Отчёт по лабораторной работе №6
Математическое моделирование

Задача об эпидемии. Вариант №26

Выполнил: Скандарова Полина Юрьевна
НПИбд-02-22, 1132221815

Содержание

1 Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

2 Теоретическое введение. Построение математической модели.

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & ,\text{если } I(t) > I^* \\ 0 & ,\text{если } I(t) \le I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & ,\text{ если } I(t) > I^* \\ -\beta I & ,\text{ если } I(t) \le I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \le I^*$ и $I(0) > I^*$

3 Задание

Вариант 26

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 11200$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 230$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 45$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \le I^*$
2. $I(0) > I^*$

4 Задачи

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S, I, R. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случаях:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

5 Выполнение лабораторной работы

5.1 Решение с помощью программ

5.1.1 Julia

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 11200
I0 = 230 # заболевшие особи
R0 = 45 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи

alpha = 0.6 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.2 # коэффициент выздоровления


#I0 <= I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
  dpi = 600,
  legend = :topright)
plot!(
  plt,
  T,
```

```
  S,
  label = "Восприимчивые особи",
  color = :blue)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label = "Инфицированные особи",
  color = :green)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label = "Особи с иммунитетом",
  color = :red)

savefig(plt, "lab6_1.png")
```

Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 11200
I0 = 230 # заболевшие особи
R0 = 45 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи

alpha = 0.4 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.1 # коэффициент выздоровления


#I0 > I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 120.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=600,
  legend=:right)
```

```
plot!(
  plt,
  T,
  S,
  label="Восприимчивые особи",
  color=:blue)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label="Инфицированные особи",
  color=:green)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label="Особи с иммунитетом",
  color=:red)


savefig(plt, "lab6_2.png")
```

5.1.2 Результаты работы кода на Julia

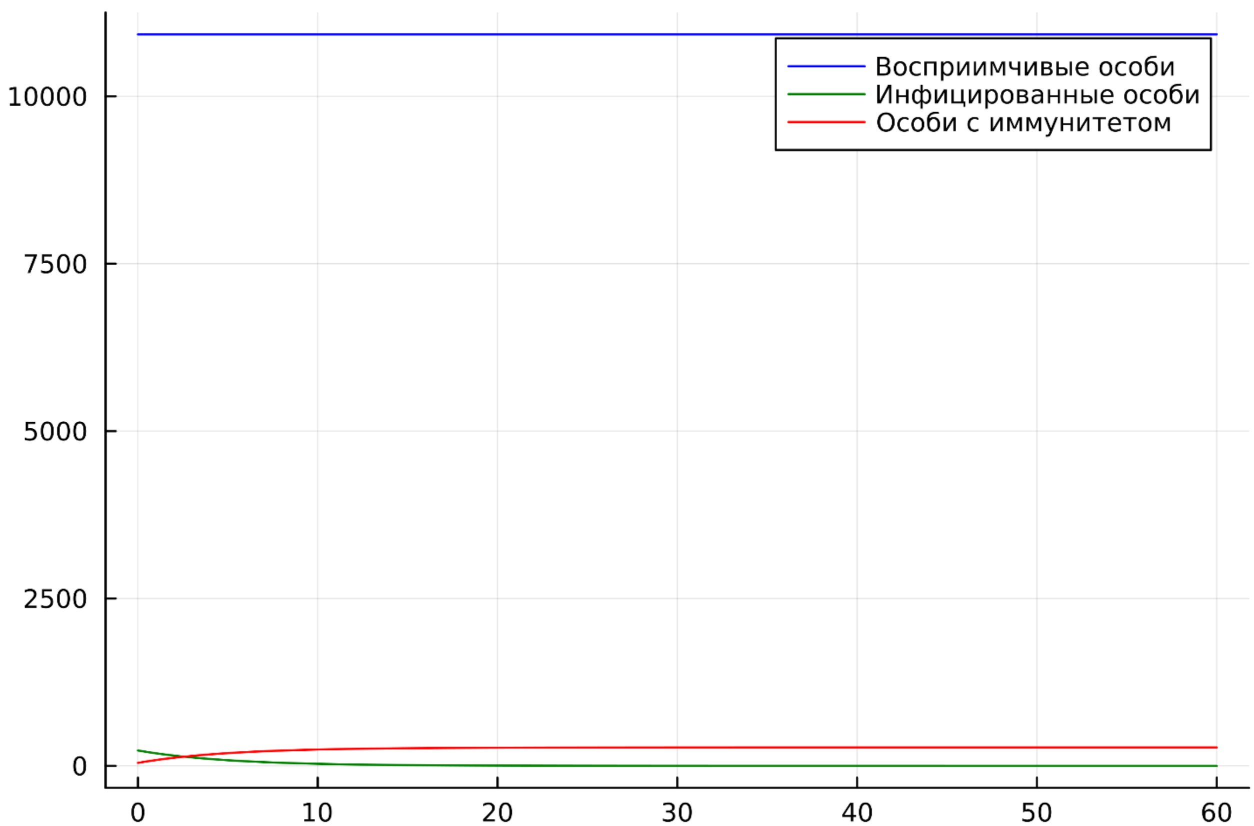

Рис. 1: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

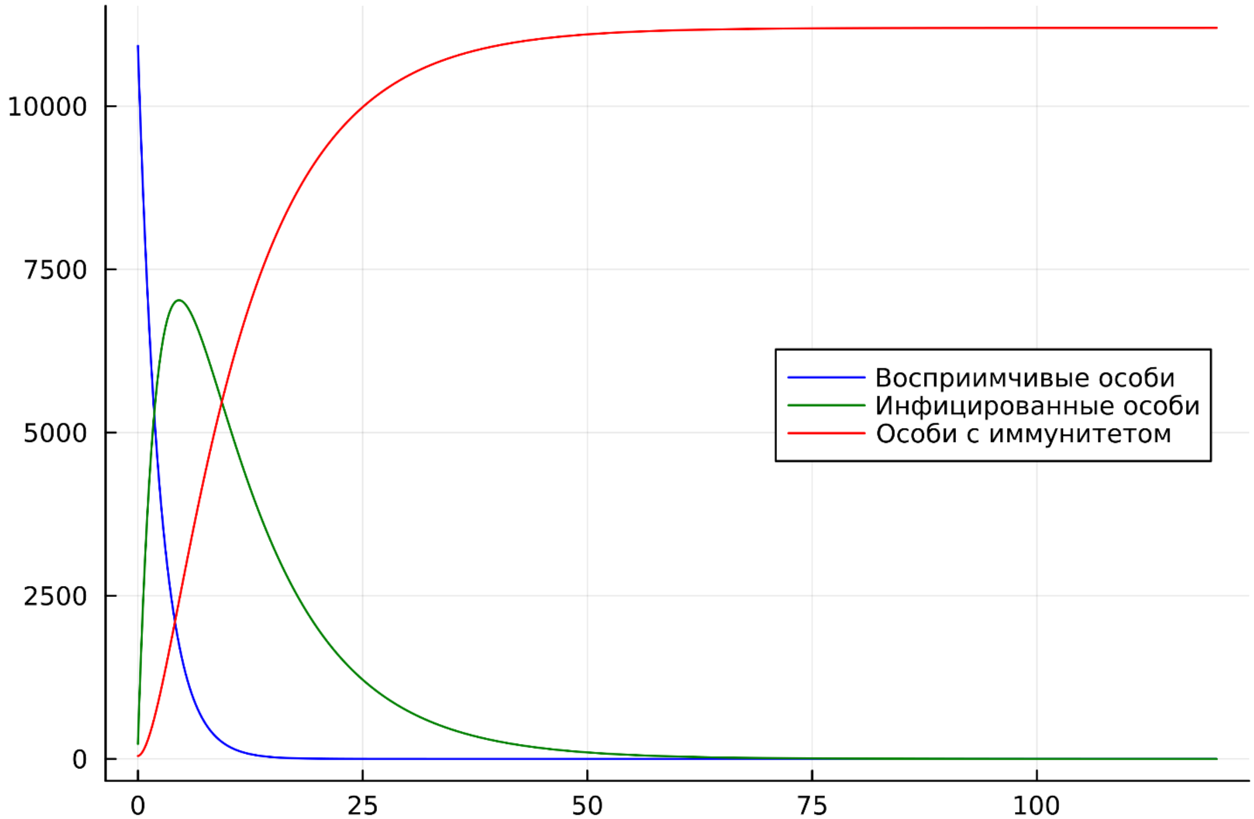

Рис. 2: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

7 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель эпидемии и построена модель на языке Julia.

8 Список литературы. Библиография.

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

[3] Конструирование эпидемиологических моделей: https://habr.com/ru/post/551682/