Aufgabe 1. Wenden Sie den Branch-and-Bound Algorithmus aus der Vorlesung auf die unten angegebene Instanz des Rucksackproblems an. Stellen Sie den Ablauf des Algorithmus als Baum dar. Geben Sie für jeden Schritt die obere Schranke U', die untere Schranke L', sowie eine passende Auswahl von Gegenständen mit Gesamtwert L' an. Verwenden Sie die „Best-First" Heuristik für die Auswahl von Teilproblemen.

Gegenstand	1	2	3	4	5
Gewicht g_i	30	20	50	10	45
Wert w_i	55	65	80	30	54

Rucksackkapazität: 100

Gegenstand	1	2	3	4	5
Gewicht g_i	30	20	50	10	45
Wert w_i	55	65	80	30	54
$\frac{w_i}{g_i}$	$1{,}8\dot{3}$	3,25	1,6	3	1,2
Ordnung	3	1	4	2	5

Starte mit Greedy-Lösung als globale untere Schranke L

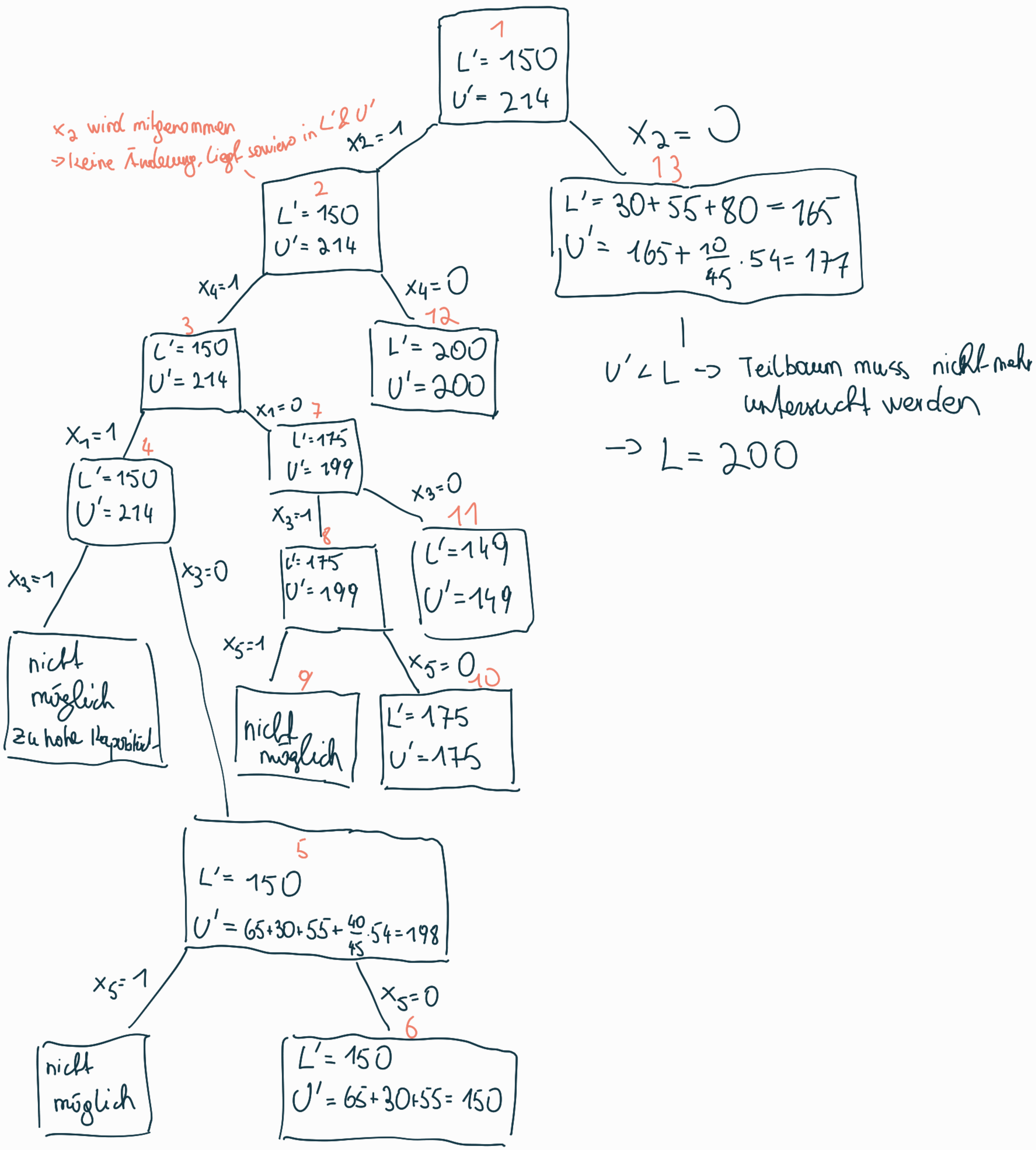
$$L = \underset{20}{65} + \underset{10}{30} + \underset{30}{55} = 150$$

Globale Obere Schranke:

$$U = 65 + 30 + 55 + \underbrace{\frac{40}{50} \cdot 80}_{\text{Teil von Gegenstand 3}} = 214$$

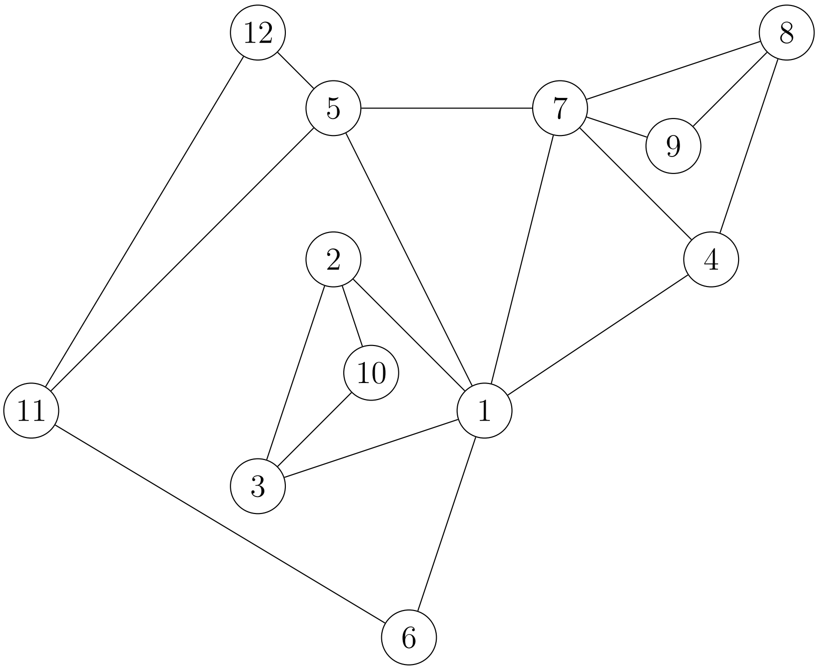
Best first: Wähle Teilprobleme mit der besten Obersten Schranke aus.

-> wähle anhand Ordnungsreihenfolge.



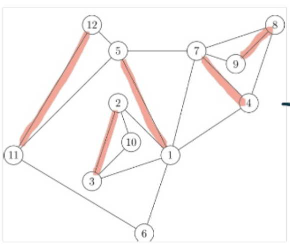
1
L' = 150
U' = 214
x2 = 1
x2 wird mitgenommen
-> keine Änderung, liegt sowieso in L' & U'
2
L' = 150
U' = 214
x4 = 1
3
L' = 150
U' = 214
x1 = 1
4
L' = 150
U' = 214
x3 = 1
nicht möglich
zu hohe Kapazität
x3 = 0
5
L' = 150
U' = 65+30+55+ 40/45 · 54 = 198
x5 = 1
nicht möglich
x5 = 0
6
L' = 150
U' = 65+30+55 = 150
x1 = 0
7
L' = 175
U' = 199
x3 = 1
8
L' = 175
U' = 199
x5 = 1
9
nicht möglich
x5 = 0
10
L' = 175
U' = 175
x3 = 0
11
L' = 149
U' = 149
x4 = 0
12
L' = 200
U' = 200
x2 = 0
13
L' = 30+55+80 = 165
U' = 165 + 10/45 · 54 = 177
U' < L -> Teilbaum muss nicht mehr untersucht werden
-> L = 200

Aufgabe 2. Wenden Sie den Branch-and-Bound Algorithmus zum Finden eines minimalen Vertex Covers auf den folgenden Graphen an. Geben Sie den Ablauf des Algorithmus als Baum wieder. Geben Sie für jeden Schritt die obere Schranke U' und die untere Schranke L' an, sowie die aktuelle Teilinstanz und die aktuelle Teillösung C'.

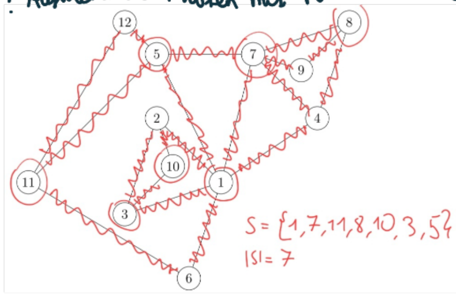


Lokale untere Schranke mit Matching: $M \subseteq E$: wenn zwei Kanten einen Knoten gemeinsam haben

Lokale obere Schranke mit Greedy Algorithmus : Auswählen der Knoten mit höchstem Knotengrad



G
$C = \emptyset$
$L' = 5$
$U' = 7$



1

$G - \{1\}$
$C = \{1\}$
$L' = |C| + |M'| = 1+4 = 5$
$U' = 7$

N(1)

$G - \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$C = \{2,3,4,5,6,7\}$
$L' = |C| + |M'| = 6+2 = 8$
$U' = 8$

Lokale untere Schranke 8
→ wird nicht weiter verfolgt

7

$G - \{1,7\}$
$C = \{1,7\}$
$L' = 2 + 3 = 5$
$U' = 7$

N(7)

$G - \{1,7,2,3,4,5,6,8,9\}$
$C = \{2,3,4,5,6,8,9\}$
$L' = |C| + |M| = 7 + 1 = 8$
$U' = 7 + 1 = 8$

11

$G - \{1,7,11\}$
$C = \{1,7,11\}$
$L' = 3 + 3 = 6$
$U' = 7$

N(11)

$G - \{1,7,11,12,5,6\}$
$C = \{1,7,12,5,6\}$
$L' = 5 + 2 = 7$
$U' = 8$

2

$G - \{1,7,11,2\}$
$C = \{1,7,11,2\}$
$L' = 4 + 3 = 7$
$U' = 7$

$\downarrow$
minimales Vertex-Cover mit $k = 7$
kann nicht mehr besser werden