[-D_h/2, +D_h/2]}$  on the basis B is  $\Omega f_b^{\text{ext}}$  with

$$\begin{aligned}a_m &= \sqrt{\frac{2}{\kappa_m}} [2 \sin(C_h \frac{\kappa_m}{2}) (\cos(\kappa_m(L_b - z_h)) + \cos(\kappa_m z_h) \cosh(\kappa L_b) \\ &\quad - \sin(\kappa_m z_h) \sinh(\kappa L_b)) - 2 \sinh(C_h \frac{\kappa_m}{2}) (\cosh(\kappa_m(L_b - z_h)) \\ &\quad + \cos(\kappa_m L_b) \cosh(\kappa_m z_h) + \sin(\kappa_m L_b) \sinh(\kappa_m z_h))] \\ b_m &= \kappa_m L_b (\cos(2\kappa_m L_b) - 2 + \cosh(2\kappa_m L_b)) \\ &\quad - \cosh(\kappa_m L_b) (2 \sin(\kappa_m L_b) + \cosh(\kappa_m L_b) \sin(2\kappa_m L_b)) \\ [\Omega]_m &= \frac{a_m}{\sqrt{b_m}}\end{aligned}\quad (C43)$$

## CONCLUSION DU CHAPITRE ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre, l'approche par les SHP pour la modélisation et la simulation de systèmes multi-physiques complexes a été illustrée sur une application d'intérêt pour les musiciens et audio-numériciens : le piano Fender Rhodes. Premièrement, l'approche par les systèmes hamiltoniens à ports (chapitre 1) a permis de diviser le problème de modélisation en sous-problèmes élémentaires (excitation, résonateur et capteur), pour lesquels des modèles physiques sont disponibles dans la littérature. L'apport des SHP sur ce point est de garantir la passivité de

chaque sous système, par une écriture structurée en partie conservatives, dissipatives et source des modèles existants. Deuxièmement, la stabilité de la structure SHP lors d'interconnexion de systèmes écrits dans ce formalisme garantit directement la passivité du système global. Troisièmement, la méthode numérique d'Euler avec gradient discret préservant la passivité (méthode 2.1) a permis de garantir une forme de passivité numérique lors des simulations du système complet, y compris dans le cas non linéaire. Pour une entrée bornée dont le support temporel est fini, ceci implique la stabilité du régime libre, ce que d'autres méthodes ne garantissent pas par défaut. Quatrièmement, les résultats obtenus sont cohérents avec les mesures réalisées sur un instrument réel, pour un choix de paramètres physiques réalistes.

Les perspectives de ce travail incluent le raffinement du modèle physique (en particulier la géométrie du résonateur), l'implémentation de la méthode de simulation à deux étapes (méthode 2.2), et le développement d'un logiciel de simulation pour une utilisation temps réel.

# 7

## TROISIÈME APPLICATION : MODÉLISATION ET SIMULATION D'UN HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE NON IDÉALISÉ (ARTICLE "MODELING AND SIMULATION OF THE ELECTRODYNAMIC LOUDSPEAKER : A PORT-HAMILTONIAN APPROACH" SOUMIS AU "JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION")

---

Si les hommes ont inventé le haut  
parleur, c'est parce qu'ils craignent  
le silence.

N.A.

### Sommaire

7.1	Motivation et guide de lecture . . . . .	140
7.2	Introduction . . . . .	140
7.3	Problem statement . . . . .	141
7.3.1	Basic description and modeling . . . . .	142
7.3.2	Refined multiphysics phenomena . . . . .	143
7.3.3	Objectives . . . . .	144
7.4	Port-Hamiltonian systems . . . . .	144
7.4.1	Recall . . . . .	145
7.4.2	Examples . . . . .	145
7.5	The Thiele/Small model and first refinement (model 0) . . . . .	148
7.6	Refined mechanics (model 1) . . . . .	150
7.6.1	Suspension creep . . . . .	150
7.6.2	Suspension hardening and model 1 . . . . .	154
7.6.3	Simulation results . . . . .	155
7.7	Refined electromagnetic (model 2) . . . . .	156
7.7.1	Model description . . . . .	158
7.7.2	Port-Hamiltonian formulation . . . . .	161
7.7.3	Simulation results . . . . .	163
7.8	Refined thermodynamics (model 3) . . . . .	164
7.8.1	Thermal modeling of the resistor . . . . .	166
7.8.2	Replacement in model 0 . . . . .	168
7.8.3	Simulation results . . . . .	169
7.9	Discussion . . . . .	170
7.10	Conclusion . . . . .	170
7.11	Acknowledgments . . . . .	172
7.12	Appendix - Numerical method . . . . .	172
7.13	Appendix - Recalls on magnetic . . . . .	173
7.13.1	Magnetic energy storage . . . . .	173
7.13.2	Electromechanical coupling . . . . .	173
7.13.3	electromagnetic coupling : the gyrator-capacitor approach	174
7.14	Appendix - State saturating storage function . . . . .	174

7.15	Appendix - Fractional order dynamics . . . . .	175
7.15.1	Fractional integrator . . . . .	176
7.15.2	Fractional differentiator . . . . .	176
7.15.3	Finite order approximation . . . . .	177
7.16	Appendix - Physical and technological parameters . . . . .	178
7.16.1	Model o . . . . .	178
7.16.2	Model 1 . . . . .	178
7.16.3	Model 2 . . . . .	179
7.16.4	Model 3 . . . . .	179
7.17	Appendix - Additional simulation results . . . . .	180

---

## 7.1 MOTIVATION ET GUIDE DE LECTURE

Ce chapitre est une inclusion de l'article [A5] *Modeling and simulation of the electrodynamic loudspeaker : A port-Hamiltonian approach*<sup>1</sup>, qui présente le raffinement du modèle de haut-parleur standard (modèle de Thiele et Small [168, 169, 157, 158]) pour inclure les phénomènes multi-physiques prépondérants selon la littérature [99, 134, 20]. Ces phénomènes sont d'origine multi-physique (électromagnétique, mécanique et thermique), et l'on bénéficie directement de l'approche par les systèmes hamiltoniens à ports (chapitre 1 et section ??), qui fournissent une structure commune à tous les modèles. Chaque phénomène est modélisé séparément par un SHP, et l'on bénéficie directement de l'approche par composants pour la construction de différents modèles qui incluent tout ou partie des raffinements proposés.

La section 7.4 et l'annexe 7.12 constituent des rappels de la section ?? (SHP sous forme algébro-différentielle) et du chapitre 2 (méthodes numériques), respectivement.

## 7.2 INTRODUCTION

Electrodynamic loudspeakers are nonlinear transducers, the dynamics of which is governed by intricate multiphysical phenomena that are responsible for audio artefacts (e.g. distortions and modulations, [99, 134, 20]). First, the viscoelastic properties of the suspension material result in long term shape memory (linear) and hardening spring effect (nonlinear). Second, the voice-coil includes a solid iron core charged by a strong magnet, that is responsible for ferromagnetic saturation (nonlinear) and long time memory associated with eddy current losses (linear). Third, due to the DC resistance of coil wire, most of the provided electrical power is converted into heat. Moreover, temperature variation (i) modifies the materials properties and (ii) is the main cause for damages. A comprehensive modeling of these phenomena is the first step toward the development of DSP simulation-based real-time distortion compensation [164, 88, 5], [A9] and burn-out protection methods [134, 166].

The loudspeaker dynamics is usually described by the linear time-invariant Thiele/Small modeling [168, 169, 157, 158]. This is valid when the system is used in its linear operating region and during short periods. Refinements of the Thiele/Small structure have been proposed both in the frequency domain and the

<sup>1</sup> En cours de soumission au JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION.

time domain [33, 108, 98, 172, 171, 1, 20]. Also, the standard lumped-parameter approach [97, 99, 134, 7] allows the Thiele/Small parameters to depend on some selected physical quantities (e.g. position-dependent stiffness). However, these approaches sometimes lead to model that are not in accordance with basic physical principles, such as causality and stability. This is a critical point when considering long-time compensation or heat-protection application, since the stability of the numerical solution is not ensured. Other approaches such as gray-box modeling techniques (Volterra and Wiener-Volterra series [92, 19, 105, 21], nonlinear ARMAX [160]) and finite element method [49, 51] are also available, but their use in a distortion compensation system of burn-out protection still need improvement.

This paper presents a comprehensive modeling of refined mechanical, electromagnetic, and thermal phenomena that are involved in the loudspeaker functioning, while preserving the inherent passivity of the original physical system. To this end, we adopt the port-Hamiltonian formalism, which provides a modular state-space representation of dynamical systems, structured according to power exchanges. This guarantees model passivity in the continuous time-domain and simulation stability in the discrete-time domain. The paper focuses on the transducer modeling but not on the acoustical load which is over-simplified (without loss of generality due to the strong modularity of the port-Hamiltonian approach).

This paper is organized as follows. In section 7.3, the problem statement recalls the Thiele/Small model, discusses the multiphysical phenomena addressed in the sequel, and sets the scientific objectives. In section 7.4, the port-Hamiltonian formalism is recalled along with examples. Section 7.5 presents the port-Hamiltonian formulation of the first improved version of the Thiele/Small modeling (model 0). It serves as the basis for the elaboration of three loudspeaker models that are elaborated in the subsequent sections. Section ?? presents model 1, which focuses on refined mechanical phenomena. In particular, a time domain finite dimensional state space representation of the fractional dynamics associated with viscoelastic long term memory is provided. Section 7.7 presents model 2, which focuses on refined electromagnetic phenomena. In particular, a simple albeit physically grounded formulation of the nonlinear dynamics of the magnetic flux in the pole piece is provided. Section 7.8 presents model 3 which focuses on thermal phenomena. In particular, an extension of the standard port-Hamiltonian structure is used to cope with irreversible thermodynamics. Models 1, 2 and 3 are independent. Simulation results are presented throughout the paper.

All the physical quantities and notations used in this paper for all the models are summarized in appendix 7.16.

### 7.3 PROBLEM STATEMENT

This section first presents an overview of the functioning of the electrodynamic loudspeaker and recalls the standard Thiele/Small modeling. Second, it provides a survey of the main elementary multiphysical phenomena that are not tackled by this linear time invariant model. Third, it establishes a list of the objectives and scientific issues addressed in this paper.

### 7.3.1 Basic description and modeling

The basic functioning of a boxed loudspeaker such as the one depicted in figure 7.1 is as follows. A voice-coil (c) is immersed in a magnetic field imposed by a permanent magnet (M) in the air gap (G) of a magnetic path (pole piece P). The coil (c) is glued to a large diaphragm (D) which is maintained by a flexible suspension (S). An input tension imposed to the coil (c) induces a flow of electric charges through the wire of the coil. Each moving charge in the magnetized air gap experiences a force orthogonal to the charge velocity and the magnetic induction field (Lorentz force). The resultant force experienced by the diaphragm is the sum of (i) the Lorentz force, (ii) the force due to the suspension (S) (which includes spring effect and friction losses) and (iii) the acoustical load (A).

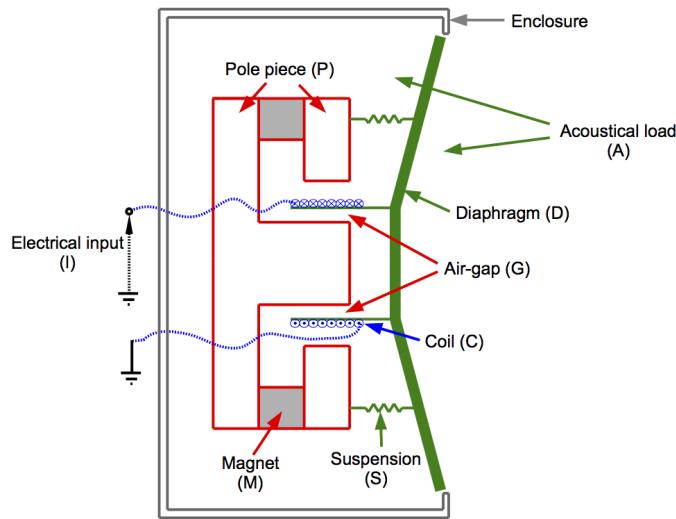


FIGURE 7.1 : Schematic of the electrodynamic loudspeaker and components labels.

The standard description of the dynamics of this system is referred as the Thiele/Small modeling, introduced in the early seventies [168, 169, 157, 158]. The electrical part (c) includes the electrical resistance of the coil wire  $R_c$  and the linear approximation of the coil behavior with inductance  $L_c$ . The mechanical part (c,D,S,A) is modeled as a damped harmonic oscillator with mass  $M_{cDA}$  (coil, diaphragm and additional mass due to acoustic radiation), linear approximation of the spring effect  $K_{SA}$  (suspension and additional stiffness due to air compression in the enclosure) and fluid-like damping with coefficient  $R_{SA}$  (frictions and acoustic power radiation). The magnetic part (M,P,G,c) reduces to a constant force factor  $B_\ell$ .

The corresponding set of ordinary differential equations are derived by applying Kirchhoff's laws to the electrical part (c) and Newton's second law to the mechanical part (D,S,A) :

$$v_I(t) = v_L(t) + R_c i_c(t) + L_c \frac{di_c(t)}{dt}, \quad (C1)$$

$$M_{cDA} \frac{d^2 q_D(t)}{dt^2} = f_L(t) - R_{SA} \frac{dq_D(t)}{dt} - K_{SA} q_D(t), \quad (C2)$$

with  $v_I$  the input voltage,  $i_c$  the coil current and  $q_D$  the diaphragm's displacement (distance from equilibrium). The electro-mechanical coupling terms are the back electromotive force (tension)  $v_L = B_\ell \frac{dq_D}{dt}$  and the Lorentz force  $f_L = B_\ell i_c$ .

### 7.3.2 Refined multiphysics phenomena

The Thiele/Small model enjoys good agreements with measurements for low excitation level, low to medium frequencies and short time measurements. But it fails to capture several nonlinear and non-standard behaviors as detailed in e.g. [99, 134, 20] and references therein. The elementary phenomena responsible for significant audio distortions that are considered in this paper are listed thereafter.

#### 7.3.2.1 Coupling phenomena

The electromechanical coupling (back e.m.f. and Lorentz force) depends on the coil (c) position with respect to the pole piece (P).

**Phenomenon 1 (Position dependent force factor)** *The fraction of coil wire subjected to the magnetic flux in the air gap depends on the coil position. This leads to consider a position dependent effective wire length  $\ell(q_D)$  in the force factor  $B_\ell$  (see e.g. [99, figure 5]).*

Additionally, the coil acts as an electromagnet that changes the magnetic flux in the pole piece.

**Phenomenon 2 (Flux dependent force factor)** *The magnetic flux  $\phi_{PG}$  common to the air gap (G) and pole piece (P) depends on the magnetic flux induced in the coil due to an applied voltage (Faraday's law of induction). This leads to consider a flux dependent magnetic induction  $B(\phi_{PG})$  in the force factor  $B_\ell$ .*

The electromagnetic coupling (coil inductive effect) also depends on the coil (c) position with respect to the pole piece (P).

**Phenomenon 3 (Position dependent inductance)** *The fraction of the coil core occupied by the pole piece depends on the coil position  $q_D$  (see e.g. [99, figure 6]). This leads to consider a position dependent electromagnetic coupling between the electrical domain (c) and the magnetic domain (P).*

#### 7.3.2.2 Mechanical phenomena

The suspension (S) includes the spider and surround, which are usually made of polymer and rubber, respectively (see [134, §2.3.1], [99, §3.1.1]). The mechanical properties of those materials are responsible for two phenomena that can not be described by a standard (linear) stiffness.

**Phenomenon 4 (Viscoelasticity)** *The materials used for the suspension (S) exhibit combination of the behaviors of elastic solids and viscous fluid [100, §1.2], inducing long time shape memory (creep effect, see e.g. [100, figure 1] and [135, figure 11]).*

**Phenomenon 5 (Hardening suspension)** *The materials used for the suspension (S) exhibit nonlinear stress-strain characteristics so that the restoring force is not proportional to the elongation [99, 1]. The suspension has a maximal instantaneous excursion  $q_{sat}$  that corresponds to the material breakdown.*

#### 7.3.2.3 Electromagnetic phenomena

The core of the coil (c) is partially made of air and of a ferromagnetic pole piece (P), as shown in figure 7.1. This induces a coupling between the magnetic flux in the coil that is common to the magnet (M), air gap (G) and the pole piece (P). The electromagnetic properties of the latter is responsible for two nonstandard phenomena.

**Phenomenon 6 (Ferromagnetic saturation)** *The materials used for the pole piece P exhibit nonlinear magnetic excitation–induction curve so that the equivalent current in the coil is not proportional to its magnetic flux. A maximal magnetic flux  $\phi_{\text{sat}}$  is reached (flux saturation), corresponding to the global alignment of the microscopic magnetic moments (see [62, §1], [61]).*

**Phenomenon 7 (Eddy currents losses)** *Most of magnetic material (iron, cobalt, etc.) possess high electric conductivity. The application of a variable magnetic induction induces currents, namely eddy-currents, in a plane orthogonal to the field lines (see [149, §1.1.2]). This has three effects : (i) a power is dissipated due to the natural resistivity of the material (Joule effect), (ii) eddy currents induces their own magnetic field (added inductive effect), and (iii) they oppose to the original induction (Lens's law), which push the field lines toward the boundary (magnetic skin effect).*

#### 7.3.2.4 Thermal phenomena

The coil wire exhibits a natural electrical resistivity (DC value of the electrical impedance) that transforms electrical power into heat by Joule effect. This is responsible of two phenomena.

**Phenomenon 8 (Heating of coil wire)** *The coil wire temperature increases during the operation of the loudspeaker. This is the primary cause for damages of the device (see e.g. [33, 98]) : either the resin on the voice coil melts (causing short circuits) or the flux of the magnet structure is damaged (causing loss of sensitivity and control).*

**Phenomenon 9 (Thermal compression)** *The resistivity of the coil increases as the wire heats up. This increases the DC resistance and thus lowers the loudspeaker electroacoustics transduction efficiency (see e.g. [187, 166]).*

#### 7.3.3 Objectives

The main objective of this work is to elaborate on the Thiele/Small modeling to provide lumped parameter loudspeaker models that include phenomena 1–9, while preserving basic physical principles such as passivity and causality. The second objective is to provide guaranteed-stable simulations of these models. To this end, we adopt the port-Hamiltonian (pH) approach which provides a modular framework that guarantees the passivity of the models and the stability of the simulations for an adapted numerical method.

### 7.4 PORT-HAMILTONIAN SYSTEMS

The port-Hamiltonian (pH) formalism introduced in the 90's is a modular framework for the passive guaranteed modeling of open dynamical systems. The key issue is the separation of (i) algebraic and differential constitutive relations attached to elementary components (e.g. mass, spring, resistor, magnet) from (ii) the interconnection scheme (glue point for mechanical components, schematic for electronic and magnetic components). This section is organized as follows. First, the port-Hamiltonian framework is recalled. Second, we give two illustrative examples.

### 7.4.1 Recall

Port-Hamiltonian systems are state space representations structured according to energy flows with state  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , input  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_y}$ , output  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  and storage function  $H(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+$  (see [120, 153, 52] for details). Here, we consider the same algebraic-differential formulation as in [A8], which includes a dissipation variable  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$  and a dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{n_w}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^\top & \mathbf{J}_w & \mathbf{G}_w \\ -\mathbf{G}_x^\top & -\mathbf{G}_w^\top & \mathbf{J}_y \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{C3})$$

with the Hamiltonian gradient  $(\nabla H(\mathbf{x}))_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ,  $\mathbf{G}_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ ,  $\mathbf{G}_w \in \mathbb{R}^{n_w \times n_y}$  and the requirements that (i) the storage function  $H(\mathbf{x})$  is a  $\mathcal{C}^2$ -regular positive definite function ( $H(0) = 0$ ,  $H(\mathbf{x}) \geq 0$  if  $\mathbf{x} \neq 0$  and the Hessian matrix  $[H_H(\mathbf{x})]_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$  is positive definite), (ii) the dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w})$  is null at origin ( $\mathbf{z}(0) = 0$ ) and such that the dissipated power  $D(\mathbf{w}) = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\top \mathbf{w} \geq 0$  is positive, and (iii)  $\mathbf{J}_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\mathbf{J}_w \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$  and  $\mathbf{J}_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  are skew-symmetric matrices, so that  $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$ .

System (C3) proves passive for the incoming power  $S = \mathbf{u}^\top \mathbf{y}$  according to the following power balance :

$$\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \frac{dH}{dt}(\mathbf{x}) + D(\mathbf{w}) - S = 0. \quad (\text{C4})$$

This proves the asymptotic stability of (C3) in the sense of Lyapunov [156, §4].

### 7.4.2 Examples

The port-Hamiltonian approach is illustrated on the two systems in figure 7.2.

#### 7.4.2.1 Conservative system

Consider the harmonic oscillator in figure 7.2a, with  $n_x = 2$  (mass  $M$  and stiffness  $K$ ) and  $n_w = 0$  (no dissipation). We firstly describe the dynamics of the autonomous part with  $n_y = 0$ , described as follows.

**LINEAR OSCILLATOR** The elongation of the spring equals the position of the mass w.r.t equilibrium, which is denoted by  $q$ . The Hamiltonian of the system is the sum of the kinetic and potential energies :  $H(\mathbf{x}) = H_M(x_1) + H_K(x_2)$ , with state  $\mathbf{x} = (p, q)^\top$ , mass momentum  $p = M \frac{dq}{dt}$ , kinetic energy  $H_M(x_1) = \frac{x_1^2}{2M}$  and potential energy  $H_K(x_2) = \frac{Kx_2^2}{2}$ . The fictitious force of the mass is  $f_M = M \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt}$ , and its velocity is  $v_M = \frac{dq}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ . The spring force is  $f_K = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2} = Kx_2$ ,

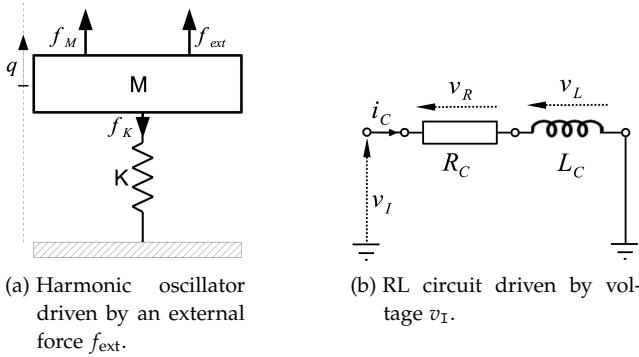


FIGURE 7.2 : Examples addressed in section 7.4.2.

and the mass is glued to the spring so that  $v_K = v_M$ . This corresponds to a standard Hamiltonian dynamics [116] :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix}}_{\frac{dx}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J_x} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\nabla H(x)}. \quad (\text{C5})$$

**NONLINEAR OSCILLATOR** Replace the (linear) stiffness  $K$  by a nonlinear spring  $S$  with constitutive law  $f_S(q) = \sum_{n=0}^N K_n q^{2n+1}$ , designed such that the associated potential energy  $H_S(q) = \int_0^q f_S(x) dx = \sum_{n=0}^N \frac{K_n}{2(n+1)} q^{2(n+1)}$  is positive definite (e.g. for the  $K_n \geq 0$ ). The dynamics is still given by (C5) by considering the new Hamiltonian  $H(x) = H_M(x_1) + H_S(x_2)$ .

**EXTERNAL PORT** Consider now the non-autonomous system in figure 7.2a with arrangement of variables as input  $\mathbf{u} = (f_{\text{ext}})^T$  (applied force) and output  $\mathbf{y} = (v_{\text{ext}})^T = (v_M)^T$  (velocity) so that the external work performed on the system is  $W = f_{\text{ext}} q$  and the provided external power is  $S = \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ . The dynamics is

$$\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \\ -v_{\text{ext}} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{p}{M} \\ \frac{q}{K} \\ f_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad (\text{C6})$$

which restores the form (C3) for the structure in table A1.

**SIMULATION** A dedicated numerical method that preserves the port-Hamiltonian structure (C3) in discrete time is available for simulations (see [A11] and 7.12). This guarantees a numerical power balance is satisfied (from which the numerical stability stems) as shown in figure 7.3.

#### 7.4.2.2 Strictly passive system

Port-Hamiltonian systems (C3) are not restricted to the “classical Hamiltonian systems” [116], for which  $n_w = 0$ ,  $n_x$  is even and  $J_x$  is similar to  $J_x^* = \begin{pmatrix} 0_{n_x/2} & -\mathbb{I}_{n_x/2} \\ \mathbb{I}_{n_x/2} & 0_{n_x/2} \end{pmatrix}$ , for symplectic coordinates. For pH systems,  $J_x$  can even be rank deficient, as exemplified through the RL circuit depicted in figure 7.2b (simplest modeling of a coil (c) with self inductance  $L_c$  and wire resistance  $R_c$ ). This system is made of  $n_x = 1$  storage element (inductance  $L_c$ ),  $n_w = 1$  dissipative element

State : $\mathbf{x} = (p, q)^\top$	Energy : linear $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{Kx_2^2}{2}$ nonlinear $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2M} + \frac{K_0x_2^2}{2} + \frac{K_1x_2^4}{4}$
Dissipation variable : $\mathbf{w} \equiv \text{none}$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) \equiv \text{none}$
Input : $\mathbf{u} = (f_{\text{ext}})^\top$	Output : $\mathbf{y} = (v_{\text{ext}})^\top$
Structure : $J_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, J_y = 0,$ $K \equiv \text{none}, J_w \equiv \text{none}, G_w \equiv \text{none}.$	

TABLE A1 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the harmonic oscillator depicted in figure 7.2a with mass position  $q$  and momentum  $p = M \frac{dq}{dt}$ , external force  $f_{\text{ext}}$  and no dissipation component.

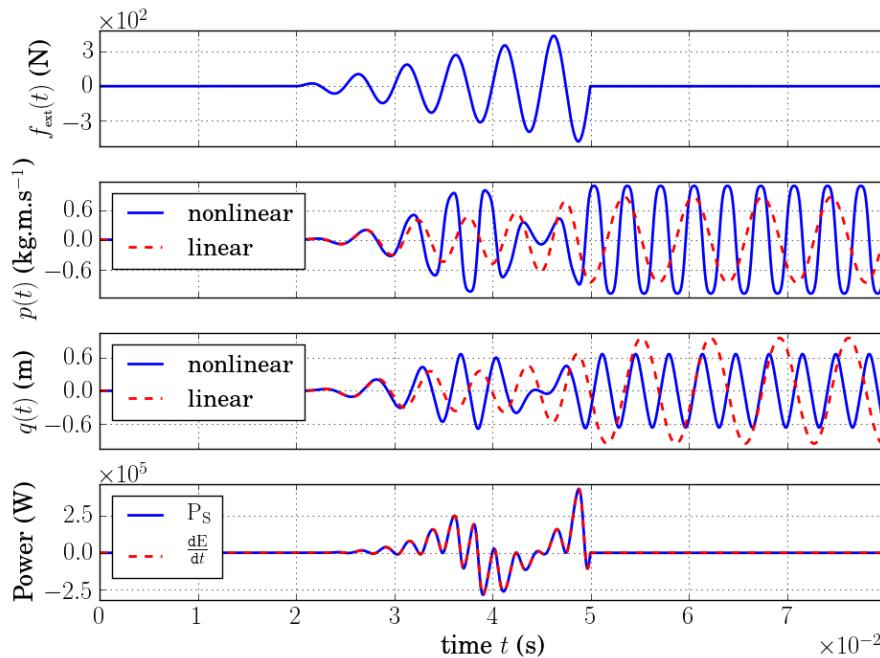


FIGURE 7.3 : Dynamics for the conservative oscillator driven with the external force  $f_{\text{ext}}$  described in table A1. Parameters are  $M = 10^{-3}\text{Kg}$ ,  $K = K_0 = 800\text{N.m}^{-1}$  and  $K_1 = 8000\text{N.m}^{-3}$ . The external force is a 200Hz sine wave with increasing amplitude between 0 and 500N. The sampling rate is  $f_s = 20\text{kHz}$ . The power balance is shown for the nonlinear case only.

(resistance  $R_c$ ) and  $n_y = 1$  external port (input tension  $v_I$ ). The state associated with the inductor is the total magnetic flux  $\mathbf{x} = (\phi)^\top$  with  $\phi = \int_0^t v_L(\tau) d\tau$ , and the Hamiltonian corresponds to the electrodynamic energy  $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L_c}$  so that  $i_c = \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{x_1}{L_c}$ . The dissipation variable is chosen as  $\mathbf{w} = (i_c)^\top$  with linear dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = (R_c w_1)^\top$ . The port variables are arranged as input  $\mathbf{u} = (v_I)^\top$  and output  $\mathbf{y} = (i_c)^\top$ . Applying Kirchhoff's laws, this system is recast into the port-Hamiltonian formulation (C3) for the definition in table A2.

State : $\mathbf{x} = (\phi)^T$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L_c}$
Dissipation variable : $\mathbf{w} = (i_c)^T$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = (R_c w_1)^T$
Input : $\mathbf{u} = (v_I)^T$	Output : $\mathbf{y} = (i_c)^T$
Structure : $J_x = 0, K = 1, G_x = 1,$ $J_w = 0, G_w = 0, J_y = 0.$	

TABLE A2 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the RL circuit depicted in figure 7.2b with magnetic flux  $\phi$  and input tension  $v_I$ .

## 7.5 THE THIELE/SMALL MODEL AND FIRST REFINEMENT (MODEL o)

In this section, the Thiele/Small modeling is refined to cope with force factor modulation (phenomenon 1). The result is recast into the port-Hamiltonian formulation (model o) and simulation results are shown.

**DESCRIPTION** The Thiele/Small modeling from section 7.3.1 can be regarded as the interconnection of a RL circuit with a mass-spring-damper system, through a gyrator that describes the reversible energy transfer from the electrical domain to the mechanical domain as depicted in figure 7.4 and detailed in 7.13.2. This sys-

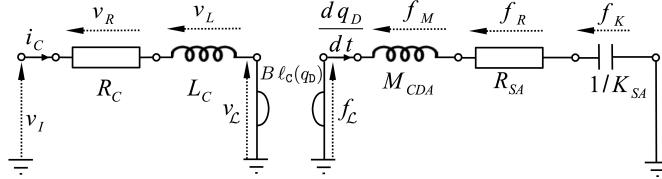


FIGURE 7.4 : Equivalent circuit of the model o with direct electromechanical analogy (force $\equiv$ voltage, velocity $\equiv$ current). It corresponds to the Thiele/Small model (C1)-(C2) with position dependent electromechanical coupling (phenomenon 1) that restores the gyrator (C50) with the force factor  $B \ell_c(q_D)$  for the effective wire length  $\ell_c(q_D)$  in (C8).

tem includes  $n_x = 3$  storage components (coil inductance  $L_c$ , mass  $M_{CD_A}$  and stiffness  $K_{SA}$ ),  $n_w = 2$  dissipative components (electrical resistance  $R_c$  and mechanical damping  $R_{SA}$ ) and  $n_y = 1$  port (electrical input  $v_I$ ). The state  $\mathbf{x} = (\phi_c, p_M, q_D)^T$  consists of the magnetic flux in the coil  $\phi_c$ , mass momentum  $p_M = M_{CD_A} \frac{dq_D}{dt}$  and diaphragm position  $q_D$ . The Hamiltonian is the sum of the electrodynamic energy  $H_L(x_1) = \frac{x_1^2}{2L_c}$ , the kinetic energy  $H_M(x_2) = \frac{x_2^2}{2M_{CD_A}}$  and the potential energy  $H_K(x_3) = K_{SA} \frac{x_3^2}{2}$ . The dissipation variable is  $\mathbf{w} = (i_c, \frac{dq_D}{dt})^T$  with linear dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \text{diag}(R_c, R_{SA}) \mathbf{w}$ .

**POSITION DEPENDENT FORCE FACTOR (MODEL O)** The gyrator that restores the Lorentz force  $f_{\mathcal{L}}$  with corresponding back electromotive force  $v_{\mathcal{L}}$  is given in (C5o) and recalled below :

$$\begin{pmatrix} v_{\mathcal{L}} \\ f_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \ell_c \\ B \ell_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ v_c \end{pmatrix}, \quad (\text{C7})$$

with coil velocity  $v_c = \frac{dq_D}{dt}$  and  $\ell_c$  the length of coil wire effectively subjected to the magnetic field  $B$ . This length depends on the coil position (phenomenon 1, see [134, figures 2.5–2.8] and [99, figure 5]). We propose a parametric plateau function  $\ell_c : q_D \mapsto \ell_c(q_D)$  :

$$\ell_c(q_D) = \ell_c^0 \frac{1 + \exp(-P_\ell)}{1 + \exp\left(P_\ell \left(\left(\frac{q_D}{Q_\ell}\right)^2 - 1\right)\right)}, \quad (\text{C8})$$

where  $\ell_c^0$  is the total length of the coil,  $Q_\ell$  describes the overhang of the coil with respect to the magnetic path (see figure 7.5a and [99, § 3.1.2]), and  $P_\ell$  is a shape parameter (see figure 7.5b).

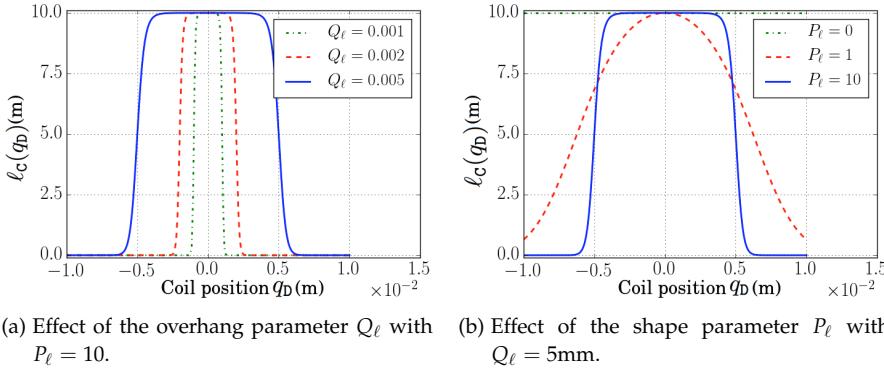


FIGURE 7.5 : Effective length of coil wire  $\ell_c$  subjected to the magnetic field  $B$  as defined in (C8), with coil position  $q_D$  and total wire length  $\ell_c^0 = 10\text{m}$ . Notice  $P_\ell = 0$  corresponds to  $\ell_c = \ell_c^0$ .

**PORT-HAMILTONIAN FORMULATION** The model o is recast into the port-Hamiltonian formulation (C3) by rewriting the Thiele/Small model (C1)–(C2) for the above definitions :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -B \ell_c(x_3) \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2) - z_1(w_1) + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= B \ell_c(x_3) \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1) - \frac{\partial H}{\partial x_3}(x_3) - z_2(w_2), \end{aligned} \quad (\text{C9})$$

with  $v_D = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2) = \frac{dx_3}{dt} = w_2$  and  $i_c = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2) = w_1 = y_1$ . The corresponding structure is given in table A3.

**SIMULATION RESULTS** Simulation are performed with the passive guaranteed numerical method associated with the pH structure (C3) recalled in 7.12. Results are shown in figure 7.6 for different values of the overhang parameter  $Q_\ell$ . We see that the symmetrical relation assumed for  $\ell_c(q_D)$  induces a doubling period in the force factor (see the force factor  $B_\ell$  and power in figure 7.6). Notice the (numerical) power balance is satisfied.

The model o in table A3 is refined in the sequel to cope with the phenomena listed in section 7.3.2.

State : $\mathbf{x} = (\phi_c, p_M, q_D)^\top$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2L_c} + \frac{x_2^2}{2M_{cDA}} + K_{SA} \frac{x_3^2}{2}$
Dissipation variable : $\mathbf{w} = \left( i_c, \frac{dq_D}{dt} \right)^\top$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \text{diag}(R_c, R_{SA}) \mathbf{w}$
Input : $\mathbf{u} = (v_I)^\top$	Output : $\mathbf{y} = (i_c)^\top$
$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & -B\ell_c(x_3) & 0 \\ B\ell_c(x_3) & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\mathbf{G}_x = \left( 1, 0, 0 \right)^\top, \mathbf{J}_w = \emptyset_{2 \times 2}, \mathbf{G}_w = \emptyset_{2 \times 1}, \mathbf{J}_y = 0.$	Structure :

TABLE A3 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the Thiele/Small structure with position dependent force factor (model o) as depicted in figure 7.4, with magnetic flux in the coil  $\phi_c$ , diaphragm position  $q_D$  and momentum  $p_M = M_{cDA} \frac{dq_D}{dt}$ . The position dependent effective wire length  $\ell_c(q_D)$  is defined in (C8). Physical parameters are given in table A11.

## 7.6 REFINED MECHANICS (MODEL 1)

In this section, the model o from section 7.5 is refined to cope with creep effect (phenomenon 4) and nonlinear stress-strain relation (phenomenon 5) attached to the suspension material (S). First, we detail the modeling of the creep effect based on fractional calculus elements, which results in a linear port-Hamiltonian system. Second, the hardening suspension effect is included, and the associated nonlinear system is replaced in model o to form the model 1. Third, simulation results are shown.

### 7.6.1 Suspension creep

The creep effect is a long-term shape-memory of suspension material : when a step force is applied, first the diaphragm moves quite instantaneously to an equilibrium for which the restoring force is exactly compensating, and second a very slow displacement occurs, due to rearrangements in the crystal lattice of the material (see e.g. [100, figure 1] and [135, figure 11]). This phenomenon is enhanced by heat relaxation of the fluid in the enclosure [171] : when the volume of the container is put under pressure, the fluid's pressure rises in an adiabatic process, in order to compensate the external pressure, and then decreases with cooling due to exchanges with the anisothermal boundaries.

Several modeling of the creep effect have been proposed in the frequency domain, among which the exp-model (fractional differentiator) in ([100, eq. (8)]), the log-model (frequency dependent stiffness) in [100], FDD-model (frequency dependent damping) in [171, 170]. The frequency domain approach is motivated by the fact that long-time memory effects can be appropriately described by fractional-order linear dynamics (see e.g. [101, 78, 82], [150][part 6] and reference therein for details). Here we consider the fractional extension of the Kelvin-Voigt modeling proposed in [101]. The resulting (linear) mechanical subsystem is depicted in figure 7.7 and is recast into the port-Hamiltonian formulation (C3).

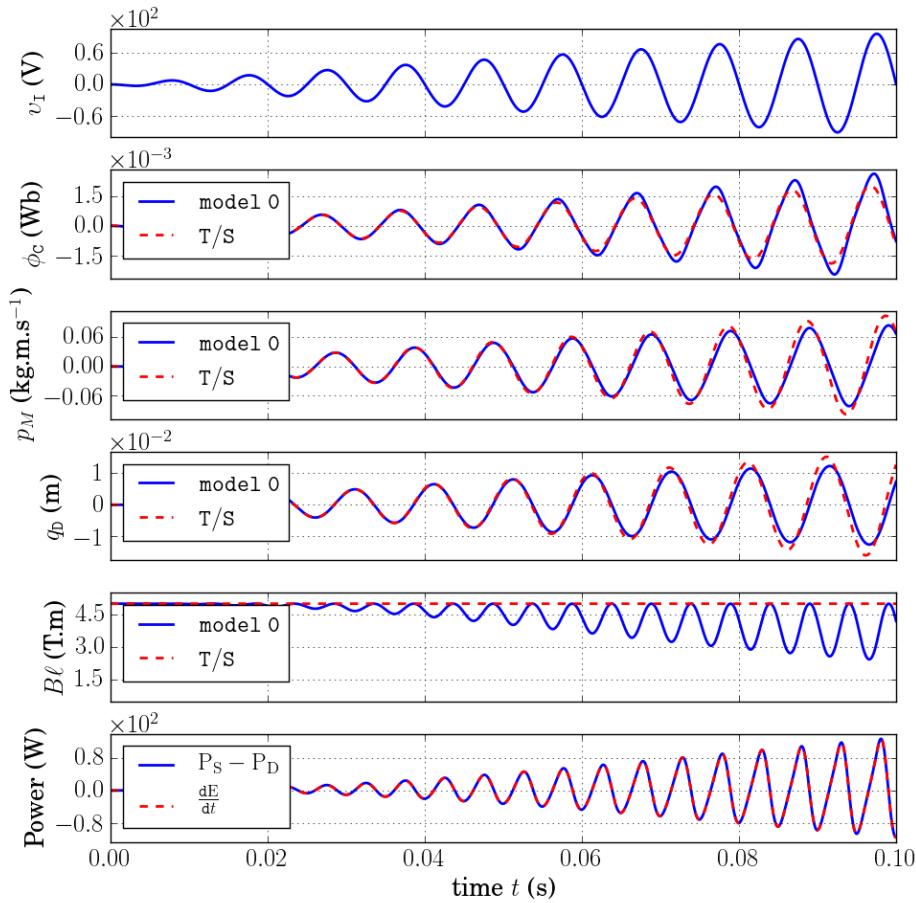
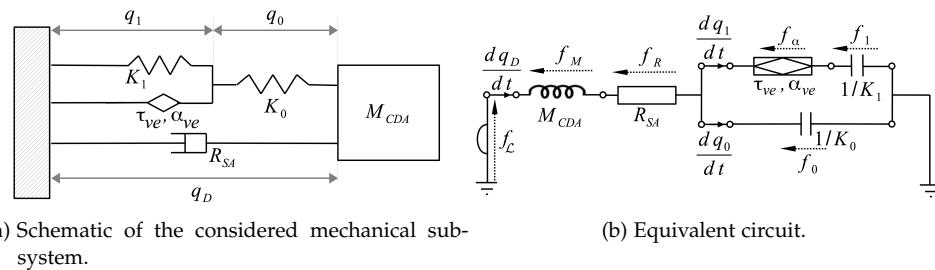


FIGURE 7.6 : ]

[Simulation results for the loudspeaker model o.] Simulation results for the model o in table A3. Physical parameters are given in table A11. The input voltage  $v_I$  is a 100Hz sine wave with increasing amplitude between 0 and 50V. The sampling rate is  $f_s = 96\text{kHz}$ . The power balance is shown for the case  $P_\ell = 5$  only.



(a) Schematic of the considered mechanical subsystem.

(b) Equivalent circuit.

FIGURE 7.7 : Small-signal modeling of the mechanical part which includes : the total mass  $M_{CDA}$  (diaphragm, coil and additional mass due to acoustic radiation), the fluid-like damper  $R_{SA}$  (mechanical friction and small signal approximation for the acoustic power radiation), primary stiffness  $K_0$  and fractional Kelvin-Voigt modeling of the creep effect ( $K_1, \tau_\epsilon, \alpha_\epsilon$ ), with diaphragm position  $q_D$ , primary elongation  $q_0$ , creep elongation  $q_1$  and finite dimensional realization of the fractional differentiator in (C15). Parameters are given in tables A11 and A12.

### 7.6.1.1 Description of the creep model

Viscoelastic materials combine elastic solids behaviors and viscous fluid behaviors. Let  $R$  be the coefficient of viscosity of a damper ( $\text{N.s.m}^{-1}$ ) and  $K$  be the modulus of elasticity of a spring element ( $\text{N.m}^{-1}$ ) with characteristic frequency  $\omega_\alpha = \frac{K}{R}$  (Hz) and associated creep time is  $\tau_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}$  (s). The fractional calculus element defined in [101, (3.1)] restores a fractional order compliance in Laplace domain :

- $\mathcal{T}_\alpha(s) = \frac{q_\alpha(s)}{f_\alpha(s)} = \frac{1}{K} \left( \frac{s}{\omega_\alpha} \right)^{\alpha-1}$  is a hermitian function defined for the Laplace variable  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  ( $RR_-$  is a cut, see [76]),,
- $q_\alpha(s)$  is the Laplace transform of element elongation and
- $f_\alpha(s)$  is the Laplace transform of the restoring force.

The associated velocity  $v_\alpha(s) = s q_\alpha(s)$  is

$$v_\alpha(s) = \frac{1}{R} \left( \frac{s}{\omega_\alpha} \right)^\alpha f_\alpha(s), \quad (\text{C10})$$

that is, a fractional differentiator of order  $\alpha$ . Parameter  $\alpha$  can be regarded as a memory parameter : for  $\alpha = 0$ ,  $f_\alpha(s) = R v_\alpha(s)$  (no memory or algebraic relation) and for  $\alpha = 1$ ,  $f_\alpha(s) = K s^{-1} v_\alpha(s)$  (perfect memory or integrator). The fractional calculus Kelvin-Voigt modeling of the creep effect [101, § 4] is constructed by connecting a linear spring with same stiffness  $K$  in parallel to a fractional calculus element (C10). The elongation is the same for both elements  $q_{\text{kv}} = q_\alpha$  and forces sum up  $f_{\text{kv}} = f_\alpha + K q_\alpha$ . The corresponding compliance is

$$\mathcal{T}_{\text{kv}}(s) = \frac{q_{\text{kv}}(s)}{f_{\text{kv}}(s)} = \left( K \left( 1 + \left( \frac{s}{\omega_\alpha} \right)^{1-\alpha} \right) \right)^{-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-. \quad (\text{C11})$$

The modeling of materials that exhibits several relaxation times  $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$  is achieved by chaining  $N$  fractional calculus Kelvin-Voigt elements (see [101, § 4], [112] and [2, figure 1]). Each element contributes to the total elongation  $q_{\text{chain}} = \sum_{n=1}^N q_n$ , and every elements experience the same force  $f_{\text{chain}} = f_1 = \dots = f_N$ . The total compliance is therefore (with  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ) :

$$\mathcal{T}_{\text{chain}}(s) = \frac{s_{\text{chain}}(s)}{f_{\text{chain}}(s)} = \sum_{n=1}^N \left( K_n \left( 1 + \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^{1-\alpha_n} \right) \right)^{-1}, \quad \omega_n = \frac{K_n}{R_n}. \quad (\text{C12})$$

In this paper we consider the three elements fractional calculus solid model that restores (i) a primary instantaneous response to a step force with stiffness  $K_0$  and (ii) a long time viscoelastic memory with characteristic time  $\tau_\epsilon = \frac{2\pi}{\omega_1}$ . The compliance of this viscoelastic model is (with  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ )

$$\mathcal{T}_\epsilon(s) = \frac{1}{K_0} + \left( K_1 \left( 1 + \left( \frac{s}{\omega_1} \right)^{1-\alpha_\epsilon} \right) \right)^{-1}; \quad \omega_1 = \frac{K_1}{R_1}. \quad (\text{C13})$$

Parameters  $K_0$  and  $K_1$  are related to  $K_{\text{SA}}$  according to

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_{\text{SA}}}{P_K} \\ K_1 &= \frac{K_{\text{SA}}}{2(1-P_K)} \end{aligned} \quad (\text{C14})$$

where parameter  $0 < P_K < 1$  describes the partition of  $K_{\text{SA}}$  between  $K_0$  and  $K_1$ , so that  $\mathcal{T}_\epsilon(s)|_{\alpha_\epsilon=1} = K_{\text{SA}} s^{-1}$  and  $K_0 = K_1 = \frac{3K_{\text{SA}}}{2}$  for  $P_K = \frac{3}{2}$ .

### 7.6.1.2 Port-Hamiltonian formulation

The creep model (C13) corresponds to the parallel connection of (i) a linear spring  $K_0$  and (ii) a linear spring  $K_1$  serially connected to a fractional calculus element (C10) with stiffness  $K_1$ , characteristic frequency  $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau_c}$  and memory parameter  $\alpha_e$  (see figure 7.7). The port-Hamiltonian modeling of linear stiffness  $K_i$  with associated potential energy  $H_i(q_i) = \frac{K_i}{2}q_i^2$  has been addressed in section 7.4.2.

The port-Hamiltonian modeling of fractional calculus elements (C10) has been addressed in [107]. First, an infinite dimensional state space formulation of the transfer function (C10) with input  $f_\alpha(s)$  and output  $v_\alpha = v_1(s) = \frac{\omega_1}{K_1} \left(\frac{s}{\omega_1}\right)^\alpha f_\alpha(s)$  is build based on a continuous aggregation of linear damping according to the diffusive representation formalism (see 7.15.2). Second, a finite order approximation is built based on the interconnection of a finite set of  $n_e$  linear damping associated with the poles  $(-\xi_1, \dots, -\xi_{n_e})$  located on the cut  $\mathbb{R}_-$ , as detailed in 7.15.3. The resulting time-domain port-Hamiltonian formulation is

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_e}{dt} \\ w_e \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{n_e \times n_e} & -\text{diag}(\hat{\mu}_{ve})^{-1} & \mathbb{0}_{n_e \times 1} \\ \text{diag}(\hat{\mu}_{ve})^{-T} & \mathbb{0}_{n_e \times n_e} & -\mathbb{1}_{n_e \times 1} \\ \mathbb{0}_{1 \times n_e} & \mathbb{1}_{1 \times n_e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_e(x_e) \\ z_e(w_e) \\ f_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{C15})$$

with state  $x_e = (x_1, \dots, x_{n_e})^\top$ , dissipation variable  $w_e = (w_1, \dots, w_{n_e})^\top$ , and  $H_e(x_e) = \frac{1}{2} x_e^\top \text{diag}(P_1, \dots, P_{n_e}) x_e$ ,  $z_e(w_e) = \text{diag}(R_1, \dots, R_{n_e}) w_e$  with the weights  $\hat{\mu}_{ve}$  obtained from the minimization (C66) for the transfer function  $\mathcal{I}_{1-\alpha_e}$  and

$$\begin{cases} P_n &= \frac{\omega_1^{1-\alpha_e}}{K_1} [\hat{\mu}_{ve}]_n \xi_n, \\ R_n &= P_n [\hat{\mu}_{ve}]_n, \end{cases} \quad n \in (1, \dots, n_e). \quad (\text{C16})$$

The mechanical subsystem depicted in figure 7.7 includes  $n_x = 3 + n_e$  storage components (mass  $M_{cDA}$ , primary stiffness  $K_0$ , secondary stiffness  $K_1$  and  $n_e$  stiffnesses associated with the fractional calculus element  $f_\alpha$ ),  $n_w = 1 + n_e$  dissipative components (damper  $R_{SA}$  and  $n_e$  dampers associated with the fractional calculus element  $f_\alpha$ ) and  $n_y = 1$  port (Lorentz force  $f_L$ ). The state  $x = (p_M, q_0, q_1, x_e^\top)^\top$  consists of the mass momentum  $p_M = M_{cDA} q_D$ , the primary and secondary elongations  $q_0$  and  $q_1$  (respectively), and the states  $x_e$  associated with the fractional calculus in (C15). The Hamiltonian is the sum of the kinetic energy  $H_M(x_1) = \frac{x_1^2}{2M_{cDA}}$ , the primary and secondary potential energies  $H_0(x_2) = K_0 \frac{x_2^2}{2}$  and  $H_1(x_3) = K_1 \frac{x_3^2}{2}$  (respectively) and the Hamiltonian  $H_e(x_e)$  associated with the fractional calculus in (C15). The dissipation variable is  $w = (\frac{dq_D}{dt}, w_e^\top)^\top$  with linear dissipation law  $z(w) = \text{diag}(R_{SA}, R_1, \dots, R_{n_e}) w$  for the  $R_n$  in (C69). The input/output are  $u = (f_L)^\top$  and  $y = (v_D)^\top$ . For these definitions, the interconnection in figure 7.7 yields

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2) - z_1(w_1) + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1) - v_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= v_1 \end{aligned} \quad (\text{C17})$$

with  $v_1 = \mathbb{1}_{1 \times n_e} z_e(w_e)$  from (C15). This system is recast into the port-Hamiltonian formulation (C3) for the structure in table A4 and the parameters in table A12.

State : $\mathbf{x} = (p_M, q_0, q_1, \mathbf{x}_e^\top)^\top$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}$
Dissipation variable : $\mathbf{w} = (v_D, \mathbf{w}_e^\top)^\top$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \mathbf{R} \mathbf{w}$
Input : $\mathbf{u} = (f_L)^\top$	Output : $\mathbf{y} = (v_D)^\top$
Structure : $\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{1 \times n_e} \\ 0 & -\mathbb{1}_{1 \times n_e} \\ 0 & \text{diag}(\hat{\mu}_{SA})^{-1} \end{pmatrix},$ $\mathbf{G}_x = \left( 1, 0, 0, 0 \right)^\top, \mathbf{J}_w = 0, \mathbf{G}_w = 0, \mathbf{J}_y = 0.$	

TABLE A4 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the proposed small signal model of the mechanical part in figure 7.7 driven by the Lorentz force  $f_L$ , with diaphragm position  $q_D$ , momentum  $p_M = M_{cDA} \frac{dq_D}{dt}$ , primary elongation  $q_0$ , creep elongation  $q_1$  and finite dimensional realization of the fractional differentiator in (C15). Parameters are given in tables A11 and A12, with  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \text{diag}(\frac{1}{M_{cDA}}, K_0, K_1, P_1, \dots, P_{n_e})$  and  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_{SA}, R_1, \dots, R_{n_e})$ .

### 7.6.2 Suspension hardening and model 1

For large displacement, the suspension behaves like an hardening spring (phenomenon 5 and [1, 57]). This should occurs for instantaneous displacements, so that only the primary stiffness  $K_0$  in table A4 is affected. First, the mechanical subsystem from previous section is changed to include this phenomenon. Second, the resulting nonlinear mechanical part is included in loudspeaker model o to build the loudspeaker model 1.

#### 7.6.2.1 Model description

The primary stiffness  $K_0$  in table A4 is changed to a nonlinear spring that exhibits a phenomenological saturation for an instantaneous elongation  $q_0 = \pm q_{\text{sat}}$  (symmetric). The associated constitutive law (C53–C55) in 7.14 is

$$c_{SA}(q_0) = q_0 + \frac{4P_{\text{sat}}^S}{4 - \pi} \left( \tan \left( \frac{\pi \cdot q_0}{2q_{\text{sat}}} \right) - \frac{\pi \cdot q_0}{2q_{\text{sat}}} \right) \quad (\text{C18})$$

which yields the restoring force  $f_0(q_0) = K_0 c_{SA}(q_0)$  for the initial stiffness  $K_0$ . It corresponds to the addition of a saturating term that does not contribute around origin, thus preserving the meaning of parameter  $K_0$  (small signal behavior). The associated storage function (C56–C58) is

$$H_{\text{sat}}^{\text{SA}}(q_0) = K_0 \left( \frac{q_0^2}{2} - \frac{8P_{\text{sat}}^S q_{\text{sat}}}{\pi(4 - \pi)} \left( \ln \left| \cos \left( \frac{\pi q_0}{2q_{\text{sat}}} \right) \right| + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi q_0}{2q_{\text{sat}}} \right)^2 \right) \right) \geq 0. \quad (\text{C19})$$

#### 7.6.2.2 Port-Hamiltonian formulation of Model 1

The port-Hamiltonian formulation of the loudspeaker model 1 that includes creep effect (phenomenon 4) and hardening suspension (phenomenon 5) is obtained by (i) replacing the potential energy  $K_0 \frac{q_0^2}{2}$  in table A4 by the nonlinear storage function (C19) and (ii) connecting the mechanical port  $f_L$  to the RL circuit describing

the electromagnetic part as in section 7.3.1. This results in the structure given in table A5 with parameters in table A12.

State : $\mathbf{x} = (\phi_c, p_M, q_0, q_1, \mathbf{x}_e^\top)^\top$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + H_{\text{sat}}^{\text{SA}}(x_3)$
Dissipation variable : $\mathbf{w} = (v_D, \mathbf{w}_e^\top)^\top$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \mathbf{R} \mathbf{w}$
Input : $\mathbf{u} = (v_I)^\top$	Output : $\mathbf{y} = (i_c)^\top$
<b>Structure :</b> $\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & -B\ell_c(q_D) & 0 & 0 & 0 \\ B\ell_c(q_D)0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\hat{\mu}_{\text{SA}})^{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{J}_w = \emptyset, \mathbf{G}_w = \emptyset, \mathbf{J}_y = 0.$	

TABLE A5 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the model 1 depicted in figure 7.10. The linear stiffness  $K_{\text{SA}}$  is replaced by fractional Kelvin-Voigt modeling of the creep effect from section 7.6.1 in serial connection with the nonlinear spring described in section 7.6.2, with diaphragm position  $q_D$ , momentum  $p_M = M_{\text{cDA}} \frac{dq_D}{dt}$ , primary elongation  $q_0$ , creep elongation  $q_1$  and finite dimensional realization of the fractional differentiator in (C15). The nonlinear potential energy  $H_{\text{sat}}^{\text{SA}}(q_0)$  is given in (C19). Parameters are given in tables A11 and A12, with  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \text{diag}(\frac{1}{L_c}, \frac{1}{M_{\text{cDA}}}, 0, K_1, P_1, \dots, P_{n_e})$  and  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_c, R_{\text{SA}}, R_1, \dots, R_{n_e})$ .

### 7.6.3 Simulation results

The simulations of model 1 are performed according to the structure preserving numerical method in 7.12. Physical parameters are given in table A11 and A12.

**CREEP EFFECT** The viscoelastic behavior of the suspension material (phenomenon 4) results in a frequency dependent compliance, i. e. the suspension at low frequencies appears to be softer than predicted by the Thiele/Small model (see e.g. [171, figure 12]). The proposed fractional order dynamics permits to recover this effect as shown in figure 7.9 and 7.22 (left). The corresponding long time memory depicted in figures 7.9 and 7.22 (right) proves to be in accordance with measurements in e.g. [100, figure 1] and [135, figure 11].

**NONLINEAR SUSPENSION** The hardening effect associated with the nonlinear stress-strain characteristic of the suspension material (phenomenon 5) is clearly visible in figure 7.10 where the primary elongation is reduced for higher value of shape parameter  $P_{\text{sat}}^S$ . This reduces the total displacement  $q_D$  and momentum

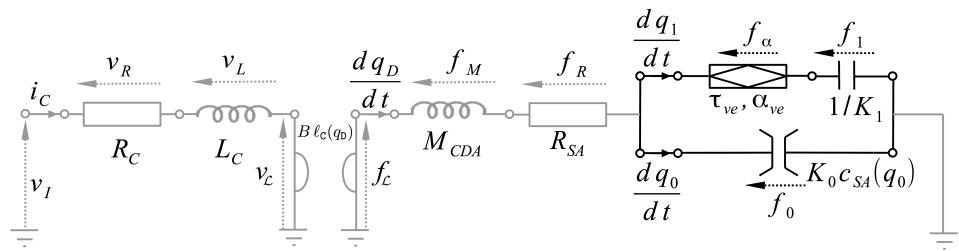


FIGURE 7.8 : Equivalent circuit of the model 1 with diaphragm position  $q_D$ , primary elongation  $q_0$  and creep elongation  $q_1$ . Elements common to model 0 in figure 7.4 are shaded. The linear stiffness  $K_{SA}$  is replaced by (i) a fractional Kelvin-Voigt modeling of the viscoelastic phenomena with creep time  $\tau_e$  and memory parameter  $\alpha_e$  (see section 7.6.1) and (ii) a nonlinear element that restores the hardening of the suspension with constitutive law  $K_0 c_{SA}(q_0)$  given in (C18) (see section 7.6.2).

$p_M = M_{cDA} \frac{dq_D}{dt}$ , while the creep elongation is almost unchanged. Notice the power balanced is fulfilled with  $\frac{dE}{dt} = S - D$ .

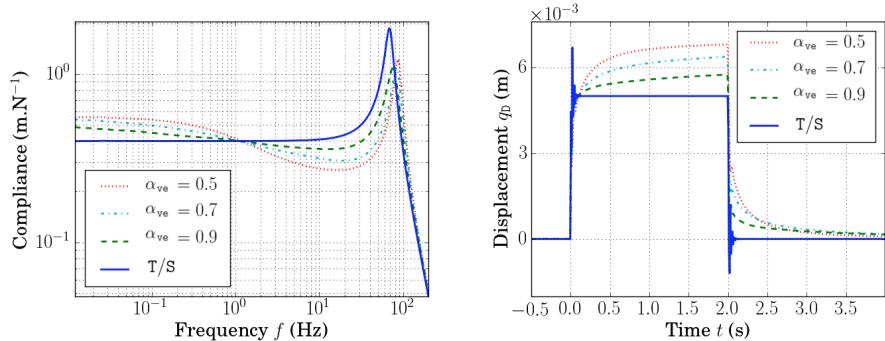


FIGURE 7.9 : Simulation of the small-signal modeling of the mechanical subsystem in table A4 depicted in figure 7.7 with the parameters in tables A11 and A12 (except the memory parameter  $\alpha_e$  indicated in the legend). Left : diaphragm displacement in response to the Lorentz force  $| \frac{q_D}{f_L} | (2i\pi f)$  (frequency domain). Right : diaphragm displacement in response to a 10N Lorentz force step between 0s and 2s (time domain). Legend T/S refers to the mechanical subsystem of the Thiele/Small modeling. Results for the creep time  $\tau_e$  and partition parameter  $P_K$  are given in figure 7.22. Sample rate is 10kHz.

## 7.7 REFINED ELECTROMAGNETIC (MODEL 2)

In this section, the Thiele/Small modeling is refined to account for effects of flux modulation (phenomenon 2), electromagnetic coupling (phenomenon 3), ferromagnetic saturation (phenomenon 6) and eddy currents (phenomenon 7) related to the electromagnetic part (voice-coil c, magnet M, ferromagnetic path P and air gap G). First, the proposed modeling is described. Second, this model is recast into the port-Hamiltonian formulation (C3). Third, simulation results are presented.

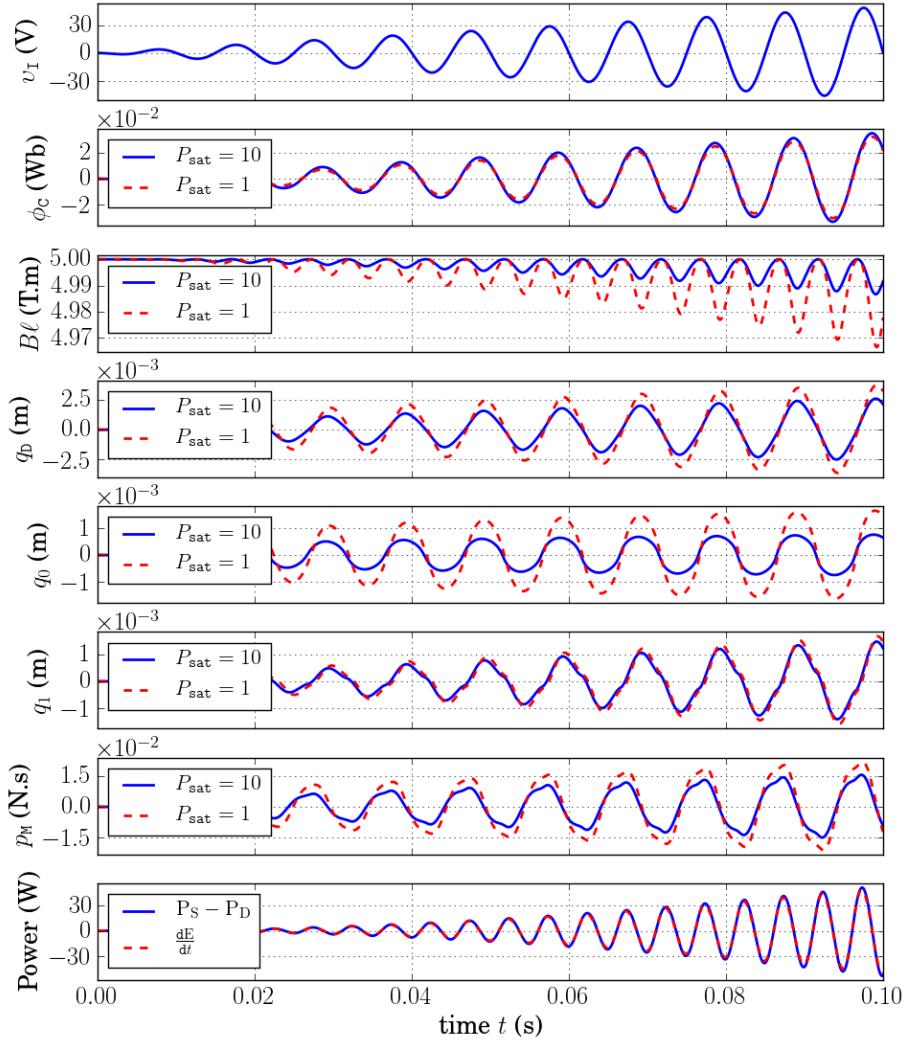


FIGURE 7.10 : Simulation of the model 1 in table A5 depicted in figure 7.10, for the parameters in tables A11 and A12 (except  $P_{\text{sat}}^S$  indicated in the legend). The input voltage is a 100Hz sine wave with increasing amplitude between 0V and 50V. The sampling rate  $f_s = 96\text{kHz}$ . The power balance is shown for  $P_{\text{sat}}^S = 10$  only. Notice  $q_D = q_0 + q_1$ .

### 7.7.1 Model description

The classical lumped elements modeling of loudspeakers electrical impedance consists of the electrical DC resistance of the wire  $R_c$  serially connected to a non-standard inductive effect, referred as lossy-inductor. The simplest refinement of the Thiele/Small modeling is the LR-2 model, which uses a series inductor connected to a second inductor shunted by resistor. This structure has been refined by several authors [179, 184, 50, 172, 102] by considering nonstandard components instead of the ideal resistances and inductances to recover the measured electrical impedance. A frequency dependent inductance has been considered in [179]. A weighted power functions of the frequency for both the real and imaginary part of the impedance is proposed in [184, 108].

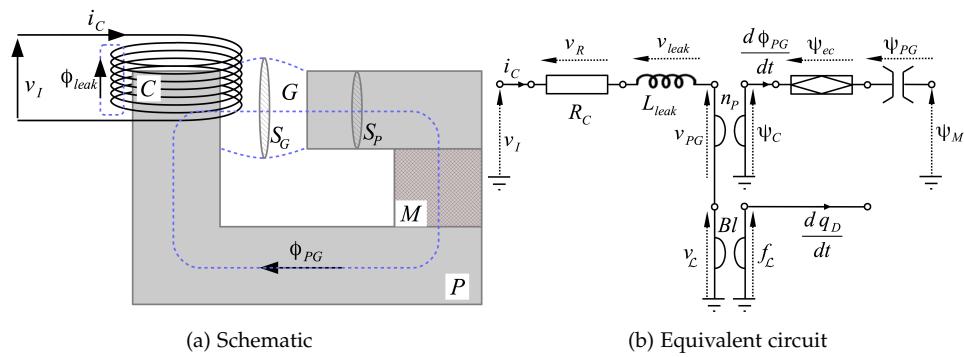


FIGURE 7.11 : Simplified modeling of the electromagnetic circuit, which includes : the coil wire resistance  $R_c$ , the linear inductance associated with the leakage flux  $\phi_{\text{leak}}$ , the electromagnetic transduction with  $n_p$  the number of wire turns around the magnetic path, the magnetic energy storage in the ferromagnetic path described by the nonlinear induction-excitation curve  $\psi_{\text{PG}} \equiv \psi_{\text{PG}}(\phi_{\text{PG}})$  from (C22), the fractional dynamics associated with eddy currents in the pole piece form (C33), and the constant source of magnetomotive force  $\psi_M$  due to the magnet from (C24).

The proposed modeling of the loudspeakers electrical impedance is depicted in figure 7.11. The coil winding acts as an electromagnetic transducer (gyrator) that realizes a coupling between the electrical and the magnetic domains, according to the gyrator-capacitor approach (see [26, 71] and recalls in 7.13.3). The electrical domain includes the linear resistance  $R_c$  of the coil wire (same as Thiele/Small model) and a constant linear inductance associated with the magnetic flux that does not penetrate the pole piece (P). The flux in the magnetic path is common to (i) a nonlinear magnetic capacitor associated with energy storage in air gap (G, linear) and ferromagnetic (P, nonlinear), (ii) a fractional order differentiator associated with frequency dependent losses (eddy currents) and (iii) a constant source of magnetomotive force associated with the permanent magnet (Ampère model).

#### 7.7.1.1 Coil model

**LEAKAGE INDUCTANCE** A single leakage flux  $\phi_{\text{leak}} = S_{\text{leak}} b_{\text{leak}}$  independent position  $q_D$  is assumed for every of the  $N_c$  wire turns (see 7.11a), with  $S_{\text{leak}}$  the average of the coil section and the inner annular surface between the coil and the pole piece. According to (C48), the linear magnetic capacity of the air path

is  $C_{\text{leak}} = \frac{S_{\text{leak}} \mu_0 (1 + \xi_{\text{air}})}{2 A_c}$  with  $A_c$  the height of the coil wire turns,  $\mu_0$  the magnetic permeability of vacuum and  $\xi_{\text{air}}$  the magnetic susceptibility of air. From (C52), this corresponds to an electrical inductance with state  $x_{\text{leak}} = N_c \phi_{\text{leak}}$  and storage function  $H_{\text{leak}}(x_{\text{leak}}) = \frac{x_{\text{leak}}^2}{2L_{\text{leak}}}$ , for the inductance  $L_{\text{leak}} = N_c^2 C_{\text{leak}}$ . Additionally, we define the characteristic frequency  $\omega_c = \frac{L_{\text{leak}}}{R_c}$  associated with the connection of  $L_{\text{leak}}$  with  $R_c$ .

**ELECTROMAGNETIC COUPLING MODULATION** The electromagnetic coupling between the coil (c) and the path (P) depends on the number  $n_p$  of wire turns effectively surrounding the pole piece. For small negative excursions  $q_D < 0$  every wire turns participate to the coupling  $n_p \sim N_c$ , and for large positive excursions the coil leaves the pole piece  $n_p \sim 0$ . We choose a phenomenological sigmoid relation  $n_p : q_D \mapsto n_p(q_D)$ :

$$n_p(q_D) = N_c \left( 1 + \exp \left( \frac{4q_D - 2(q_- + q_p)}{q_p - q_-} \right) \right)^{-1} \quad (\text{C20})$$

with  $n_p(q_-) \simeq 90\%N_c$  and  $n_p(q_p) \simeq 10\%N_c$  (see figure 7.13). Some example are depicted in figure 7.13a.

### 7.7.1.2 Ferromagnetic saturation

**NONLINEAR STORAGE** The storage of magnetic energy in the magnetic circuit is spread over the pole piece (P) and the air gap (G). Assuming no leakage flux in the pole piece, those elements are crossed by the same magnetic flux  $\phi_{PG}$  (see figure 7.11a and [26, 71]). The corresponding averaged inductions are

$$\begin{aligned} b_P &= \frac{\phi_{PG}}{S_p}, \\ b_G &= \frac{\phi_{PG}}{S_g}, \end{aligned} \quad (\text{C21})$$

with  $S_p$  the average section crossed by the magnetic flux in the pole piece and  $S_g$  the section of the flux in the air gap (see figure 7.11a). This corresponds to the serial connection of two magnetic capacitors : the first is associated with the air gap G with linear constitutive law (as for the leakage flux  $\phi_{\text{leak}}$ ) ; the second is associated with the pole piece P and cannot be described by a linear magnetic capacity due to the magnetic saturation that occurs in ferromagnetic material (phenomenon 6). Those two serially connected magnetic capacitors can merge into a single nonlinear capacitor which restores the total magnetomotive force  $\psi_{PG}(\phi_{PG})$ . We consider the tangent-like constitutive relation in 7.14 with flux saturation  $\phi_{\text{sat}} = S_p b_{\text{sat}}$ , where  $b_{\text{sat}}$  depends on the specific magnetic material. From (C53–C55), the constitutive law  $\psi_{PG}(\phi_{PG}) = c_{PG}(\phi_{PG})$  is

$$c_{PG}(\phi_{PG}) = P_{\text{lin}}^{\text{PG}} \left( \phi_{PG} + \frac{4P_{\text{sat}}^{\text{PG}}}{4 - \pi} \left( \tan \left( \frac{\pi \phi_{PG}}{2\phi_{\text{sat}}} \right) - \frac{\pi \phi_{PG}}{2\phi_{\text{sat}}} \right) \right) \quad (\text{C22})$$

where coefficient  $P_{\text{lin}}^{\text{PG}}$  includes the contributions of both air and pole piece material, and  $P_{\text{sat}}^{\text{PG}}$  is a shape parameter that depends on the specific material used for the pole piece. The associated storage function (C56–C58) is

$$H_{\text{sat}}^{\text{PG}}(\phi_{PG}) = P_{\text{lin}}^{\text{PG}} \left( \frac{\phi_{PG}^2}{2} - \frac{8P_{\text{sat}}^{\text{PG}} \phi_{\text{sat}}}{\pi(4 - \pi)} \left( \ln \left| \cos \left( \frac{\pi \phi_{PG}}{2\phi_{\text{sat}}} \right) \right| + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \phi_{PG}}{2\phi_{\text{sat}}} \right)^2 \right) \right) \geq 0. \quad (\text{C23})$$

**STEADY STATE BEHAVIOR** The permanent magnet is modeled as a constant source of magnetomotive force  $\psi_M$  (Ampère model [71]). This drives the magnetic flux in the path to an equilibrium (steady-state)  $\phi_{PG} = \phi_{ss}$  for which the magnetomotive force exactly compensates that of the magnet :

$$\psi_{PG}(\phi_{ss}) = \psi_M. \quad (\text{C24})$$

The associated steady-state magnetic capacity is the inverse of the linear approximation of  $\psi_{PG}(\phi_{PG})$  around  $\phi_{ss}$  :

$$C_{ss} = \left( \frac{\partial c_{PG}}{\partial \phi_{PG}} (\phi_{PG} = \phi_{ss}) \right)^{-1} = \left( \frac{\partial^2 H_{sat}^{PG}}{\partial \phi_{PG}^2} (\phi_{PG} = \phi_{ss}) \right)^{-1}, \quad (\text{C25})$$

with  $\frac{\partial^2 H_{sat}^{PG}}{\partial \phi_{PG}^2} (\phi_{PG}) = P_{lin}^{PG} \left( 1 + \frac{2\pi P_{sat}^{PG}}{(\pi-4)\phi_{sat}} \left( 1 - \cos^{-2} \left( \frac{\pi\phi_{PG}}{2\phi_{sat}} \right) \right) \right)$ , so that  $P_{lin}^{PG}$  can be tuned according to

$$P_{lin}^{PG}(\phi_{ss}, \phi_{sat}, P_{sat}^{PG}, C_{ss}) = \frac{(\pi-4)\phi_{sat}}{C_{ss} \left( 2\pi P_{sat}^{PG} \left( 1 - \cos^{-2} \left( \frac{\pi\phi_{ss}}{2\phi_{sat}} \right) \right) + (\pi-4)\phi_{sat} \right)}. \quad (\text{C26})$$

#### 7.7.1.3 Frequency dependent losses

Besides the magnetic saturation, the pole piece is affected by the combination of capacitive and resistive effects due to eddy currents, resulting in frequency dependent losses (phenomenon 7).

**EDDY CURRENTS MODEL** In this paper, we consider a linear fractional order magnetic capacity as found in [106, 150, 152, 149, 22, 20] and [150][part 5]. The magnetic resistance  $R_{ec}$  ( $\Omega^{-1}$ ) and magnetic capacitance  $C_{ec}$  (H) associated with eddy currents are merged into the magnetic impedance

$$\mathcal{T}_{ec}(s) = \frac{\psi_{ec}(s)}{s \phi_{ec}(s)} = R_{ec} \left( \frac{s}{\omega_{ec}} \right)^{-\alpha_{ec}} = \left( C_{ec} \omega_{ec} \left( \frac{s}{\omega_{ec}} \right)^{\alpha_{ec}} \right)^{-1}. \quad (\text{C27})$$

with  $s \in \mathbb{C}$  the Laplace variable and  $\omega_{ec} = (R_{ec} C_{ec})^{-1}$  the characteristic frequency. Parameter  $\alpha_{ec}$  can be regarded as a memory parameter :  $\mathcal{T}_{ec}(s)$  restores a pure resistor for  $\alpha_{ec} = 0$  (no memory), and a pure capacitor for  $\alpha_{ec} = 1$  (perfect memory or integrator) with characteristic time  $\tau_{ec} = \frac{2\pi}{\omega_{ec}}$ . Notice the modulus of  $\mathcal{T}_{ec}(\omega_{ec})$  is independent of  $\alpha_{ec}$  (same in the resistive case  $\alpha_{ec} = 0$  and the capacitive case  $\alpha_{ec} = 1$ ). This fractional calculus element is serially connected to the magnetic capacity described in 7.7.1.2 with  $\phi_{ec} = \phi_{PG}$ , which corresponds to the structure depicted in figure 7.11b. The resulting electrical impedance  $\mathcal{T}_P(s) = \frac{v_p}{i_c}$  associated with the pole piece in the coil is

$$\mathcal{T}_P(s) = \frac{v_p(s)}{i_c(s)} = N_c^2 \left( \frac{1}{C_{ec} \omega_{ec} \left( \frac{s}{\omega_{ec}} \right)^{\alpha_{ec}}} + \frac{1}{C_{ss}s} \right)^{-1}. \quad (\text{C28})$$

For  $\alpha_{ec} = 1$ , (C28) restores a pure inductance :  $\mathcal{T}_P(s) = L_P s$  with  $L_P = N_c^2 \frac{C_{ec} C_{ss}}{C_{ec} + C_{ss}}$  and we define

$$\begin{aligned} C_{ss} &= \frac{L_p}{N_c^2 p_L} \\ C_{ec} &= \frac{L_p}{N_c^2 (1-p_L)}. \end{aligned} \quad (\text{C29})$$

Parameter  $0 < p_L < 1$  describes the partition of  $L_P$  between  $C_{ss}$  and  $C_{ec}$  so that  $|\mathcal{T}_P(i\omega_{PG}, \alpha_{ec} = 0)| = |\mathcal{T}_P(i\omega_{PG}, \alpha_{ec} = 1)|$ , with characteristic frequency

$$\omega_{PG} = \omega_{ec} \sqrt{\frac{1 + p_L}{1 - p_L}}. \quad (C30)$$

**BLOCKED ELECTRICAL IMPEDANCE** The current  $i_c$  is common to (i) the resistor  $R_c$ , (ii) the leakage inductance  $L_{leak}$ , and (iii) the impedance associated with the coil core  $\mathcal{T}_{PG}(s)$ . For a coil blocked in fixed position ( $q_D = \frac{dq_D}{dt} = 0 \Rightarrow v_L = 0$ ), the total steady-state electrical impedance  $\mathcal{T}_c(s) = \frac{v_1(s)}{i_c(s)}$  measured at the coil terminals is

$$\mathcal{T}_c(s) = R_c \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \left[ 1 + \frac{L_P \omega_c}{p_L R_c} \left( \frac{1}{1 + \frac{1-p_L}{p_L} \left( \sqrt{\frac{1-p_L}{1+p_L}} \frac{s}{\omega_{PG}} \right)^{1-\alpha_{ec}}} \right) \right] \right). \quad (C31)$$

The DC value is given by the resistance  $R_c$ . For extremely high frequency, the impedance is governed by the leakage inductance  $\mathcal{T}_c(i\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} R_c \left( 1 + \frac{i\omega}{\omega_c} \right)$ . In between, the impedance depends on  $L_P$  (standard),  $\alpha_{ec}$  (see figure 7.15),  $\tau_{PG} = \frac{2\pi}{\omega_{PG}}$  (see figure 7.23a), and  $p_L$  (see figure 7.23b).

### 7.7.2 Port-Hamiltonian formulation

The proposed loudspeaker modeling with refined electromagnetic phenomena (model 2) corresponds to the replacement of the inductance  $L_c$  in model 0 by the electromagnetic model described above (compare figures 7.4 and 7.14). It includes a linear RL circuit (same as the one discussed in §7.4.2.2) serially connected to the gyrator associated with the core of the coil described in §7.7.1.1 with the nonstandard elements described in §7.7.1.2 (nonlinear storage) and §7.7.1.3 (fractional dynamics).

**TIME DOMAIN FRACTIONAL DYNAMICS** The port-Hamiltonian modeling of the fractional calculus elements (C27) has been addressed in [107]. First, an infinite dimensional state space formulation of the transfer function with input  $\psi_{ec}$  and output  $s\phi_{PG}(s) = \left( C_{ec} \omega_{ec} \left( \frac{s}{\omega_{ec}} \right)^{\alpha_{ec}} \right) \psi_{ec}(s)$  is build based on a continuous aggregation of linear damping according to the diffusive representation formalism (see 7.15). Second, a finite order approximation is built based on the interconnection of a finite set of  $n_{ec}$  linear damping associated with the poles  $(\xi_1, \dots, \xi_{n_{ec}})$ , as detailed in 7.15.3. The resulting time-domain port-Hamiltonian formulation is

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_{ec}}{dt} \\ w_{ec} \\ \frac{d\phi_{PG}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{n_{ec} \times n_{ec}} & -\text{diag}(\hat{\mu}_{ec})^{-1} & \mathbb{0}_{n_{ec} \times 1} \\ \text{diag}(\hat{\mu}_{ec})^{-T} & \mathbb{0}_{n_{ec} \times n_{ec}} & -\mathbb{1}_{n_{ec} \times 1} \\ \mathbb{0}_{1 \times n_{ec}} & \mathbb{1}_{1 \times n_{ec}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_{ec}(x_{ec}) \\ z_{ec}(w_{ec}) \\ \psi_{ec} \end{pmatrix} \quad (C32)$$

with state  $x_{ec} = (x_1, \dots, x_{n_{ec}})^T$ , dissipation variable  $w_{ec} = (w_1, \dots, w_{n_{ec}})^T$ , and  $H_{ec}(x_{ec}) = \frac{1}{2} x_{ec}^T \text{diag}(P_1, \dots, P_{n_{ec}}) x_{ec}$ ,  $z_{ec}(w_{ec}) = \text{diag}(R_1, \dots, R_{n_{ec}}) w_{ec}$  with the weights  $\hat{\mu}_{ec}$  obtained from the minimization (C66) for the transfer function  $\mathcal{I}_{1-\alpha_{ec}}$  and

$$\begin{cases} P_n &= C_{ec} \omega_{ec}^{1-\alpha_{ec}} [\hat{\mu}_{ec}]_n \xi_n, \\ R_n &= P_n [\hat{\mu}_{ec}]_n, \end{cases} \quad n \in (1, \dots, n_{ec}). \quad (C33)$$

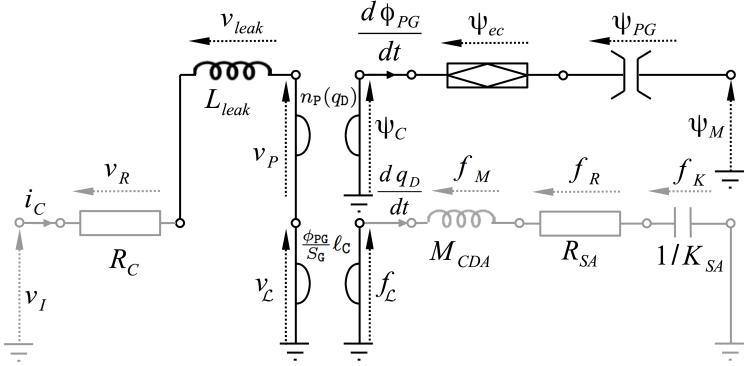


FIGURE 7.12 : Equivalent circuit of the model 2 described in table A6. Elements common to model 0 in figure 7.4 are shaded. The coil inductance  $L_c$  is replaced by the electromagnetic circuit from figure 7.11b which include the leakage inductance  $L_{\text{leak}}$  and the explicit modeling of the magnetic path (pole piece P and air gap G). The latter includes (i) constant magnetomotive force due to the magnet  $\psi_M$  from (C24), (ii) ferromagnetic saturation  $\psi_{\text{PG}}(\phi_{\text{PG}})$  from (C22), (iii) fractional order dynamics associated with eddy currents from (C33) and (C27), and (iv) position dependent electromagnetic coupling  $n_p(q_D)$  from (C20). The induction is replaced by its actual value from (C21) :  $B = \frac{\phi_{\text{PG}}}{S_G}$ .

**MODEL 2** The loudspeaker model 2 in figure 7.14 includes  $n_x = 4 + n_{\text{ec}}$  storage components (leakage inductance  $L_{\text{leak}}$ , nonlinear magnetic capacity  $c_{\text{PG}}$ , mass  $M_{\text{cDA}}$ , stiffness  $K_{\text{SA}}$  and  $n_{\text{ec}}$  linear capacitors associated with eddy currents),  $n_w = 2 + n_{\text{ec}}$  dissipative components (electrical resistance  $R_c$ , mechanical damping  $R_{\text{SA}}$  and  $n_{\text{ec}}$  resistors associated with eddy currents) and  $n_y = 2$  port (voltage  $v_I$  and constant magnetomotive force of the magnet  $\psi_M$ ). The state  $\mathbf{x} = (x_{\text{leak}}, \phi_{\text{PG}}, p_M, q_D, \mathbf{x}_{\text{ec}}^\top)^\top$  consists of the state associated with the leakage flux  $x_{\text{leak}} = N_c \phi_{\text{leak}}$ , the flux in the path  $\phi_{\text{PG}}$ , the mass momentum  $p_M = M_{\text{cDA}} \frac{dq_D}{dt}$ , the diaphragm position  $q_D$  and the states associated with eddy currents  $\mathbf{x}_{\text{ec}} = (x_1, \dots, x_{n_{\text{ec}}})^\top$ . The Hamiltonian of this system is  $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + H_{\text{sat}}^{\text{PG}}(x_2)$  with  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \text{diag}(\frac{1}{L_{\text{leak}}}, 0, \frac{1}{M_{\text{cDA}}}, K_{\text{SA}}, P_1, \dots, P_{n_{\text{ec}}})$  for the  $P_n$  in (C33). The dissipation variable is  $\mathbf{w} = (i_c, \frac{dq_D}{dt}, \mathbf{w}_{\text{ec}}^\top)^\top$  with linear dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \text{diag}(R_c, R_{\text{SA}}, R_1, \dots, R_{n_{\text{ec}}}) \mathbf{w}$  for the  $R_n$  in (C33). According to (C21), the magnetic induction in the air gap involved in the electromechanical coupling (C50) is  $b_G = \frac{\phi_{\text{PG}}}{S_G}$ . The length of wire effectively subjected to the induction field is  $\ell_c(x_4)$  given in (C8). The number of wire turns effectively surrounding the pole piece involved in the electromagnetic coupling is  $n_p(x_4)$  given in (C20). For these definitions, the dynamics is

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{x_2}{S_G} \ell_c(x_4) \frac{\partial H}{\partial x_3} - z_1(w_1) - n_p(x_4) \mathbb{1}_{1 \times n_{\text{ec}}} \mathbf{z}_{\text{ec}}(\mathbf{w}_{\text{ec}}) + u_1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{x_2}{S_G} \ell_c(x_4) \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_4} - z_2(w_2), \\ \frac{d\mathbf{x}_{\text{ec}}}{dt} &= -\text{diag}(\hat{\mu}_{\text{ec}})^{-1} \mathbf{z}_{\text{ec}}(\mathbf{w}_{\text{ec}}), \end{aligned} \quad (\text{C34})$$

with  $\frac{dx_2}{dt} = \mathbf{z}_{\text{ec}}(\mathbf{w}_{\text{ec}})$  and  $\frac{dx_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_3}$ . Finally, the port-Hamiltonian formulation (C3) of the loudspeaker model 2 with refined electromagnetic part as depicted in figure 7.14 is given in table A6.

State : $\mathbf{x} = (x_{\text{leak}}, \phi_{\text{PG}}, p_{\text{M}}, q_{\text{D}}, \mathbf{x}_{\text{ec}}^{\top})^{\top}$	Energy : $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{x} + H_{\text{sat}}^{\text{PG}}(x_2)$
Dissipation variable : $\mathbf{w} = (i_c, \frac{d\phi_D}{dt}, \mathbf{w}_{\text{ec}}^{\top})^{\top}$	Dissipation law : $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = \text{diag}(R_c, R_{\text{SA}}, R_1, \dots, R_{n_{\text{ec}}}) \mathbf{w}$
Input : $\mathbf{u} = (v_I)^{\top}$	Output : $\mathbf{y} = (i_c)^{\top}$
	Structure : $\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{x_2}{S_G} \ell_c(x_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_2}{S_G} \ell_c(x_4) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_p(x_4) \mathbb{1} \\ 0 & 0 & -\mathbb{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\hat{\mu}_{\text{ec}})^{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{G}_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$ $\mathbf{J}_w = 0, \mathbf{J}_y = 0.$

TABLE A6 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the loudspeaker model 2 discussed in §7.7.1 and depicted in figure 7.12, where the Lorentz force factor is the product of the magnetic induction in the air gap  $\phi_{\text{PG}}/S_G$  with the position dependent effective wire length  $\ell_c(q_{\text{D}})$  defined in (C8). Parameters are  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \text{diag}(\frac{1}{L_{\text{leak}}}, 0, \frac{1}{M_{\text{cDA}}}, K_{\text{SA}}, P_1, \dots, P_{n_{\text{ec}}})$  and  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_c, R_{\text{SA}}, R_1, \dots, R_{n_{\text{ec}}})$  for the definitions in tables A13 and A11 and in (C33). The nonlinear storage function associated with the path PG is given in (C23). The effective number of wire turns  $n_p(q_{\text{D}})$  involved in the electromagnetic coupling is given in (C20).

### 7.7.3 Simulation results

The simulations of model 2 are performed according to the structure preserving numerical method in 7.12.

**FREQUENCY DEPENDENT LOSSES** Eddy currents result in frequency dependent resistive effects (phenomenon 7) : the slope at high frequencies is lower than predicted by the Theile/Small modeling. The fractional order dynamics permits to recover this phenomena as shown in figure 7.15b. The associated temporal evolution of the magnetic flux in the path is shown in figure 7.15a, where the long-term memory is clearly visible. Results for the partition parameter  $p_L$  and the characteristic time  $\tau_{\text{ec}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{PG}}}$  are given in figure 7.23.

**POSITION DEPENDENT ELECTROMAGNETIC COUPLING** To illustrate the effect of coil position on the electrical impedance (phenomenon 3), the position  $q_{\text{D}}$  in model 2 (table A6) is fixed to -1cm (inside), 0cm (equilibrium) and +1cm (outside). Due to the position dependent effective number of coil wire (C20), this changes the inductance according to (C52). Results are shown in figure 7.13b, in accordance with measurements in e.g. [99, figure 6].

**CORE SATURATION** The effect of the nonlinear magnetic behavior of the pole piece (phenomenon 6) is illustrated by driving the system in steady states for which  $\phi_{PG} \neq \phi_{ss}$ , by imposing several DC voltages, here -100V, -10V, 10V and 100V (see evolution of flux  $\phi_{PG}$  in figure 7.24b and current  $i_c$  in figure 7.24a), with the blocked coil  $q_D = \frac{dq_D}{dt} = 0$ . Then, a small signal noise is applied to measure the resulting impedance. For medium DC values ( $\pm 10V$ ), the flux stays positive so that  $C_{ss}(v_{DC} = -10V) > C_{ss}(v_{DC} = 0V) > C_{ss}(v_{DC} = +10V)$  (see figures 7.16a and 7.24 and e.g. [99, figure 8]). For large negative DC value (-100V), the magnetomotive force of the magnet is no sufficient to keep the flux in the pole piece positive (see 7.24b). This yields  $C_{ss}(v_{DC} = +100V) < C_{ss}(v_{DC} = -100V) < C_{ss}(v_{DC} = 0V)$  as shown in figure 7.16b.

**FLUX DEPENDENT FORCE FACTOR** The force factor in model 2  $B_\ell \equiv \frac{\phi_{PG}}{S_G} \ell_c(q_D)$  is modulated by the coil position (same as model 0) and the magnetic flux in the pole piece P and air gap G (phenomenon 2). This is clearly visible on the results in figure 7.14, where we see the force factor can be larger than predicted by the Thiele/Small modeling. Notice the power balance is fulfilled.

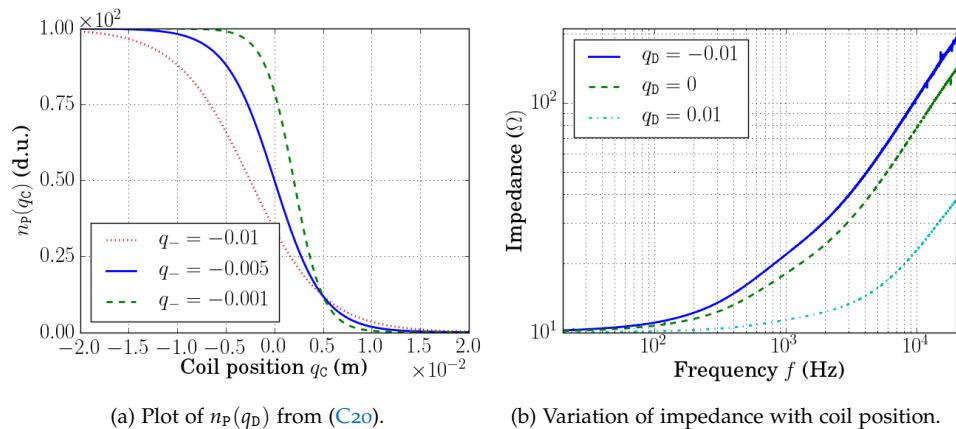


FIGURE 7.13 : Effective number of wire turns involved in the electromagnetic coupling between the coil (c) with  $N_c = 100$  wire turns and the magnetic path (P), according to (C20) for a maximal excursion  $q_p = 5\text{mm}$  and incursions  $q_-$  mentioned in the legend. In figure 7.13b the coil is blocked in different positions, hence changing the number of coil wire turns around the path  $n_P(q_D)$  and thus the steady state inductance according to C52.

## 7.8 REFINED THERMODYNAMICS (MODEL 3)

This section is devoted to the development of the loudspeaker model 3 that includes heating of coil wire due to Joule effect (phenomena 8 and 9). Thermodynamics behaviors are intrinsically irreversible phenomena, so that the reversible port-Hamiltonian structure (C3) has to be extended. We follow the approach in [142] to describes the entropy production associated with the conversion of dissipated power to thermal energy. First, the heating and cooling phenomena are recast as irreversible port-Hamiltonian systems and the selected thermal modeling is presented. Second, the DC resistance  $R_c$  of the model 0 is replaced by the heating/cooling resistor. Third, simulation results are presented.

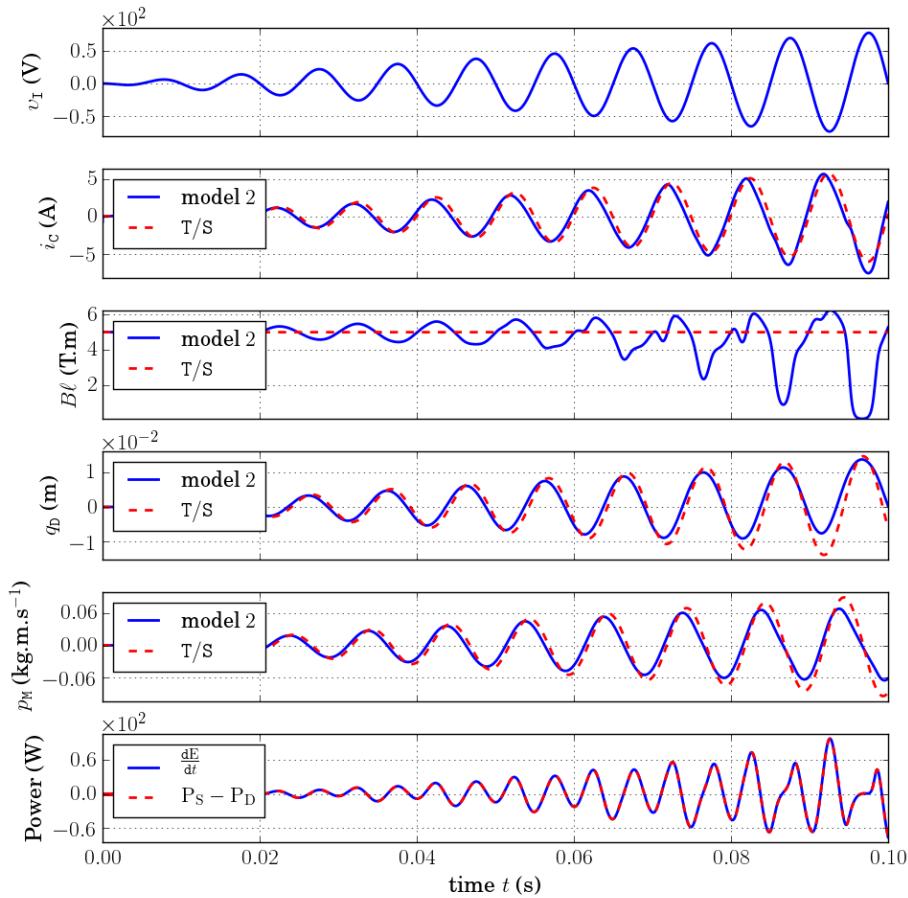


FIGURE 7.14 : Simulation of the model 2 in table A6 depicted in figure 7.12, for the parameters in tables A11 and A13. The input voltage is a 100Hz sine wave with increasing amplitude between 0V and 80V. The sampling rate  $f_s = 96\text{kHz}$ . The power balance is shown for the model 2 only. The force factor  $B_\ell$  corresponds to the product of the induction in air gap  $b_G$  from (C21) with position dependent effective length from (C8).

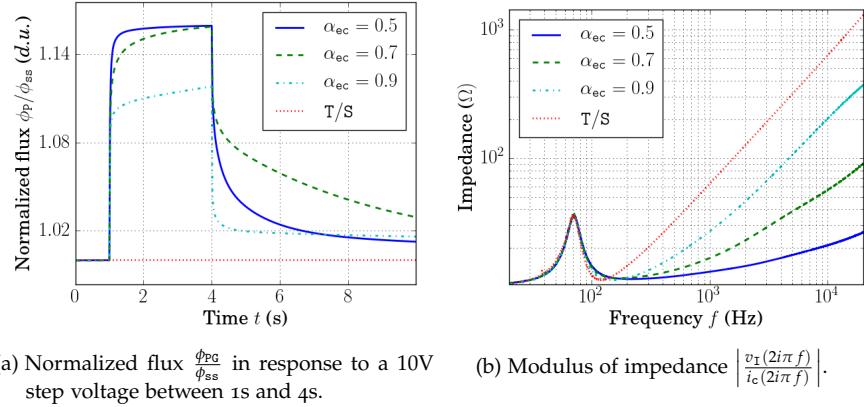


FIGURE 7.15 : Simulation of the loudspeaker model 2 in table A6 depicted in figure 7.14 with the parameters in tables A11 and A13 (except memory parameter indicated in the legend). Sample rate is 96kHz. Legend T/S refers to the Thiele/Small modeling. Results for the partition parameter  $p_L$  and the characteristic time  $\tau_{ec} = \frac{2\pi}{\omega_{pg}}$  are given in figure 7.23.

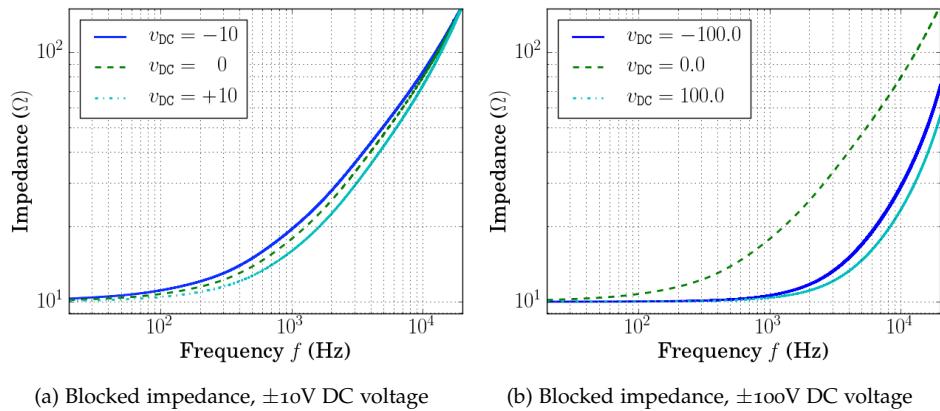


FIGURE 7.16 : Simulation of model 2 in table A6 and depicted in figure 7.14. The sampling rate is 96kHz. The coil is blocked :  $q_D = \frac{dq_D}{dt} = 0$ . The input voltage is  $v_I(t) = v_{DC} + v_{noise}(t)$  with  $v_{noise}$  a random signal normalized to 1mV. The DC value drives the magnetic flux in the pole piece to a new steady state different from  $\phi_{ss}$  (see figure 7.24b), thus changing the equivalent magnetic capacity  $C_{ss} = \left(\frac{\partial^2 H_p}{\partial \phi_p^2}(\phi_{ss})\right)^{-1}$  according to (C25), see details in figures 7.24c and 7.24c. The evolution of current  $i_c$  for each DC value is given in figure 7.24a.

### 7.8.1 Thermal modeling of the resistor

First, the entropy production mechanism associated with the heating of the coil wire is described as an irreversible port-Hamiltonian system. Second, the thermal exchanges mechanism responsible for the cooling is described. Third, we detail the selected thermal model that includes (i) heating of the wire, (ii) thermal exchanges with surrounding and (iii) the increase of the resistivity with temperature.

### 7.8.1.1 Entropy production of a thermal capacitance

The first law of thermodynamics states that the change in the internal energy  $U$  of a closed<sup>2</sup> homogeneous system is  $dU = \delta Q - \delta W$ , where  $Q$  is the heat provided to the system and  $W$  the mechanical thermodynamic work performed by the system. The storage of thermal energy in a body is modeled as a simple thermal capacitance  $\delta Q = Cd\theta$  where  $\theta > 0$  is the body's temperature, and  $C = mc_p$  with  $m$  is the mass (kg) of the body and  $c_p$  the specific heat ( $J \text{ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) of the material. Assuming no variation of body's volume and no isochoric work yields  $\delta W = 0$ . In this case, the second law of thermodynamics states that  $d\sigma = \frac{\delta Q}{\theta}$  is a total differential known as entropy. Then the variation of entropy between two temperatures  $\theta_0$  and  $\theta$  is  $\sigma - \sigma_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{C}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}$ . Choosing the reference such that  $\sigma_0 = 0$  and inverting this relation yields  $\theta(\sigma) = \theta_0 \exp\left(\frac{\sigma}{C}\right)$ . Defining

$$U(\sigma) = C\theta_0 \exp\left(\frac{\sigma}{C}\right), \quad (\text{C35})$$

the time variation of the internal energy is  $\frac{dU}{dt} = \theta \frac{d\sigma}{dt}$  with temperature

$$\theta(\sigma) = \frac{\partial U(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (\text{C36})$$

For the heating resistor,  $\frac{dU}{dt}$  is given by the dissipated power  $D = z(w)w$  so that  $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{z(w)w}{\theta}$ . Considering a current controlled model with input  $u = i = w$  and output  $y = v = z(w)$  yields the following irreversible port-Hamiltonian system :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\sigma}{dt} \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{z(u)}{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{J_\theta} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \\ u \end{pmatrix}. \quad (\text{C37})$$

The skew-symmetry of  $J_\theta$  ensures the entire power lost from the electrical domain is converted into heat; the multiplying term  $\frac{z(u)}{\theta}$  ensures the dissipated power is positive.

### 7.8.1.2 Heat transfers

The cooling of the resistor is due to thermal exchanges with environment. The heat transfer between two bodies  $(\sigma_1, \theta_1)$  and  $(\sigma_2, \theta_2)$  is described as follows. From Newton's law of cooling, the heat flowing into body  $i$  due to the temperature gradient  $\Delta\theta_{j \rightarrow i} = \theta_j - \theta_i$  obeys  $\frac{\delta Q_i}{\delta t} = \frac{dU_i}{dt} = R_{12} \Delta\theta_{j \rightarrow i}$  for  $i, j = 1, 2$ , where  $R_{12}$  is the thermal resistance ( $\text{W.K}^{-1}$ ). This can be recast as the following irreversible port-Hamiltonian system :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\sigma_1}{dt} \\ \frac{d\sigma_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_{12}}{\theta_1} & +\frac{R_{12}}{\theta_1} \\ +\frac{R_{12}}{\theta_2} & -\frac{R_{12}}{\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \sigma_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C38})$$

Notice the variation of total internal energy is  $\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = 0$  and the variation of total entropy is  $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d\sigma_2}{dt} = R_{12} \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{\theta_1 \theta_2} \geq 0$ .

### 7.8.1.3 Thermal model

**THERMAL ELEMENT** According to the third order thermal model of loudspeaker proposed in [33], we introduce the thermal quantities associated with the

<sup>2</sup> A closed system does not exchange matter with its surrounding, but can exchange energy through its boundary.

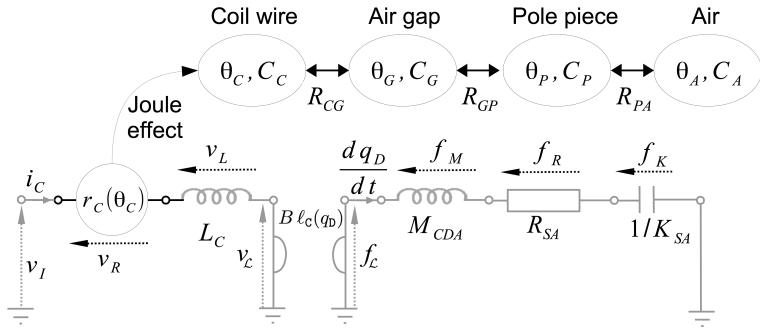


FIGURE 7.17 : Synopsis of the thermal transfers in the third order modeling proposed in [33] and used in this paper. Temperatures of the coil wire, the air gap, the magnetic path and the ambient air are denoted by  $\theta_c$ ,  $\theta_g$ ,  $\theta_p$  and  $\theta_a$  respectively. Corresponding thermal capacitance are denoted by  $C_c$ ,  $C_g$ ,  $C_p$  and  $C_a$ . The thermal resistance that opposes to the heat transfer is  $R_{cg}$  between the coil and the air gap,  $R_{gp}$  between the air gap and the pole piece and  $R_{pa}$  between the pole piece and the air in enclosure. the temperature dependent resistance  $r_c(\theta_c)$  is given in (C39).

voice coil ( $\sigma_c, \theta_c, C_c$ ), the air gap ( $\sigma_a, \theta_a, C_a$ ), the pole piece ( $\sigma_p, \theta_p, C_p$ ) and the air in enclosure ( $\sigma_a, \theta_a, C_a$ ). This model includes heat transfers of the coil wire with the air gap  $R_{cg}$ , the air gap with the pole piece  $R_{gp}$  and the pole piece with air in enclosure  $R_{pa}$  (see figure 7.17).

**TEMPERATURE DEPENDENT RESISTANCE** According to [187] (see also [98] and [33, (14)]), a simple model of wire resistance  $r_c(\theta_c)$  with the wire temperature  $\theta_c$  is

$$r_c(\theta_c) = R_c (1 + \alpha_\tau (\theta_c - \theta_0)), \quad (C39)$$

where  $R_c$  the DC resistance of the coil measured at temperature  $\theta_0$ , and  $\alpha_\tau$  a temperature coefficient. Denoting  $i_c$  the current and  $v_R$  the tension associated with the resistive effect of the coil, this model is recast as an irreversible port-Hamiltonian system as follows :

$$\left( \begin{array}{c} \frac{d\sigma_c}{dt} \\ \frac{d\sigma_g}{dt} \\ \frac{d\sigma_p}{dt} \\ \frac{d\sigma_a}{dt} \\ -v_R \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc} -\frac{R_{cg}}{\theta_c} & \frac{R_{cg}}{\theta_c} & 0 & 0 & \frac{r_c(\theta_c) i_c}{\theta_c} \\ \frac{R_{cg}}{\theta_g} & -\frac{R_{cg}+R_{gp}}{\theta_g} & \frac{R_{gp}}{\theta_g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{gp}}{\theta_p} & -\frac{R_{gp}+R_{pa}}{\theta_p} & \frac{R_{pa}}{\theta_p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{pa}}{\theta_a} & -\frac{R_{pa}}{\theta_a} & 0 \\ -\frac{r_c(\theta_c) i_c}{\theta_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \frac{\partial U_c}{\partial \sigma_c} \\ \frac{\partial U_g}{\partial \sigma_g} \\ \frac{\partial U_p}{\partial \sigma_p} \\ \frac{\partial U_a}{\partial \sigma_a} \\ i_c \end{array} \right) \quad (C40)$$

### 7.8.2 Replacement in model o

The replacement of the DC resistance  $R_c$  in the model o from section 7.3.1 by the thermal resistor model (C40) is as follows. The system includes  $n_x = 7$  storage components (coil inductance  $L_c$ , mass  $M_{cDA}$ , stiffness  $K_{SA}$  and thermal capacities  $C_c, C_g, C_p, C_a$ ),  $n_w = 1$  dissipative component (mechanical damping  $R_{SA}$ ) and  $n_y = 1$  port (electrical input  $v_I$ ). The state  $x = (\phi_c, p_M, q_D, \sigma_c, \sigma_g, \sigma_p, \sigma_a)^\top$  consists of the magnetic flux in the coil  $\phi_c$ , mass momentum  $p_M = M_{cDA} \frac{dq_D}{dt}$ , diaphragm

position  $q_D$  and collection of entropies. The Hamiltonian is the sum of the electrodynamic energy  $H_L(x_1) = \frac{x_1^2}{2L_c}$ , the kinetic energy  $H_M(x_2) = \frac{x_2^2}{2M_{cDA}}$ , the potential energy  $H_K(x_3) = \frac{x_3^2}{2K_{SA}}$  and thermal energies  $U_C, U_G, U_P, U_A$ . The dissipation variable is  $\mathbf{w} = (\frac{dq_D}{dt})^\top$  with linear dissipation law  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = R_{SA} \mathbf{w}$ . As in section 7.3.1, the current in the wire is imposed by coil inductance  $i_c = \frac{\partial H_L}{\partial x_1} = \frac{x_1}{L_c}$ . The resulting port-Hamiltonian system is given in table A7 with the parameters in table A14.

State :	Energy :
$\mathbf{x} = (\phi_c, p_M, q_D, \sigma_c, \sigma_G, \sigma_P, \sigma_A)^\top$	$H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + U(\mathbf{x})$
Dissipation variable :	Dissipation law :
$\mathbf{w} = \left( \frac{dq_D}{dt} \right)^\top$	$\mathbf{z}(\mathbf{w}) = R_{SA} \mathbf{w}$
Input :	Output :
$\mathbf{u} = (v_I)^\top$	$\mathbf{y} = (i_c)^\top$
Structure :	
$\mathbf{J}_x =$ $\left( \begin{array}{ccc ccccc} 0 & -B\ell_c(x_3) & 0 & -\frac{r_c(\theta_c)x_1}{\theta_c L_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B\ell_c(x_3) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{r_c(\theta_c)x_1}{\theta_c L_c} & 0 & 0 & -\frac{R_{cG}}{\theta_c} & \frac{R_{cG}}{\theta_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_{cG}}{\theta_G} & -\frac{R_{cG}+R_{GP}}{\theta_G} & \frac{R_{GP}}{\theta_G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{GP}}{\theta_P} & -\frac{R_{GP}+R_{PA}}{\theta_P} & \frac{R_{PA}}{\theta_P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{PA}}{\theta_A} & -\frac{R_{PA}}{\theta_A} & 0 \end{array} \right),$ $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_w = 0, \mathbf{G}_w = 0, \mathbf{J}_y = 0.$	

TABLE A7 : Irreversible port-Hamiltonian formulation based on structure (C3) for the loud-speaker model 3 depicted in figure 7.17. It includes the heating/cooling resistor from (C40) with the temperature dependent resistance  $r_c(\theta_c)$  defined in (C39). The internal energy is  $U(\mathbf{x}) = U_c(x_4) + U_G(x_5) + U_P(x_6) + U_A(x_7)$  with the  $U_i(\sigma_i)$  defined in (C35). The  $\theta_i$  are function of the  $\sigma_i$  as defined in (C36). Physical parameters are given in tables A11 and A14, with  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \text{diag} \left( \frac{1}{L_c}, \frac{1}{M_{cDA}}, K_{SA}, 0, 0, 0, 0 \right)$ . The position dependent effective wire length  $\ell_c(q_D)$  is defined in (C8).

### 7.8.3 Simulation results

The simulations of model 3 are performed according to the structure preserving numerical method in 7.12. The input voltage consists in several bursts of 200Hz sine wave with amplitude 50V. We present a short time simulation in figure 7.18 (2 bursts of 5 periods) and a long simulation in figure 7.19 (5 bursts of 4 minutes, separated by 1 minute of rest with 10 minutes cooling).

**HEATING OF COIL WIRE** The heating of the coil wire (phenomenon 8) is visible in figure 7.19, where we see a rise from ambient temperature  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  to  $\theta_c(25\text{min}) \sim 150^\circ\text{C}$ . The decrease due to thermal exchanges is also visible, with a cooling down to  $\theta_c(35\text{min}) \sim 40^\circ\text{C}$ . Notice the power balance is fulfilled (fi-

gure 7.18), and it is 0 for the cooling period (figure 7.19), that is, the total energy is preserved. The dissipated power is due solely to the mechanical friction  $R_{SA}$ .

**THERMAL COMPRESSION** This corresponds to phenomenon 9. The variation of the resistance  $r_c(\theta_c)$  from (C39) is very low for the involved temperatures, due to the small temperature coefficient of copper  $\alpha_\tau = 4.10^{-3}K^{-1}$ . However, the compression of both the electrical and the mechanical signals is visible in figure 7.19.

### 7.9 DISCUSSION

The three loudspeaker models 1, 2 and 3 have been developed independently of each other. This permits to illustrate the particular effect of each phenomena on the loudspeaker dynamics. However, their interconnection to form a global, multiphysical modeling that copes with all the phenomena described in section 7.3.2 is straightforward, due to the modularity of the port-Hamiltonian approach.

Phenomena	Coupling			Mechanical		Electromagnetic		Thermal	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Model 0 §7.5	✓								
Model 1 §7.6	✓			✓	✓				
Model 2 §7.7	✓	✓	✓			✓	✓		
Model 3 §7.8	✓							✓	✓

TABLE A8 : Phenomena in section 7.3.2 addressed by each port-Hamiltonian models.

### 7.10 CONCLUSION

In this paper, three lumped parameter models of the electrodynamic loudspeaker have been developed to cope with refined phenomena of (i) mechanical origin, (ii) electromagnetic origin and (iii) thermal origin. In particular, a finite dimensional time domain formulation of the fractional order dynamics associated with viscoelastic and eddy currents phenomena (linear) and materials properties (stress-strain and b-h characteristics, nonlinear) have been derived. Those models are given in the framework of port Hamiltonian systems, which decomposes the system into conservative, dissipative and source parts, including for the thermal model. The numerical method used for the simulations preserves this decomposition and the power balance in the discrete time domain. Numerical results that comply with measurements from the literature have been presented.

The first perspective of this work is to achieve DSP simulation-based real-time audio distortion compensation, based on the preliminary work in [A9]. This requires the development of a parameter estimation method dedicated to the port-Hamiltonian structure. A second perspective is to include detailed modeling of the acoustical load that is not addressed in this paper. Modal decomposition and Rayleigh integral methods [32, 140] are envisaged for this issue.

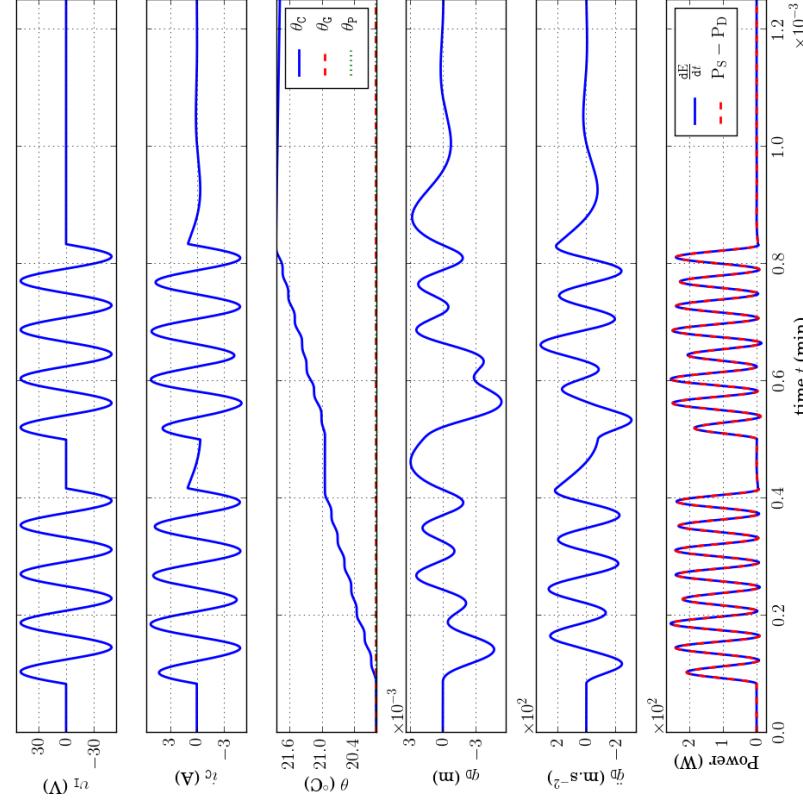


FIGURE 7.18 : Short-time simulation of the model 3 in table A7 depicted in figure 7.17, for the parameters in tables A11 and A14. The input voltage is made of two bursts of four periods of a 200Hz sine wave with amplitude 50V. The sampling rate is 96kHz. Notice the increase in coil wire temperature  $\theta_c$  and the compression due to the evolution of coil wire resistance  $r_c(\theta_c)$  in (C39). The dissipated power is solely due to the friction damping  $R_{SA}$  (see table A7).

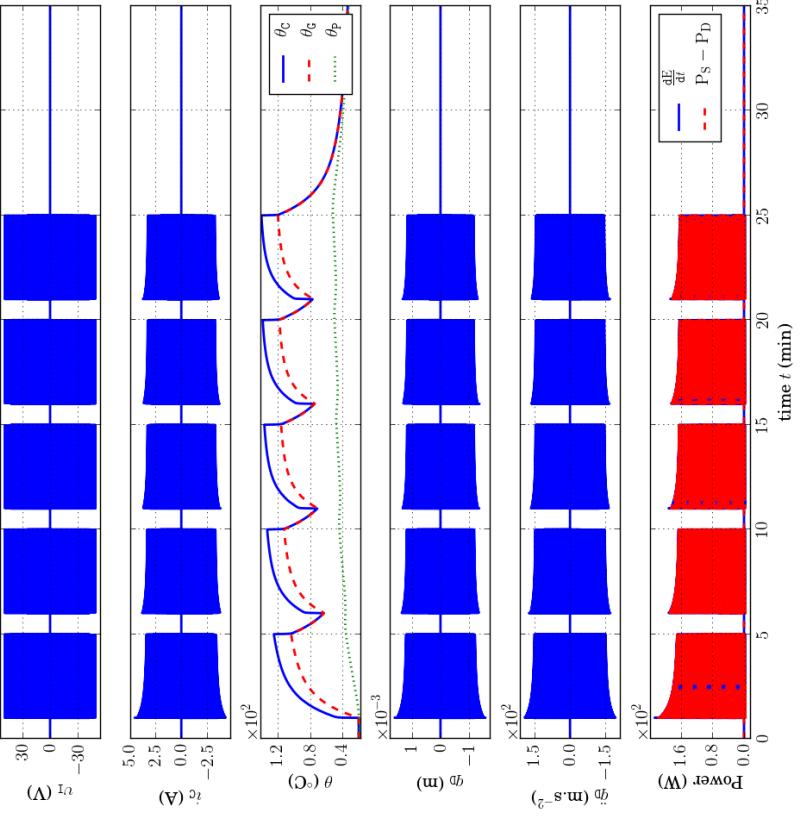


FIGURE 7.19 : Long-time simulation of the model 3 in table A7 depicted in figure 7.17, for the parameters in tables A11 and A14. The input voltage is made of 5 bursts during 4 minutes of a 200Hz sine wave with amplitude 50V. The sampling rate is 96kHz. Notice the increase in coil wire temperature  $\theta_c$  and the compression due to the evolution of coil wire resistance  $r_c(\theta_c)$  in (C39). The dissipated power is solely due to the friction damping  $R_{SA}$  (see table A7).

### 7.11 ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge the members of the french National Research Agency project HaMecMoPSys for support in port-Hamiltonian theory, and Antonin Novak, Balbine Maillou (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR-CNRS 6613, Le Mans, France) and Pascal Brunet (Audio Group Samsung Research America, Los Angeles, United-States) for fruitful discussions on the loud-speaker mechanisms.

Appendix -

### 7.12 APPENDIX - NUMERICAL METHOD

To ensure stable simulation of stable dynamical system  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , many numerical schemes focus on the approximation quality of the time derivative, combined with operation of the vector field  $f$ . Here, we adopt an alternative point of view, by transposing the power balance (C4) in the discrete time-domain to preserve passivity. This is achieved by numerical schemes that provide a discrete version of the chain rule for computing the derivative of  $E = H \circ x$ . This is the case of Euler scheme, for which first order approximation of the differential applications  $dx(t, dt) = \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$  and  $dH(x, dx) = \nabla H(x)^T \cdot dx$  on the sample grid  $t \equiv kT, k \in \mathbb{Z}$  are given by

$$\delta x(k, T) = x(k+1) - x(k), \quad (\text{C41})$$

$$\begin{aligned} \delta H(x, \delta x) &= H(x + \delta x) - H(x) \\ &= \nabla_d H(x, x + \delta x)^T \cdot \delta x. \end{aligned} \quad (\text{C42})$$

For mono-variate storage components ( $H(x) = \sum_{n=1}^{n_x} H_n(x_n)$ ), the solution can be built element-wise with the  $n$ -th coordinate given by

$$[\nabla_d H(x, x + \delta x)]_n = \begin{cases} \frac{h_n(x_n + \delta x_n) - h_n(x_n)}{\delta x_n} & \text{if } \delta x_n \neq 0, \\ h'_n(x_n) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{C43})$$

A discrete chain rule is indeed recovered

$$\frac{\delta E(k, T)}{T} = \nabla^d H(x(k), x(k+1))^T \cdot \frac{\delta x(k, T)}{T} \quad (\text{C44})$$

so that the following substitution in (C3)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &\rightarrow \frac{\delta x(k, T)}{T} \\ \nabla H(x) &\rightarrow \nabla^d H(x(k), x(k+1)) \end{aligned} \quad (\text{C45})$$

leads to

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a}(k)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}(k) = \mathbf{a}(k)^T \cdot \mathbf{b}(k) \\ &= \underbrace{\left[ \nabla^d H^T \cdot \frac{\delta x}{\delta t} \right]}_{\frac{\delta E(k, T)}{T}}(k) + \underbrace{\mathbf{z}(\mathbf{w}(k))^T \cdot \mathbf{w}(k)}_{\mathbf{D}(k)} - \underbrace{\mathbf{u}(k)^T \cdot \mathbf{y}(k)}_{\mathbf{S}(k)}. \end{aligned} \quad (\text{C46})$$

For pH systems composed of a collection of linear energy storing components with quadratic Hamiltonian  $H_n(x_n) = \frac{x_n^2}{2C_n}$ , we define  $\mathbf{Q} = \text{diag}(C_1 \cdots C_{n_x})^{-1}$  so that the discrete gradient (C43) reads

$$\nabla^d H(x, x + \delta x) = \mathbf{Q} \left( x(k) + \frac{\delta x(k)}{2} \right), \quad (\text{C47})$$

which restores the midpoint rule. For nonlinear case, (C43) leads to another numerical scheme depending on the nonlinearity, still preserving passivity.

## 7.13 APPENDIX - RECALLS ON MAGNETIC

## 7.13.1 Magnetic energy storage

**DEFINITIONS** The magnetic phenomena are described by two complementary fields, namely, the applied magnetic excitation  $h$  and the induced magnetic flux density  $\mathbf{b}(h)$ , which is somewhat the response of a given material to a given excitation. The induction  $\mathbf{b}$  is defined as the superposition of the magnetization of vacuum  $\mathbf{j}_0(h)$  and the magnetization of matter  $\mathbf{j}(h)$  due to microscopic magnetic moments attached to the atoms of the body (see [62, (1.6)] and [61, (6)]) :

$$\mathbf{b} = \mathbf{j}_0(h) + \mathbf{j}(h) \simeq \mathbf{j}(h)$$

where we neglect the magnetization of vacuum so that  $h(\mathbf{b}) = \mathbf{j}^{-1}(\mathbf{b})$ . The magnetic induction flux  $\phi$  is defined as the flux of the magnetic induction field through a given surface  $\mathcal{S} : \phi(t) = \iint_{\mathcal{S}} b(t) dS = S b(t)$ , where we assumed constant  $\mathbf{b} \equiv b(t)$  over  $\mathcal{S}$ . The magnetomotive force  $\psi$  is defined as the circulation of  $h$  along a closed  $\mathbf{b}$ -field line  $\mathcal{C}$  with length  $\ell_{\mathcal{C}}$  :  $\psi(b(t)) = \oint_{\mathcal{C}} h(b(t)) d\ell = \ell_{\mathcal{C}} h(b(t))$ , where we assumed constant  $h \equiv h(b(t))$  along  $\mathcal{C}$ .

**ENERGY STORAGE** The variation of magnetic energy density stored in a sample of magnetic material is  $\frac{dE}{dt} = h(b) \frac{db}{dt}$  (see e.g. [61] for details). The total energy variation for a sample with length  $\ell_{\mathcal{C}}$  and section  $S$  ( $\text{m}^2$ ) is then  $\frac{dE}{dt} = S \ell_{\mathcal{C}} h(b) \frac{db}{dt} = \psi \left( \frac{\phi}{S} \right) \frac{d\phi}{dt}$ . The associated storage function (Hamiltonian) is defined by

$$H_{\text{mag}}(\phi) = \ell_{\mathcal{C}} \int_0^\phi h \left( \frac{x}{S} \right) dx \quad (\text{C48})$$

which restores the total energy variation  $\frac{d}{dt} H_{\text{mag}} = \psi \frac{d\phi}{dt}$ .

## 7.13.2 Electromechanical coupling

Consider several windings of a conductive wire with section  $S_W$ , length  $\ell_W$ , position  $q_W$  and velocity vector  $\mathbf{v}_W = v_W \mathbf{e}_W$  with constant direction  $\mathbf{e}_W$  and magnitude  $v_W = \frac{dq_W}{dt}$ . This conductor is immersed in a magnetic induction field  $\mathbf{b}$  with constant direction orthogonal to  $\mathbf{e}_W$  and constant magnitude  $B$ . The current is  $i_W = \iint_{S_W} \rho_q \mathbf{v}_q dS$  for the electric charge density  $\rho_q$  moving with velocity  $\mathbf{v}_q = v_q \mathbf{e}_q$  and unitary vector  $\mathbf{e}_q$  normal to the surface  $S_W$ . A wire element with length  $d\ell$  is subjected to the Lorentz force  $d\mathbf{f}_{\mathcal{L}} = \rho_q S_W d\ell (\mathbf{v}_q + \mathbf{v}_W) \times \mathbf{b}$ . This force is orthogonal to the velocity  $\mathbf{v}_q + \mathbf{v}_W$  so that the associated mechanical power is  $dP_{\mathcal{L}} = d\mathbf{f}_{\mathcal{L}} \cdot (\mathbf{v}_q + \mathbf{v}_W) = 0$ . Integrating along the wire, one gets

$$P_{\mathcal{L}} = v_W \underbrace{B \ell_W i_W}_{f_{\mathcal{L}}} + \underbrace{i_W B \ell_W v_W}_{v_{\mathcal{L}}} = 0 \quad (\text{C49})$$

defining the Lorentz force  $f_{\mathcal{L}}$  and the back electromotive force (voltage)  $v_{\mathcal{L}}$ . Notice the transfer is reversible and conservative in the sense that the outflow of energy from the electrical domain  $P_{\text{elec}} = i_W v_{\mathcal{L}}$  equals the inflow of the mechanical domain  $P_{\text{meca}} = v_W f_{\mathcal{L}}$ , that is  $P_{\mathcal{L}} = P_{\text{meca}} - P_{\text{elec}} = 0$ . This corresponds to a gyrator with ratio  $B \ell_W$  :

$$\begin{pmatrix} v_{\mathcal{L}} \\ f_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \ell_W \\ B \ell_W & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_W \\ v_W \end{pmatrix}. \quad (\text{C50})$$

### 7.13.3 electromagnetic coupling : the gyrator-capacitor approach

The gyrator-capacitor approach introduced in the late sixties [26, 71] is an easy way to develop electronic analog of magnetic circuits. It has been considered in [108] for the modeling of the loudspeaker. In this approach, a coil is divided in a gyrator (wire turns) and a magnetic energy storage (coil core).

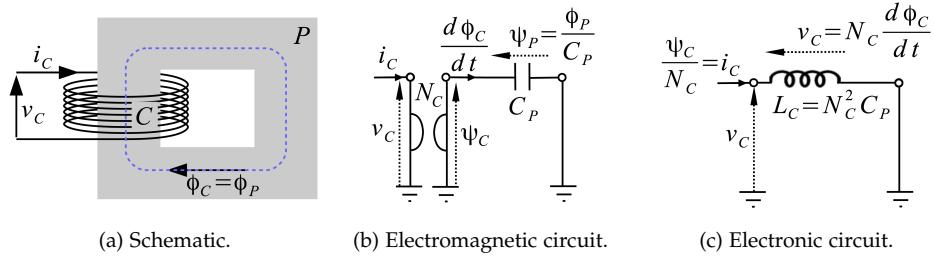


FIGURE 7.20 : Simple electromagnetic circuit that includes a coil (c) with  $N_c$  wire turns and a magnetic path (P) with associated magnetic capacity  $C_p$ . According to the gyrator-capacitor approach, the coil is modeled as an electromagnetic gyrator with  $\psi_c = N_c i_c$  and  $v_c = N_c \frac{d\phi_c}{dt}$ .

The dynamics of a magnetic field can be described by two complementary macroscopic quantities : the magnetic induction field  $\psi$  and the magnetomotive force (mmf)  $\psi$  (see 7.13.1). The electromagnetic transfer for a single wire turn stands from (i) Faraday's law of electromagnetic induction that relates the electromotive force (tension  $v$ ) to the variation of the magnetic flux in the wire turn  $v = \frac{d\phi}{dt}$ ; and (ii) Ampère's theorem that relates the mmf to the current in the wire  $\psi = i$  [26, 71]. Considering the coil (c) in figure 7.20a with  $N_c$  wire turns around the path (P), these relations restores a gyrator with ratio  $N_c$  :

$$\begin{pmatrix} v_c \\ \psi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N_c \\ N_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ \frac{d\phi_c}{dt} \end{pmatrix}. \quad (C51)$$

Denoting by  $s \in \mathbb{C}$  the Laplace variable, the correspondence between an impedance seen in the electrical domain  $Z_{\text{elec}}(s) = \frac{v_c(s)}{i_c(s)}$  and its counterpart in the magnetic domain  $Z_{\text{mag}}(s) = \frac{\psi_c(s)}{s \phi_c(s)} = \frac{N_c^2 i_c(s)}{v_c(s)}$  is given by

$$Z_{\text{mag}}(s) = \frac{N_c^2}{Z_{\text{elec}}(s)}, \quad (C52)$$

so that the electrical inductance associated with the magnetic capacity is  $L_c = N_c^2 C_p$ . Notice the interconnection (C51) is conservative :  $P_{\text{elec}} = P_{\text{mag}}$  with  $P_{\text{elec}} = v_c i_c$  the power outgoing the electrical domain and  $P_{\text{mag}} = \frac{d\phi_c}{dt} \psi_c$  the power incoming the magnetic domain.

### 7.14 APPENDIX - STATE SATURATING STORAGE FUNCTION

The saturation effect of the suspension (phenomenon 5) and the ferromagnetic path (phenomenon 6) are described by the same idealized (symmetric) saturation

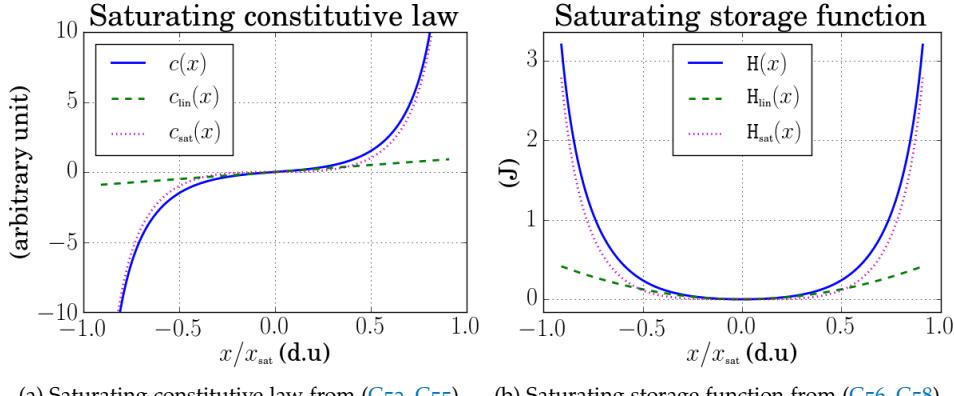
curve  $c(x)$  shown in figure-7.21a. It is built as the linear combination of basis functions  $c_{\text{lin}}(x)$  (linear behavior around the origin) and  $c_{\text{sat}}(x)$  (saturation effect) :

$$c(x) = P_{\text{lin}}(c_{\text{lin}}(x) + P_{\text{sat}}c_{\text{sat}}(x)), \quad (\text{C53})$$

$$c_{\text{lin}}(x) = x, \quad (\text{C54})$$

$$c_{\text{sat}}(x) = \frac{4}{4-\pi} \left( \tan \left( \frac{\pi x}{2x_{\text{sat}}} \right) - \frac{\pi x}{2x_{\text{sat}}} \right) \quad (\text{C55})$$

with  $c_{\text{sat}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm x_{\text{sat}}} \pm \infty$ ,  $\frac{\partial c_{\text{sat}}}{\partial x}(0) = 0$  so that  $c_{\text{sat}}(x)$  does not contribute around origin, and  $c_{\text{sat}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ .



(a) Saturating constitutive law from (C53–C55). (b) Saturating storage function from (C56–C58).

FIGURE 7.21 : Generic state saturating constitutive law and associated storage function to be used for the modeling of stress-strain relation of the suspension material (S) and magnetic excitation-induction relation for path material (P). Parameters are  $P_{\text{lin}} = P_{\text{sat}} = x_{\text{sat}} = 1$ .

The corresponding Hamiltonian (see figure 7.21b) is obtained from

$$H(x) = \int_0^x c(\xi) d\xi = P_{\text{lin}}(H_{\text{lin}}(x) + P_{\text{sat}}H_{\text{sat}}(x)) \quad (\text{C56})$$

with

$$H_{\text{lin}}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad (\text{C57})$$

$$H_{\text{sat}}(x) = -\frac{8x_{\text{sat}}}{\pi(4-\pi)} \left( \ln \left| \cos \left( \frac{\pi x}{2x_{\text{sat}}} \right) \right| + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi x}{2x_{\text{sat}}} \right)^2 \right). \quad (\text{C58})$$

This nonlinear saturating storage function proves positive definite providing the parameters ( $P_{\text{lin}}, P_{\text{sat}}$ ) are positive, so that it can be used in structure (C3), still preserving passivity.

## 7.15 APPENDIX - FRACTIONAL ORDER DYNAMICS

The diffusive process in the suspension (creep phenomenon 4) and the ferromagnetic path (eddy current phenomenon 7) can be described by linear models that include fractional order dynamics (see [101, 112, 82, 78] for fractional modeling of viscoelasticity, and [152, 106, 149] for fractional modeling of eddy currents). A well established formalism for the realization of fractional transfer functions is the so called diffusive representations, recalled thereafter (see detailed developments in [76, 74], and [107] for a port-Hamiltonian formulation).

### 7.15.1 Fractional integrator

Defining  $s = \rho e^{i\theta}$ , with  $\rho \geq 0$  and  $\theta \in [-\pi, \pi[$ , the transfer function of the fractional integrator  $\mathcal{I}_\beta(s) = s^{-\beta}$  exhibits a cut  $\mathcal{C} = \mathbb{R}_-$ . The residue theorem gives the realization of  $\mathcal{I}_\beta$  as the continuous aggregation of linear damping along the cut  $\mathcal{C}$ . This leads to the following diffusive representation [107, §2] :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\beta(s) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \int_0^\infty \mu_\beta(\xi) \frac{1}{s+\xi} d\xi \end{aligned} \quad (\text{C59})$$

where the weights  $\mu_\beta(\xi) = \frac{\mathcal{I}_\beta(-\xi-i0^+) - \mathcal{I}_\beta(-\xi+i0^+)}{2i\pi} = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \xi^{-\beta}$  correspond to the jump of  $\mathcal{I}_\beta$  across  $\mathcal{C} \equiv \{-\xi \in \mathbb{R}^-\}$ . A state-space representation with output  $y_\beta(s) = \mathcal{I}_\beta(s)u_\beta(s)$  is :

$$\begin{cases} \frac{dx_\xi}{dt} = -\xi x_\xi + u_\beta, & x_\xi(0) = 0, \\ y_\beta = \int_0^{+\infty} \mu_\beta(\xi) x_\xi d\xi. \end{cases} \quad (\text{C60})$$

The system (C60) is recast as an infinite dimensional pH system (C3), defining the hamiltonian density  $H_\xi(x_\xi) = \mu_\beta(\xi) \frac{x_\xi^2}{2}$  and the resistance density  $r_\xi = \frac{\xi}{\mu_\beta(\xi)}$  with  $z_\xi(w_\xi) = r_\xi w_\xi$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_\xi}{dt} \\ w_\xi \\ y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_\xi}{\partial x_\xi} \\ z_\xi(w_\xi) \\ u_\beta \end{pmatrix} \quad (\text{C61})$$

where  $\mathbb{1}_\infty$  denotes an infinite dimensional row vector of 1, that is  $y_\beta = \int_0^\infty \frac{\partial H_\xi}{\partial x_\xi} d\xi$ . Notice the total energy is  $H_\beta(\mathbf{x}_\beta) = \int_{\xi \in \mathcal{C}} H_\xi(x_\xi) d\xi$  with infinite dimensional state  $\mathbf{x}_\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ . The realization of the dynamical element with parameter  $p$  and transfer function  $\mathcal{I}_{p,\beta}(s) = (ps^\beta)^{-1}$  is given by (C61), with  $\hat{\mu}_{\beta,p}(\xi) = \frac{\mu_\beta(\xi)}{p}$ .

### 7.15.2 Fractional differentiator

Fractional damping can be modeled as combination of fractional integrators and differentiators (see [101, 74, 150, 107]). The realization of fractional differentiator of order  $\alpha$  with input  $u_\alpha$ , transfer function  $\mathcal{D}_\alpha(s) = s^\alpha$  and output  $y_\alpha = \mathcal{D}_\alpha u_\alpha$ , is built on the diffusive representation (C60) as follows [74, 107] :

$$\begin{cases} \frac{dx_\xi}{dt} = -\xi \cdot x_\xi + u_\alpha, & x_\xi(0) = 0, \\ y_\alpha = \int_0^{+\infty} \mu_{1-\alpha}(\xi) (u_\alpha - \xi \cdot x_\xi) d\xi. \end{cases} \quad (\text{C62})$$

Defining the hamiltonian density  $H_\xi(x_\xi) = \mu_{1-\alpha}(\xi) \frac{x_\xi^2}{2}$ , the resistance density  $r_\xi = \mu_{1-\alpha}(\xi)$  and  $z_\xi(w_\xi) = r_\xi w_\xi$ , the pH formulation of the fractional differentiator (C62) is

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_\xi}{dt} \\ w_\xi \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\mu_{1-\alpha}(\xi)} & 0 \\ \frac{1}{\mu_{1-\alpha}(\xi)} & 0 & -1 \\ 0 & -\mathbb{1}_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_\xi}{\partial x_\xi} \\ z_\xi(w_\xi) \\ u_\alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{C63})$$

### 7.15.3 Finite order approximation

For implementation purpose, a finite approximation of diffusive representation (C61) is built based on a finite set of  $n_\xi$  poles  $(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$  localized on the cut  $\mathcal{C}$ . The weights  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \cdots \mu_{n_\xi})^T$  are obtain from a least square optimization as detailed in [74, sec. 5.1.2], by minimizing an appropriate distance between  $\mathcal{I}_\beta$  and its discretisation  $\widehat{\mathcal{I}}_\beta$ :

$$\widehat{\mathcal{I}}_\beta(s) = \sum_{n=1}^{n_\xi} \frac{\mu_n}{s + \xi_n} = \mathbf{E}(s) \cdot \boldsymbol{\mu} \quad \text{with} \quad \mathbf{E}(s) = \left( \frac{1}{s + \xi_1} \cdots \frac{1}{s + \xi_{n_\xi}} \right)^T. \quad (\text{C64})$$

The poles  $\xi_n$ 's are chosen as  $\xi_n = 10^{\ell_n} \in \mathcal{C}$ , for  $0 \leq n \leq n_\xi + 1$ , where the  $\ell_n$ 's are equally spaced, with step  $\delta = \frac{\ell_{n_\xi+1} - \ell_0}{n_\xi + 1}$ , from  $\ell_0$  to  $\ell_{N+1}$ . Since gain deviations are perceived relatively to the reference gains on the audio range, the weights  $\boldsymbol{\mu}$  are optimized with respect to the objective function

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\omega_-}^{\omega_+} \left| 1 - \frac{\widehat{\mathcal{I}}_\beta(s=i\omega)}{\mathcal{I}_\beta(s=i\omega)} \right|^2 d \ln \omega. \quad (\text{C65})$$

where  $\omega_- = 2\pi f_-$ ,  $\omega_+ = 2\pi f_+$  for  $[f_-, f_+] = [20\text{Hz}, 20\text{kHz}]$ . In practice, the integral in (C65) is approximated by a finite sum on a frequency grid, here,  $\ln \omega_k = \ln \omega_- + \frac{k}{n_\omega} \ln \frac{\omega_+}{\omega_-}$  for  $0 \leq k \leq n_\omega$ . This yields the following practical objective function

$$\widehat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\mu}) = \overline{(\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})^T \mathbf{W}(\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})}, \quad (\text{C66})$$

where matrix  $\mathbf{M}$  is composed of the rows  $[\mathbf{M}]_{k,:} = \mathbf{E}(s=i\omega_{k-\frac{1}{2}})^T$  defined in (C64), where  $\omega_{k-\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_{k-1}\omega_k}$  denotes the mean of  $\omega_{k-1}$  and  $\omega_k$  for  $1 \leq k \leq n_\omega$ . Vector  $\mathbf{I}$  is composed of  $[\mathbf{I}]_k = \mathcal{I}_\beta(s=i\omega_{k-\frac{1}{2}})$  and the diagonal matrix  $\mathbf{W}$  is defined by  $[\mathbf{W}]_{k,k} = (\ln \omega_k - \ln \omega_{k-1}) / |[\mathbf{I}]_k|^2$ . The minimization of (C66) is achieved by off-the-shelf optimization algorithm, imposing the weights to be positive :

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \{\min_{\boldsymbol{\mu}} \widehat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\mu} > 0\} \quad (\text{C67})$$

The finite dimensional pH system realizing the weighted fractional integrator with transfer function  $\mathcal{I}_{p,\beta} = (ps^\beta)^{-1}$  is given in table A9 with :

$$\begin{cases} p_n &= \frac{\widehat{\mu}_n}{p}, \\ r_n &= \frac{\xi_n}{p_n}, \end{cases} \quad n \in (1, \dots, n_\xi). \quad (\text{C68})$$

According to section 7.15.2, the finite dimensional approximation of the weighted fractional differentiator with transfer function  $\mathcal{D}_{\alpha,p} = ps^\alpha$  is obtain from the minimization of (C66) for the transfer function  $\mathcal{I}_{1-\alpha}$ . The corresponding pH formulation is given in table A10 with :

$$\begin{cases} p_n &= p \widehat{\mu}_n \xi_n, \\ r_n &= p_n \widehat{\mu}_n, \end{cases} \quad n \in (1, \dots, n_\xi). \quad (\text{C69})$$

State : $\mathbf{x}_\beta = (x_1, \dots, x_{n_\xi})^\top$	Energy : $H_\beta(\mathbf{x}_\beta) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_\beta^\top \text{diag}(p_1, \dots, p_{n_\xi}) \mathbf{x}_\beta$
Dissipation variable : $\mathbf{w}_\beta = (w_1, \dots, w_{n_\xi})^\top$	Dissipation law : $\mathbf{z}_\beta(\mathbf{w}_\beta) = \text{diag}(r_1, \dots, r_{n_\xi}) \mathbf{w}_\beta$
Input : $u_\beta$	Output : $\hat{y}_\beta$
Structure : $J_x = \mathbb{0}_{n_\xi \times n_\xi}, K = I_{n_\xi}, G_x = \mathbb{1}_{n_\xi \times 1},$ $J_w = \mathbb{0}_{n_\xi \times n_\xi}, G_w = \mathbb{0}_{n_\xi \times 1}, J_y = 0.$	

TABLE A9 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the approximation of the fractional integrator  $y_\beta(s) = (ps^\beta)^{-1}u_\beta(s)$  on a finite set of  $n_\xi$  poles. The parameters  $p_n, r_n$  for  $n \in (1, \dots, n_\xi)$  are defined in (C68) based on the minimization of (C66). As an example, if  $u_\beta \equiv i$  and  $y_\beta \equiv v$ , this structure corresponds to the serial connection of  $n_\xi$  parallel RC cells; if  $y_\beta \equiv i$  and  $u_\beta \equiv v$ , this structure corresponds to the parallel connection of  $n_\xi$  serial LC cells.

State : $\mathbf{x}_\alpha = (x_1, \dots, x_{n_\xi})^\top$	Energy : $H_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_\alpha^\top \text{diag}(p_1, \dots, p_{n_\xi}) \mathbf{x}_\alpha$
Dissipation variable : $\mathbf{w}_\alpha = (w_1, \dots, w_{n_\xi})^\top$	Dissipation law : $\mathbf{z}_\alpha(\mathbf{w}_\alpha) = \text{diag}(r_1, \dots, r_{n_\xi}) \mathbf{w}_\alpha$
Input : $u_\alpha$	Output : $\hat{y}_\alpha$
Structure : $J_x = \mathbb{0}_{n_\xi \times n_\xi}, K = \text{diag}(\hat{\mu})^{-1}, G_x = \mathbb{0}_{n_\xi \times 1},$ $J_w = \mathbb{0}_{n_\xi \times n_\xi}, G_w = -\mathbb{1}_{n_\xi \times 1}, J_y = 0.$	

TABLE A10 : Port-Hamiltonian formulation (C3) for the approximation of the fractional differentiator  $y_\alpha(s) = ps^\alpha u_\alpha(s)$  on a finite set of  $n_\xi$  poles. The parameters  $p_n, r_n$  for  $n \in (1, \dots, n_\xi)$  are defined in (C69) based on the minimization of (C66) for the transfer function  $\mathcal{I}_{1-\alpha}$ . The interpretation is less intuitive than for the fractional integrator of table A9 due to the coefficients in  $K$  that involves transformers.

## 7.16 APPENDIX - PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PARAMETERS

### 7.16.1 Model o

### 7.16.2 Model 1

Label	Description	Typical value	Unit
$R_c$	Electrical DC Resistance of coil wire	10	$\Omega$
$L_c$	Coil self inductance	$3 \cdot 10^{-4}$	H
$M_{cDA}$	Total mass of the moving part	$10^{-2}$	Kg
$K_{SA}$	Total stiffness	$2 \cdot 10^3$	$N \cdot m^{-1}$
$R_{SA}$	Mechanical resistance	1	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
$B_\ell$	Force factor	5	T.m
$\ell_c^0$	Total length of coil wire	10	m
$B$	Magnetic induction magnitude	$B_\ell / \ell_c^0$	T
$Q_\ell$	Overhang parameter in (C8)	$5 \cdot 10^{-3}$	m
$P_\ell$	Shape parameter in (C8)	5	d.u.

TABLE A11 : Physical and technological parameters involved in the model o of table A3.  
Typical values are chosen in accordance with data provided in [134, table 3.1] for the DALI 311541 6 1/2" unit. Acronym d.u. stands for dimensionless unit.

Label	Description	Typical value	Unit
$\tau_e$	Characteristic creep time	1	s
$\alpha_e$	Memory parameter	0.5	d.u.
$P_K$	Distribution of $K_{SA}$ between $K_0$ and $K_1$	0.6	d.u.
$n_e$	Number of poles for approximation (C15)	20	d.u.
$\xi_n$	Finite set of poles for approximation (C15)	$[10^{-5}, \dots, 10^5]$	Hz
$K_0$	Primary stiffness	$\frac{K_{SA}}{P_K}$	$N \cdot m^{-1}$
$q_{sat}$	Saturation position associated with primary elongation	$10^{-2}$	m
$P_{sat}^S$	Shape parameter for nonlinear stress-strain relation	10	d.u.
$\omega_1$	Characteristic creep frequency	$\frac{2\pi}{\tau_e}$	Hz
$K_1$	Characteristic creep stiffness	$\frac{K_{SA}}{2(1-P_K)}$	$N \cdot m^{-1}$
$R_1$	Characteristic creep damping	$\frac{K_1}{\omega_1}$	$N \cdot s \cdot m^{-1}$

TABLE A12 : Physical and technological parameters involved in creep model in table A4 and model 1 in table A5. Typical values are chosen in accordance with [171, table 1]. Acronym d.u. stands for dimensionless unit.

### 7.16.3 Model 2

### 7.16.4 Model 3

Label	Description	Typical value	Unit
$N_c$	Number of coil wire turns	100	d.u.
$A_c$	Height of the coil wire turns	$10^{-2}$	m
$D_c$	Coil diameter	$2.10^{-2}$	m
$\psi_M$	Magnetomotive force imposed by the magnet (M)	see (C24)	A
$S_G$	Area of the magnetic flux in the air gap (G)	$\pi D_c A_c$	$m^2$
$S_P$	Area of the magnetic flux in the pole piece (P)	$S_G$	$m^2$
$\phi_{ss}$	Steady-state magnetic flux in the path (P, G)	$\frac{B}{S_p}$	Wb
$\ell_p$	Mean length of flux loops in the path (P, G)	$10^{-1}$	m
$L_{\text{leak}}$	Inductance associated with the leakage flux	$10^{-6}$	H
$C_{ss}$	Steady-state magnetic capacity of path PG	see (C29)	H
$\tau_{PG}$	Characteristic time associated with the flux $\phi_{PG}$	10	s
$\omega_{PG}$	Characteristic frequency associated with the flux $\phi_{PG}$	$\frac{2\pi}{\tau_{PG}}$	Hz
$\omega_{ec}$	Characteristic frequency associated with Eddy currents	see (C30)	Hz
$\alpha_{ec}$	Eddy currents memory parameter	0.5	d.u.
$C_{ec}$	Eddy currents characteristic magnetic capacity	see (C29)	H
$R_{ec}$	Eddy currents characteristic magnetic resistance	$\frac{C_{ec}}{\omega_{ec}}$	$\Omega^{-1}$

TABLE A13 : Physical and technological parameters involved in the model 2 in figures 7.11 and 7.14. Typical values are chosen in accordance with [172, table 3]. Acronym d.u. stands for dimensionless unit.

Label	Description	Typical value	Unit
$C$	Heat capacity of coil wire	2.358	$J.K^{-1}$
$C_G$	Heat capacity of air gap	71.49	$J.K^{-1}$
$C_P$	Heat capacity of pole piece	664.3	$J.K^{-1}$
$C_A$	Heat capacity of air in enclosure	$10^4$	$J.K^{-1}$
$R_{CG}$	Thermal resistance between coil wire and air gap	3.927	$K.W^{-1}$
$R_{GP}$	Thermal resistance between air gap and pole piece	1.158	$K.W^{-1}$
$R_{PA}$	Thermal resistance between pole piece and environment	2.623	$K.W^{-1}$
$\alpha_T$	Temperature coefficient of copper	$4.10^{-3}$	$K^{-1}$

TABLE A14 : Physical and technological parameters involved in the model 3 of figure 7.17. Typical values for thermal capacity and resistance are taken from [33, § 4.4.3]. The temperature coefficient of copper is taken from [33, eq. (14)].

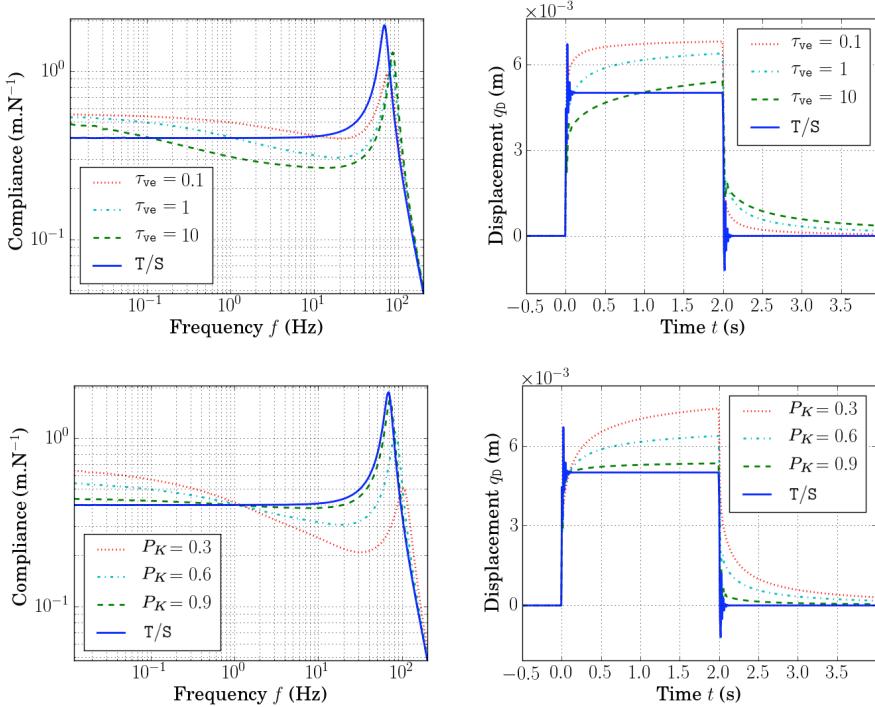


FIGURE 7.22 : Simulation of the small-signal modeling of the mechanical subsystem in table A4 depicted in figure 7.7 with the parameters in tables A11 and A12 (except creep time  $\tau_e$  and partition parameter  $P_K$  indicated in the legend). Sample rate is 96kHz. Left : diaphragm displacement in response to the Lorentz force  $\left| \frac{q_D}{f_L} \right| (2i\pi f)$  (frequency domain on the range [0.01,200]Hz). Right : diaphragm displacement in response to a 10N Lorentz force step between 0s and 2s (time domain). Legend T/S refers to the mechanical subsystem of the Thiele/Small modeling. Results for the memory parameter  $\alpha_e$  are given in figure 7.9.

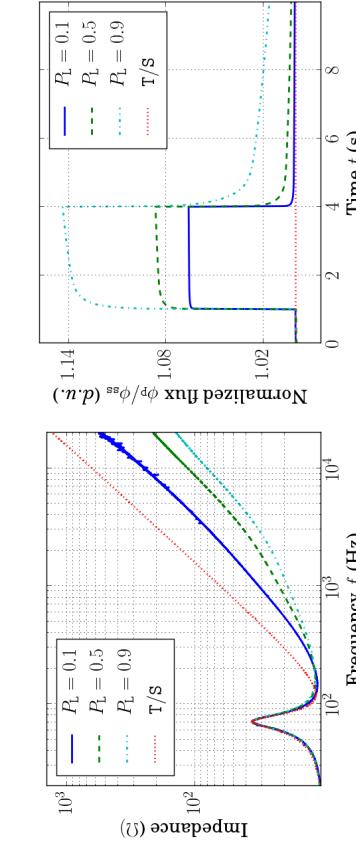
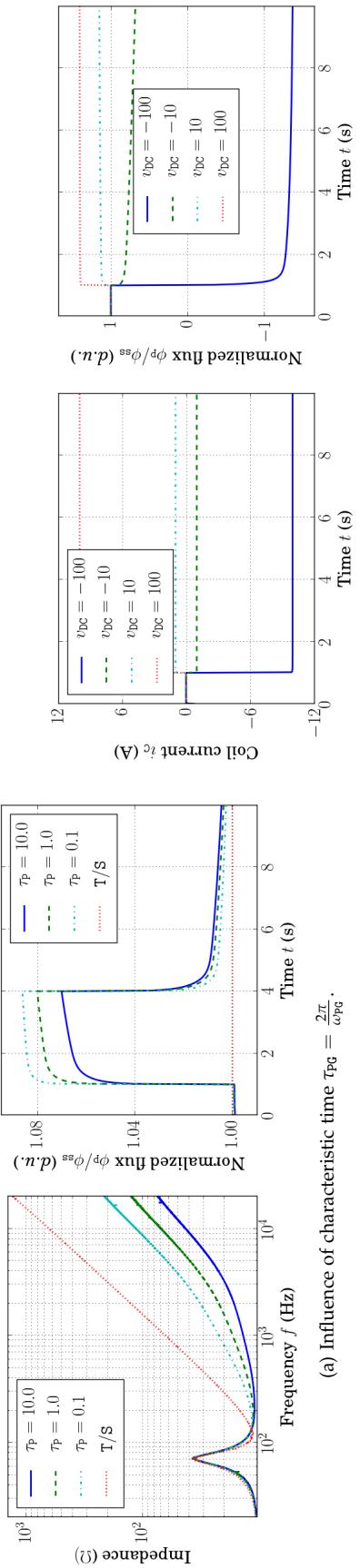


FIGURE 7.23 : Simulation of the loudspeaker model 2 in table A6 depicted in figure 7.14 with the parameters in tables A<sub>11</sub> and A<sub>13</sub> (except memory parameter indicated in the legend). Sample rate is 96kHz. Left : normalized flux  $\frac{\phi_{\text{P}}}{\phi_{\text{ss}}}$  in response to a 10V step voltage between 1s and 4s. Right : modulus of electrical impedance  $\left| \frac{v_{\text{r}}(2i\pi f)}{i_{\text{c}}(2i\pi f)} \right|$ . Legend T/S refers to the Thiele/Small modeling. Results for the memory parameters  $\alpha_{\text{ec}}$  are given in figure 7.15.

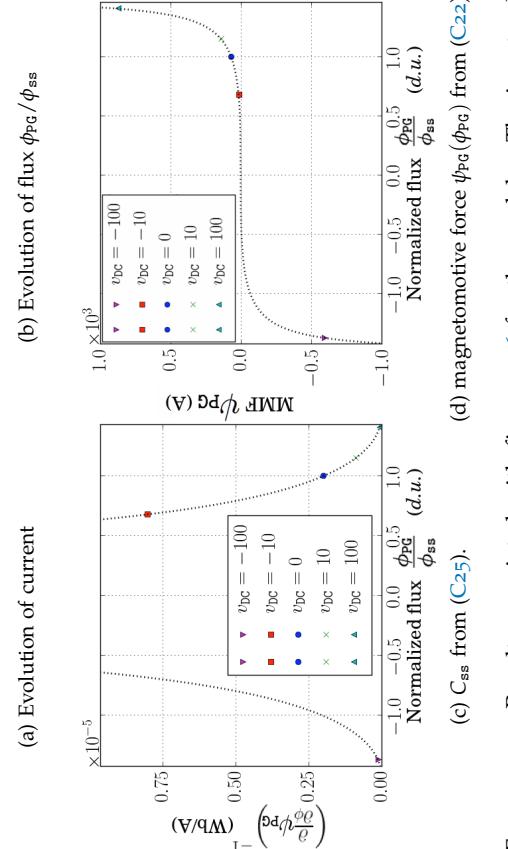


FIGURE 7.24 : Results associated with figure 7.16 for the model 2. The input voltage is  $v_{\text{r}}(t) = v_{\text{DC}}$ , thus changing the steady-state magnetic flux  $\phi_{\text{ss}}$ , hence the equivalent magnetic capacity  $C_{\text{ss}} = \left( \frac{\partial^2 H_{\text{P}}}{\partial \phi_{\text{ss}}^2}(\phi_{\text{ss}}) \right)^{-1}$  according to (C25).

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

### CONTRIBUTIONS

Dans ce travail, nous avons cherché à formuler de manière consistante un ensemble d'outils pour la modélisation, la simulation, la génération de code et le contrôle de systèmes audios et acoustiques. Les contributions de la thèse pour chaque composante sont données ci-dessous.

**MODÉLISATION :** Le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports a été mis à profit pour la modélisation passive des systèmes physiques. Plus précisément, une forme privilégiée de SHP a été retenue : la structure algébro-différentielle (section ??). Cette structure est obtenue automatiquement pour un système donné par l'analyse du graphe associé, si ce dernier satisfait un critère précisé section 3.4.2. Un premier dictionnaire de composants multi-physics a été proposé. Ce dictionnaire inclut des composants standard (masse, raideur, capacité, etc), et des composants plus raffinés (marteau de piano avec feutre non-linéaire, poutre encastrée sous décomposition modale et transducteur mécano-électrique au chapitre 6, transistors au chapitre 3, dynamiques fractionnaires sous représentation diffusive, gyrateurs et composants thermiques au chapitre 7).

**SIMULATION :** Deux méthodes numériques ont été proposées (chapitre 2). Ces méthodes combinent la méthode du gradient discret avec les méthodes standard de Runge-Kutta, et préservent la passivité des systèmes hamiltoniens à ports, y compris pour les systèmes non linéaires. En particulier, nous avons présenté une méthode de quadraturation du hamiltonien qui permet la simulation passive, à l'ordre 2 de consistance et qui ne met pas en jeu la résolution d'équations implicites, permettant d'atteindre des performances compatibles avec le temps réel.

**GÉNÉRATION DE CODE :** Une bibliothèque de code (PyPHs, chapitre 5) qui implémente la mise en équation automatique (algorithme 5) et les algorithmes de simulation proposés (algorithmes 5, 2, 12 et 4) a été développée et mise à disposition sous licence libre pour utilisation et contribution. Cette bibliothèque (i) génère le SHP sous forme algébro-différentielle à partir de la description d'un système sous forme de graphe (*netlist*) et (ii) génère le code C++ associé pour la simulation passive. Toutes les simulations présentées dans ce document ont été obtenues par cette bibliothèque.

**CORRECTION :** L'approche par platitude pour la planification de trajectoire a été retenue pour la correction des systèmes (compensation des non linéarités modélisées). La structure des SHP a été exploitée pour faire émerger un ensemble de quantités privilégiées pour la commande : la sortie plate. Deux méthodes ont été proposées en ce sens : la première repose sur une analyse de graphe et s'applique aux SHP mono-entrée (section 4.3.1), la deuxième repose sur une analyse de la structure d'interconnexion et s'applique aux SHP multi-entrées (section 4.3.2). La procédure de construction de la loi de commande associée a été fournie.

L'ensemble des outils proposés a permis de traiter trois applications : le Fender Rhodes, les circuits analogiques audios et le haut-parleur électrodynamique. Ceci constitue une chaîne audio complète, de la production à la restitution du son.

**FENDER RHODES :** Nous avons proposé un modèle original de l'instrument complet, en exploitant le formalisme : premièrement un modèle SHP de chaque composant a été proposé (marteau, résonateur et capteur), deuxièmement ces modèles élémentaires ont été connectés pour réaliser le modèle SHP de l'instrument complet, troisièmement la méthode proposée de simulation passive à une étape (méthode 2.1) a été appliquée pour générer des signaux de synthèse. La comparaison avec des signaux mesurés sur un instrument réel a permis de valider le modèle et l'approche.

**CIRCUITS ANALOGIQUES :** Nous avons construit un dictionnaire de composants usuels en électronique analogique pour l'audio, et la méthode de mise en équation automatique a été utilisée pour générer le code C++ de simulation à passivité garantie pour trois circuits audios (chapitre 3) : le diode clipper (élément courant dans les circuits de distorsion), un étage d'amplification à transistor (très utilisé dans les chaînes de traitement analogique) et la pédale *CryBaby* (circuit complet). Les signaux de simulation sont similaires aux signaux générés par SPICE pour les même circuits (logiciel dédié à la simulation de circuits électroniques).

**HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE :** Dans un premier temps, nous avons proposé plusieurs modèles originaux pour le haut-parleur électrodynamique, qui incluent notamment des phénomènes d'origine magnétique, visco-élastique et thermique. Chaque modèle a été simulé pour mettre en évidence des comportements rapportés dans la littérature. Dans un second temps, nous avons appliqué la méthode de correction par platitude développée au chapitre 4 sur un modèle simplifié. Ceci a permis de valider l'approche sur système simulé.

#### PERSPECTIVES

Les perspectives à ce travail sont répertoriées composante par composante ci-dessous.

**MODÉLISATION :** Nous avons considéré des systèmes de dimension finie dans cette thèse. Une perspective directe est de considérer les systèmes de dimension infinie [10], tels que la majorité des résonateurs (cordes, plaques, colonne d'air, etc). Le formalisme des SHP pourra être mis à profit pour élaborer des méthodes de discréttisation spatiale qui préserve la structure du SHP de dimension infinie (c. f. [180]). Par ailleurs, il serait intéressant de considérer le formalisme des SHP en variable d'onde [52, §2.8], en vue de résoudre les conflits de réalisabilité (c. f. section 3.4.2).

**SIMULATION :** Nous avons opté dans ce travail pour une combinaison de la méthode du gradient discret avec une méthode de Runge-Kutta. Plusieurs alternatives à la méthode du gradient discret sont envisageables. En particulier, une approche géométrique à la discréttisation (voir e. g. [70]) semble adaptée à la structure SHP. Par ailleurs, nous ne nous sommes pas penchés sur les problèmes d'aliasing (liés au repliement du contenu fréquentiel généré par les composants non linéaires en dehors de la bande de Nyquist).

Cette question est cruciale dans les applications audio-numériques, et mérite attention.

**GÉNÉRATION DE CODE :** De nombreux résultats ne sont pas implémentés dans la bibliothèque PyPHs. La première perspective est l'implémentation d'une méthode de génération automatique de table d'inversion pour s'affranchir de la résolution de l'équation implicite associée aux composants dissipatifs non-linéaire. La *K-méthode* [16] est envisagée pour ce point. Une deuxième perspective est de lier automatiquement le code C++ généré avec un carcan Juce<sup>3</sup> pour générer directement un logiciel de simulation temps réel (plugin audio).

**CORRECTION :** La méthode de compensation des non linéarités est en cours d'application sur un haut-parleur réel (stage de Tristan Lebrun). Un haut-parleur instrumenté a été développé, et l'estimation des paramètres du modèle est à l'étude. La première perspective au travail présenté dans ce document est d'étendre la méthode d'analyse de platitude M2 (section 4.3.2) pour inclure les cas des bouclages dynamiques (pour lesquels la sortie plate est donnée par une fonction de l'état et des dérivées de l'entrée). La structure SHP peut encore être mise à profit pour ce point. Une deuxième perspective est d'implémenter la procédure de construction de la sortie plate dans la bibliothèque PyPHs.

---

<sup>3</sup> <https://www.juce.com/>



Troisième partie

ANNEXE



# 8

## CODE C++ GÉNÉRÉ PAR PYPHS

---

### 8.1 thielesmall.cpp

```
1 #include "/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/ThieleSmall/
  cpp/THIELESMALL.h"

2 // Default Constructor:
3 THIELESMALL::THIELESMALL() {
4
5   for(int i=get_nxl(); i<get_nx(); i++){
6     dx[i] = 0;
7   }
8   for(int i=get_nwl(); i<get_nw(); i++){
9     w[i] = 0;
10  }}
11

12 // Constructor Initializing x:
13 THIELESMALL::THIELESMALL(vector<double>& x0) {
14
15   for(int i=get_nxl(); i<get_nx(); i++){
16     dx[i] = 0;
17   }
18   for(int i=get_nwl(); i<get_nw(); i++){
19     w[i] = 0;
20   }
21   if (x.size() == x0.size()) {
22     set_x(x0);
23   }
24   else {
25     cerr << "Size of x0 does not match size of x" << endl;
26     exit(1);
27   }
28 }

29 // Default Destructor:
30 THIELESMALL::~THIELESMALL() {
31
32 }

33 void THIELESMALL::process(vector<double>& In, vector<double>& parameters) {
34
35   set_u(In);
36   p = parameters;
37   UpDate_Matrices();

38   UpDate_l();
39   UpDate_dxH();
40   UpDate_z();
41   UpDate_y();
42   x += dx;
43 }
44 void THIELESMALL::UpDate_Matrices() {

45   UpDate_J1();
46   UpDate_J2();
47   UpDate_J3();
48   UpDate_J4();
49   UpDate_K1();
50   UpDate_K2();
51 }
```

```

56     UpDate_K3();
      UpDate_K4();
      UpDate_M1();
      UpDate_M2();
      UpDate_G1();
      UpDate_G2();
61     UpDate_G3();
      UpDate_G4();
      UpDate_R();
      UpDate_Q();

66     iDw << Matrix<double, 2, 2>::Identity() - J3*R;
      Dw << iDw.inverse();
      A1 << Dw*(K1.transpose());
      D1 << Dw*G3;
      tildeA2 << J1 - K1*R*A1;
71     tildeB2 << M1-K1*R*B1;
      tildeC2 << -(K2+K1*R*C1);
      tildeD2 << G1-K1*R*D1;
      iDx << Matrix<double, 3, 3>::Identity() * fs - 0.5*tildeA2*Q;
      Dx = iDx.inverse();
76     A2 << Dx*tildeA2*Q;
      B2 << Dx*tildeB2;
      C2 << Dx*tildeC2;
      D2 << Dx*tildeD2;
      A3 << Q*(Matrix<double, 3, 3>::Identity())+0.5*A2;
81     B3 << 0.5*Q*B2;
      C3 << 0.5*Q*C2;
      D3 << 0.5*Q*D2;
      tildeA4 << -(M1.transpose())+ K3*R*A1;
      tildeB4 << (J2 - K3*R*B1);
86     tildeC4 << -(K4 + K3*R*C1);
      tildeD4 << (G2 - K3*R*D1);
      A4 << tildeA4*A3;
      B4 << tildeB4+tildeA4*B3;
      C4 << tildC4+tildeA4*C3;
      D4 << tildD4+tildeA4*D3;
      tildeA5 << (K2.transpose()- M2.transpose()*R*A1);
      tildeB5 << (K4.transpose() - M2.transpose()*R*B1);
      tildeC5 << (J4 - M2.transpose()*R*C1);
      tildeD5 << (G4 - M2.transpose()*R*D1);

96     A5 << tildeA5*A3;
      B5 << (tildeB5+tildeA5*B3);
      C5 << (tildeC5+tildeA5*C3);
      D5 << (tildeD5+tildeA5*D3);

101    A6 << A1*A3;
      B6 << (B1+A1*B3);
      C6 << (C1+A1*C3);
      D6 << (D1+A1*D3);

106    A7 << A2, A6 ;
      D7 << D2, D6 ;}

// Accesors to private variables

111    const unsigned int THIELESMALL::get_nx() const {
        return nx;
    }
    const unsigned int THIELESMALL::get_nxl() const {
        return nxl;
    }
    const unsigned int THIELESMALL::get_nxnl() const {
        return nxnl;
    }

```

```

121 }
122 const unsigned int THIELESMALL::get_nw() const {
123     return nw;
124 }
125 const unsigned int THIELESMALL::get_nwl() const {
126     return nwl;
127 }
128 const unsigned int THIELESMALL::get_nwnl() const {
129     return nwnl;
130 }
131 const unsigned int THIELESMALL::get_ny() const {
132     return ny;
133 }
134 const unsigned int THIELESMALL::get_np() const {
135     return np;
136 }
137
138 vector<double> THIELESMALL::get_u() const {
139     vector<double> v = vector<double>(ny);
140     for (int i=0; i<get_ny(); i++) {
141         v[i] = u[i];
142     }
143     return v;
144 }
145
146 vector<double> THIELESMALL::get_y() const {
147     vector<double> v = vector<double>(ny);
148     for (int i=0; i<get_ny(); i++) {
149         v[i] = y[i];
150     }
151     return v;
152 }
153
154 vector<double> THIELESMALL::get_x() const {
155     vector<double> v = vector<double>(nx);
156     for (int i=0; i<get_nx(); i++) {
157         v[i] = x[i];
158     }
159     return v;
160 }
161
162 vector<double> THIELESMALL::get_dx() const {
163     vector<double> v = vector<double>(nx);
164     for (int i=0; i<get_nx(); i++) {
165         v[i] = dx[i];
166     }
167     return v;
168 }
169
170 vector<double> THIELESMALL::get_dxH() const {
171     vector<double> v = vector<double>(nx);
172     for (int i=0; i<get_nx(); i++) {
173         v[i] = dxH[i];
174     }
175     return v;
176 }
177
178 vector<double> THIELESMALL::get_w() const {
179     vector<double> v = vector<double>(nw);
180     for (int i=0; i<get_nw(); i++) {
181         v[i] = w[i];
182     }
183     return v;
184 }

```

```

186     vector<double> THIELESMALL::get_z() const {
187         vector<double> v = vector<double>(nw);
188         for (int i=0; i<get_nw(); i++) {
189             v[i] = z[i];
190         }
191     }
192
193     // Mutators of private variables
194     void THIELESMALL::set_u(vector<double> v) {
195         for (int i=0; i<get_ny(); i++) {
196             u[i] = v[i];
197         }
198     }
199     void THIELESMALL::set_x(vector<double> v) {
200         for (int i=0; i<get_nx(); i++) {
201             x[i] = v[i];
202         }
203     }
204
205     // Port-Hamiltonian runtime functions
206     void THIELESMALL::UpDate_l() {
207         Fl << A7*xl() + D7*u;
208         for(int i=0; i<get_nxl(); i++){
209             dx[i] = Fl[i];
210         }
211         for(int i=0; i<get_nwl(); i++){
212             w[i] = Fl[i+get_nxl()];
213         }
214     }
215
216     void THIELESMALL::UpDate_dxH() {
217         const double xLC = x[0], xMCDA = x[1], xKSA = x[2];
218         const double dxLC = dx[0], dxMCDA = dx[1], dxKSA = dx[2];
219         double dummy_float0 = 0, dummy_float1 = 0, dummy_float2 = 0;
220         dummy_float0 = 1666.6666666667*dxLC + 3333.3333333333*xLC;
221         dummy_float1 = 50.0*dxMCDA + 100.0*xMCDA;
222         dummy_float2 = 1000.0*dxKSA + 2000.0*xKSA;
223         dxH[0] = dummy_float0;
224         dxH[1] = dummy_float1;
225         dxH[2] = dummy_float2;
226     }
227
228     void THIELESMALL::UpDate_z() {
229         const double wRC = w[0], wRSA = w[1];
230         double dummy_float0 = 0, dummy_float1 = 0;
231         dummy_float0 = 10.0*wRC;
232         dummy_float1 = 1.0*wRSA;
233         z[0] = dummy_float0;
234         z[1] = dummy_float1;
235     }
236
237     void THIELESMALL::UpDate_y() {
238         const double xLC = x[0];
239         const double dxLC = dx[0];
240         double dummy_float0 = 0;
241         dummy_float0 = -1666.6666666667*dxLC - 3333.3333333333*xLC;
242         y[0] = dummy_float0;
243     }
244
245     void THIELESMALL::UpDate_J1() {

```

```
251     J1 << 0 , -5.00000000000000 , 0 , 5.00000000000000 , 0 , -1.00000000000000 , 0 ,
252         1.00000000000000 , 0 ;
253 }
254
255 void THIELESMALL::UpDate_J2() {
256 }
257
258 void THIELESMALL::UpDate_J3() {
259     J3 << 0 , 0 , 0 , 0 ;
260 }
261
262 void THIELESMALL::UpDate_J4() {
263 }
264
265 void THIELESMALL::UpDate_K1() {
266     K1 << 1.00000000000000 , 0 , 0 , 1.00000000000000 , 0 , 0 ;
267 }
268
269 void THIELESMALL::UpDate_K2() {
270 }
271
272 void THIELESMALL::UpDate_K3() {
273 }
274
275 void THIELESMALL::UpDate_K4() {
276 }
277
278 void THIELESMALL::UpDate_G1() {
279     G1 << -1.00000000000000 , 0 , 0 ;
280 }
281
282 void THIELESMALL::UpDate_G2() {
283 }
284
285 void THIELESMALL::UpDate_G3() {
286     G3 << 0 , 0 ;
287 }
```

```

316     void THIELESMALL::UpDate_G4() {
317
318 }
319
320     void THIELESMALL::UpDate_M1() {
321
322 }
323
324     void THIELESMALL::UpDate_M2() {
325
326 }
327
328     void THIELESMALL::UpDate_R() {
329
330         R << 10.0000000000000 , 0 , 0 , 1.00000000000000 ;
331
332 }
333
334     void THIELESMALL::UpDate_Q() {
335
336         Q << 3333.3333333333 , 0 , 0 , 0 , 100.000000000000 , 0 , 0 , 0 , 2000.000000000000 ;
337
338 }
339
340     Matrix<double,3,1> THIELESMALL::xl(){
341         return Map<Matrix<double,3,1>>(pointer_xl);
342 }
343
344     Matrix<double,3,1> THIELESMALL::dxl(){
345         return Map<Matrix<double,3,1>>(pointer_dxl);
346 }
347
348     Matrix<double,3,1> THIELESMALL::dxHl(){
349         return Map<Matrix<double,3,1>>(pointer_dxHl);
350 }
351
352     Matrix<double,2,1> THIELESMALL::wl(){
353         return Map<Matrix<double,2,1>>(pointer_wl);
354 }
355
356     Matrix<double,2,1> THIELESMALL::zl(){
357         return Map<Matrix<double,2,1>>(pointer_zl);
358 }
359
360 }
```

8.1.1 *THIELESMALL.h*

```

2 #ifndef THIELESMALL_H
3 #define THIELESMALL_H
4
5 #include "iostream"
6 #include "vector"
7 #include "math.h"
8
9 #include </Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/Eigen/Dense>
10
11 using namespace Eigen;
```

```

12  using namespace std;
13
14  class THIELESMALL {
15  public:
16
17      // Default Constructor:
18      THIELESMALL();
19
20      // Constructor Initializing x:
21      THIELESMALL(vector<double>&);

22      // Default Destructor:
23      ~THIELESMALL();

24      // Accesors to private variables
25      vector<double> get_y() const;
26      vector<double> get_u() const;
27      vector<double> get_x() const;
28      vector<double> get_dx() const;
29      vector<double> get_dxH() const;
30      vector<double> get_w() const;
31      vector<double> get_z() const;
32      const unsigned int get_nx() const;
33      const unsigned int get_nxl() const;
34      const unsigned int get_nxl() const;
35      const unsigned int get_nw() const;
36      const unsigned int get_nwl() const;
37      const unsigned int get_nwl() const;
38      const unsigned int get_ny() const;
39      const unsigned int get_np() const;

40
41      // Mutators of private variables
42      void set_u(vector<double>);

43      void set_x(vector<double>);

44
45      // Port-Hamiltonian runtime functions
46      void UpDate_l();
47      void UpDate_dxH();
48      void UpDate_z();
49      void UpDate_y();
50      void UpDate_J1();
51      void UpDate_J2();
52      void UpDate_J3();
53      void UpDate_J4();
54      void UpDate_K1();
55      void UpDate_K2();
56      void UpDate_K3();
57      void UpDate_K4();
58      void UpDate_G1();
59      void UpDate_G2();
60      void UpDate_G3();
61      void UpDate_G4();
62      void UpDate_M1();
63      void UpDate_M2();
64      void UpDate_R();
65      void UpDate_Q();
66      void UpDate_Matrices();
67      void process(vector<double>&, vector<double>&);

68      Matrix<double,3,1> xl();
69      Matrix<double,3,1> dxl();
70      Matrix<double,3,1> dxHl();
71      Matrix<double,2,1> wl();
72      Matrix<double,2,1> zl();
73      Matrix<double,0,0> iJacobianImplicitFunc();

```

```

77  private:

    // Dimensions of the port-Hamiltonian system
    const unsigned int nx=3;
    const unsigned int nxl=3;
    const unsigned int nxnl=0;
    const unsigned int nw=2;
    const unsigned int nwl=2;
    const unsigned int nwnl=0;
    const unsigned int ny=1;
    const unsigned int np=0;

    // Port-Hamiltonian system's vectors
    Matrix<double,3,1> x ;
    Matrix<double,3,1> dx ;
    Matrix<double,3,1> dH ;
    Matrix<double,2,1> w ;
    Matrix<double,2,1> z ;
    Matrix<double,1,1> u ;
    Matrix<double,1,1> y ;
    vector<double> p = vector<double>(0);

    // Runtime matrices
    Matrix<double,3,3> J1 ;
    Matrix<double,3,0> M1 ;
    Matrix<double,0,0> J2 ;
    Matrix<double,2,2> J3 ;
    Matrix<double,2,0> M2 ;
    Matrix<double,0,0> J4 ;
    Matrix<double,3,2> K1 ;
    Matrix<double,3,0> K2 ;
    Matrix<double,0,2> K3 ;
    Matrix<double,0,0> K4 ;
    Matrix<double,3,1> G1 ;
    Matrix<double,0,1> G2 ;
    Matrix<double,2,1> G3 ;
    Matrix<double,0,1> G4 ;
    Matrix<double,2,2> iDw ;
    Matrix<double,2,2> Dw ;
    Matrix<double,2,3> A1 ;
    Matrix<double,2,0> B1 ;
    Matrix<double,2,0> C1 ;
    Matrix<double,2,1> D1 ;
    Matrix<double,3,3> tildeA2 ;
    Matrix<double,3,0> tildeB2 ;
    Matrix<double,3,0> tildeC2 ;
    Matrix<double,3,1> tildeD2 ;
    Matrix<double,3,3> iDx ;
    Matrix<double,3,3> Dx ;
    Matrix<double,3,3> A2 ;
    Matrix<double,3,0> B2 ;
    Matrix<double,3,0> C2 ;
    Matrix<double,3,1> D2 ;
    Matrix<double,3,3> A3 ;
    Matrix<double,3,0> B3 ;
    Matrix<double,3,0> C3 ;
    Matrix<double,3,1> D3 ;
    Matrix<double,0,3> tildeA4 ;
    Matrix<double,0,0> tildeB4 ;
    Matrix<double,0,0> tildeC4 ;
    Matrix<double,0,1> tildeD4 ;
    Matrix<double,0,3> A4 ;
    Matrix<double,0,0> B4 ;
    Matrix<double,0,0> C4 ;

```

```

142     Matrix<double,0,1> D4 ;
143     Matrix<double,0,3> tildeA5 ;
144     Matrix<double,0,0> tildeB5 ;
145     Matrix<double,0,0> tildeC5 ;
146     Matrix<double,0,1> tildeD5 ;
147     Matrix<double,0,3> A5 ;
148     Matrix<double,0,0> B5 ;
149     Matrix<double,0,0> C5 ;
150     Matrix<double,0,1> D5 ;
151     Matrix<double,2,3> A6 ;
152     Matrix<double,2,0> B6 ;
153     Matrix<double,2,0> C6 ;
154     Matrix<double,2,1> D6 ;
155     Matrix<double,5,3> A7 ;
156     Matrix<double,5,0> B7 ;
157     Matrix<double,5,0> C7 ;
158     Matrix<double,5,1> D7 ;
159     Matrix<double,0,0> Bxnl ;
160     Matrix<double,0,0> Bwnl ;
161     Matrix<double,3,3> Q ;
162     Matrix<double,2,2> R ;

163 // Pointers to the sample rate

164     const int fs = 96000.0;

165 // Pointers to the linear part of each vector
166     double * pointer_xl = & x[0];
167     double * pointer_dxl = & dx[0];
168     double * pointer_dxHl = & dxH[0];
169     double * pointer_wl = & w[0];
170     double * pointer_zl = & z[0];

171     Matrix<double,5,1> Fl ;
172 };
#endif /* THIELESMALL_H */

```

## 8.1.2 main.cpp

```

//  

//  main.cpp  

4 //  phs  

//  

//  Created by Antoine Falaize on 21/09/2015.  

//  Copyright (c) 2015 Antoine Falaize. All rights reserved.  

//  

9 #include <iostream>
#include "/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/ThieleSmall/
    cpp/THIELESMALL.h"

14 #include "vector"

15 #include <fstream>
16 #include <string>
17 #include <cstdio>
18 #include <time.h>
19 #include <math.h>

20 class timer {
21     private:

```

```

24         unsigned long begTime;
public:
25         void start() {
26             begTime = clock();
27         }
28
29         unsigned long elapsedTime() {
30             return ((unsigned long) clock() - begTime) / CLOCKS_PER_SEC;
31         }
32
33         bool isTimeout(unsigned long seconds) {
34             return seconds >= elapsedTime();
35         }
36     };
37
38 int main() {
39
40     ifstream x0File;
41     x0File.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developement/mwe/
42                 ThieleSmall/data/x0.txt");
43
44     if (x0File.fail()) {
45         cerr << "Failed opening x0 file" << endl;
46         exit(1);
47     }
48
49     ifstream uFile;
50     uFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developement/mwe/
51                 ThieleSmall/data/u.txt");
52
53     if (uFile.fail()) {
54         cerr << "Failed opening input file" << endl;
55         exit(1);
56     }
57
58     ifstream pFile;
59     pFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developement/mwe/
60                 ThieleSmall/data/p.txt");
61
62     if (pFile.fail()) {
63         cerr << "Failed opening parameters file" << endl;
64         exit(1);
65     }
66
67     unsigned int nt = 0;
68
69     vector<double> xVector(3);
70     vector<double> x0Vector(3);
71     vector<double> dxHVector(3);
72     vector<double> dxVector(3);
73     vector<double> wVector(2);
74     vector<double> zVector(2);
75     vector<double> uVector(1);
76     vector<double> yVector(1);
77     vector<double> pVector(0);
78
79     typedef std::vector< std::vector<double> > matrix;
80
81     matrix matU(0, vector<double>(1));
82     matrix matP(0, vector<double>(0));
83
84     for (unsigned int i=0; i<3; i++) {
85         x0File >> x0Vector[i];
86     }

```

```

THIELESMALL sys(x0Vector);

89 // Get input data
cout << "Reading input..." << endl;
while (!uFile.eof()) {

    94     for (unsigned int i=0; i<sys.get_ny(); i++) {
        uFile >> uVector[i];
    }

    99     // Get parameters data
    for (unsigned int i=0; i<sys.get_np(); i++) {
        pFile >> pVector[i];
    }
    matU.push_back(uVector);
    matP.push_back(pVector);

104     nt = unsigned(int(matU.size()));
}

109     uFile.close();
pFile.close();

114     nt -= 1;

    // Compute
    cout << "Process simulation..." << endl;
    int ETA, ETAm, ETAs;
    float progress = 0.0;
    timer t;
    t.start();

119     ofstream xFile;
    xFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/x.txt");
    ofstream dxHFile;
    dxHFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/dxH.txt");
    ofstream dxFile;
    dxFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/dx.txt");

    ofstream wFile;
    wFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/w.txt");
    ofstream zFile;
    zFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/z.txt");

    ofstream yFile;
    yFile.open("/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/
        ThieleSmall/data/y.txt");

124     for (unsigned int n=0; n<nt; n++) {

        129         int barWidth = 20;
        std::cout << "[";
        int pos = barWidth * progress;
        for (int i = 0; i < barWidth; ++i) {
            if (i < pos) std::cout << "=";
            else if (i == pos) std::cout << ">";
            else std::cout << " ";
        }
        progress = float(n)/float(nt);
    }
}

```

```

149     if(1){
150         ETA = (float(nt)/float(n+1)-1.)*(t.elapsedTime());
151         ETAm = int(floor(ETA))/60;
152         ETAs = floor(ETA%60);
153         std::cout << "] " << int(progress * 100.0) << "% done, ETA: " << ETAm << "m
154             " << ETAs << "s\r" << endl ;
155         std::cout.flush();
156     }
157
158     uVector = matU[n];
159     pVector = matP[n];
160
161     // Get x before process update
162     xVector = sys.get_x();
163
164     // Process update
165     sys.process(uVector, pVector);
166
167     // Get quantities
168     dxVector = sys.get_dx();
169     dxHVector = sys.get_dxH();
170     wVector = sys.get_w();
171     zVector = sys.get_z();
172     yVector = sys.get_y();
173
174     // matX[n] = xVector;
175     // matdX[n] = dxVector;
176     // matdxH[n] = dxHVector;
177     // matW[n] = wVector;
178     // matZ[n] = zVector;
179     // matY[n] = yVector;
180
181     for (unsigned int i=0; i<sys.get_nx(); i++) {
182         xFile << xVector[i] << " ";
183         dxFile << dxVector[i] << " ";
184         dxHFile << dxHVector[i] << " ";
185     }
186
187     for (unsigned int i=0; i<sys.get_nw(); i++) {
188         wFile << wVector[i] << " ";
189         zFile << zVector[i] << " ";
190     }
191
192     for (unsigned int i=0; i<sys.get_ny(); i++) {
193         yFile << yVector[i] << " ";
194     }
195
196     xFile << endl;
197     dxFile << endl;
198     dxHFile << endl;
199
200     wFile << endl;
201     zFile << endl;
202
203     yFile << endl;
204
205     xFile.close();
206     dxFile.close();
207     dxHFile.close();
208     wFile.close();
209     zFile.close();
210     yFile.close();

```

```
209     cout << endl;
210     cout << "Data written at" << endl;
211     cout << endl;
212     cout << "/Users/Falaize/Documents/THESE/Dev/CodePython/Developpement/mwe/ThieleSmall"
213         "/data/"<< endl;
214     cout << endl;
215
216     return 0;
217 }
```



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Finn T Agerkvist. Non-linear viscoelastic models. In *Audio Engineering Society Convention 131*. Audio Engineering Society, 2011.
- [2] Finn T Agerkvist and Tobias Ritter. Modeling viscoelasticity of loudspeaker suspensions using retardation spectra. In *Audio Engineering Society Convention 129*. Audio Engineering Society, 2010.
- [3] Saïd Aoues. *Schémas d'intégration dédiés à l'étude, l'analyse et la synthèse dans le formalisme Hamiltonien à ports*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2014.
- [4] Said Aoues, Damien Eberard, and Wilfrid Marquis-Favre. Canonical interconnection of discrete linear port-hamiltonian systems. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 3166–3171. IEEE, 2013.
- [5] Marcus Arvidsson and Daniel Karlsson. Attenuation of harmonic distortion in loudspeakers using non-linear control. *Department of Electrical Engineering, Linköpings universitet, Sweden*, 2012.
- [6] Ahmed Baaiu, Françoise Couenne, Damien Eberard, Christian Jallut, Laurent Lefèvre, Yann Legorrec, and Bernhard Maschke. Port-based modelling of mass transport phenomena. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 15(3) :233–254, 2009.
- [7] Mingsian R Bai and Chau-Min Huang. Expert diagnostic system for moving-coil loudspeakers using nonlinear modeling. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(2) :819–830, 2009.
- [8] Bart Besselink, Henrik Sandberg, and Karl Henrik Johansson. Model reduction of networked passive systems through clustering. *CoRR*, abs/1312.7412, 2013.
- [9] Stefan Bilbao. Conservative numerical methods for nonlinear strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(5) :3316–3327, 2005.
- [10] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [11] Stefan Bilbao. Sound synthesis and physical modeling. *Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*, pages 1–23, 2009.
- [12] Stefan Bilbao, Julien Bensa, and Richard Kronland-Martinet. The wave digital reed : A passive formulation. *Digital Audio Effects (DAFx-03)*, pages 225–230, 2003.
- [13] Stefan Bilbao and Alberto Torin. Numerical simulation of string/barrier collisions : The fretboard. In *Proceedings of the 17th International Conference on Digital Audio Effects*, 2014.
- [14] Stefan Bilbao, Alberto Torin, and Vasileios Chatzioannou. Numerical modeling of collisions in musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(1) :155–173, 2015.
- [15] A M Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, New York, 2003.
- [16] Gianpaolo Borin, Giovanni De Poli, and Davide Rocchesso. Elimination of delay-free loops in discrete-time models of nonlinear acoustic systems. *Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on*, 8(5) :597–605, 2000.
- [17] Xavier Boutillet. Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(2) :746–754, 1988.
- [18] Peter C Breedveld. Multibond graph elements in physical systems theory. *Journal of the Franklin Institute*, 319(1) :1–36, 1985.

- [19] Samuel Brown. Linear and Nonlinear Loudspeaker Characterization. PhD thesis, Citeseer, 2006.
- [20] Pascal Brunet. Nonlinear System Modeling and Identification of Loudspeakers. PhD thesis, Northeastern University Boston, 2014.
- [21] Pascal Brunet and Bahram Shafai. State-space modeling and identification of loudspeaker with nonlinear distortion. In Modelling, Identification, and Simulation, IASTED International Conference on, volume 755, 2011.
- [22] Pascal Brunet and Bahram Shafai. Identification of loudspeakers using fractional derivatives. Journal of the Audio Engineering Society, 62(7/8) :505–515, 2014.
- [23] Pavol Brunovský. A classification of linear controllable systems. Kybernetika, 6(3) :173–188, 1970.
- [24] Chris J Budd and Matthew D Piggott. Geometric integration and its applications. Handbook of numerical analysis, 11 :35–139, 2003.
- [25] Francesco Bullo and Andrew D Lewis. Geometric control of mechanical systems : modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems, volume 49. Springer Science & Business Media, 2004.
- [26] R. Buntenbach. A generalized circuit model for multiwinding inductive devices. Magnetics, IEEE Transactions on, 6(1) :65–65, March 1970.
- [27] John C Butcher. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 2008.
- [28] Joaquín Cervera, AJ Van Der Schaft, and Alfonso Baños. Interconnection of port-Hamiltonian systems and composition of dirac structures. Automatica, 43(2) :212–225, 2007.
- [29] Juliette Chabassier. Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2012.
- [30] Juliette Chabassier, Antoine Chaigne, and Patrick Joly. Modeling and simulation of a grand piano. The Journal of the Acoustical Society of America, 134(1) :648–665, 2013.
- [31] Juliette Chabassier and Patrick Joly. Energy preserving schemes for nonlinear hamiltonian systems of wave equations : Application to the vibrating piano string. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(45) :2779–2795, 2010.
- [32] Antoine Chaigne and Nicolas Quaegebeur. Influence of material and shape on sound reproduction by an electrodynamic loudspeaker. In Audio Engineering Society Convention 118. Audio Engineering Society, 2005.
- [33] Peter John Chapman. Thermal simulation of loudspeakers. In Audio Engineering Society Convention 104. Audio Engineering Society, 1998.
- [34] B Charlet, J Lévine, and R Marino. On dynamic feedback linearization. Systems & Control Letters, 13(2) :143–151, 1989.
- [35] Vasileios Chatzioannou and Maarten Van Walstijn. An energy conserving finite difference scheme for simulation of collisions. In Proceedings of the sound and music computing conference (SMC2013), Stockholm, pages 584–591, 2013.
- [36] Ivan Cohen, Thomas Hélie, et al. Real-time simulation of a guitar power amplifier. In 13th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10), 2010.
- [37] Theodore James Courant. Dirac manifolds. Transactions of the American Mathematical Society, 319(2) :631–661, 1990.
- [38] Ruth F Curtain and Hans Zwart. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] Germund Dahlquist and Åke Björck. Numerical methods in scientific computing, volume i. SIAM, Philadelphia, 55, 2007.
- [40] Germund G Dahlquist. A special stability problem for linear multistep methods. BIT Numerical Mathematics, 3(1) :27–43, 1963.

- [41] Morten Dalsmo and Arjan Van Der Schaft. On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(1) :54–91, 1998.
- [42] Rafael Cauduro Dias de Paiva, Jyri Pakarinen, Vesa Välimäki, and Miikka Tikander. Real-time audio transformer emulation for virtual tube amplifiers. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011(1) :347645, 2011.
- [43] E Delaleau and J Rudolph. Decoupling and linearization by quasi-static feedback of generalized states. In *Proc. of the 3rd European Control Conf*, pages 1069–1074, 1995.
- [44] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences, 2012.
- [45] Charles A Desoer and Ernest S Kuh. *Basic circuit theory*. Tata McGraw-Hill Education, 2009.
- [46] C Desvages and S Bilbao. Physical modeling of nonlinear player-string interactions in bowed string sound synthesis using finite difference methods. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, 2014.
- [47] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg, New York, 4th edition, corrected reprint 2012 edition, 2010.
- [48] Manfredo Perdigao Do Carmo and Manfredo Perdigao Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, volume 2. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1976.
- [49] Mark Dodd. Application of the finite element method to model the nonlinear voice coil motion produced by a loudspeaker magnet assembly. *PROCEEDINGS-INSTITUTE OF ACOUSTICS*, 23(8) :1–14, 2001.
- [50] Mark Dodd, Wolfgang Klippel, and Jack Ocleo-Brown. Voice coil impedance as a function of frequency and displacement. In *Audio Engineering Society Convention 117*. Audio Engineering Society, 2004.
- [51] Mark A Dodd et al. The application of fem to the analysis of loudspeaker motor thermal behaviour. In *Audio Engineering Society Convention 112*. Audio Engineering Society, 2002.
- [52] Vincent Duindam, Alessandro Macchelli, Stefano Stramigioli, and Herman Bruyninckx. *Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [53] A. Falaize. Companion web-site to the present article entitled "passive guaranteed simulation of analog audio circuits : A port-hamiltonian approach". Available online : <http://recherche.ircam.fr/anasyn/falaize/applis/analogcircuits/> (accessed on 22 09 2016).
- [54] A. Falaize. *A comparison of numerical methods*. Available online : <http://recherche.ircam.fr/anasyn/falaize/applis/comparisonnumbschemes/> (accessed on 22 09 2016).
- [55] Alfred Fettweis. Pseudo-passivity, sensitivity, and stability of wave digital filters. *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, 19(6) :668–673, 1972.
- [56] Alfred Fettweis. Wave digital filters : Theory and practice. *Proceedings of the IEEE*, 74(2) :270–327, 1986.
- [57] William N Findley and Francis A Davis. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. Courier Corporation, 2013.
- [58] Neville Horner Fletcher and Thomas D Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [59] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Differential flatness and defect : an overview. In *Workshop on Geometry in Nonlinear Control, Banach Center Publications, Warsaw*, 1993.
- [60] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. *International journal of control*, 61(6) :1327–1361, 1995.

- [61] Vincent François-Lavet, François Henrotte, L Stainer, Ludovic Noels, and Christophe Geuzaine. Vectorial incremental nonconservative consistent hysteresis model. In *Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN2011)*, 2011.
- [62] Mathias Getzlaff. *Fundamentals of magnetism*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [63] Mohinimohan Ghosh. Experimental study of the duration of contact of an elastic hammer striking a damped pianoforte string. 1932.
- [64] Juan Carlos Gil, Angel Pedraza, Marisol Delgado, and Hebertt Sira-Ramirez. Flatness and passivity from a bond graph. In *Systems, Man, and Cybernetics, 1997. Computational Cybernetics and Simulation., 1997 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1516–1521. IEEE, 1997.
- [65] N Giordano and JP Winans II. Piano hammers and their force compression characteristics : Does a power law make sense ? *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4) :2248–2255, 2000.
- [66] Steinberg Media Technologies GmbH. *Virtual Studio Technology*. <http://www.steinberg.net/en/company/technologies/vst3.html> (accessed on 22 09 2016).
- [67] Gene H Golub and Charles F van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, johns hopkins studies in the mathematical sciences edition, 1996.
- [68] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover publication, New York, 1973.
- [69] John Guckenheimer and Philip Holmes. Nonlinear oscillation. *Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences*, 42, 1983.
- [70] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Gerhard Wanner. *Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, volume 31. Springer Science & Business Media, 2006.
- [71] David C Hamill. Lumped equivalent circuits of magnetic components : the gyrator-capacitor approach. *IEEE transactions on power electronics*, 8(2) :97–103, 1993.
- [72] David C Hamill. Gyrator-capacitor modeling : a better way of understanding magnetic components. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 1994. APEC'94. Conference Proceedings 1994, Ninth Annual*, pages 326–332. IEEE, 1994.
- [73] Harry C Hart, Melville W Fuller, and Walter S Lusby. A precision study of piano touch and tone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 6(2) :80–94, 1934.
- [74] Th Hélie and Denis Matignon. Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(04) :503–536, 2006.
- [75] Thomas Hélie. Lyapunov stability analysis of the moog ladder filter and dissipativity aspects in numerical solutions. In *Proc. DAFX-11, 14th Int. Conf. Digital Audio Effects*, pages 45–52, 2011.
- [76] Thomas Hélie and Denis Matignon. Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Signal Processing*, 86(10) :2516–2528, 2006.
- [77] Thomas Hélie and Denis Matignon. Nonlinear damping models for linear conservative mechanical systems with preserved eigenspaces : a port-hamiltonian formulation. *IFAC-PapersOnLine*, 48(13) :200–205, 2015.
- [78] Sverre Holm, Sven Peter Näsholm, Fabrice Prieur, and Ralph Sinkus. Deriving fractional acoustic wave equations from mechanical and thermal constitutive equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5) :621 – 629, 2013. Fractional Differentiation and its Applications.
- [79] Martin Holters and Udo Zölzer. Physical modelling of a wah-wah effect pedal as a case study for application of the nodal dk method to circuits with variable parts. *Proc. Digital Audio Effects (DAFx-11)*, Paris, France, pages 31–35, 2011.

- [80] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1985.
- [81] Nicholas G Horton and Thomas R Moore. Modeling the magnetic pickup of an electric guitar. *American journal of physics*, 77(2) :144–150, 2009.
- [82] Shuai Hu, Wen Chen, and Xiaofan Gou. Modal analysis of fractional derivative damping model of frequency-dependent viscoelastic soft matter. *Advances in Vibration Engineering*, 10(3) :187–196, 2011.
- [83] Rhodes Keyboard Instruments. Service Manual. CBS Musical Instruments A Division of CBS Inc., California, USA, 1979.
- [84] A. Isidori. Control of nonlinear systems via dynamic state-feedback. In M. Fliess and M. Hazewinkel, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, volume 29 of *Mathematics and Its Applications*, pages 121–145. Springer Netherlands, 1986.
- [85] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [86] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [87] Toshiaki Itoh and Kanji Abe. Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational difference quotients. *Journal of Computational Physics*, 76(1) :85–102, 1988.
- [88] David Jakobsson and Marcus Larsson. Modelling and compensation of nonlinear loudspeaker. *Chalmers University of Technology*, 2010.
- [89] Bronisław Jakubczyk and Witold Respondek. On linearization of control systems. In Polska Akademia Nauk, editor, *Bulletin de L'Académie Polonaise Des Sciences : Série des sciences mathématiques*, volume 28. 1980.
- [90] E.; Peterson P. Jones, E.; Oliphant. *SciPy : Open Source Scientific Tools for Python, function scipy.optimize.root*. Available online : <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.root.html#scipy.optimize.root>, accessed on july 2016.
- [91] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [92] Arie JM Kaizer. Modeling of the nonlinear response of an electrodynamic loudspeaker by a volterra series expansion. *Journal of the Audio Engineering Society*, 35(6) :421–433, 1987.
- [93] Dean Karnopp. Power-conserving transformations : physical interpretations and applications using bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 288(3) :175–201, 1969.
- [94] C. Kelley. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [95] S Graham Kelly. *Advanced vibration analysis*. CRC Press, 2006.
- [96] Hassan K Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [97] Wolfgang Klippel. Dynamic measurement and interpretation of the nonlinear parameters of electrodynamic loudspeakers. *Journal of the Audio Engineering Society*, 38(12) :944–955, 1990.
- [98] Wolfgang Klippel. Nonlinear modeling of the heat transfer in loudspeakers. *Journal of the Audio Engineering Society*, 52(1/2) :3–25, 2004.
- [99] Wolfgang Klippel. Tutorial : Loudspeaker nonlinearities ?causes, parameters, symptoms. *Journal of the Audio Engineering Society*, 54(10) :907–939, 2006.
- [100] Morten H Knudsen and J Grue Jensen. Low-frequency loudspeaker models that include suspension creep. *Journal of the Audio Engineering Society*, 41(1/2) :3–18, 1993.
- [101] RC Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2) :299–307, 1984.

- [102] Xiao-Peng Kong, Finn Agerkvist, and Xin-Wu Zeng. Modeling of lossy inductance in moving-coil loudspeakers. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(3), 2015.
- [103] Arthur J Krener. On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control*, 11(4) :670–676, 1973.
- [104] John Denholm Lambert. *Computational methods in ordinary differential equations*. Wiley London, 1973.
- [105] Khosrow Lashkari. A novel volterra-wiener model for equalization of loudspeaker distortions. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on*, volume 5, pages V–V. IEEE, 2006.
- [106] Lionel Laudebat. Modélisation et identification sous représentation diffusive de comportements dynamiques non rationnels en génie électrique. *These de l'Université Paul Sabatier, Toulouse*, 2003.
- [107] Yann Le Gorrec and Denis Matignon. Diffusive systems coupled to an oscillator : a hamiltonian formulation. In *4th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, LHMNLC'12.*, pages 1–6, 2012.
- [108] W Marshall Leach Jr. Loudspeaker voice-coil inductance losses : circuit models, parameter estimation, and effect on frequency response. *Journal of the Audio Engineering Society*, 50(6) :442–450, 2002.
- [109] J. Lévine. A graph-theoretic approach to input-output decoupling and linearization. In A.J. Fossard and D. Normand-Cyrot, editors, *Nonlinear Systems*, pages 77–91. Springer US, 1997.
- [110] Jean Levine. *Analysis and control of nonlinear systems : A flatness-based approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [111] Jean Levine. *Analysis and control of nonlinear systems : A flatness-based approach*. 2009.
- [112] R Lewandowski and B Chorażyczewski. Identification of the parameters of the kelvin-voigt and the maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers. *Computers & structures*, 88(1) :1–17, 2010.
- [113] ROLI Ltd. *The JUCE framework*. available online : <http://www.juce.com> (accessed on 22 09 2016).
- [114] AM Lyapunov. The general problem of the stability of motion. 1892.
- [115] Alessandro Macchelli and Claudio Melchiorri. Modeling and control of the timoshenko beam. the distributed port hamiltonian approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(2) :743–767, 2004.
- [116] Jerrold E Marsden and Tudor Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry : a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [117] Philippe Martin, Pierre Rouchon, and R. M. Murray. Flat systems, equivalence and trajectory generation. Lecture, August 2006.
- [118] Phillippe Martin, Richard M Murray, and Pierre Rouchon. Flat systems, equivalence and trajectory generation. 2003.
- [119] BM Maschke and AJ Van der Schaft. Port-controlled hamiltonian systems : modelling origins and system-theoretic properties. In Michel Fliess, editor, *IFAC Nonlinear Control Systems Design (Bordeaux, France, 1992)*, page 359–366. 1992.
- [120] BM Maschke, Arjan J Van Der Schaft, and Peter C Breedveld. An intrinsic hamiltonian formulation of network dynamics : Non-standard poisson structures and gyroators. *Journal of the Franklin institute*, 329(5) :923–966, 1992.
- [121] K. T. McDonald. Electric guitar pickups. In *Pedagogic note*. Princeton University, Department of Physics, May 2007. <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/guitar.pdf>.

- [122] Robert I McLachlan, GRW Quispel, and Nicolas Robidoux. Geometric integration using discrete gradients. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 357(1754) :1021–1045, 1999.
- [123] Leonard Meirovitch. *Principles and techniques of vibrations*, volume 1. Prentice Hall New Jersey, 1997.
- [124] Malte Muenster and Florian Pfeifle. Non-linear behaviour in sound production of the rhodes piano. In Proceedings of the International Symposium of Musical Acoustics (ISMA), pages 247–252, Le Mans, France, 2014.
- [125] Malte Muenster, Florian Pfeifle, Till Weinrich, and Martin Keil. Nonlinearities and self-organization in the sound production of the rhodes piano. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(4) :2164–2164, 2014.
- [126] Richard M Murray, Muruhan Rathinam, and Willem Sluis. Differential flatness of mechanical control systems : A catalog of prototype systems. In ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Citeseer, 1995.
- [127] Hendrik Nijmeijer and Witold Respondek. Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(11) :1065–1070, 1988.
- [128] Henk Nijmeijer and Arjan Van der Schaft. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer Science & Business Media, 1990.
- [129] Alan V Oppenheim and Ronald W Schafer. *Discrete-time signal processing*. Pearson Higher Education, 2010.
- [130] Romeo Ortega, Arjan Van der Schaft, Bernhard Maschke, and Gerardo Escobar. Energy-shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection. In Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on, volume 2, pages 1646–1651. IEEE, 1999.
- [131] Romeo Ortega, Arjan Van Der Schaft, Bernhard Maschke, and Gerardo Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4) :585–596, 2002.
- [132] Rafael CD Paiva, Jyri Pakarinen, and Vesa Välimäki. Acoustics and modeling of pickups. *Journal of the Audio Engineering Society*, 60(10) :768–782, 2012.
- [133] Jyri Pakarinen, Miikka Tikander, and Matti Karjalainen. Wave digital modeling of the output chain of a vacuum-tube amplifier. In Proceedings of the International Conference on Digital Audio Effects (DAFx ?09), pages 1–4. Citeseer, 2009.
- [134] Bo Rohde Pedersen. *Error correction of loudspeakers*. PhD thesis, PhD thesis. Aalborg University, Denmark, 2008.
- [135] Bo Rohde Pedersen and Finn T Agerkvist. Time varying behavior of the loudspeaker suspension. In Audio Engineering Society Convention 123. Audio Engineering Society, 2007.
- [136] F Pedersini, A Sarti, and S Tubaro. Block-wise physical model synthesis for musical acoustics. *Electronics Letters*, 35(17) :1418–1419, 1999.
- [137] Stefan Petrausch. *Block based physical modeling*. PhD thesis, Ph. D. dissertation, University of Erlangen Nuremberg, 2007.
- [138] Stefan Petrausch and Rudolf Rabenstein. Interconnection of state space structures and wave digital filters. *Circuits and Systems II : Express Briefs, IEEE Transactions on*, 52(2) :90–93, 2005.
- [139] Mónika Polner and JJW van der Vegt. A hamiltonian vorticity–dilatation formulation of the compressible euler equations. *Nonlinear analysis : theory, methods & applications*, 109 :113–135, 2014.
- [140] Nicolas Quaegebeur and Antoine Chaigne. Nonlinear vibrations of loudspeaker-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 309(1-2) :178–196, Jan 2008.

- [141] GRW Quispel and Grant S Turner. Discrete gradient methods for solving odes numerically while preserving a first integral. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 29(13) :L341, 1996.
- [142] Hector Ramirez, Bernhard Maschke, and Daniel Sbarbaro. Modelling and control of multi-energy systems : an irreversible port-hamiltonian approach. *European Journal of Control*, 19(6) :513–520, 2013.
- [143] Luca Remaggi, Leonardo Gabrielli, R Cauduro Dias de Paiva, Vesa Välimäki, and Stefano Squartini. A pickup model for the clavinet. In *Digital Audio Effects Conference 2012 (DAFx-12)*, 2012.
- [144] Witold Respondek and Issa Amadou Tall. Feedback equivalence of nonlinear control systems : a survey on formal approach. *Chaos in Automatic Control*, pages 137–262, 2006.
- [145] Gerasimos G Rigatos. *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches : applications to electromechanical systems*, volume 25. Springer, 2015.
- [146] Pierre Rouchon. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *J. Math. Systems Estim. Control*, 4(2) :257–260, 1994.
- [147] Pierre Rouchon. Flatness based control of oscillators. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85(6) :411–421, 2005.
- [148] Pierre Rouchon, Michel Fliess, Jean Levine, and Philippe Martin. Flatness and motion planning : the car with n trailers. In Proc. *ECC'93*, Groningen, pages 1518–1522, 1993.
- [149] Axel Rumeau. *Modélisation comportementale en génie électrique sous représentation diffusive : méthodes et applications*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2009.
- [150] J Sabatier, Om P Agrawal, and JA Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*, volume 4–9. Springer, 2007.
- [151] Augusto Sarti and Giovanni De Poli. Toward nonlinear wave digital filters. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 47(6) :1654–1668, 1999.
- [152] Ingo Schäfer and Klaus Krüger. Modelling of lossy coils using fractional derivatives. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 41(4) :045001, 2008.
- [153] Arjan Schaft. Port-hamiltonian systems : an introductory survey. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (3) : Invited Lectures*, pages 1339–1365. European Mathematical Society Publishing House (EMS Ph), 2006.
- [154] Tim Schwerdtfeger and Anton Kummert. A multidimensional approach to wave digital filters with multiple nonlinearities. In *2014 22nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 2405–2409. IEEE, 2014.
- [155] Dan A Simovici and Chabane Djeraba. Mathematical tools for data mining. *Advanced Information and Knowledge Processing*, pages 129–172, 2008.
- [156] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [157] Richard H Small. Closed-box loudspeaker systems-part 1 : analysis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 20(10) :798–808, 1972.
- [158] Richard H Small. Closed-box loudspeaker systems-part 2 : Synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(1) :11–18, 1973.
- [159] Julius O Smith. Physical modeling using digital waveguides. *Computer music journal*, pages 74–91, 1992.
- [160] Marcelo Soria-Rodríguez, Moncef Gabbouj, Nick Zacharov, Matti S Hämäläinen, and Kalle Koivuniemi. Modeling and real-time auralization of electrodynamic loudspeaker non-linearities. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings.(ICASSP'04)*. IEEE International Conference on, volume 4, pages iv–81. IEEE, 2004.

- [161] Anatoli Stulov. Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4) :2577–2585, 1995.
- [162] Anatoli Stulov. Experimental and theoretical studies of piano hammer. In *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*, 2003.
- [163] Endre Süli and David F Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003.
- [164] Johan Suykens, Joos Vandewalle, and Johan Van Ginderdeuren. Feedback linearization of nonlinear distortion in electrodynamic loudspeakers. *Journal of the audio engineering society*, 43(9) :690–694, 1995.
- [165] SymPy Development Team. *Sympy : Python library for symbolic mathematics*, 2014.
- [166] Stéphan Tassart, Simon Valcin, and Michel Menu. Active loudspeaker heat protection. *Journal of the Audio Engineering Society*, 62(11) :767–775, 2014.
- [167] BDH Tellegen. A general network theorem, with applications. *Philips Research Reports*, 7(4) :259–269, 1952.
- [168] Neville Thiele. Loudspeakers in vented boxes : Part 1. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(5) :382–392, 1971.
- [169] Neville Thiele. Loudspeakers in vented boxes : Part 2. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(6) :471–483, 1971.
- [170] Knud Thorborg and Claus Futtrup. Frequency dependence of the loudspeaker suspension (a follow up). *Journal of the Audio Engineering Society*, 61(10) :778–786, 2013.
- [171] Knud Thorborg, Carsten Tinggaard, Finn Agerkvist, and Claus Futtrup. Frequency dependence of damping and compliance in loudspeaker suspensions. *Journal of the Audio Engineering Society*, 58(6) :472–486, 2010.
- [172] Knud Thorborg, Andrew D Unruh, and Christopher J Struck. An improved electrical equivalent circuit model for dynamic moving coil transducers. In *Audio Engineering Society Convention*, volume 122, 2007.
- [173] Anders Thorin, Xavier Boutillon, Xavier Merliot, and José Lozada. A non-smooth simulation of the dynamics of the grand piano action. In *Waves 2013*, 2013.
- [174] Vesa Välimäki, Jyri Pakarinen, Cumhur Erkut, and Matti Karjalainen. Discrete-time modelling of musical instruments. *Reports on progress in physics*, 69(1) :1, 2006.
- [175] AJ Van der Schaft, M Dalsmo, and BM Maschke. Mathematical structures in the network representation of energy-conserving physical systems. In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volume 1, pages 201–206. IEEE, 1996.
- [176] AJ Van der Schaft and BM Maschke. Port-hamiltonian systems on graphs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(2) :906–937, 2013.
- [177] Arjan van der Schaft and Dimitri Jeltsema. Port-hamiltonian systems theory : An introductory overview. *Foundations and Trends in Systems and Control*, 1(2-3) :173–378, 2014.
- [178] Arjan van der Schaft and Bernhard Maschke. The hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports. *AEU. Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 49(5-6) :362–371, 1995.
- [179] John Vanderkooy. A model of loudspeaker driver impedance incorporating eddy currents in the pole structure. In *Audio Engineering Society Convention 84*. Audio Engineering Society, 1988.
- [180] Javier Andres Villegas. *A port-Hamiltonian approach to distributed parameter systems*. PhD thesis, University of Twente, 2007.
- [181] Andre Vladimirescu. *The SPICE book*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

- [182] Trang Vu, Laurent Lefevre, and Bernhard Maschke. Port-hamiltonian formulation for systems of conservation laws : application to plasma dynamics in tokamak reactors. In Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, volume 4, pages 108–113, 2012.
- [183] Kurt James Werner, Vaibhav Nangia, Alberto Bernardini, Julius O Smith III, and Augusto Sarti. An improved and generalized diode clipper model for wave digital filters. In Audio Engineering Society Convention 139. Audio Engineering Society, 2015.
- [184] Julian R Wright. An empirical model for loudspeaker motor impedance. Journal of the Audio Engineering Society, 38(10) :749–754, 1990.
- [185] David T Yeh, Jonathan S Abel, and Julius O Smith III. Automated physical modeling of nonlinear audio circuits for real-time audio effects, part i : theoretical development. Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on, 18(4) :728–737, 2010.
- [186] David T Yeh and Julius O Smith. Simulating guitar distortion circuits using wave digital and nonlinear state-space formulations. Proceedings of the Digital Audio Effects (DAFx ?08), pages 19–26, 2008.
- [187] Carlo Zuccatti. Thermal parameters and power ratings of loudspeakers. Journal of the Audio Engineering Society, 38(1/2) :34–39, 1990.

## COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "[The Elements of Typographic Style](#)". `classicthesis` is available for both `LATEX` and `LyX` :

<http://code.google.com/p/classicthesis/>

Final Version as of 16 décembre 2016 (`classicthesis` version 0.2).



## DECLARATION

---

Le travail présenté dans ce document a été mené entre octobre 2012 et mai 2016 à l'IRCAM (CNRS UMR 9912, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris), sous la direction de Thomas Hélie (chargé de recherche).

*Paris, 16 décembre 2016*

---

Antoine Falaize, 16 décembre  
2016