

金属自由电子论

内 容 提 要

自由电子气体的描述

自由电子气体的能量和比热

自由电子气体的电导和热导

电子热发射和接触电势差

霍尔效应以及自由电子气模型的局限性

波恩-奥本海默近似（绝热近似）

—— 由于电子质量比原子核质量小的多，电子运动速度比原子核快得多，电子绕核运动时，核可以看做不动，电子处于固定的核势能场中运动，即波恩-奥本海默近似（Born-Oppenheimer Approximation）

$$H\Psi(r, R) = E\Psi(r, R)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_N + \hat{H}_{e,N}$$

$$\hat{H}_e = - \sum_i \frac{\hbar}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e^2}{|r_i^2 - r_j^2|}$$

$$\hat{H}_N = - \sum_l \frac{\hbar}{2M} \nabla_l^2 + \sum_{l,m} V_N(\vec{R}_l - \vec{R}_m)$$

$$\hat{H}_{e,N} = \sum_{i,l} V(\vec{r}_i - \vec{R}_l)$$

自由电子气模型（两个近似）

1. **自由电子近似：忽略电子和离子实之间的相互作用 忽略电子和离子之间的相互作用，相对于离子而言，电子是自由的，其运动范围仅因存在表面势垒而限制在样品内部。这相当于将离子系统看成是保持体系电中性的均匀电荷背景，类似于凝胶，也成为凝胶模型（Jellium model），由于正电荷均匀分布 由于正电荷均匀分布，施加在电子上的电场为零 施加在电子上的电场为零，对电子并无作用。**
2. **独立电子近似：忽略电子和电子之间的相互作用。**

自由电子气体的描述

自由电子的哈密顿量为 $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$ $\hat{p} = -i\hbar\nabla$

将V视为一恒定的平均势场，并且规定金属内部势场为0，金属边界外部势能无穷大

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x, y, z \leq L \\ \infty, & x, y, z < 0 \text{ 或 } x, y, z > L \end{cases}$$

单电子的薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi = E\Psi$$

平面波形式的解 $\Psi(\vec{r}) = \Psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \rightarrow \quad p = \hbar \vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

无任何限制的自由电子性质：动量具有确定值，速度与波的群速度一致，而坐标不受任何限制，电子在空间各处出现的几率相等。在金属的自由电子论中，电子的势能为0，但他不完全自由，他的边界受金属边界限制。

周期性边界条件限制下的自由电子

$$\Psi(\vec{r} + L_x) = \Psi(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r} + L_y) = \Psi(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r} + L_z) = \Psi(\vec{r})$$

$$e^{ik_x L_x} = 1 \quad \longrightarrow \quad k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, n_x \text{ 为整数}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, n_y \text{ 为整数}$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z, n_z \text{ 为整数}$$

在波矢空间，每个（波矢）状态点占有的体积为

$$\Delta \vec{k} = k_x k_y k_z = \frac{(2\pi)^3}{V_c}$$

在波矢空间，单位体积量子态的数目 $\frac{V_c}{(2\pi)^3}$

能量 $E = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$

电子的态密度：单位能量间隔内电子状态数目

$$\rho(E) = \frac{dZ}{dE}$$

电子能量在E与E+dE之间时，在k空间中，半径k与k+dk的两球面之间所含的状态数为

$$dZ' = \frac{V_c}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V_c}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE$$

考虑自旋的二重简并 $dZ = 2dZ'$

所以
$$\rho(E) = \frac{dZ}{dE} = \frac{V_c}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} = C E^{\frac{1}{2}}$$

自由电子的能量和比热

自由电子气体的基态和基态能量

Pauli不相容原理+能量最低原理

基态自由电子气体在量子态（波矢空间）上的填充从能量最低的 $k=0$ 的状态开始填充，直到所有电子填充完毕。在 k 空间中形成一个球体-费米球（Fermi Sphere）

费米面：波矢空间中，被电子占据的状态和未被电子占据状态的分界面（ $E=E_F$ ）

$$2 \cdot \frac{4}{3} \pi k_F^3 \cdot \frac{V_c}{(2\pi)^3} = N \quad k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$E_F^0 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

例如金属铜Cu，面心立方晶体，晶格常数 $a=3.61\times 10^{-10}\text{m}$
每个Cu原子电离释放一个自由电子，所以Cu的电子浓度为

$$n = \frac{4}{(3.61 \times 10^{-10})^3} = 8.5 \times 10^{28} \text{m}^{-3}$$

$$E_F^0 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} = 1.12 \times 10^{-18} \text{J} = 7.0 \text{eV}$$

$$T_F^0 = \frac{E_F^0}{k_B} = 8.1 \times 10^4 \text{K}$$

对一般金属， $E_F=2\sim 10\text{eV}$ ， $T_F=10^4\sim 10^5\text{K}$

基态时自由电子气体的总能量为

$$E = \int_0^{E_F^0} E \rho(E) dE = \int_0^{E_F^0} C E^{\frac{3}{2}} dE = \frac{3}{5} N E_F^0$$

平均每个电子的能量为 $\frac{3}{5} E_F^0$

在绝对零度下，电子的平均动能与费米能有相同的数量级，这是因为电子服从泡利不相容原理，绝对零度时，不可能发生所有电子都集中在最低能级上的情况

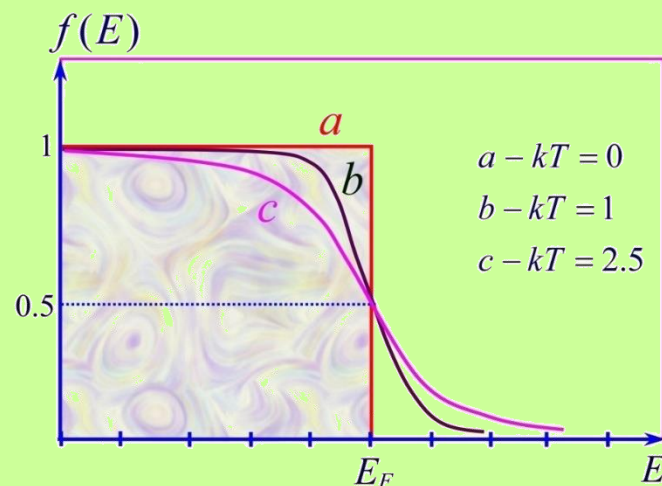
自由电子气体的热力学性质

当T不为0时，自由电子气体满足费米-狄拉克分布

$$f(k) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

其中 E_F 是化学势，由总粒子数决定

$$\text{当 } T=0 \text{ 时, } f(k) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$



当T不为0时，由于 $E_F \sim 2-10\text{eV}$ ，所以一般温度下，分布函数和 $T=0$ 时的差别只在 E_F 附近几个 $k_B T$ 范围内

化学式和温度的关系

分布在各个能级上的电子总数

$$N = \int_0^{\infty} C E^{\frac{1}{2}} f(E) dE = \underbrace{\left[\frac{2}{3} C E^{\frac{3}{2}} f(E) \right]_0^{\infty}}_{=0} - \frac{2}{3} C \int_0^{\infty} E^{\frac{3}{2}} f'(E) dE$$

$$g(E) = g(E_F) + g'(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} g''(E_F)(E - E_F)^2 + \dots$$

$$N = - \int_{-\infty}^{\infty} g(E) \frac{\partial f}{\partial E} dE =$$

$$= g(E_F) I_0 + g'(E_F) I_1 + g''(E_F) I_2$$

$$I_0 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial E} dE = 1 \qquad I_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} (E - E_F) \frac{\partial f}{\partial E} dE = 0$$

令 $\eta = \frac{E - E_F}{k_B T}$

则 $\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{k_B T} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{k_B T} \frac{-e^\eta}{(e^\eta + 1)^2} = \frac{1}{k_B T} \frac{-e^{-\eta}}{(e^{-\eta} + 1)^2}$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{\partial f}{\partial E} dE = \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2$$

证明

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{(k_B T)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta = -\frac{(k_B T)^2}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{-\eta^2 e^{-\eta}}{(e^{-\eta} + 1)^2} d\eta \\ &= (k_B T)^2 \int_0^{\infty} \eta^2 \left(\frac{1}{e^{-\eta} + 1} \right)' d\eta \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{(k_B T)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta = -\frac{(k_B T)^2}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{-\eta^2 e^{-\eta}}{(e^{-\eta} + 1)^2} d\eta \\ &= (k_B T)^2 \int_0^{\infty} \eta^2 \left(\frac{1}{e^{-\eta} + 1} \right)' d\eta \\ &= (k_B T)^2 \int_0^{\infty} \eta^2 (1 - e^{-\eta} - 2e^{-2\eta} + 3e^{-3\eta} - 4e^{-4\eta} + \dots)' d\eta \\ &= (k_B T)^2 \Gamma(3) \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \end{aligned}$$

$$g(E_F) = \frac{2}{3} C E_F^{\frac{3}{2}} \qquad g''(E_F) = \frac{1}{2} C E_F^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{总粒子数 } N &= \frac{2}{3} C E_F^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 C E_F^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} C E_F^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$E_F \approx E_F^0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F^0} \right)^2 \right)$$

所以化学势随温度升高而略有减小

自由电子气体的比热

总能量

$$E_{tot} = \int_0^{\infty} E \rho(E) f(E) dE = \int_0^{\infty} C E^{\frac{3}{2}} f(E) dE$$
$$\approx \frac{3N}{5} E_F^0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F^0} \right)^2 \right]$$

第一项是绝对零度时的基态能量，第二项是与温度有关的热激发能。由此可以求出电子气对金属比热容的贡献。

电子气体的比热

$$c_v = \left(\frac{\partial E_{tot}}{\partial T} \right)_v = \frac{\pi^2}{2} N k_B \left(\frac{k_B T}{E_F^0} \right) = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 \rho(E_F) T = \gamma T$$

其中 $\gamma = \frac{N \pi^2 k_B^2}{2 E_F^0}$ 称为电子的比热系数

$\gamma \sim \rho(E_F)$ 即正比于费米面上的态密度

这一结论对非自由电子气体也适用，通过测量 c_v 得到 $\rho(E_F)$ 是研究费米面性质的一个重要手段

由于 $k_B T \ll E_F$ ，所以一般温度时电子的比热很小，从物理角度看，只有费米面附近的电子对比热有贡献。

绝对零度时，费米面以内状态都被电子占据，球外没有电子

T不为0时，费米球面的半径 k_F 比绝对零度时费米面半径小。此时费米面以内能量离 E_F 约 $k_B T$ 范围内的能级上的电子被激发到 E_F 之上约 $k_B T$ 范围的能级

$$N' = N \left(\frac{k_B T}{E_F^0} \right)$$

当温度 $T \ll \theta_D$ 时，晶格振动的比热容为

$$c_v = \frac{12\pi^4}{5} N k_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 = b T^3$$

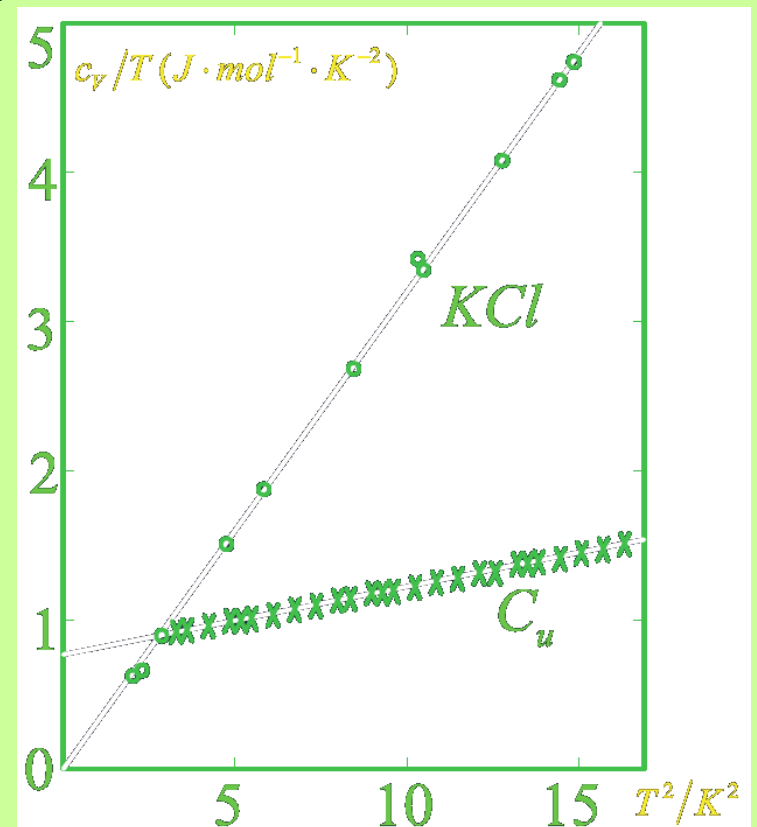
低温下金属总的比热容为

$$c_V = c_{Ve} + c_{Vc} = \gamma T + bT^3$$

$$\frac{c_{Ve}}{c_{Vc}} = \frac{5}{24\pi^2} \frac{k_B T}{E_F^0} \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3$$

变形为

$$\frac{c_V}{T} = \gamma + bT^2$$



电子气的电导和热导

电子气的电导率

假设：1.电子会受到晶格、杂质或其他电子的碰撞或散射，碰撞是瞬时效应，碰撞后电子速度无规取向，其大小分布与该处温度相平衡。2.用弛豫时间 τ (relation time) 来描述在 dt 时间内电子受到碰撞的几率 dt/τ 。因此， τ 约等于连续两次碰撞间的平均时间。

电子的动力学方程

t 时刻电子的平均动量为 $\vec{p}(t)$ ，经 dt 时间，电子没有受到碰撞几率为 $(1-dt/\tau)$ ，这部分电子对平均动量的贡献为

$$\vec{p}(t + dt) = (1 - \frac{dt}{\tau})(\vec{p}(t) + F(t)dt)$$

dt时间内收到碰撞的电子对动量的贡献将小于 $(dt/\tau)F(t)dt$, 是二级小量, 可以忽略。这样 $t+dt$ 时刻, 电子的平均动量为

$$\vec{p}(t + dt) = (1 - \frac{dt}{\tau})(\vec{p}(t) + F(t)dt)$$

动力学方程 $\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = F(t) - \frac{\vec{p}(t)}{\tau}$

在外场作用下电子的漂移速度: $\vec{v}_d(t) = \frac{\vec{p}(t)}{m}$

$$m \frac{d\vec{v}_d(t)}{dt} = F(t) - m \frac{\vec{v}_d(t)}{\tau}$$

金属电导率

在稳恒电场的作用下平衡时, $F(t) = -e\vec{E}$ $\frac{d\vec{v}_d(t)}{dt} = 0$

$$\vec{v}_d(t) = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

电流密度: $\vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$

电导率: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$

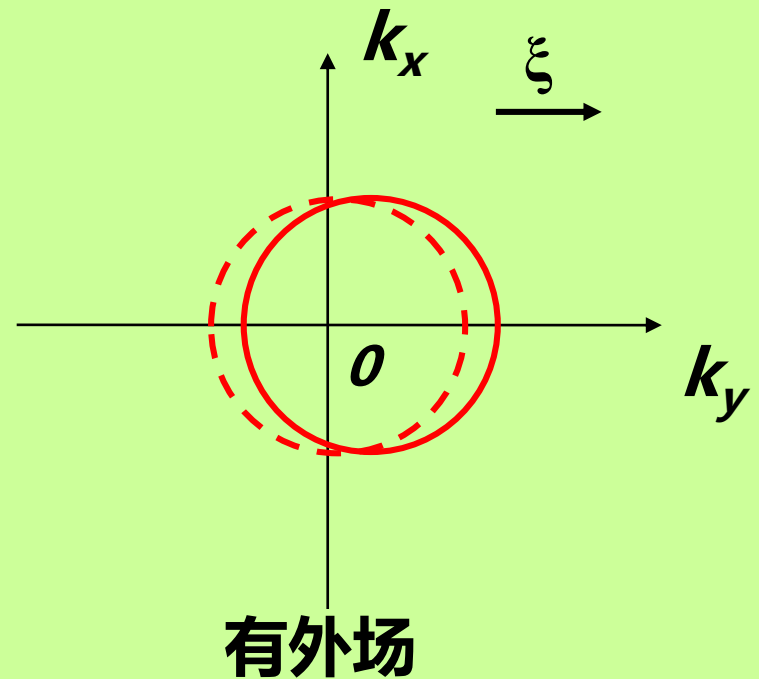
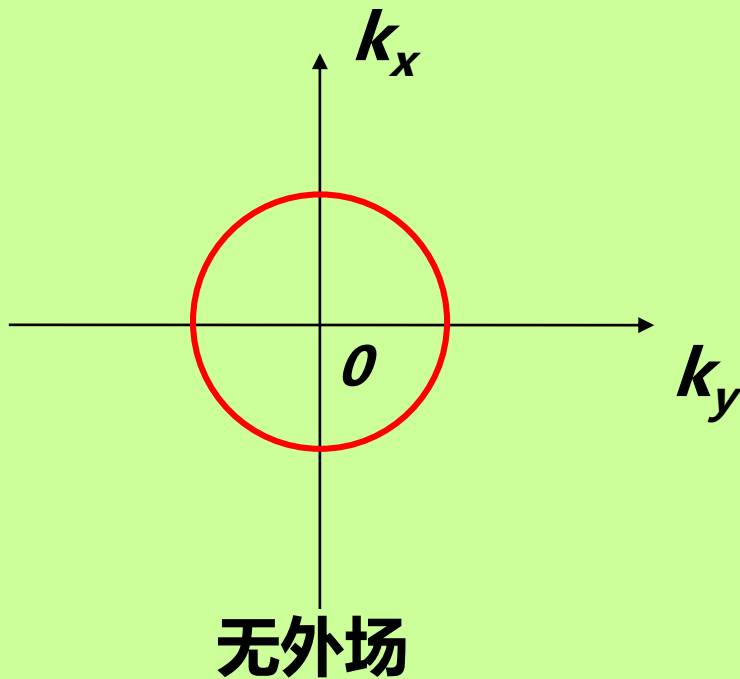
对一般金属, $\tau \approx 10^{-14}s$, 平均自由程 $l = v_F\tau \approx 1nm$

例：经实验测出Cu的电阻率为 $\rho \approx 1.7 \times 10^{-8} \Omega m$ ，Cu中电子浓度为 $n = 8.5 \times 10^{28} m^{-3}$ ，则Cu中电子的弛豫时间为

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho} = 2.5 \times 10^{-14} s$$

已知费米面附近电子运动速度为 $v_F \approx 1.57 \times 10^6 m/s$ ，则电子的平均自由程，即两次碰撞之间电子走过的平均距离为

$$l = v_F \tau = 3.9 \times 10^{-8} m$$



在 k 空间中电场引起的漂移速度对应的波矢的改变:

$$\hbar \Delta \vec{k} = m \vec{v}_d(t) = e \tau \vec{E}$$

$$\vec{E} \approx 10^4 \text{ V/m}, \tau \approx 10^{-14} \text{ s}, \text{ 则 } \Delta \vec{k} \approx 10^{-5} k_F$$

电子气的热导率

热导率的公式为

$$K = \frac{1}{3} C \bar{v} \bar{l}$$

C 为比热容, \bar{v} 为平均速度, \bar{l} 为平均自由程

$$C = \frac{\pi^2}{2} k_B \left(\frac{k_B T}{E_F^0} \right) n \quad \bar{v} = v_F \quad \bar{l} = v_F \tau \quad E_F = \frac{\hbar k_F^2}{2m} = \frac{1}{2} m v_F^2$$

带入得

$$K = \frac{1}{3} C \bar{v} \bar{l} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2 \tau}{m} T$$

热导率与电导率之比为

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T = \zeta T$$

电子气的热导率和电导率之比与温度成正比。

——魏德曼-弗兰兹定律

$$\zeta = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.45 \times 10^{-8} (W \cdot \Omega / K^2)$$

这是一个与金属性质无关的常数，被称为洛伦兹数。

5.4 电子热发射和接触电势差

5.4.1 热电子发射

热电子发射：金属中的电子因受热而逸出金属表面的现象

逸出功：金属中的电子逸出金属表面所需要的能量

$$W = E_0 - E_F$$

物理意义：外界为克服正离子的引力所需作的功

电子的发射方式有（电子获取能量的方式）：

①热发射——高温

②场发射——强电场

③光发射——强光照射

④二次电子发射——高能电子

如果有外部电路，则逸出的电子可形成热电子发射电流，由实验得出电流密度为：

$$j = AT^2 e^{-W/k_B T}$$

里查逊---杜师曼定律

用电子气模型来计算热电子发射电流的大小：

在波矢空间中，体积元 $dk = dk_x dk_y dk_z$ 中电子态的数目：

$$dZ = \frac{V_c}{4\pi^3} dk_x dk_y dk_z$$

按费米分布，这些态上的电子数密度为：

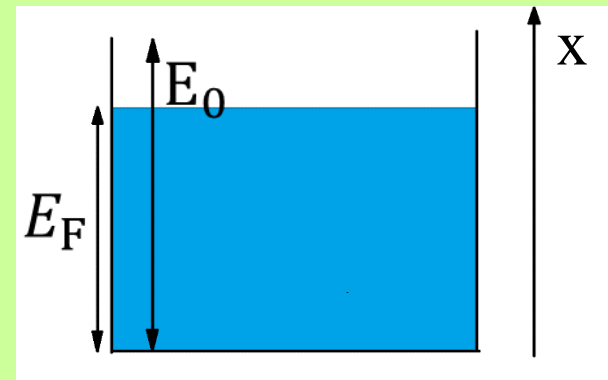
$$dn = \frac{1}{4\pi^3} f(E) dk_x dk_y dk_z$$

用电子速度表示波矢和能量：

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} m v^2 \\ \bar{v} = \frac{\bar{p}}{m} = \frac{\hbar \bar{k}}{m} \end{cases}$$

所以

$$dk_x dk_y dk_z = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 dv_x dv_y dv_z$$
$$dn = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 \frac{dv_x dv_y dv_z}{\exp\left[\frac{\frac{1}{2} m v^2 - E_F}{k_B T}\right] + 1}$$



对于能量较高的电子, 满足 $\frac{1}{2}mv^2 - E_F \gg k_B T$, 则上式可化为

$$dn = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 e^{E_F/k_B T} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

速度分量 v_x 在 v_x 到 $v_x + dv_x$ 之间的电子数为:

$$\begin{aligned} dn_x &= \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 e^{E_F/k_B T} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z \\ &= \frac{m^2 k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} e^{E_F/(k_B T)} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \end{aligned}$$

沿x方向逸出的电子满足 $\frac{1}{2}mv_x^2 > E_0$, 即 $v_x^2 > \frac{2E_0}{m}$, 可得沿x方向逸出的电子电流密度为:

$$j = \int e v_x dn_x = \int_{\sqrt{\frac{2E_0}{m}}}^{\infty} \frac{em^2 k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} e^{E_F/(k_B T)} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} v_x dv_x$$

$$= \frac{emk_B^2}{2\pi^2\hbar^3} T^2 e^{-(E_0 - E_F)/k_B T} = AT^2 e^{-W/(k_B T)}$$

其中 $A = \frac{emk_B^2}{2\pi^2\hbar^3} = \frac{4e\pi mk_B^2}{h^3} = 1.2 \times 10^6 (A \cdot m^2 \cdot K^{-2})$

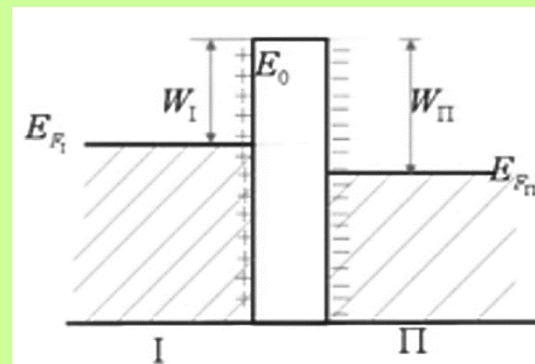
5.4.2 接触电势差

两块逸出功不同的金属连接起来后，出现电子转移而形成一稳定的电势差。

$$V_1 - V_{\parallel} = \frac{1}{e}(W_{\parallel} - W_1) = \frac{1}{e}(E_{F_1} - E_{F_{\parallel}})$$

证明：

$$\begin{aligned} W_1 &< W_{\parallel} \\ j_1 &> j_{\parallel} \\ j &= AT^2 e^{-W/k_B T} \\ V_1 &> 0, V_{\parallel} < 0 \end{aligned}$$



电势能: $-eV_1 < 0$ $-eV_{\parallel} > 0$

$$\begin{cases} W_1' = E_0 - (E_{F_1} - eV_1) = W_1 + eV_1 \\ W_{\parallel}' = E_0 - (E_{F_{\parallel}} - eV_{\parallel}) = W_{\parallel} + eV_{\parallel} \end{cases}$$

$$j_1' = 4\pi e \left(\frac{m(k_B T)^2}{h^3} \right) e^{-(W_1 + eV_1)/k_B T}$$

$$j_{\parallel}' = 4\pi e \left(\frac{m(k_B T)^2}{h^3} \right) e^{-(W_{\parallel} + eV_{\parallel})/k_B T}$$

平衡时:

$$j_1' = j_{\parallel}'$$

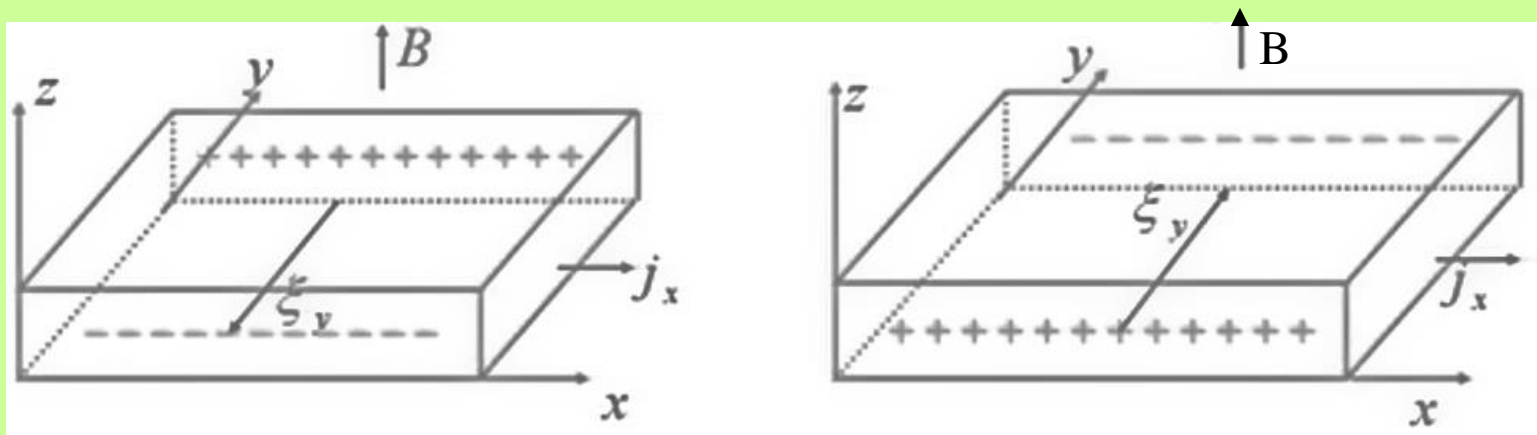
$$W_1 + eV_1 = W_{\parallel} + eV_{\parallel}$$

$$e(V_1 - V_{\parallel}) = W_{\parallel} - W_1$$

$$V_1 - V_{\parallel} = \frac{1}{e} (W_{\parallel} - W_1) = \frac{1}{e} (E_{F_1} - E_{F_{\parallel}})$$

5.5 霍尔效应和自由电子气模型的局限性

当载流导体处在于电流方向垂直的磁场中，在导体内能产生一个与电流方向和磁场方向垂直的横向电场，此横向电场使导体内产生一个横向的电势差，此现象称为霍尔效应。



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{\xi} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

稳定后:

$$\frac{m\vec{v}}{\tau} = -e(\vec{\xi} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} = -\frac{\tau e}{m}(\vec{\xi} + \vec{v} \times \vec{B})$$

由于在y和z方向上电子无漂移速度，则： $v_y = v_z = 0$

所以： $v_x = -\frac{\tau e}{m} \xi_x \quad \xi_y = B v_x \quad \xi_z = 0$



物理意义：电子漂移运动所受到的洛伦兹力刚好与横向电场的静电力平衡。

$$j_x = -en v_x = \sigma \xi_x = \frac{ne^2 \tau}{m} \xi_x$$

$$\xi_y = B v_x = -\frac{e\tau}{m} B \xi_x = -\frac{e\tau}{m} B \frac{m}{ne^2 \tau} j_x = -\frac{1}{ne} B j_x$$

这说明，金属中存在一个横向电场，其强度与磁场强度及电流密度成正比，比例系数为一个仅由电子浓度决定的常数，称为**霍尔系数**，其定义为：

$$R_H = \frac{\xi_y}{j_x B} = -\frac{1}{ne}$$

大部分一价金属理论值与实验符合较好，电子气理论反应实际情况
所以把霍尔系数的测定作为测量金属中载流子浓度的重要手段

量子Hall效应

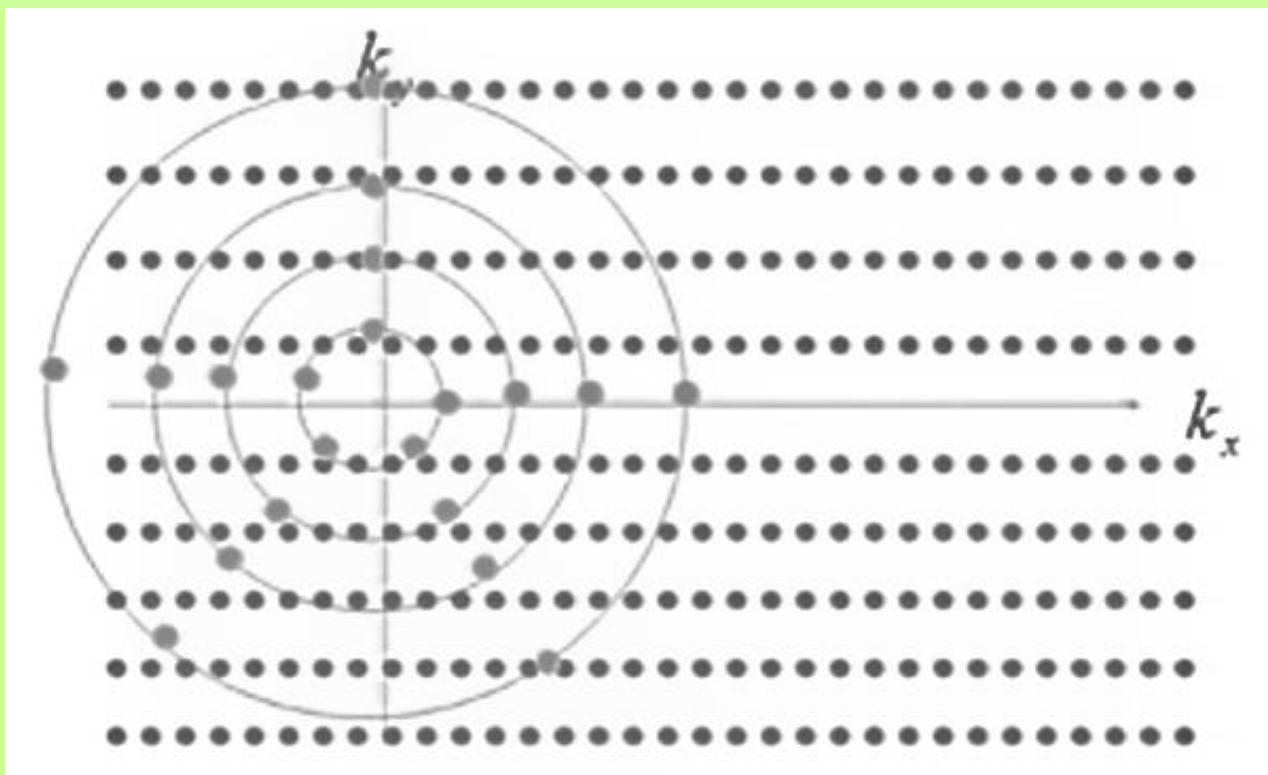
$$\sigma = \frac{I_{Hall}}{V_{Hall}} = \nu \frac{e^2}{h} \quad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, 3, \dots \\ \nu = 1/3, 2/5, 3/7, \dots \end{array}$$

整数量子Hall效应，起源于磁场中电子轨道的量子化，Landau量子轨道。

分数量子Hall效应，本质上源于电子-电子间相互作用。

反常Hall效应：磁性金属，无外磁场，自发磁化机制

量子反常Hall效应：拓扑绝缘体，无外磁场，铁磁交换形成稳定的铁磁绝缘体



Landau轨道: $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ $\omega_c = \frac{eB}{m}$

轨道简并度: $Z = \frac{m\omega_c}{\hbar} S$

自旋Hall效应 (spin Hall Effect)

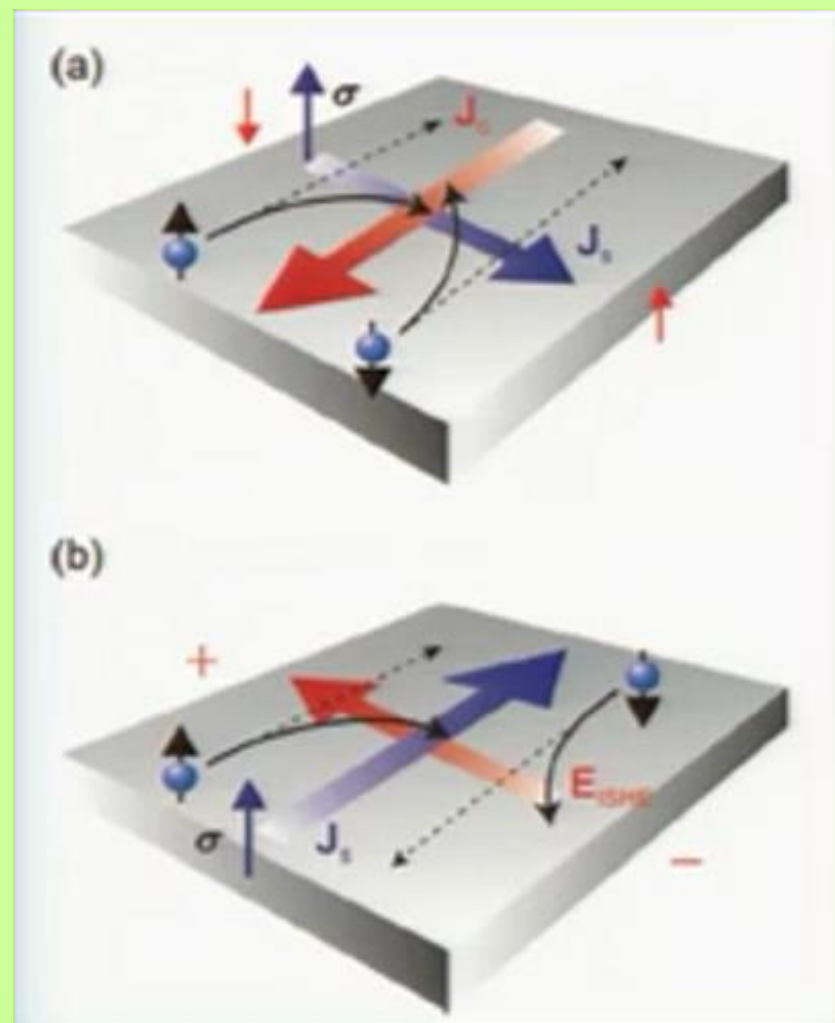
自旋流 (spin current)

$$\vec{I}_c = \gamma_H \left(\frac{e}{\hbar} \right) \vec{I}_s \times \vec{\sigma}$$

反自旋Hall效应:

Saitoh E., APL, 2006

Spin pump



电子气模型的优点：

- 1.能很好地解释金属作为电和热的良导体的原因
- 2.能很好地解释金属遵从欧姆定律，电导率和热导率间线性关系（魏德曼-弗兰兹定律）
- 3.能很好地解释电子气的热容量
- 4.能很好地解释电子发射
- 5.能很好地解释电子气的顺磁与逆磁效应

电子气模型的缺陷：

- 1.无法解释某些金属的霍尔系数为何是正数
- 2.无法解释二价三价金属电导率为何比一价金属小
- 3.无法解释金属电导率为何随温度变化，除非人为假定弛豫时间依赖温度
- 4.无法解释一些材料表现出各向异性，即依赖于样品与电场的相对取向
- 5.无法解释一些基本问题，如为什么有些元素是金属，有些是半导体？同种元素，为什么呈石墨结构时是导体，金刚石结构是绝缘体？为什么有些元素的费米面不是球形？等等