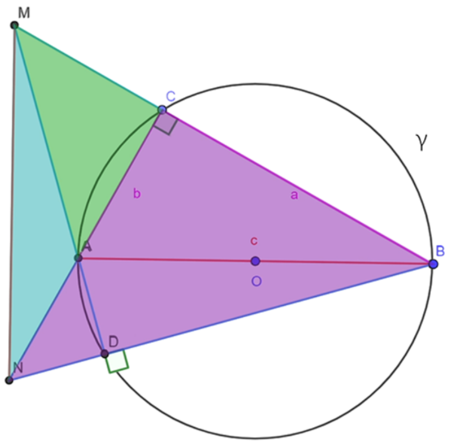
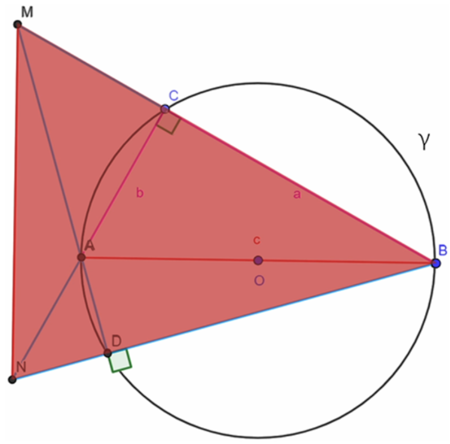
Dimostrazione del Teorema di Pitagora

a cura di Leonardo Tomassetti, II M

Teorema di Pitagora

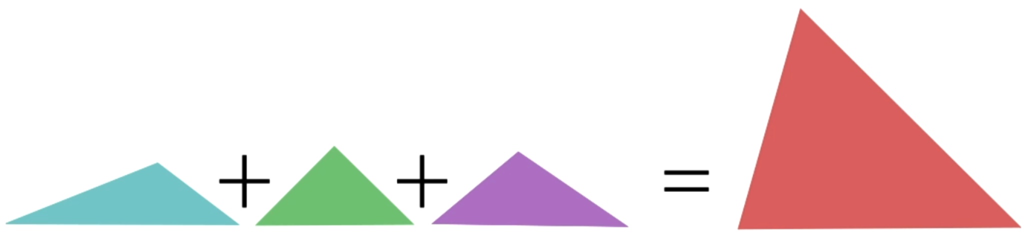
In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



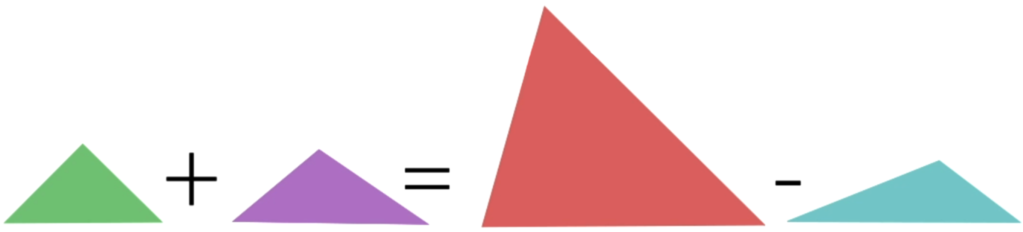


Dimostrazione:

Considero il triangolo rettangolo di cateti b $\leq$ a e ipotenusa c e la circonferenza ad esso circoscritta. Sul prolungamento di BC dalla parte di C indico il punto M tale che CM $\cong$ AC.
Prolungo AM dalla parte di A fino ad incontrare in D la circonferenza. Indico con N l'intersezione fra i prolungamenti di AC e BD.
Con riferimento alla figura il triangolo rosso è il triangolo MBN, il triangolo verde è il triangolo MAC, il triangolo viola è il triangolo CBN ed il triangolo azzurro è il triangolo AMN.



e quindi...



Essendo AB un diametro e C e D punti della circonferenza, gli angoli ACD e ADB sono retti. A è il punto di intersezione di due altezze del triangolo rosso MBN, e la retta AB è dunque perpendicolare a MN, pertanto la differenza fra l'area rossa e quella azzurra è $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MN}}{2}$
(basta osservare che l'area cercata è la somma delle aree di ABM e ABN, triangoli con la base AB in comune e somma delle altezze relative ad AB pari a BN).

Il triangolo verde è rettangolo isoscele di lato b e la sua area è $\frac{b^2}{2}$.
Anche il triangolo rettangolo viola è isoscele (basta osservare che l'angolo CNB misura 45° perchè complementare di NAD che è opposto al vertice a CAM che misura 45°). Essendo dunque il triangolo verde isoscele di lato a, la sua area è $\frac{a^2}{2}$.

Pertanto

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MN}}{2}$$

Ma $\overline{AB} = \overline{MN} = c$ (infatti NM è l'ipotenusa del triangolo rettangolo MCN i cui cateti sono congruenti rispettivamente ad AC e CB, avendo già provato che i triangoli verde e viola sono isosceli) e quindi

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2} \implies$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$