

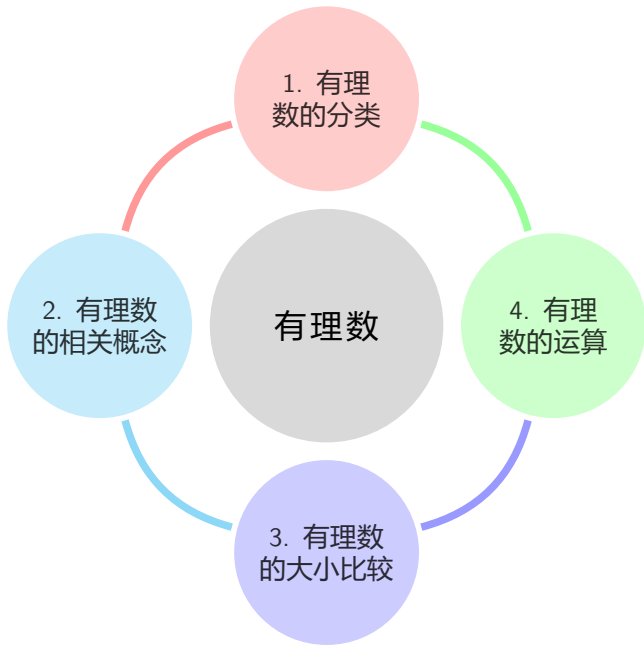
第一章的复习

Review of Chapter 1

Norsesun

最后更新：2020 年 11 月 22 日





要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数 (Rational Number)

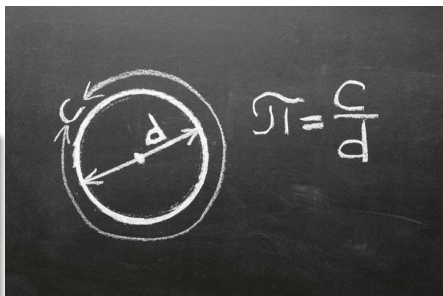
整数与分数统称为**有理数**。

$$\begin{array}{r} 0.333... \\ 3 \overline{) 1.000} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \end{array}$$
$$\boxed{\frac{1}{3} = 0.\overline{3}}$$

可以把有理数看做分数吗？

把整数看成是分母为 1 的分数，那么一个有理数代表着一个形如 $\frac{p}{q}$ (其中 p, q 为整数) 的分数。**有理数都可以表示成两个整数之比。**

π 无法表示成两整数之比。 π 是**无理数**。



有理数 (Rational Number)

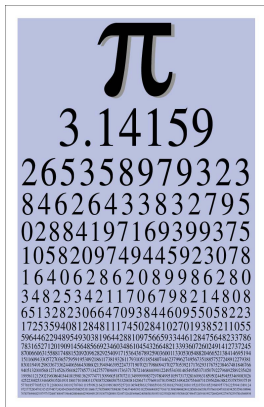
整数与分数统称为有理数。

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

可以把有理数看做无限循环小数吗?

分数都可以化成无限循环小数或有限小数。若把有限小数和整数看成是循环节为 0 的无限循环小数，那么一个有理数可以视作一个无限循环小数。

π 是无限不循环小数。



数的发展

毕达哥拉斯学派相信，一切都可以用整数或整数之比来表示。

大约在公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派的希帕索斯发现了： $\sqrt{2}$ 。希帕索斯正是因为这一数学发现，而被毕达哥拉斯学派的人投进了大海，处以“淹死”的惩罚。



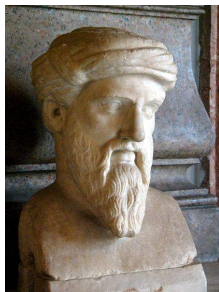
无 理 数

分 数

整 数

万物皆数 (*All is Number*).

(毕达哥拉斯 Pythagoras)



例题 1

知识点：整数, 分数, 有理数

0.9999999999 , $-\frac{1}{3}$, 0 , π 中有几个有理数？有几个整数？
请你从语文的角度理解“整”与“分”的含义。



例题 1

知识点：整数, 分数, 有理数

0.9999999999 , $-\frac{1}{3}$, 0 , π 中有几个有理数？有几个整数？

请你从语文的角度理解“整”与“分”的含义。

0.9999999999 , $-\frac{1}{3}$, 0 是有理数。

其中 0 是整数。



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

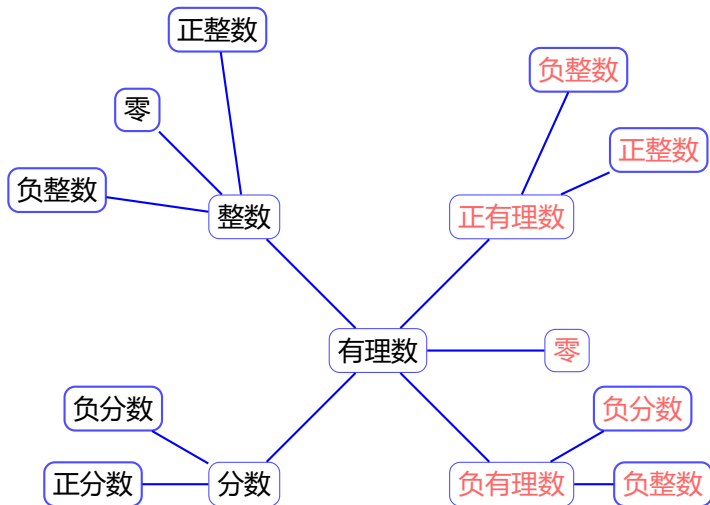
有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数的分类

π 不是有理数; 0 既不是正数也不是负数; -3.1415926 属于什么数?



例题 2

知识点：有理数的分类

把 $-\frac{1}{2}$, $+5$, -6.3 , 0 , $-\frac{12}{13}$, 6.9 , -7 , 210 , 0.031 , -43 , -10% 填入对应的集合。

正数集合: _____

整数集合: _____

非负数集合: _____

负分数集合: _____

正数和零统称**非负数**。



例题 2

知识点：有理数的分类

把 $-\frac{1}{2}$, $+5$, -6.3 , 0 , $-\frac{12}{13}$, 6.9 , -7 , 210 , 0.031 , -43 , -10% 填入对应的集合。

正数集合: $+5, 0.9, 210, 0.031$

整数集合: $+5, 0, -7, 210, -43$

非负数集合: $+5, 0.9, 210, 0.031, 0$

负分数集合: $-\frac{1}{2}, -6.3, -\frac{12}{13}, -10\%$

正数和零统称**非负数**。



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

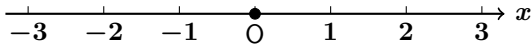
有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数的相关概念

数轴、相反数和绝对值的定义以及它们的数学写/画法



数轴 (Number Axis)
三要素: 原点 (Origin),
正方向, 单位长度。

数轴: 原点代表 0, 一般以向右为正方向,
单位长度要统一。

数轴表示数

任何有理数都可以用数轴上**唯一**的一个点表示。

相反数

只有符号不同的两个数, 互为相反数。

比如 -1 和 1。互为相反数的两个
数在数轴上怎么排布?



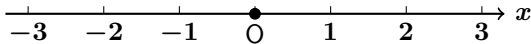
有理数相关概念

相反数
(Opposite Number)
 x 的相反数写作 $-x$ 。
 $-x$ 表示负数
还是正数?

绝对值
(Absolute Value)
 x 的绝对值写作 $|x|$ 。

有理数的相关概念

数轴、相反数和绝对值的定义以及它们的数学写/画法



数轴 (Number Axis)
三要素: 原点 (Origin),
正方向, 单位长度。

有理数相关概念

相反数
(Opposite Number)
 x 的相反数写作 $-x$ 。
 $-x$ 表示负数
还是正数?

绝对值
(Absolute Value)
 x 的绝对值写作 $|x|$ 。

数轴与相反数

互为相反数的两个数在数轴上关于原点对称。0 的相反数是 0。

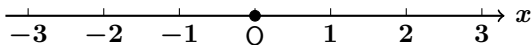
绝对值

一个数的绝对值无关于这个数的符号，是这个数对应的非负的值。



有理数的相关概念

数轴、相反数和绝对值的定义以及它们的数学写/画法



数轴 (Number Axis)
三要素: 原点 (Origin),
正方向, 单位长度。

有理数相关概念

相反数
(Opposite Number)
 x 的相反数写作 $-x$ 。
 $-x$ 表示负数
还是正数?

绝对值
(Absolute Value)
 x 的绝对值写作 $|x|$ 。

绝对值

一个数的绝对值无关于这个数的符号，是这个数对应的**非负的值**。

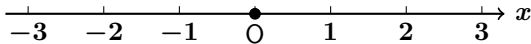
正数的绝对值是它本身；
负数的绝对值是它的相反数；
 0 的绝对值是 0 。

有没有更好地方式去理解绝对值？



有理数的相关概念

数轴、相反数和绝对值的定义以及它们的数学写/画法



数轴 (Number Axis)
三要素: 原点 (Origin),
正方向, 单位长度。

有理数相关概念

相反数
(Opposite Number)
 x 的相反数写作 $-x$ 。
 $-x$ 表示负数
还是正数?

绝对值
(Absolute Value)
 x 的绝对值写作 $|x|$ 。

数轴与相反数

互为相反数的两个数在数轴上关于原点对称。0 的相反数是 0。

数轴与绝对值

一个数的绝对值等于数轴上表示这个数的点到原点的距离。0 的绝对值是 0。

用数学表达式表示一个数的绝对值
(比如 $|a|$) 去掉绝对值符号后的结果?



例题 3

知识点：相反数与绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0 \\ -x, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

$-(-5)$ 等于多少？它的相反数又是多少？它和它的相反数的绝对值分别是多少？有什么规律？



例题 3

知识点：相反数与绝对值

$-(-5)$ 等于多少？它的相反数又是多少？它和它的相反数的绝对值分别是多少？有什么规律？

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0 \\ -x, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

答：

$$-(-5) = 5$$

去括号的规则适用于这里吗？

它的相反数为 $-(-(-5)) = -5$,

它和它的相反数的绝对值如下：

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$

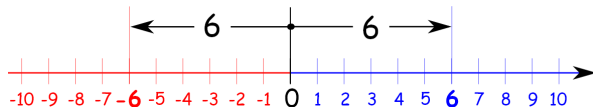
去括号与去绝对值符号有什么不同？

我们发现，互为相反数的两个数，绝对值相等。即 $|-a| = |a|$ 。



例题 4

知识点：绝对值的非负性，绝对值的几何含义拓展



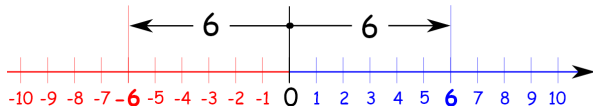
已知 $|x - 1| + |y + 4| = 0$, 求 xy .

$a - b$ 与 $b - a$ 有什么数量关系？二者的绝对值具有什么几何意义？



例题 4

知识点：绝对值的非负性，绝对值的几何含义拓展



已知 $|x - 1| + |y + 4| = 0$, 求 xy 。

解：因为 $|x - 1| \geq 0$ 且 $|y + 4| \geq 0$
故

$$\begin{cases} x - 1 = 0, x = 1 \\ y + 4 = 0, y = -4 \end{cases}$$

所以 $xy = (1) \times (-4) = -4$

$a - b$ 与 $b - a$ 有什么数量关系？二者的绝对值具有什么几何意义？

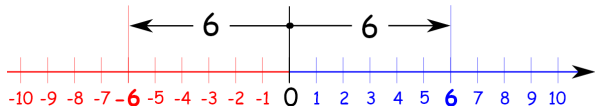
解：因为

$-(a - b) = -a + b = b + (-a) = b - a$
，即 $-(a - b) = b - a$ 。所以 $a - b$ 与 $b - a$ 互为相反数。



例题 4

知识点：绝对值的非负性，绝对值的几何含义拓展



已知 $|x - 1| + |y + 4| = 0$, 求 xy .

解：因为 $|x - 1| \geq 0$ 且 $|y + 4| \geq 0$
故

$$\begin{cases} x - 1 = 0, x = 1 \\ y + 4 = 0, y = -4 \end{cases}$$

所以 $xy = (1) \times (-4) = -4$

$a - b$ 与 $b - a$ 有什么数量关系？二者的绝对值具有什么几何意义？

解：因为

$-(a - b) = -a + b = b + (-a) = b - a$
，即 $-(a - b) = b - a$ 。所以 $a - b$ 与 $b - a$ 互为相反数。

$|a - b| = |b - a|$ ，在数轴上表示 a, b 两点的距离。举例验证。



例题 5

知识点：绝对值

已知 $|a| + |b| = 9$, 且 $|a| = 2$, 求 b 的值。

已知 $|a| = 3$, $|b| = 2$, $|c| = 1$, 且 $a < b < c$, 求 a, b, c 的值。



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数大小的比较

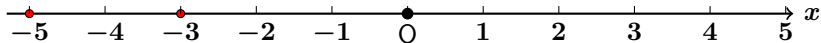
负数大小比较：先求绝对值，再比较大小

知识点	摘要	示例
利用法则比较两数大小	正数大于 0, 0 大于负数, 正数大于负数	如 7 与 -7 , $7 > 0$, $0 > -7$, 故 $7 > -7$ 。
	两个正数比较, 绝对值大的数较大。	如 9.6 与 6.9, 由于 $ 9.6 > 6.9 $, 所以 $9.6 > 6.9$ 。
	两个负数比较, 绝对值大的反而小	如 -5 和 -3 , 由于 $ -5 > -3 $, 所以 $-5 < -3$ 。

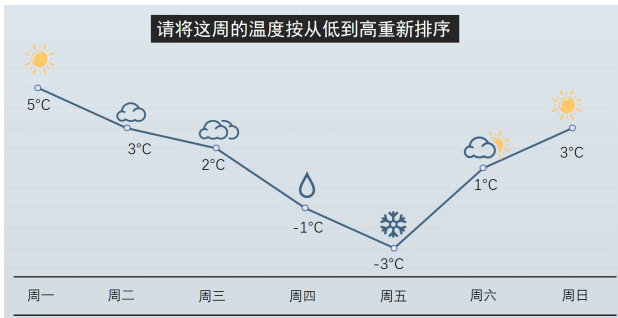


有理数大小的比较

负数大小比较：先求绝对值，再比较大小



在以向右为正方向的数轴上，右边的点表示的数比左边的点表示的数大。



图：生活中的例子：温度



有理数大小的比较

负数大小比较：先求绝对值，再比较大小



在以向右为正方向的数轴上，右边的点表示的数比左边的点表示的数大。

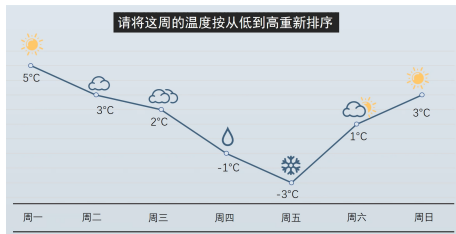


图: 生活中的例子: 温度



例题 6

知识点：相反数，绝对值与大小比较

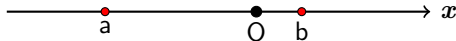
比较下列两组数的大小：

$$-\frac{2}{3} \text{ 与 } -\frac{3}{4}$$

$$|-(+2.1)| \text{ 与 } -(-2.1)$$

看右图：

已知有理数 a 与 b 在数轴上如右图所示，请比较 $a, b, -a, -b$ 的大小。



用小于号连接如下：



例题 6

知识点：相反数，绝对值与大小比较

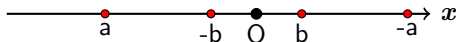
比较下列两组数的大小：

$$-\frac{2}{3} \text{ 与 } -\frac{3}{4}$$

$$|-(+2.1)| \text{ 与 } -(-2.1)$$

看右图：

已知有理数 a 与 b 在数轴上如右图所示，请比较 $a, b, -a, -b$ 的大小。



用小于号连接如下：

$$a < -b < b < -a$$



你 get 到了吗?

WHAAAA!?!



你 get 到了吗?

WHAAAA!?!?



有理数
的定义

可以表示成两个整数之比的数。

有理数
的分类

按符号分为正有理数，零，负有理数，还可以分为整数和分数。

相反数
绝对值

结合数轴加深对概念的理解。

比
较
大
小

两个负数，绝对值大的反而小

我们都没有勤奋到要拼天赋的时候。



回顾!

麻溜的，赶紧行动起来鸭~



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



加法 (Addition)

异号相加，如果两数的绝对值相等，得 0。即互为相反数得两数相加为 0。

定理

同号相加，符号不变，并把绝对值相加。

异号相加，取绝对值较大的数的符号，并用大的绝对值减去较小的绝对值。

一个数同 0 相加，仍得这个数。

比如

1. $5 + 7 = 12, -5 + (-7) = -(5 + 7) = -12$

3. $0 + (-5) = -5$



加法 (Addition)

异号相加，如果两数的绝对值相等，得 0。即互为相反数得两数相加为 0。

定理

同号相加，符号不变，并把绝对值相加。

异号相加，取绝对值较大的数的符号，并用大的绝对值减去较小的绝对值。

一个数同 0 相加，仍得这个数。

比如

1. $5 + 7 = 12, -5 + (-7) = -(5 + 7) = -12$

2. $-5 + 7 = +(7 - 5) = 2, -7 + 5 = -(7 - 5) = -2$

3. $0 + (-5) = -5$



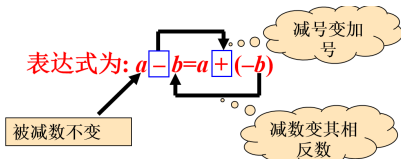
减法 (Subtraction)

把减法看成加法，反过来也能把加法看成减法

定理

减去一个数，等于加上这个数的相反数。

$$a - b = a + (-b)。$$



有理数减法运算的四种情况:

- (1) 任意一个数减去一个正数等于加上一个负数，如 $a - b = a + (-b)$;
- (2) 任意一个数减去一个负数等于加上一个正数，如 $a - (-b) = a + b$;
- (3) 任何一个数减去0仍得这个数，如 $a - 0 = a$;
- (4) 0减去一个数等于这个数的相反数，如 $0 - a = -a$.



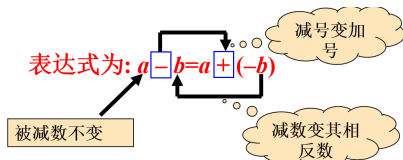
减法 (Subtraction)

把减法看成加法，反过来也能把加法看成减法

定理

减去一个数，等于加上这个数的相反数。

$$a - b = a + (-b)。$$



例题 7

1. $9 - 8 =$
2. $9 + (-8) =$
3. $15 - 7 =$
4. $15 + (-7) =$



加法运算律

加法交换律 (Commutative Law), 加法结合律 (Associative Law)

定理

交换律: $a + b = b + a$

结合律:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

减法有交换律吗? 像
 $a - b = b - a$ 这样?



加法运算律

加法交换律 (Commutative Law), 加法结合律 (Associative Law)

定理

交换律: $a + b = b + a$

结合律:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

减法有交换律吗? 像
 $a - b = b - a$ 这样?

$$a - b = -(b - a)$$



例题 8

知识点：减法

今年 2 月份某市一天的最高气温为 7°C 度，最低气温为 -3°C 度，那么这一天的最高气温比最低气温高多少度？



例题 9

知识点：加减法

计算: $(-2) + (+30) - (-15) - (+27)$



例题 9

知识点：加减法

计算： $(-2) + (+30) - (-15) - (+27)$

解：原式 $=(-2) + (+30) + (+15) + (-27)$

减法转化成加法

$$=[(-2) + (-27)] + [(+30) + (+15)]$$

运用加法交换律、结合律使同号两数分别相加

$$=(-29) + (+45)$$

按有理数加法法则计算

$$=16$$



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



乘法 (Multiplication)

1. 两数相乘，**同号得正，异号得负**，并把**绝对值相乘**。
2. 任何数**同0相乘**，都得**0**。

计算

$$2 \times 3 \times 4 \times (-5)$$

$$2 \times 3 \times (-4) \times (-5)$$

$$2 \times (-3) \times (-4) \times (-5)$$

$$(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$$

$$2 \times 3 \times 4 \times (-5) \times 0$$

几个不等于零的数相乘，积的符号由**负因数的个数**决定。

当负因数有**奇数**个时，积为负；

} 奇负偶正

当负因数有**偶数**个时，积为正。

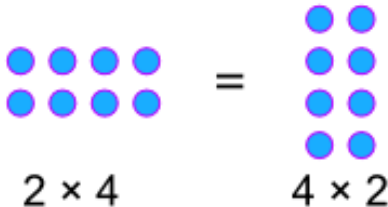
几个数相乘，如果其中有因数为0，**积等于0**。



乘法运算律

交换律 (Commutative Law), 结合律 (Associative Law), 分配律 (Distributive Law)

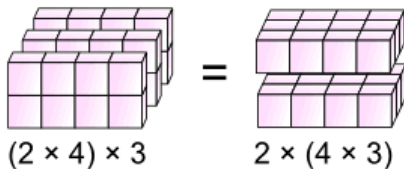
1. $ab = ba$
2. $(ab)c = a(bc)$
3. $a(b + c) = ab + ac$



乘法运算律

交换律 (Commutative Law), 结合律 (Associative Law), 分配律 (Distributive Law)

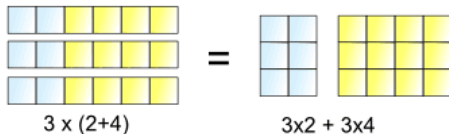
1. $ab = ba$
2. $(ab)c = a(bc)$
3. $a(b + c) = ab + ac$



乘法运算律

交换律 (Commutative Law), 结合律 (Associative Law), 分配律 (Distributive Law)

1. $ab = ba$
2. $(ab)c = a(bc)$
3. $a(b + c) = ab + ac$



3 份 (2+4) 和 3 份 2 加 3 份 4 是一样的



例题 10

知识点：乘法与乘法运算律

1. $(-\frac{3}{4}) \times (8 - \frac{1}{3} - 4)$

2. $-11 \times (-\frac{2}{5}) + (-11) \times 2\frac{3}{5} + (-11) \times (-\frac{1}{5})$



例题 10

知识点：乘法与乘法运算律

$$1. \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(8 - \frac{1}{3} - 4\right)$$

$$2. -11 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + (-11) \times 2\frac{3}{5} + (-11) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

解： (1) 原式 = $\left(-\frac{3}{4}\right) \times 8 + \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-4)$

$$= -6 + \frac{1}{4} + 3 = -\frac{11}{4}$$

(2) 原式 = $(-11) \times \left[\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)\right]$

$$= (-11) \times 2$$
$$= -22$$



例题 11

知识点：乘法与乘法运算律

$$(71\frac{2}{27}) \times (-9)$$



例题 11

知识点：乘法与乘法运算律

$$(71\frac{2}{27}) \times (-9)$$

提示：把 $71\frac{2}{27}$ 拆分成 $71 + \frac{2}{27}$.

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= (71 + \frac{2}{27}) \times (-9) \\ &= 71 \times (-9) + \frac{2}{27} \times (-9) \\ &= -639 + (-\frac{2}{3}) \\ &= -639\frac{2}{3}\end{aligned}$$



例题 12

知识点：多个数的乘法

1. 如果有三个数的积为正数，那么三个数中负数的个数是（ ）

A. 1 B. 0或2 C. 3 D. 1或3

2. 有理数 a, b, c 满足 $a+b+c>0$ ，且 $abc<0$ ，则在 a, b, c 中，正数的个数（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



例题 12

知识点：多个数的乘法

1. 如果有三个数的积为正数，那么三个数中负数的个数是（**B**）

A. 1 B. 0或2 C. 3 D. 1或3

2. 有理数 a, b, c 满足 $a+b+c>0$ ，且 $abc<0$ ，则在 a, b, c 中，正数的个数（**C**）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



倒数 (Reciprocal)

乘积是 1 的两个数互为**倒数**。

求一个数的倒数的方法：

1. 求一个不为0的正数的倒数，就是将该整数作分母，1作分子；
2. 求一个真分数的倒数，就是将这个真分数的分母和分子交换位置；
3. 求一个带分数的倒数，先将该数化成假分数，再将其分子和分母的位置进行互换；
4. 求一个小数的倒数，先将该小数化为分数，再求其倒数。

0 没有倒数。因为 0 乘以任何数都是 0，而不可能是 1。



除法 (Division)

有理数除法法则（一）

除以一个不等于0的数，等于乘这个数的倒数。

用字母表示为 $a \div b = a \times \frac{1}{b} (b \neq 0)$

有理数除法法则（二）

两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除。

0除以任何一个不等于0的数，都得0。



例题 13

知识点：除法

计算 (1) $(-36) \div 9$;

(2) $(-\frac{12}{25}) \div (-\frac{3}{5})$.



例题 13

知识点：除法

计算 (1) $(-36) \div 9$;

(2) $(-\frac{12}{25}) \div (-\frac{3}{5})$.

解： (1) $(-36) \div 9 = -(36 \times \frac{1}{9}) = -4$;

(2) $(-\frac{12}{25}) \div (-\frac{3}{5}) = (-\frac{12}{25}) \times (-\frac{5}{3}) = \frac{4}{5}$



例题 14

知识点：除法乘法混合运算

计算

$$(-3) \times \frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3$$



例题 14

知识点：除法乘法混合运算

计算

$$(-3) \times \frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3$$

9



例题 15

知识点：除法

计算 $(-\frac{1}{30}) \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})$



例题 15

知识点：除法

计算 $(-\frac{1}{30}) \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})$

解：方法一，

$$\text{原式} = (-\frac{1}{30}) \div [\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - (\frac{1}{10} + \frac{2}{5})]$$

$$= (-\frac{1}{30}) \div [\frac{5}{6} - \frac{1}{2}]$$

$$= (-\frac{1}{30}) \times 3 = -\frac{1}{10} .$$

按常规方法计算



例题 15

知识点：除法

计算 $(-\frac{1}{30}) \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})$

方法二， $(-\frac{1}{30}) \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})$

原式的倒数为 $\frac{(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})}{(-\frac{1}{30})} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}) \times (-30)$

$$= -20 + 3 - 5 + 12 = \underline{-10}$$

故 $\underline{(-\frac{1}{30}) \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{30}}$

简便计算，
先取倒数



你 get 到了吗?

WHAAAA!?!?



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数的乘方

- Eggs



有理数的乘方

- Eggs
- Plants



有理数的乘方

- Eggs
- Plants
- Animals



要点目录

1. 有理数

有理数的定义

有理数的分类

有理数的相关概念

有理数大小的比较

2. 有理数的运算

有理数的加减

有理数的乘除

有理数的乘方

有理数的混合运算



有理数的混合运算

