

牧羊教育

高中数学
*High School
Mathematics*

邱明豫 编

Σ

\int

e

π

i

目录

第一章 . 排列组合	1
1.1. 排列组合の战略	1
1.2. 排列组合の基本知识点	1
1.2.1. 理解两个基本公式	1
1.2.2. 组合相关公式	2
1.3. 排列组合の题型	3



■ 1.1 排列组合の战略

初学者在不一一列举的情况下，很难直观地想清楚哪些算重了，哪些算漏了。可以称之为，玄学问题。

学习的关键在于：你得非常明确一些基本模型，这些基本模型往往只用很小的数字就能说明，想清楚后再做一些数字大的问题。

■ 1.2 排列组合の基本知识点

排列数公式 (把 n 样东西放在 m 个位置位置): $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

虽然书上每次讲到这个公式时一般以阶乘的形式给出，但实际计算中，往往不用阶乘。记法：从大的数开始乘，乘“小的数字那么多”个。

组合数公式 (从 n 样东西中拿 m 个): $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\dots 1}$

组合数公式就是在排列数公式上除以一个 $m!$ 。但实际计算中往往不用阶乘。记法：从大的数开始往小乘，乘“小的数字那么多”个，再除以“小的数字开始往小乘，乘小的数字那么多”个。

● 1.2.1 理解两个基本公式

排列数公式我们可以通过分步乘法计数原理去理解。

理解组合数公式。我们考虑从 n 个人取 m 个人出来，不排队，不在乎顺序，即 C_n^m 。如果在乎顺序，就是 A_n^m ，如果不在乎顺序，就要除掉重复，那么重复了多少？同样选出来的 m 个人，他们还要“全排”得 A_m^m ，所以 $C_n^m \cdot m! = A_n^m$ 。从中得到组合数公式。

排列总是和组合连在一起，组合就是排列的一种特殊情况，组合就是排列不考虑顺序的一种计数方法。既然这样，我们计算组合数可以先计算排列数，然后除以重复度，就得到组合数。组合数



公式分母中的 $m!$ 就是重复度，就是前面置换的排列数。比如 AB 和 BA 这两种在组合里算一种，在排列里算 $2!$ 种。

● 1.2.2 组合相关公式

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (对称性)

做值日问题：四个同学中，选三名同学做值日就相当于选一名同学放学直接回家。该公式对于运算 C_{10}^8 这样得组合时非常有用，直接转化成 C_{10}^2 。

2. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$ (组合数的递推式 (杨辉三角的公式表达))

记法：上面的数字取大的，底下的数字加一。

3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

抓兔子问题



■ 1.3 排列组合の题型