

量子霍尔效应

杨锡震¹⁾ 田 强²⁾

(1) 北京师范大学测试中心 北京 100875; 2) 北京师范大学物理系 北京 100875)

摘 要:从经典的霍尔效应开始,比较系统地、深入浅出地介绍了量子霍尔效应及其所涉及的一些新概念和实际应用^[3]

关键词:霍尔效应;量子霍尔效应;分数量子霍尔效应

Quantum Hall effect

YANG Xi-zhen¹⁾ TIAN Qiang²⁾

(1) Analysis and Testing Center, Beijing Normal University, Beijing, 100875;

2) Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875)

Abstract:Starting from the classical Hall effect, the quantum Hall effect and some involved new concepts and practical applications are introduced rather systematically and explained in simple terms.

Key words:Hall effect; quantum Hall effect; fractional quantum Hall effect.

1 引 言

量子霍尔效应的发现是 20 世纪凝聚态物理学的一项辉煌成就^[3]量子霍尔效应的理论,涉及到现代物理学的许多基本概念,例如基态、激发态、元激发及其分数统计、对称性破缺等^[3]德国物理学家冯·克利青(von Klitzing)因发现整数量子霍尔效应而荣获 1985 年度诺贝尔物理学奖;美籍华裔物理学家崔琦(Daniel Tsui)等人因发现分数量子霍尔效应和对其进行的研究而荣获 1998 年度诺贝尔物理学奖^[3]分数量子霍尔效应的三位诺贝尔奖获得者(美籍华裔物理学家崔琦、美籍德裔物理学家 H·L·Stormer 和 R·Laughlin)的获奖演讲^[1~3], Stormer 等在世纪末写的评论性文章^[4],还有国内的一些文章和专著^[5,6],都对量子霍尔效应做了精彩的描述^[3]本文从经典的霍尔效应开始,

比较系统地介绍整数量子霍尔效应、分数量子霍尔效应及相关的新概念和实际应用^[3]

2 霍尔效应和量子霍尔效应实验现象

2.1 霍尔效应

在介绍量子霍尔效应之前,首先回顾一下霍尔效应,以加深对有关基本概念的理解^[3]

霍尔效应(Hall effect)是在 1879 年由美国人 E·H·Hall 发现的^[3]如图 1 所示,在一块导体或半导体上沿 x 方向通以直流电流(电流密度为 j_x),沿垂直于电流的 z 方向施加磁场 B_z ,则在垂直于电流和磁场的 y 方向上将产生一横向电场 E_y ,这就是霍尔效应^[3]产生的横向电场称为霍尔电场,对应的横向电压为霍尔电压^[3]

霍尔电场 E_y 与 j_x 和 B_z 成正比,有

$$E_y = R_H j_x B_z \quad (1)$$

比例系数 R_H 称为霍尔系数,在一种载流子的

简单情况下, R_H 与载流子浓度成反比^[13]霍尔效应首先是在金属中发现的, 正是由于霍尔系数与载流子浓度成反比, 在半导体中霍尔效应更显著, 故在半导体中有了重要应用^[13]

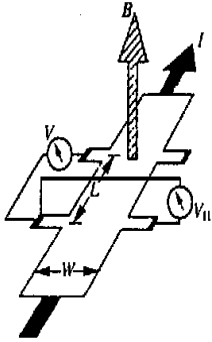


图1 霍尔效应示意图

在磁场 B_z 作用下, x 方向的电场同时导致了 x, y 两个方向的电流, 故电导率 σ 和电阻率 ρ 都成为二阶张量, 可证^[5]

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma}, \rho_{xy} = \rho_{yx} = \frac{\omega \tau}{\sigma} \quad (2)$$

其中 $\omega = eB_z/m$ 是磁场引起的电子回旋频率, $\sigma = ne^2 \tau / m$ 是磁场为零时的经典电导率^[13]可导出电导率和电阻率之间的关系

$$\alpha_x = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \alpha_y = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \quad (3)$$

R_y, α_y 分别称为霍尔电阻率、霍尔电导率, 并分别记为 R_H, α_H ^[13]

由式 (3) 注意到, 如果 $\rho_y \neq 0$, 则在电阻率 R_x 消失时, 电导率 α_x 也消失^[13] ρ_{xx} 与 B_z 无关, 为一常值; 而 R_y 和 E_y 随 B_z 线性增大^[13] 综上所述, 霍尔效应中霍尔电场 E_y, ρ_{xx} 和 ρ_y 与磁感应强度 B_z 的关系如图 2 所示^[13]

2.2 整数量子霍尔效应

1980 年, 德国物理学家冯·克利青等在极低温 1.5K 和强磁场 18T 作用下, 在二维体系的霍尔效应实验中, 发现了一个与经典霍尔效应完全不同的现象: 霍尔电阻 R_H 随磁场的变化出现了一系列量子化电阻平台, 对应的纵向电阻 R_{xx} 变为 0, 如图 3 所示^[13] 图 3 中的栅极电压 V_G 正比于电子浓度, 每个朗道能级的兼并

度正比于磁场 [详见 (11) 式]^[13] 这样, 实验中栅极电压的变化等效于磁场的变化^[13] 平台出现于

$$R_H = \frac{h}{ie^2} \quad (i = 1, 2, \dots \text{整数}) \quad (4)$$

与样品的材料性质无关^[13] 这种现象称为整数量子霍尔效应 (integer quantum Hall effect, 记为 IQHE)^[13] 由式 (3) 注意到, 如果 $\rho_y \neq 0$, 则在电阻率 ρ_x 消失时, 电导率 α_x 也消失, 且 $\alpha_y = -1/\rho_y$ ^[13]

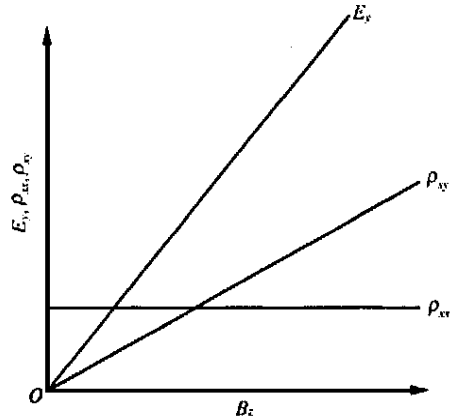


图2 霍尔效应中 E_y, ρ_{xx}, ρ_y 与 B_z 的关系

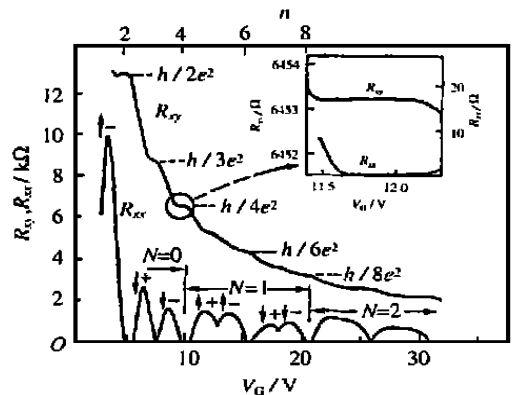


图3 整数量子霍尔效应

调节磁场使纵向电阻率 ρ_x 消失, 而霍尔电阻率 ρ_y 出现平台, 此时有

$$\rho_{xy} = \frac{h}{ie^2} \quad (13)$$

由上式表达的量子化电阻率目前测量精度已可达到 10^{-8} 以上数量级, 这就带来了两个用途: 一是提供了一个绝对电阻标准 $\frac{h}{2e^2} =$

25812.806Ω,自 1990 年起已被确认为国际电阻标准;二是可独立地确定精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{2hc\epsilon} \approx \frac{1}{137.0360}$,用来独立地验证量子电动力学理论的正确性,其中光速 c 和真空电容率 ϵ 早已由其它方法精确测定^[13]

2.3 分数量子霍尔效应

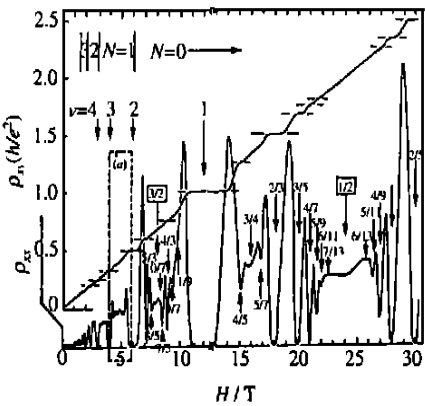
在冯·克利青发现整数量子霍尔效应不久,崔琦、Stormer 和 A·C·Gossard^[7]于 1982 年在比整数量子霍尔效应更低的温度 0.1K 和更强的磁场 20T 条件下,对具有高迁移率的更纯净的二维电子气系统样品的测量中,观测到霍尔电阻的平台具有更精细的台阶结构,在 $\nu = \frac{1}{3}$ 以及 $\nu = \frac{2}{3}$ 时,出现霍尔电阻平台

$$\rho_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$$

(5)

同时 ρ_{xx} 有极小值;接着, ν 的各种分数值 $\nu = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{7} \dots$

相继被发现,如图 4 所示^[13]这就是分数量子霍尔效应 (fractional quantum Hall effect, 记为 FQHE)^[13]分数量子霍尔效应与样品的基质材料性质和能带结构无关,对于二维电子气系统,分数量子霍尔效应也是一种普适现象^[13]



平面内,电子还保留着自由运动的特性⁽¹³⁾这样的电子体系称二维电子气(记作 2DEG)⁽¹³⁾

3.2 Landau 能级

当有沿 z 方向的外加磁场 B 时,按经典理论,自由电子受洛伦兹力作用将在 xy 平面内作频率为 $\omega = eB/m$ 的回旋运动⁽¹³⁾磁场中的 Landau 能级为

$$E_n = \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (7)$$

这样,当 2DEG 处于垂直于界面的磁场 B 中时,电子能量为

$$E_{jn} = E_j + \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar \omega \quad (8)$$

可以证明每个这样的能级上可以填入的电子数为 $2eB/(hc)$ ⁽¹³⁾

3.3 自旋分裂(自旋极化)

以上讨论中未计入电子自旋的影响⁽¹³⁾电子自旋可以有两种不同的取向 \uparrow 和 \downarrow ,由于泡利原理的限制,一个能级上可以填入自旋 \uparrow 和 \downarrow 的电子各一个⁽¹³⁾在磁场中,对于 \uparrow 和 \downarrow 的电子自旋-磁场相互作用能分别为

$$\Delta E = \pm g \frac{\mu_B B}{2} \quad (9)$$

g 为 Lande 因子, μ_B 为玻尔磁子⁽¹³⁾这就使原来的一个能级劈裂为两个能级,分别填入自旋相反的电子⁽¹³⁾这就是自旋分裂或称自旋极化⁽¹³⁾计入这个因素,⁽⁸⁾式变为

$$E_{jn}^{\pm} = E_j + \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar \omega \pm g \frac{\mu_B B}{2} \quad (10)$$

此时的能谱如图 6(a) 所示⁽¹³⁾每个能级上能填充的电子数减小一半,为

$$n_B = \frac{eB}{hc} \quad (11)$$

3.4 缺陷的影响

以上的讨论是对完整晶体而言,实际晶体中总存在一些缺陷,从而引起电子能谱的改变⁽¹³⁾结果是每个 Landau 能级都有一定展宽,形成一个个小的 Landau 能带,在能级两侧出现“带尾”,如图 6(b) 所示⁽¹³⁾10) 式所示的计入了自旋极化的 Landau 能级上的电子在 z 方向受势垒限制,不再自由;但在 xy 平面内仍然是自由的⁽¹³⁾

正如完整晶体中的准自由电子一样,这些态中电子的波函数不局域于该平面内的某个小区域,是“离域态”⁽¹³⁾由缺陷引起的那些带尾态则是局域于缺陷附近的,是“局域态”⁽¹³⁾处于局域态中的电子,波函数局域于以缺陷为中心的一个小区域内,不能参与 xy 平面内的导电,或者说这些能级中电子的迁移率为 0⁽¹³⁾从能谱来看,在相邻两个 Landau 能带之间形成了一个“迁移率能隙”⁽¹³⁾

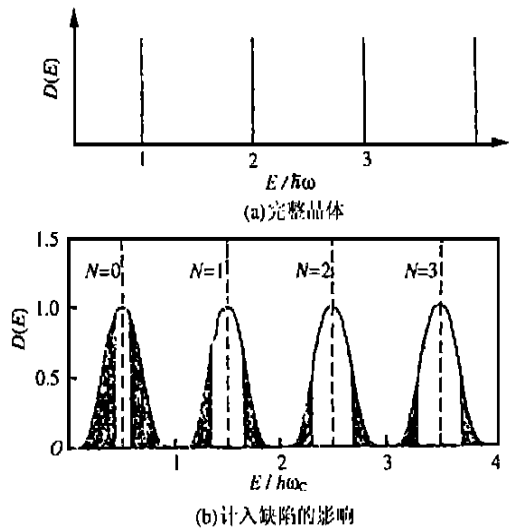


图 6 磁场中 2DEG 的电子能谱

3.5 对整数量子霍尔效应的初步解释

根据后边讲到的⁽¹⁵⁾式,改变磁场强弱可以改变每个 Landau 能级中允许填充的电子数,这就导致了体系费米能级 E_F 位置的改变⁽¹³⁾ E_F 以下的能级分布有电子, E_F 以上为空态⁽¹³⁾当一个 Landau 能带被充满时,传导电子可提供一定的导电能力,可证相应的霍尔电阻 $R_H = h/e^2$ ⁽¹³⁾若将 B 逐渐减小, Landau 能带上所能容纳的电子数减少,多余的电子应进入上一个 Landau 能带⁽¹³⁾由于相邻 Landau 能带间存在迁移率能隙,多余的电子先进入到这里⁽¹³⁾这里的电子不能参与导电,因而不会导致 R_H 的改变,这在 R_H - B 曲线上就表现为一个平台⁽¹³⁾ B 继续减小,直到进入下一个 Landau 能带,电子又开始布居在离域态中,于是平台结束, R_H 继续变化⁽¹³⁾以上分析表明:二维体系中存在缺陷是能观

测到量子霍尔效应的先决条件^[13]

上述分析仅仅是对 IQHE 的一个初步解释^[13]仔细推敲不难发现其中的漏洞:既然原来的 Landau 能带中的一部分状态由于缺陷的影响而转变为局域态,对电导不再有贡献,剩下的局域态的数目肯定应该减小,为何 R_H 值还能保持十分精确的数值 h/e^2 呢? 这是探索量子霍尔效应机理的一个关键^[13]为解决这个问题, Laughlin 由一个假想实验入手,得出了一种比较合理的解释^[13]

3.6 Laughlin 假想实验

该假想实验把实际实验中 2DEG 所在的平面用一个首尾相接的圆环带代替,如图 7 所示^[13]带上处处有垂直于带表面的磁场 B_z 穿过,带上沿圆环方向流过电流 I_x ,带的两侧产生 Hall 电压 V_H ^[13]与前述实验描述中的坐标系一致,这里的坐标系是:环带上每一点处垂直于环带方向为 z 方向,环带曲面对应于 xy 平面,曲面上沿带的延伸方向为 x 方向,与之垂直的方向为 y 方向^[13]在这样的配置中, I_x 引起的磁通 Φ 从环带中心穿过^[13]环上的电流 I_x 使环产生磁矩 $\mu=B/(cS)$, S 为环面积, c 为光速^[13]

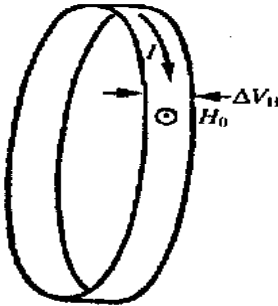


图 7 说明 IQHE 的环形带模型

若 Φ 有一微小变化 $\delta\Phi$, 相应的磁场变化为 $\delta\Phi/S$, 磁矩 μ 在磁场中的能量变化

$$\delta E = \mu \frac{\delta\Phi}{S} = \frac{I_x}{c} \delta\Phi \tag{12}$$

则有

$$I_x = c \frac{\delta E}{\delta\Phi} \tag{13}$$

可以证明^[8]:对于在均匀磁场中运动的 2DEG 与第 n 个 Landau 能级相对应的本征波函数为一个谐振子波函数,其平衡位置

$$y_0 = - \frac{c p_x}{eB} \tag{14}$$

单位面积内的平衡位置数

$$n_B = \frac{eB}{hc} = \frac{B}{\Phi_0} \tag{15}$$

$\Phi_0=hc/e$ 为磁通量子^[13]这就是 (11) 式给出的 Landau 能级简并度^[13]由磁场中 2DEG 体系的规范不变性可以证明^[6]:磁通每变化一个磁通量子 Φ_0 , 多电子体系的能量和状态应该没有变化,其中的单电子波函数对应的 p_x 值将变为相邻的另一个 p_x 值,相应的 y_0 也要向符合 (14) 式要求的另一个平衡位置转移^[13]从 2DEG 体系的总体来看,这等价于一个在 y 方向电位能最低的电子移动到电位能最高的平衡位置^[13]变化前后的电位差为 Hall 电位差 V_H , 电位能变化了 eV_H ^[13]若体系中共有 i 个 Landau 能级被电子填满,则总的能量变化 $\Delta E=ieV_H$ ^[13]这样,由 (13) 式可得

$$I_x = c \frac{\Delta E}{\Phi_0} = c \frac{ie}{\Phi_0} V_H = \frac{ie^2}{h} V_H \tag{16}$$

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = \frac{h}{ie^2} \tag{17}$$

这正是 IQHE 实验中所观测到的霍尔电阻台阶^[13]

Laughlin 由上述假想实验论证了 IQHE 是对于像 2DEG 中扩展态这样的体系规范不变性的必然结果,与缺陷态是否出现和多少没有关系^[13]

(待续)