Fundamentos de Análisis de Series Temporales en R

Nerys Ramírez Mordán

Universidad Autónoma de Santo Domingo
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
info.nerysramirez@gmail.com - Data Science | DR

Marzo 2019

Tabla de contenido

Econometría?

Econometría?

- Se ocupa de la medición de las relaciones entre las variables económicas y la confrontación de la teoría con evidencia empírica (Stewart y Wallis, 1984).

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}_i + \varepsilon_i$$

Econometría?

- **1914**. Modelos de demanda y ciclos económicos.
- **1930**. creación de la Econometric Society.
- **1950**. MC2E (Theil, 1954); VI (Sargan, 1958), modelos estructurales.
- **1960**. Fundamentos microeconómicos.
- **1970**. Variable dependiente cualitativa (McFadden, 1974); Logit (Amemiya, 1978); Probit (Albright, et al., 1977); datos de panel; Box-Jenkins (1978); Critica de Lucas (Lucas, 1972); relaciones espúreas (Granger y Newbold, 1974).

Econometría?

- **1980**. VAR (Sims, 1980). Cointegración (Granger, 1981); Raíz Unitaria (Dickey-Fuller, 1979); MCE (Sargent, 1984); ARCH (Engel, 1982); GARCH (Bollerslev, 1986); VAR inferencia (Runkle, 1987).
- **2000**. Suavización exponencial (Yelland and Lee, 2003), VAR con restricciones de signos (Uhlig, 2004).

Series temporales: aspectos básicos

Aspectos básicos

- $\{y_t\}$: es una secuencia de variables aleatorias indexadas en el tiempo ($t \in [1, 2, ..., T]$):

$$Y_t = y_1, y_2, ...y_T$$

- Su **realización** ($\mathbf{Y}(\omega)$) una posible trayectoria del proceso.
- **Proceso estocástico**: familia de variables aleatorias $\{Y_t$ $t \in T\}$, definido en un espacio de probabilidad discreto $\{t = 1, 2, \ldots\}$ o continuo.

Aspectos básicos

- Los **momentos** de un proceso se obtienen a partir de las propiedades de sus distribuciones marginales:
  - $E[Y_t] = \mu_t, \quad t = 1, 2, 3, \ldots, T$
  - $V[Y_t] = E[Y_t - \mu_t]^2 = \sigma_t^2, \quad t = 1, 2, 3, \ldots, T$
  - $Cov[Y_t, Y_s] = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_t)]$

Aspectos básicos

- Las **distribuciones condicionales** a k valores anteriores, conociendo $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k}$.
- **Proceso markoviano**: $(y_{t+1}|y_t, y_{t+1-1}, \ldots, y_1) = f(y_t)$.

Aspectos básicos

- Basados en el teorema central del límite y la ley de grandes números de Kolmogorov (Soto, 2010):

$$\bar{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i \to \mu$$

- Ahora, $\{y_t\}$ (no n secuencias) incluye **dependencia temporal** que impide se apliquen los análisis tradicionales (Shumway y Stoffer, p.1).

$$\bar{x}_t = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i \xrightarrow{?} \mu$$

Aspectos básicos

- $\{y_t\}$ es *estrictamente* ***estacionaria*** cuando la función de distribución de $(Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, ..., Y_{t+k})$ es idéntica a $(Y_\tau, Y_{\tau+1}, Y_{\tau+2}, ..., Y_{\tau+k})$ $\forall \tau, t$ y k.
- El proceso y_t es *estacionario en covarianzas* si $\mu_t = E[Y_t] = \mu$ y $\gamma_{t,k} = \gamma_k$, $\forall$ t y k (Lutkepohl and Kratzig, 2004, p.12).
- Un proceso *estacionario de orden k*, es aquel donde la probabilidad en t_1, t_2, t_m, es igual a la de $t_{1+k}, t_{2+k}, t_{m+k}$.

Aspectos básicos

- $Y_t = \varepsilon_t$ es un proceso **ruido blanco** ($\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$), sí:

$$E[y_t] = 0; \qquad E[y_t y_s] = \begin{cases} \sigma^2 & \forall s = t \\ 0 & \forall s \neq t \end{cases}$$

- Solo si $Y_t = \varepsilon_t$, *se justifica totalmente la utilización de momentos muestrales* para caracterizar y_t (Novales, 2016a, p.3).

Aspectos básicos

- Cuando $E\left[y_t y_s\right] \neq 0 \ \forall s \neq t$ se requiere un modelo (Novales, 2016a, p.3).
- El **operador de retardo** (L, lags), retrasa los elementos de una secuencia un periodo $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}$, de forma que $Ly_t = y_{t-1}$ (L^{-i} es el **operador de adelantos**).

$$(1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2) x_t = x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2}$$

Aspectos básicos

- $\{Y_t\} \sim AR$: $\phi(L)y_t = \varepsilon_t$, siendo ε_t la innovación del proceso, y $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p)$ el **polinomio autoregresivo**.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots - \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Si $\{Y_t\} \sim AR(1)$ y $\phi_1 = |1|$, el proceso es no estacionario y se conoce como una **caminata aleatoria**.

Aspectos básicos

- $\{Y_t\} \sim Ma$: $y_t = \theta(L)\varepsilon_t$, siendo ε_t la innovación del proceso, y $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + ... + \theta_p L^p)$ el **polinomio de media móvil**.

$$y_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} - \phi_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \phi_p \varepsilon_{t-p} + \varepsilon_t$$

Aspectos básicos

- El **ARMA** es:

$$\phi(B)\, y_t = \theta(B)\, \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

- El **ARMA** con $E[y_t] \neq 0$, es:

$$\phi(B)\, y_t = c + \theta(B)\, \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim RB(E[y_t], \sigma^2)$$

Aspectos básicos

- Dado un **proceso integrado** de orden d ($y_t \sim I(d)$, sí $\Delta_d y_t \sim I(0)$), el **ARIMA** es:

$$\phi\,(B)\,(1-L)^d\,y_t = \theta\,(B)\,\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim RB(0,\sigma^2)$$

- Δ^d ($= (1-L)^d$) es el **operador de diferencias:**
$\Delta y_t = (1-L)y_t = y_t - y_{t-1}$
$\Delta^2 y_t = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$

Aspectos básicos

- Sea $\{y\}_{t=1}^{T}$ una serie temporal, se puede descomponer aditiva o multiplicativamente, según sus componentes:

$$\begin{aligned} y_t &= T_t + C_t + S_t + I_t \\ y_t &= T_t * C_t * S_t * I_t \end{aligned} \tag{1}$$

  - T_t tendencia.
  - S_t Componente estacional.
  - C_t Ciclo.
  - I_t Componente irregular o innovación.

Aspectos básicos

- La presencia de elementos estacionales, se incorporan al modelo ARIMA (**SARIMA**), aplicando el **operador de diferencia estacional** $\Delta_s y_t = (1 - L^s)x_t = y_t - y_{t-s}$:

$$\phi(B)\,\Phi(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,y_t = \theta(B)\,\Theta(B^s)\,\epsilon_t$$

- El SARIMA, considera diferencias estacionales, siendo D el orden de integración estacional de $\{y\}_{t=1}^{T}$:

$$y_t - y_{t-s} = (1-L^s)^D\,y_t$$

Aspectos básicos

- Los modelos **RegARIMA**, son modelos de regresión cuyos errores siguen un modelo SARIMA $(x_t - x'\beta)$:

$$\phi(B)\,\Phi(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\left(y_t - y'\beta\right) = \theta(B)\,\Theta(B^s)\,\epsilon_t$$

- El modelo de $\{y\}_{t=1}^{T}$, viene dado por:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k}\beta_j t^j + \sum_{j=1}^{s}\sigma_j I_j(t) + \epsilon_t$$

Box-Jenkins

Box-Jenkins

- Paso 1. Verificar estacionariedad.
  - La transformación de Box-Cox (1964), permite estabilizar la varianza, siendo λ el parámetro de transformación:

$$y_t^{\lambda} = \begin{cases} \frac{x_t^{\lambda}-1}{\lambda}, & \text{si}\lambda \neq 0 \\ \ln(y_t), & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

  - $\lambda = 1 - \alpha$, que se obtiene de estimar $\ln h_t = c + \alpha \ln \bar{y}_t$, $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^{\frac{1}{n}}$ es la media geométrica móvil y h_t es la desviación móvil.

Box-Jenkins

- Paso 1. Verificar estacionariedad.
  - La función de **autocorrelación simple** de orden k entre y_t y y_{t+k}.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y - \bar{y})_t \, (y - \bar{y})_{t+k}}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \sim N(0, 1/T)$$

  - La función de **autocorrelación parcial** entre x_t y x_{t-k}, a partir del modelo autorregresivo es:
    $x_t = \beta_0 + \alpha_1 x_{t-1} + ... + \alpha_k x_{t-k} + u_t$.

$$a_k = Corr\left(x_t, x_{t-h} | x_{t-1}, ..., x_{t-k+1}\right)$$

Box-Jenkins

- Paso 1. Verificar estacionariedad.
  - La prueba **Dickey-Fuller** supone $y_t \sim AR(1)$ para testear estacionariedad en diferencia $(\alpha_1 = \rho_1 - 1)$, utilizando:

$$\Delta y_t = \alpha_1 y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta y_t = \phi_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 t + \alpha_1 y_{t-1} + u_t$$

  - $h_0 : \alpha_1 = 0$, estadístico $t = \frac{\hat{\alpha}_1}{de(\alpha_1)}$.

Box-Jenkins

- Paso 1. Verificar estacionariedad.
  - El test **Dickey-Fuller Aumentado** (ADF):

$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

  - El test **Phillip-Perron** corrige el estadístico del DF, por la posible autocorrelación y heterocedasticidad en ε_t.

- Paso 2. Identificación del proceso.
  1. Correlogramas.
  2. Criterios de información:

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + 2\frac{k}{T}$$

  3. Análisis residual a partir de los test Box, que testea, $\forall h$ $h_0 : \rho_{(h)} = 0$ y $h_a : \rho_{(h)} \neq 0$

Box-Jenkins

- Paso 3. Estimación.
  - Para un ARMA(p.q) con $\Theta = (\mu, \phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q)'$, el vector (p+q+1)-dimensional de parámetros, se puede obtener a partir de la función de verosimilitud:

$$\mathbf{L}(\Theta, \sigma_w^2) =_{t=1}^{T} f(y_t | y_{t-1}, ..., y_1)$$

En el caso de un $AR(1) \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$:

$$f(y_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\phi^2)}} exp \left\{ -\frac{[y_1 - c/(1-\phi)]^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)} \right\}$$

- Paso 4. Validación.
  - Además de los correlogramas, el test de *Box* testea, $\forall h$ $h_0 : \rho_{(h)} = 0$ y $h_a : \rho_{(h)} \neq 0$, utilizando el estadístico de prueba **Box-Pierce** (1970):

$$Q_h = T \sum_{k=1}^{h} \hat{\rho}^2_{\varepsilon,k} \sim \chi^2_h$$

  - Test **Ljiung-Box** (1978):

$$Q_h = T(T+2) \sum_{k=1}^{h} \frac{\rho^2_{\varepsilon,k}}{T-k} \sim \chi^2_h$$

- Paso 4. Pronósticos.
  - Predecir valores futuros de y_{t+m}, $m = 1, 2, \ldots,$ basados en la información conocida hoy ($\mathbf{y}$).

$$y_{t+m} = \mathbf{E}(y_{t+m}|\mathbf{y})$$

  - Esta media condicional $\min \mathbf{E}[(y_{t+m} - g(\mathbf{y})]^2$ a partir de $\{y_1, ..., y_n\}$, el pronóstico a un paso seria:

$$y_{t+1} = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \ldots$$

Box-Jenkins en R

```
#Declarar el objeto
Px <-ts(x,frequency =252,start =c(1991,04))
plot(Px,type="l")

dx<-diff(log(Px))

par(mfrow=c(1,2))
plot(dx,type="l")
acf(dx)
```

Box-Jenkins en R

```r
# Paso 1. Estacionariedad (Test Dickey Fuller)
library(urca)
mod<-ur.df(dx,type =c("none"),lags =0)
summary(mod)

ur.df(dx, type =c("none"), lags =1,
+       selectlags ="AIC")
```

Box-Jenkins en R

```
# Paso 2. Identificar el proceso
# A partir del criterio de informacion
mod1<-arima(dx,order =c(1,0,0))
mod2<-arima(dx,order =c(0,0,1))
mod3<-arima(dx,order =c(1,0,1))
mod4<-arima(dx,order =c(2,0,0))

AIC(mod1, mod2, mod3, mod4)[,2]
```

Box-Jenkins en R

```r
# Paso 2. Identificar el proceso
# Correlogramas
par(mfrow=c(1,2))
acf(dx,xlim=c(1,20),main="acf")
pacf(dx,xlim=c(1,20),main="pacf")

# Coeficientes en tablas
acf(d1oro,plot=FALSE)$acf[2:11]
```

Box-Jenkins en R

```
# Paso 2. Identificar el proceso
# An lisis de los residuos
r<-mod1$residuals

# Test de Box
Box.test(r,lag =1,type ="Box-Pierce")
Box.test(r,lag =1,type ="Ljung-Box")

# Normalidad
qqnorm(r)
qqline(r,col =2)
```

Box-Jenkins en R

```r
# Paso 3. Estimar el proceso
mod1<-arima(dx,order =c(1,0,0))
print(mod1)

# Paso 4. Validar
library(tseries)

library(forecast)
tsdiag(mod1)
```

Box-Jenkins en R

```
# Paso 5. Usar el modelo
library(forecast)
mod1<-arima(x,order =c(1,1,1))

fcast <-forecast(mod1,h=10)
plot(fcast)
plot(forecast(mod1,fan=TRUE))

# Valores pronosticados e IC
fcast
```

Box-Jenkins en R

```
# Componentes de una serie temporal
fit <- decompose(x, type ='multiplicative')
autoplot(fit)

# Serie ajustada
xAjustada <- x-fit$seasonal-fit$trend
```

```
# SARIMA
auto.arima(xAjustada,seasonal=FALSE)
auto.arima(x,seasonal=T)

mod1 <-arima(x, order=c(3,1,2),
 +              seasonal=c(1,0,1))
mod1
```

Box-Jenkins en R

```r
# RegARIMA
datos <-data.frame(x, meses=months(dates))

# Dummys estacionales
datos$dummyS <-factor(datos$meses)
dummyS2 <-model.matrix(~datos$dummyS-1)

# [,-1]?
fit <-arima(x, xreg=dummyS2[,-1],
+                order=c(1,1,0))
print(fit)
```

Modelos de volatilidad

Modelos de volatilidad

- $y_t(\theta) \sim$ **ARCH**, si su esperanza sigue el proceso:

$$E_{t-1}[y_t(\theta)] = 0 \quad \forall t = 1, 2, \ldots$$

y su varianza condicional:

$$h_t^2(\theta_0) = Var_{t-1}[y_t(\theta)] = E_{t-1}[y_t^2(\theta) = g(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots)$$

Modelos de volatilidad

- El **modelo EWMA** es un modelo de suavización exponencial, con λ como parámetro de suavización:

$$\sigma_t^2 = \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) y_{t-1}^2$$

Modelos de volatilidad

- El **ARCH** es un modelo discreto, que condiciona la varianza en t, a la información pasada, $var(y_t|\Omega_{t-1}) = \sigma_t^2$, siendo su especificación $ARCH(p)$:

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2$$

Modelos de volatilidad

- El **test ARCH** parte de la estimación MCO del $AR(p)$:

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + v_t$$

- Para testear $h_0 : \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, p$, usando el estadístico $T * R^2 \sim \chi_p^2$.

Modelos de volatilidad

- El **GARCH(p,q)** modeliza la volatilidad condicional a partir de dos ecuaciones:

$$y_y = \epsilon_t h_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\mathbf{q}} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \varepsilon_{t-1}$$

- Cuya estimación se determina a partir de un MLE.

$$\mathbb{L} = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}} \right]$$

Modelos de volatilidad

- Glosten, Jagannathan y Runkle (**GJR**, 1993), propusieron modelar la asimetría en la respuesta de la volatilidad a shocks pasados:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{I=1}^{q} \left[\alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \lambda_1 1_{(\varepsilon_t \leqslant 0)}^{-} \varepsilon_{t-i}^2 \right] + \sum_{I=1}^{p} \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1}$$

Modelos de volatilidad

- Asumiendo media cero y ausencia de autocorrelación, el modelo **Markov-GARCH** se representa como:

$$y_t|(s_t = k, F_{t-1}) \sim \mathbb{D}(0, h_{k,t}, \xi_k)$$

- s_t es definida en $\{1, 2, ..., k\}$, según una matriz cadena markov homogénea y ergódica de primer, con $\mathbb{P} = \{P_{i,j}\}_{i,j=1}^{k}$:

$$p_{i,j} = \mathsf{Pr}[s_t = j|s_{t-1} = i]$$

Modelos de volatilidad

- $E[y^2|s_t = k, F_{t-1}] = h_{k,t}$, que según Haas et al. (2004), queda en función de los retornos pasados y el vector de parámetros dependientes del régimen:

$$h_{k,t} = h(y_{t-1}, h_{k,t-1}, \theta_k)$$

$$h_{k,t} = \omega_k + \alpha_k y_{t-1}^2 + \beta_k h_{k,t-1}$$

Modelos de volatilidad

- La extensión asimétrica incluye el efecto apalancamiento:

$$h_{k,t} = \omega_k + [\alpha_k + \gamma_k \mathrm{I}\{y_{t-1} < 0\}] y_{t-1}^2 + \beta_k h_{k,t-1}$$

Modelos de volatilidad

- Los modelos de **volatilidad estocástica** (Taylor, 1980), consideran la volatilidad como una variable latente no observable, con choques no lineales (!mle).
- EL ARSV(1):

$$y_t = \sigma * \sigma_{tt}$$
$$\log \sigma_t^2 = \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma_h \left(1 - \phi^2\right) \varepsilon_t$$

Modelos de volatilidad en R

```
# Test ARCH
# Histogramas
par(mfrow=c(1,2))
hist(dx,probability =TRUE)
hist(dx^2,probability =TRUE)

# Correlogramas
par(mfrow=c(1,2))
acf(dx^2,20,ylim=c(-0.05,0.2),col='red')
pacf(dx^2,20,col='red')
```

Modelos de volatilidad en R

```r
#Test ARCH
#by hand
mod1<-arima(dx,order =c(1,0,0))
e<-mod1$residuals
arima(e^2,order =c(1,0,0))

# Auto. alternative: heteroscedastic
library(aTSA)
arch.test(mod1,output =TRUE)
```

Modelos de volatilidad en R

```
#GARCH
library(fGarch)
fit =garchFit(~garch(1,1),data =dx)

options(scipen=999)
summary(fit)

# contrastar su validez.
res =residuals(fit, standardize =T)
par(mfrow=c(1,2))
acf(res, 20)
pacf(res, 20)
```

Modelos de volatilidad en R

```r
#GARCH, serie de volatilidad
volatility <- volatility(fit,type ="sigma")
plot(volatility,type='l')
```

Modelos de volatilidad en R

```r
#ARIMA-GARCH
fitARMAGARCH <- garchFit( ~arma(1,1)+garch(1,1),
                data =dx)
summary(fitARMAGARCH )

# GARCH Asimetrico
fitARMAgjrGARCH <-garchFit( ~arma(1,1)+garch(1,1),
                    leverage =TRUE, data =dx)
```

Modelos de volatilidad en R

```
# Alternativa
library(parallel); library(rugarch)
spec =ugarchspec(variance.model =
                list(model ="gjrGARCH"))

fit =ugarchfit(spec =spec, data =dx)
show(fit)

# GARCH no gaussianos
# "dnorm", "dged", "dstd"
spec =ugarchspec(variance.model =
        list(model ="gjrGARCH"),
        distribution.model ="std")
```

Modelos de volatilidad en R

```r
# Markov-GARCH
# MS(2)-GARCH(1,1)- Student
spec <- CreateSpec(
      variance.spec = list(model = c("gjrGARCH")),
      distribution.spec =
      list(distribution = c("std")),
      switch.spec = list(K = 2))

# fit the model on the data with ML estimation
fit <- FitML(spec = spec, data = dlnX)
summary(fit)
```

Análisis multivariado

Análisis multivariado

- Decimos que un vector n-dimesional de variables aleatorias Y_t ($Y_t' = [Y_{1t}, ..., Y_{nt}]$) es ***estacionario en covarianza*** si: $E(Y_t) = \mu$, y Σ es independiente del tiempo ($E(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)'$).
- El concepto de **dependencia débil**, establece una restricción sobre la relación entre las variables.

$$cov\left[Y_t, Y_{t-k}\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{2}$$

Análisis multivariado

- El **VAR(p)** es una transformación del modelo estructural (sin considerar exógenas), dado los problemas de simultaneidad:

$$By_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(M, \Sigma_\varepsilon)$$

- Siendo $Y_t = [y_{1,t}, y_{2,t}, \ldots, y_{k,t}]' \sim I(0)$, y:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{11} \\ -\alpha_{21} & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix}; \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Análisis multivariado

- Premultiplicamos el modelo estructural transformado por B^{-1}, donde se encuentran las restricciones estructurales o las relaciones contemporáneas entre variables, para obtener la representación del *VAR*:

$$Y_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 Y_{t-1} + B^{-1}\varepsilon_t$$

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-p} + u_t$$

- La forma matricial de un $VAR_2(1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -b_{11} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

- Ahora, premultiplicamos por B^{-1},

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -b_{11} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} ; B^{-1} = \frac{1}{1 - b_{11} b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & b_{11} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Análisis multivariado

- Ahora, verifique que $u_t = B^{-1}\varepsilon_t$ son combinaciones lineales de las innovaciones estructurales de interés.

$$y_t = (B^{-1}\Gamma_0) + (B^{-1}\Gamma_1)y_{t-1} + B^{-1}\epsilon_t \tag{3}$$

- El VAR es una **forma reducida** (sistema de ecuaciones en que cada variable endógena se expresa en funcion solo de las variables predeterminadas) derivada de algún modelo estrutural (Londoño, 2005, p.5).

Análisis multivariado

- El orden del VAR(**p**), se obtiene a partir del *análisis residual* o por los *criterios de información*.

$$AIC = \ln|\Omega| + 2\frac{(n^2p+n)}{T}$$

$$BIC = \ln|\Omega| + 2\frac{(n^2p+n)\ln(T)}{T}$$

Análisis multivariado

- Tomando la representación *ma* del *VAR*, siempre que este sea invertible:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i}$$

- A_1^i de orden *kxk*, es la **función impulso respuesta** al horizonte i, o reacción al sistema a un hipotético vector de *shocks* $\delta = \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i$ a las innovaciones $(u_{1t}, u_{2t}, \ldots, u_{it})$.

Análisis multivariado

- El problema de identificación parte de que:

$$y_t = (\mathbf{B}^{-1}\Gamma_0) + (\mathbf{B}^{-1}\Gamma_1)y_{t-1} + \mathbf{B}^{-1}\epsilon_t$$

- Los choques estructurales ($\epsilon_t = Bu_t \sim iid(0, B\Sigma_u B')$). Donde **B** es una matriz cuadrada, triangular inferior con $(k^2 - k)/2$ restricciones.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Análisis multivariado

- El VAR modelo VAR:

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-p} + u_t$$

Donde,

$$E\left[u_t u_t^{'}\right] = \Sigma_t$$

$$u_t = \mathbf{B}^{-1} \epsilon_t$$

Con $E\left[\epsilon_t \epsilon_t^{'}\right] = I$ con $E\left[\epsilon_t \epsilon_{t-k}^{'}\right] = 0 \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots$

Análisis multivariado

- Los choques estructurales son una transformación lineal del viejo vector de errores $u_t = \mathbf{B}^{-1}\epsilon_t$.
- u_t es una función de varios choques.

Análisis multivariado

- Existen distintas estrategias para recuperar (identificar) los *shocks* originales (Ramírez, F., 2017):
  1. Recursiva: descomposición de Cholesky.
  2. VAR estructural
     - Restricciones de corto plazo
     - Restricciones de largo plazo
     - Restricciones de signos;
     - Estudios de eventos.

Análisis multivariado

- La *fir* considera los *shocks* ocurren en una sola variable, supuesto viable únicamente en condiciones de independencia.
- La descomposición de **Cholesky** permite obtener innovaciones ortogonales mediante una identificación recursiva.

Análisis multivariado

- **B** se puede obtener de $\Sigma = BB'$, mediante la (`descomposición de Cholesky`), donde B es una matriz triangular inferior ($(k^2 - k)/2$ restricciones):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Análisis multivariado

- Como $u_t = \mathbf{B}^{-1}\epsilon_t$, recursivamente se puede obtener el efecto de los choques estructurales:

$$\epsilon_t = \mathbf{B}u_t$$

En el caso del $VAR_2(p)$:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_t^{y_{1,t}} \\ \epsilon_t^{y_{2,t}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_t^{y_{1,t}} \\ u_t^{y_{2,t}} \end{vmatrix}$$

- $y_{1,t}$ es independiente a choques contemporáneos en $y_{2,t}$, pero $y_{2,t}$ si se ve afectada por choques en $y_{1,t}$, por lo que, el orden de las variables sigue el nivel de exógeneidad.

Análisis multivariado

- El test de **causalidad de Granger**, asume $Y_t \sim VAR(2)$:

$$y_t = \mu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Por lo que, el mejor pronóstico, basado en el medelo lineal:

$$\hat{y}_{t+1} = \mu + A_1 Y_t + A_2 Y_{t-1}$$

- Iterativamente:

$$\hat{y}_{t+k} = \mu + A_1 \hat{y}_{t+k-1} + A_2 \hat{y}_{t+k-2}$$

Análisis multivariado

- Asumiendo el modelo:

$$y_t = c_1 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_1 x_t + b_2 x_{t-2} + u_{y,t}$$

- El test, contrasta la $H_0 : b_1 = b_2 = 0$ (x_t no causa a yx_t), frente a: $H_a : b_i \neq 0, \forall i \in (1, 2)$.

Análisis multivariado

- Un conjunto de variables se dice son **cointegradas**, si existe una combinación lineal que genere un vector estocástico estacionario (Catalán, nd).

$$y_t - \beta_1 x_{1,t} - \beta_1 x_{2,t} - \ldots - \beta_k x_{k,t} = \mathbf{u}_t \sim I(0) \tag{4}$$

Análisis multivariado

- Formalmente, sean las variables $x_t \sim I(1)$ y $y_t \sim I(1)$, están **cointegradas** si existe una combinación lineal $(y_t - \alpha - \beta x_t)$ de esas series que sea estacionaria de orden I(0) (Novales, 2016).
- Entonces, se dice que las variables x_t e y_t, tal que I(d), están cointegradas si $u_t \sim$ I(d-1).

Análisis multivariado

- El **MCE** propone que la dinámica de **corto plazo** de las variables, está influenciada por las desviaciones del equilibrio ($\hat{u} = 0$) (desequilibrio = $\hat{u} = y_{t-1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{t-1}$).

$$\Delta y_y = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \alpha_3 \hat{\mathbf{u}}_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta y_y = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta x_t + \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \alpha_3 (y_t - \hat{y}_{t-1}) + \epsilon_t$$

Análisis multivariado

- El MCE (Engle y Granger, 1987) intenta juntar el comportamiento de largo plazo con el de corto plazo. Asumiendo una relación estable de largo plazo, pero con desequilibrios en el corto plazo.
- Conciliando el enfoque Box-Jenkings −que omitía las relaciones de largo plazo− con modelos basados en teoría económica que presentaban problemas asociados con regresiones espurias.

- El **VCEM**, parte de la relación:

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t$$

- Podemos restar Y_{t-1} de ambos lados:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t - Y_{t-1} \\ \Delta Y_t &= (\beta_1 - I)\, Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + u_t \end{aligned}$$

- Sabiendo que $Y_{t-2} = \Delta Y_{t-1} + Y_{t-1}$

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= (\beta_1 - I)\, Y_t + \beta_2 (\Delta Y_{t-1} + Y_{t-1}) + u_t \\ \Delta Y_t &= (\beta_2 + \beta_1 - I)\, Y_t + \beta_2 \Delta Y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

Análisis multivariado

- Siendo $(\beta_2 + \beta_1 - I) = \Pi$ y $\beta_2 = \Gamma$, obtenemos la representación tradicional del **VCEM**:

$$\Delta Y_t = \Pi Y_t + \Gamma \Delta Y_{t-1} + u_t$$

- Π es una matriz cuadrada de **largo plazo** conocida como el termino de corrección de error. Mientras, Γ representa la dinámica de **corto plazo**, libres de restricciones.

Análisis multivariado

- En el caso de un sistema autoregresivo bivariado de orden p, con series $I(1)$:

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} \Delta y_{t-j} + \epsilon_{1t}$$

- A partir del teorema de representación de Granger (1983):

$$\Delta y_t = \alpha_1 \left(y_{t-1} - \beta x_{t-1} \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{1j}^{*} \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{1j}^{*} \Delta y_{t-j} + \epsilon_{1t}$$

Análisis multivariado

- El enfoque **Johansen** de cointegración, utiliza r (el rango de Π, igual al número de valores propios (λ) distintos de cero), para determinar las relaciones de cointegración:
  - Cuando $r(\Pi) = 0$ todas las variables tienen raíces unitarias $\ln(1 - \lambda_i) = 0$.
  - Cuando $r(\Pi) = n$ todas las variables son estacionarias.
  - Cuando $(0 < r(\Pi) < n)$, el rango determina el número de relaciones de cointegración.

Análisis multivariado

- Empíricamente, se utiliza el test secuencial del rango de Π para contrastar cointegración, en el conocido **test de la traza**, que utiliza como estadístico de prueba:

$$\lambda_{trace}(m) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \tag{5}$$

- La hipótesis nula es de no cointegración, $H_0 : r(\Pi) \leqslant m$ vs. $H_a : r(\Pi) > m$.

Análisis multivariado

- Esta secuencia del test se repite hasta que h_0 no se rechace:
  - Primera prueba: $H_0 : r(\Pi) = 0$ y $H_a : r(\Pi) = 1$.
  - Segunda prueba: $H_0 : r(\Pi) <= 1$ y $H_a : r(\Pi) = 2$.
  - ...
  - k-ésima prueba: $H_0 : r(\Pi) <= k - 1$ y $H_a : r(\Pi) = k$.

Análisis multivariado

- Los **modelos factoriales** lineales intentan determinar efectos causales a partir de un reducido número de factores:

$$Y_t = \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_j^f + \epsilon_i$$

Análisis multivariado en R

```r
# Orden VAR
library(vars)
VARselect(data,lag.max =6,type ="both")

# Estimaci n
varest <-VAR(data,p =2)
varest

# Podemos seleccionar el retardo directamente
varest <-VAR(data,lag.max=5,ic="AIC")
```

```r
# Validar VAR
acf(residuals(varest)[,1])

#h0 = no serial correlation
serial.test(varest, lags.pt =16,
            type ="PT.asymptotic")

#stability
plot(stability(varest), nc =2)
```

Análisis multivariado en R

```
# Impulse response analysis
varirfs <-irf(varest, n.ahead =48)
plot(varirfs)

# Bootstrap CI
var.irf <-irf(varest,response ="X1",
              n.ahead =48, boot =TRUE,
              ci =0.95, runs =100)
plot(var.irf)
```

Análisis multivariado en R

```r
# Impulse response analysis
var.irf <-irf(varest,
              response = "X1",
              impulse = "X2",
              cumulative = T,
              n.ahead = 48,
              boot = TRUE,
              ci = 0.95,
              runs = 100)

plot(var.irf)
```

Análisis multivariado en R

```
# Descomposici n de la varianza
fevd.svar <-fevd(varest,n.ahead =5)
fevd.svar
```

Análisis multivariado en R

```
# Causalidad
library(lmtest)
grangertest(X1~X2,order =3)

# Pron stico
VARforecast <-predict(varest,n.ahead =4)
VARforecast
```

```r
# VAR estructurales
Amat <-diag(3)
Amat[1:3,1:3] <-NA
diag(Amat)<-1

Bmat <-diag(3)
Bmat[2,1] <-Bmat[3,1] <-Bmat[3,2] <-NA
Bmat[!upper.tri(Bmat,-1)] <-NA

svar.ShortRun <-SVAR(varest,
               estmethod ="scoring",
               Bmat =VCMatrix,
               Amat =Bmat,
               max.iter =200)

summary(svar.ShortRun)
```

Análisis multivariado en R

```
# VAR estructurales (IFR)
irf.ShortRun <-irf(svar.ShortRun,
                   impulse ="X1",
                   response ="X2",
                   boot =FALSE)

plot(irf.ShortRun)

# Descomposici n de la varianza
fevd.svarb <-fevd(svar.ShortRun, n.ahead =5)
fevd.svarb
```

Análisis multivariado en R

```
#Estimaci n de modelos VECM
library(tsDyn)

# Box Trans
lamb.prod.elec <-BoxCox.lambda(prod.elec)
prod.elec.a <-BoxCox(prod.elec,
                              lambda=lamb.prod.elec)
```

Análisis multivariado en R

```
#Enfoque de cointegraci n Engle y Granger
modelCoint <-lm(prod.elec~prod.ind)
resid<-modelCoint$residuals
adf.test(resid,k=5)
```

Análisis multivariado en R

```
#Test de cointegraci n autovalores propios
sjd.vecm <-ca.jo(X, ecdet ="const",
                    type="eigen",
                    K=2,
                    spec="longrun")
sjd.vecm

# T calculado Vs. T Critico
c(sjd.vecm@teststat[1], sjd.vecm@teststat[2])
sjd.vecm@cval
```

Análisis multivariado en R

```
#Seleccion de rezagos
matrixVarSelect<-VARselect(X, lag.max=6)
lags<-matrixVarSelect$selection[1]

#Estimaci n del VECM
vecm <-VECM(X, lag=lags,
             r=1,
             estim="2OLS",
             include=c("const"))
```

```
#Pron stico VECM
predict(vecm,n.ahead=10)
```

Modelos multivariados de volatilidad

Modelos multivariados de volatilidad

- La relación (regresión) entre pares de volatilidades, permite estudiar la asociación y **transferencia de volatilidades** entre series (Novales, 2015).

$$\sigma^2_{(y.t)} = \beta_1 + \beta_2 \sigma^2_{(x.t)} + v_t$$

Modelos multivariados de volatilidad

- La representación multivariante del GARCH(q,p), se obtiene a partir de la representación VEC:

$$VEC\left(\Sigma_t\right) = C + \sum_{i=1}^{q} a_i \cdot VEC\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}^{'}\right) + \sum_{j=1}^{p} b_{ki} \cdot VEC\left(\Sigma_{t-1}\right)$$

- La versión diagonal $A = diag[vec(a)]$ y $B = diag[vec(b)]$.

Modelos multivariados de volatilidad

- El modelo BEKK:

$$\Sigma_t = C_0 C_0' + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{q} \mathbf{A}_{ki}' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' \mathbf{A}_{ki} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{p} \mathbf{B}_{ki}' \Sigma_{tt-1} \mathbf{B}_{ki}$$

- Siendo C_0 una matriz triangular de orden inferior, **A** y B, son matrices de parámetros *nxn*.

Modelos multivariados de volatilidad

- Bollerslev (1990) sugirió Modelo de correlación condicional constante (CCC), donde $\sigma_{ij,t}$ solo depende de $\sigma_{ii,t}$ y $\sigma_{jj,t}$:

$$\sigma_{ii,t} = c_i + \sum_{h=1}^{p} a_{hi}\varepsilon_{t-h,i}^2 + \sum_{h=1}^{q} b_{hi}\sigma_{t-h,i} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$
$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \cdot \sqrt{\sigma_{i,t}\sigma_{j,t}}$$
$$\rho_{ij} = \rho_t = \rho$$

Modelos multivariados de volatilidad

- Tse and Tsui (2002) proponen el modelo Dynamic Conditional Correlation Model (DCC):

$$\rho_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\,\rho + \theta_1 \psi_{t-1} + \theta_2 \rho_{t-1}$$

- θ_1 y θ_2 son escalares, ψ_{t-1} es la matriz de correlaciones muestrales de $e_{it} = \frac{\varepsilon_i t}{\sqrt{\sigma_{ii,t}}}$. Si $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 0$ se obtiene el CCC.

Modelos m. de volatilidad en R

```r
library(rmgarch); library(rugarch); library(parallel)

l <- 2 #numero de variables
gjrtspec <- ugarchspec(
            mean.model=list(armaOrder=c(0,0)),
            variance.model =list(model = "gjrGARCH"),
            distribution="std")

dcc_spec = dccspec(
            uspec = multispec(replicate(l, gjrtspec)),
            distribution = "mvt")

# Fit DCC
garchdccfit = dccfit(dcc_spec, data1,
                     fit.control=list(scale=TRUE))
```

Modelos m. de volatilidad en R

```
# distintos modelos por variable
uspec1 = ugarchspec(
        mean.model = list(armaOrder = c(1,0)),
        variance.model = list(model = "apARCH"),
                        distribution.model = "norm")

uspec2 = ugarchspec(
        mean.model = list(armaOrder = c(2,0)),
        variance.model = list(model = "gjrGARCH"),
                        distribution.model = "norm")

uspec = c(uspec1, uspec2)
spec = dccspec(uspec = multispec(uspec),
                dccOrder = c(1,1),
                distribution = "mvlaplace")

garchdccfit = dccfit(spec, data1,
                     fit.control=list(scale=TRUE))
```

Modelos m. de volatilidad en R

```
# Parametros
print(garchdccfit)
plot(garchdccfit)

# Matriz Var-Cov en t (Array(k,k,T))
dcccov<-rcov(garchdccfit)

# Matrix de Corr
dcccor<-rcor(garchdccfit)
```

Modelos m. de volatilidad en R

```
# Extrae elementos de las matrices
vol1<-c()
T<-1000
for (i in 1:T){
  vol1<-c(vol1, dcccov[1,1,i]) #dcccov[1,1,:]
}

plot(vol1,type="l")
```

Modelos m. de volatilidad en R

```r
# MGARCH-BEKK
library(mgarchBEKK)
estimated <- BEKK(data1)

estimated$est.params
estimated$asy.se.coef

estimated$cor[[1]][[2]]
estimated$sd[[1]]
estimated$uncond.cov.matrix

estimated$aic
estimated$order
```

Modelos m. de volatilidad en R

```
# MGARCH-mGJR.rBEKK
estimated1 <- mGJR(x,y)

estimated1$est.params
estimated1$asy.se.coef

estimated1$cor
estimated1$sd1
estimated1$sd2
estimated1$uncond.cov.matrix

estimated1$resid1
```

Métodos bayesianos

Métodos bayesianos

- Los **modelos lineales dinámicos** introducen dinámica en los estimadores, al considerarlos $f(t)$ en la ecuación de estado:

$$
\begin{aligned}
y_t &= x_t' \beta_{\mathbf{t}} + \varepsilon_t \\
\beta_{\mathbf{t}} &= G \beta_{\mathbf{t-1}} + \omega_t
\end{aligned}
$$

Referencias

Referencias I

1. Adhikari, R. Agrawal, R. *An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting*.
2. Alexios Ghalanos (2015). *rmgarch: Multivariate GARCH models*. R package version 1.2-9.
3. Dickey, D.A. y W.A. Fuller (1979). *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root*. Journal of the American Statistical Association. vol. 74, pp. 427-431.
4. Dwyer, G. (2015). *The Johansen Tests for Cointegration*.
5. Enders, W. *Applied Econometric Time Series*. University of alabama.
6. Gambetti, Lucas (2016). Empirical Time Series Methods for Macroeconomic Analysis. Universitat Autonoma de Barcelona and Barcelona GSE.
7. Johansen, S. (2012). *The analysis of nonstationary time series using regression, correlation and cointegration*. University of Copenhagen and CREATES University of Aarhus, Denmark.
8. Lutkepohl, Helmut and Kratzig, Markus (2004). *Applied time series econometrics*. Cambridge University.
9. Novales, Alfonso (2016). *Series temporales*. Universidad Complutense de Madrid.

Referencias II

10. Novales, Alfonso (2016a). *Series temporales. Estacionariedad, raíces unitarias*. Universidad Complutense de Madrid.
11. Novales, Alfonso (2015). *Midiendo la volatilidad en los mercados financieros*. Universidad Complutense de Madrid.
12. Petris, Giovanni (2010). *An R Package for Dynamic Linear Models*. University of Arkansas. Journal of Statistical Software.
13. Pfaf, Bernhard and Taunus, Kronberg (2008). *VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation Within R Package vars*.
14. Soto, Raimundo (2010). *Econometría de series temporales*. Pontificia Universidad de Chile.
15. Tsay, R. *Analysis of Financial Time Series*. Second edition. University of Chicago. Graduate School of Business
16. Ramírez, Francisco (2017). *Análisis Multivariado de Series de Tiempo*.
17. Shumway, R. and Stoffer, D. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications. With R Examples*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London. Third edition.
18. Schmidbauer, Harald; Roesch, Angi and Sinan, Vehbi (2016). *Simulating, Estimating and Diagnosing MGARCH (BEKK and mGJR) Processes*.

Referencias III

19. Watson, Mark and Stock, Jame (2019). *Time Series Econometrics*. AEA 2019 Continuing Education: Time Series Econometrics.