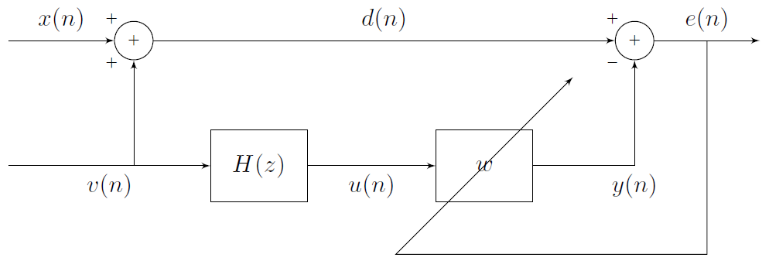
ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

1η ΕΡΓΑΣΙΑ-ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗ ΘΟΡΥΒΟΥ

Βαγενάς Θεόδωρος –Παναγιώτης

Α.Ε.Μ 8112

Θεωρητική ανάλυση



x(n) : Σήμα πληροφορίας
υ(n) : Λευκός θόρυβος
u(n) : Ανεξάρτητη μέτρηση θορύβου
d(n) : Σήμα προς αποθορυβοποίηση
e(n) : Καθαρό από θόρυβο σήμα

$$x(n) = A(n)\sin\left(\frac{\pi}{8}n + \varphi\right), \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$u(n) = 0.25u(n-1) - 0.12u(n-2) + \upsilon(n)$$

$$d(n) = x(n) + \upsilon(n)$$

A(n): τυχαία στατιστικά ανεξάρτητη από το ημίτονο, E[A]=0

Πίνακας αυτοσυσχέτισης :

$$Ru = E[u(n)u^*(n-k)]$$
$$= 0.25E[u(n-1)u^*(n-k)] - 0.12E[u(n-2)u^*(n-k)] + E[\upsilon(n)u^*(n-k)]$$

$$r_{\upsilon u}(k) = E[\upsilon(n)u^*(n-k)] = \begin{cases} \sigma_\upsilon^2, \kappa = 0 \\ 0, \kappa > 0 \end{cases}$$

$$p(-k) = E[u(n-k)d^*(n)] = E[u(n-k)x^*(n)] + E[u(n-k)\upsilon^*(n)] = E[u(n-k)\upsilon^*(n)] = r_{\upsilon\upsilon}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.32 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r(k) = 0.25r(k-1) - 0.12r(k-2) + r_{\upsilon u}(k)$$

Παίρνω τις εξισώσεις για κ=0,κ=1,κ=2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.12 \\ -0.25 & 1.12 & 0 \\ 0.12 & -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\upsilon^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r(0) \cong 0.3417$, $r(1) \cong 0.0762724$, $r(2) \cong -0.0219359$

$$Ru = \begin{bmatrix} 0.3417 & 0.0762724 & -0.0219359 \\ 0.0762724 & 0.3417 & 0.0762724 \\ -0.0219359 & 0.0762724 & 0.3417 \end{bmatrix}$$

Wiener-Hopf equation : $Rw_0 = p$

$$w_0 = R = R^{-1}p = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

Ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα :

$$\sigma_\chi^2 = \mathrm{Var}\left(A(n)\sin\left(\frac{\pi}{8}n + \varphi\right)\right) = \mathrm{Var}(A(n))\mathrm{Var}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n + \varphi\right)\right) = 0.075$$

- $(\mathrm{Var}(\sin\frac{\pi}{8}\mathrm{n}+\varphi)) = \mathrm{E}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n}+\varphi\right)\right] - (\mathrm{E}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n}+\varphi\right)\right])^2 = \mathrm{E}\left[\frac{1-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n}+\varphi\right)\right)}{2}\right] = 0.5$

$\sigma_d^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\upsilon^2 - 2\mathrm{E}[(\mathrm{X}-\mathrm{E}[\mathrm{X}])(\mathrm{V}-\mathrm{E}[\mathrm{V}])] = \sigma_x^2 + \sigma_\upsilon^2 = 0.075 + 0.32 = 0.395$

$J = E[e^2(n)]$

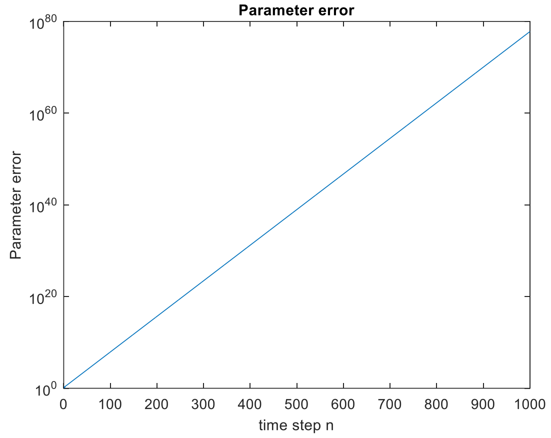
$$J_{w0} = \sigma_d^2 - p^T R^{-1} p = 0.075$$

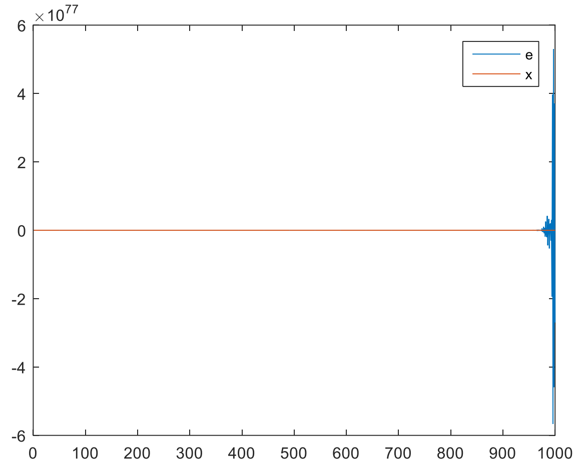
Παράμετρος μ για steepest descent: $0 < \mu < 2/\lambda max$

$$0 < \mu < 4.5542$$

Δοκιμές αλγορίθμου steepest descent για διάφορα μ:

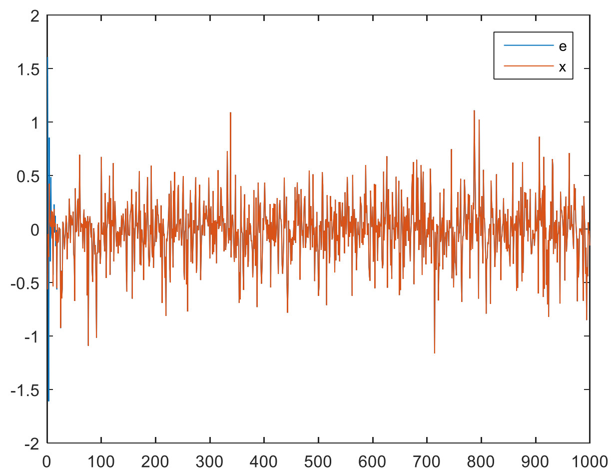
Δοκιμή για μ=5:

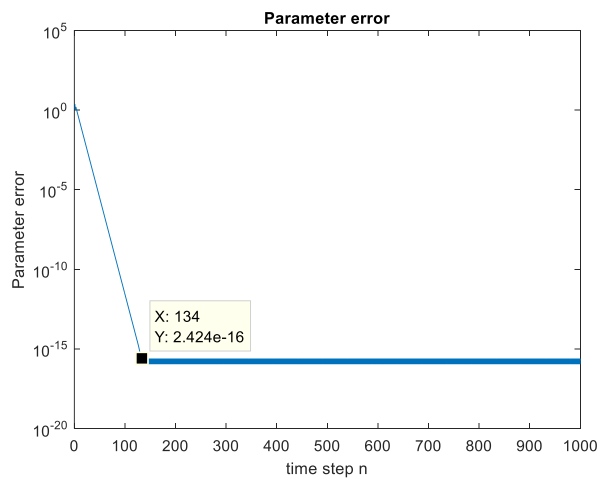




Η απόκλιση είναι πολύ μεγάλη και περίπου γραμμική και για 1000 βήματα το σφάλμα έχει φτάσει το 10^{80}. Το e δεν ακολουθεί το χ όπως ήταν αναμενόμενο αφού πρόκειται για τιμή εκτός του διαστήματος σύγκλισης του μ όπως υπολογίστηκε παραπάνω.

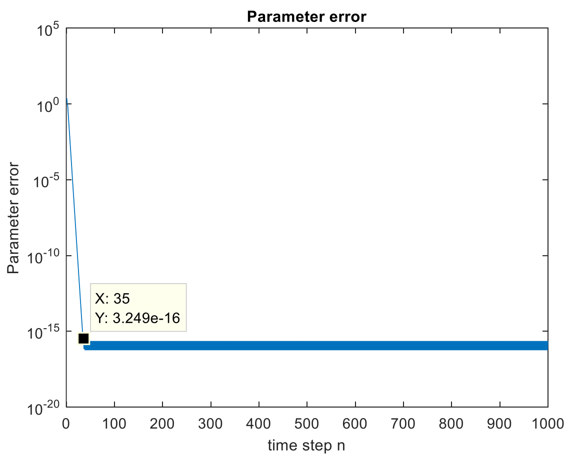
Δοκιμή για μ=4:

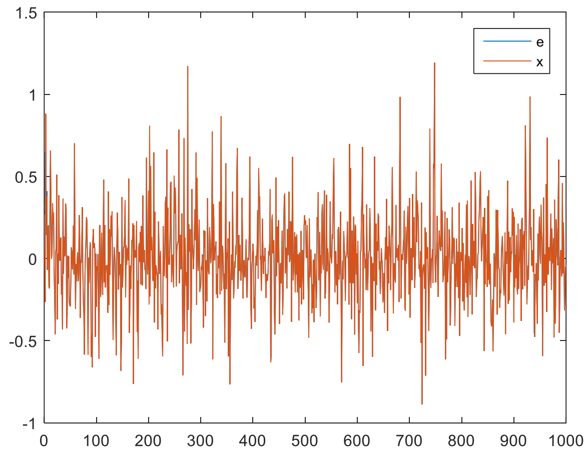




Στο 1ο διάγραμμα φαίνεται κατά πόσο το σήμα e στην έξοδο του φίλτρου ακολουθεί το σήμα πληροφορίας. Από το 2ο διάγραμμα φαίνεται ότι σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά 134 βήματα με σφάλμα 10^{-16} και ταλαντώνεται σε μία μικρή περιοχή για όλα τα επόμενα βήματα επομένως δεν μπορεί να επιλεγεί ως κατάλληλη τιμή του μ και συνεχίζονται οι δοκιμές.

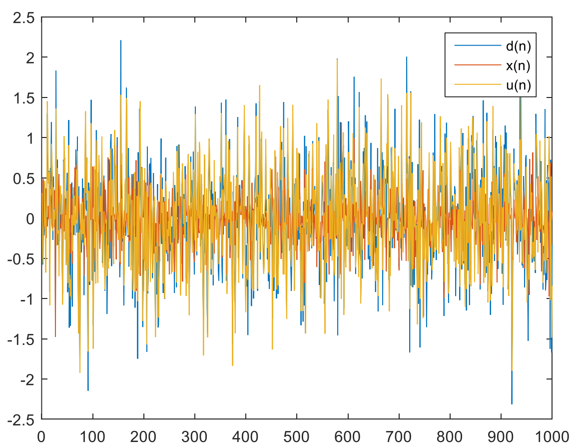
Δοκιμή για μ=3:

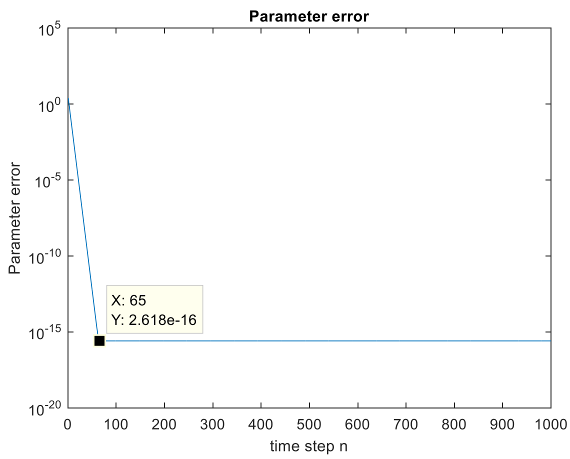


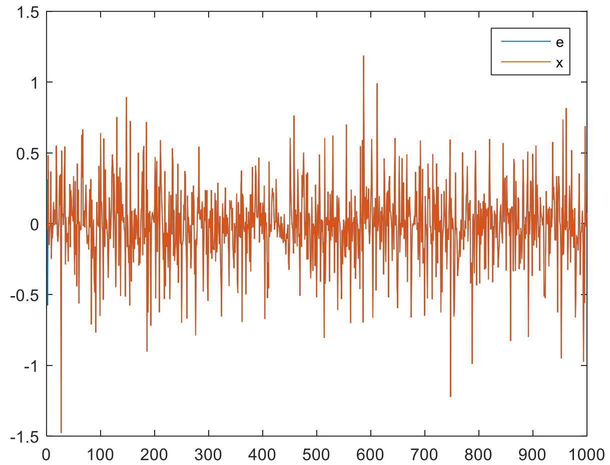


Παρατηρώντας το 1ο διάγραμμα για 35 βήματα και σφάλμα της τάξεως του 10^{16} αλλά ταλαντώνεται σε μια μικρή περιοχή για τα επόμενα βήματα άρα δεν μπορεί να επιλεγεί ως τιμή για σύγκλιση. Στο 2ο διάγραμμα φαίνεται ότι το e καταφέρνει να ακολουθάει το x σε ένα βαθμό αλλά όπως παρατηρήθηκε γίνεται ταλάντωση.

Δοκιμή για μ=2:

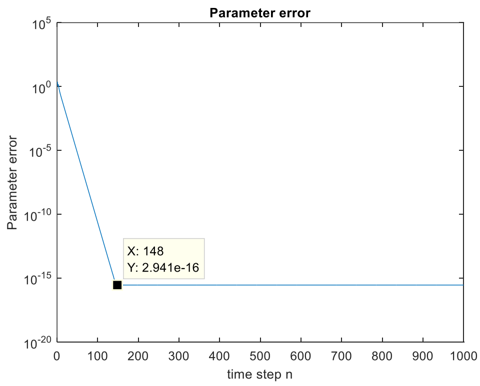


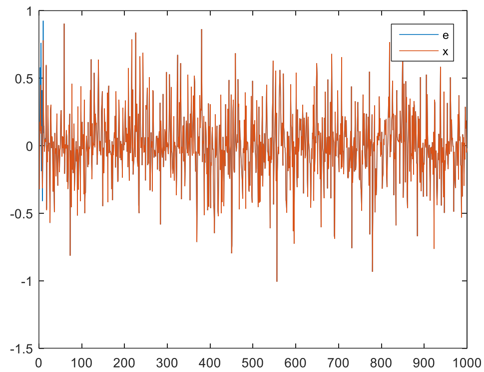




Η σύγκλιση παραμένει σταθερή μετά τα 65 βήματα και με σφάλμα της τάξεως 10^{-16} αποτέλεσμα επίσης ικανοποιητικό και παραμένει σταθερό οπότε επιλέγεται αυτή η τιμή του μ ως η καλύτερη(συγκλίνει) και ταχύτερη για αποθορυβοποίηση.

Δοκιμή για μ=1:





Ο αλγόριθμος για μ=1 συγκλίνει με το ίδιο σφάλμα αλλά για μεγαλύτερο αριθμό βημάτων (130) άρα είναι πιο αργή από ότι για μ=2. Μετά και από άλλες δοκιμές παρατηρήθηκε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει ταχύτερα για μ=2 και με σφάλμα πολύ μικρό της τάξεως 10^{-16}.

Αποθορυβοποίηση του κομματιού ήχου που δόθηκε: Mack the knife-Bobby Darin

Πίνακας αυτοσυσχέτισης : $Ru = \begin{bmatrix} 6.6319 & 6.2561 & 5.9892 \\ 6.2561 & 6.6319 & 6.2561 \\ 5.9892 & 6.2561 & 6.6319 \end{bmatrix}$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1.0003 \\ -0.8304 \\ -0.12 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Ru υπολογίστηκε μέσω της συνάρτησης xcor της u με τον εαυτό της όπως φαίνεται από το αρχείο matlab που συνοδεύει την αναφορά. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται στη συνέχεια στους υπολογισμούς για την εφαρμογή του προσαρμοζόμενου φίλτρου 3 συντελεστών και την αποθορυβοποίηση του κομματιού.