TU Wien
Institut für Logic and Computation
Forschungsbereich Algorithms and Complexity

186.866 Algorithmen und Datenstrukturen VU

Übungsblatt 5

PDF erstellt am: 15. Mai 2023

Deadline für dieses Übungsblatt ist **Montag, 29.05.2023, 20:00 Uhr**. Um Aufgaben für diese Übung anerkannt zu bekommen, gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Öffnen Sie den TUWEL-Kurs der Lehrveranstaltung *186.866 Algorithmen und Datenstrukturen (VU 5.5)* und navigieren Sie zum Abschnitt *Übungsblätter*.

2. Teilen Sie uns mit, welche Aufgaben Sie gelöst haben **und** welche gelösten Aufgaben Sie gegebenenfalls in der Übungseinheit präsentieren können. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

   - Laden Sie Ihre Lösungen in einem einzigen PDF-Dokument in TUWEL hoch.
     Link *Hochladen Lösungen Übungsblatt 5*
     Button *Abgabe hinzufügen*
     PDF-Datei mit Lösungen hochladen und *Änderungen sichern*.
   - Kreuzen Sie an, welche Aufgaben Sie gegebenenfalls in der Übung präsentieren können. Die Lösungen der angekreuzten Aufgaben müssen im hochgeladenen PDF enthalten sein.
     Link *Ankreuzen Übungsblatt 5*
     Button *Abgabe bearbeiten*
     Bearbeitete Aufgaben anhaken und *Änderungen speichern*.

Bitte beachten Sie:

- Bis zur Deadline können Sie sowohl Ihr hochgeladenes PDF, als auch Ihre angekreuzten Aufgaben beliebig oft verändern. Nach der Deadline ist keine Veränderung mehr möglich. Es werden ausnahmslos keine Nachabgabeversuche (z.B. per E-Mail) akzeptiert.

- Sie können Ihre Lösungen entweder direkt in einem Textverarbeitungsprogramm erstellen, oder aber auch gut leserliche Scans bzw. Fotos von handschriftlichen Ausarbeitungen hochladen (beachten Sie die maximale Dateigröße).

- Beachten Sie die Richtlinien für das An- und Aberkennen von Aufgaben (Details finden Sie in den Folien der Vorbesprechung).

Aufgabe 1. Im Folgenden sind verschiedene Probleme mit einem Zertifikat und einem Zertifizierer gegeben. Überlegen Sie sich, ob das Zertifikat und der Zertifizierer geeignet sind, um zu zeigen, dass das gegebene Problem in NP ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a)
- **Problem:** Gegeben sei ein kantengewichteter Graph G und eine Zahl k. Hat G einen minimalen Spannbaum T, sodass es keinen Knoten in T gibt, dessen Grad größer als k ist?
- **Zertifikat:** Ein Baum T.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob T ein Spannbaum ist und es keinen Knoten in T gibt, dessen Grad größer als k ist. Berechne einen minimalen Spannbaum T' via Prims oder Kruskals Algorithmus und überprüfe, ob das Gewicht von T' gleich dem Gewicht von T ist.

(b)
- **Problem:** Gegeben sei ein Graph G und eine natürliche Zahl z. Gibt es in G einen Knoten mit Grad mindestens z?
- **Zertifikat:** Ein leerer String.
- **Zertifizierer:** Durchlaufe alle Knoten und überprüfe, ob es einen vom Grad mindestens z gibt.

(c)
- **Problem:** Gegeben sei ein Graph G und eine natürliche Zahl k. Ist k die minimale Anzahl an Farben, sodass es eine k-Färbung von G gibt?
- **Zertifikat:** Eine k-Färbung von G.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob keine zwei benachbarten Knoten die selbe Farbe haben und ob es keine $k-1$-Färbung gibt.

(d)
- **Problem:** Gegeben sei eine aussagenlogische Formel Φ in konjunktiver Normalform. Ist Φ unerfüllbar?
- **Zertifikat:** Eine Wahrheitsbelegung f für die n Boole'schen Variablen, die Φ erfüllt.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob f die Formel Φ erfüllt.

(e)
- **Problem:** Gegeben sei ein Graph G mit n Knoten und eine natürliche Zahl $k \leq n$. Gibt es ein Independent Set in G mit k oder weniger Knoten?
- **Zertifikat:** Ein Knoten v mit maximalem Grad in G.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob jeder Knoten in G höchstens den Grad von v hat.

Aufgabe 2. Seien A, B, C, D Ja/Nein-Probleme in NP und n die Eingabegröße. Angenommen, es gibt

- eine Reduktion von A auf B mit Laufzeit $O(n^3)$,
- eine Reduktion von B auf C mit Laufzeit $O(4^n)$,
- sowie eine Reduktion von B auf D mit Laufzeit $O(n^2 \cdot \log(n))$.

Beantworten/lösen Sie die folgenden Fragen/Aufgabenstellungen:

(a) Geben Sie die engste obere Schranke für die Laufzeit einer Reduktion von A auf D in O-Notation an, die sich aus diesen Annahmen ableiten lässt und begründen Sie Ihre Antwort.

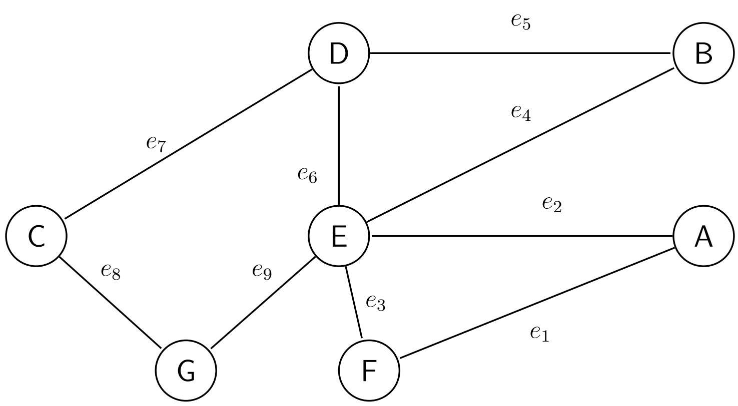
(b) Nehmen Sie an, dass Vertex Cover in polynomieller Zeit auf B reduziert werden kann. Was folgt daraus für die Komplexität der Probleme A, B, C und D?

(c) Nehmen Sie an, C kann in $n \log_4(n)$ Zeit gelöst werden. Geben Sie die engste obere Schranke für die Laufzeit eines Algorithmus der A löst in O-Notation an, die sich aus diesen Annahmen ableiten lässt und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Gegeben ist eine Instanz $I = (G, 4)$ von Vertex Cover mit dem unten abgebildeten Eingabegraph G.

(a) Wenden Sie die in der Vorlesung besprochene Problemreduktion von Vertex Cover auf Set Cover an, um aus der Instanz I eine äquivalente Instanz $I' = (S', k')$ von Set Cover zu erzeugen.

(b) Finden Sie in G ein Vertex Cover X mit 4 oder weniger Knoten. Verwenden Sie die Reduktion, um X in eine Lösung für I' umzuwandeln.

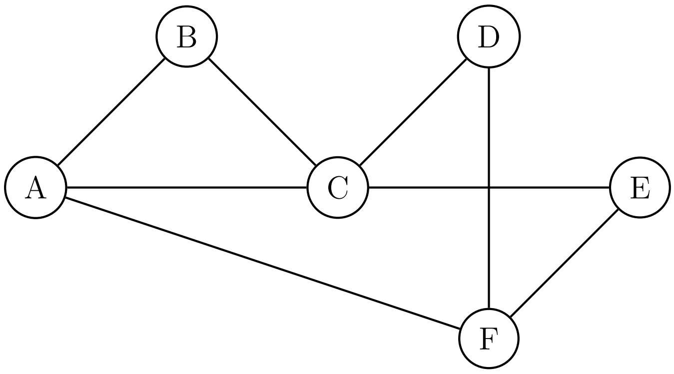


Aufgabe 4. Wir betrachten das aus der Vorlesung bekannte, NP-vollständige 3-Sat-Problem. Sei c eine ganze Zahl und $c \geq 3$. Analog ist bei c-Sat eine KNF-Formel Φ gegeben in der jede Klausel genau c paarweise verschiedene Literale enthält und wir fragen, ob es eine erfüllende Belegung für Φ gibt.

(a) Zeigen Sie formal, dass 4-Sat NP-vollständig ist.

(b) Argumentieren Sie (informell genügt), wie Sie zeigen können, dass 5-Sat NP-vollständig ist.

Aufgabe 5. In der Vorlesung haben Sie das OPT-COLOR-Problem kennengelernt, bei dem man die Knoten eines gegebenen Graphen mit der minimalen Anzahl von Farben so färben soll, dass benachbarte Knoten nicht die gleiche Farbe besitzen. Außerdem haben Sie Intervallgraphen kennengelernt. Zur Erinnerung: Ein Intervallgraph ist ein Graph $G = (V, E)$ für den eine Intervallmenge $\mathcal{I} = \{I_v \subset \mathbb{R} \mid v \in V\}$ existiert, sodass in G eine Kante zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ existiert, genau dann wenn $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Der folgende Graph G ist kein Intervallgraph.



a) Fügen Sie eine Kante zu G hinzu, sodass er ein Intervallgraph G' wird und geben Sie eine entsprechende Intervallmenge an.

b) Wenden Sie den Algorithmus zur Färbung von Intervallgraphen aus der Vorlesung an, um das OPT-COLOR-Problem auf G' aus Unteraufgabe (a) zu lösen.

Aufgabe 6. Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannten Probleme 3-Color und Ham-Cycle. Sei außerdem Interval 3-Color die Einschränkung des 3-Color-Problems auf Eingabegraphen die Intervallgraphen sind. Genauer gesagt, ist Interval 3-Color das Problem, bei dem wir einen Intervallgraphen G zusammen mit einer entsprechenden Intervallmenge gegeben haben und wir fragen, ob es eine Färbung von G mit drei Farben gibt, bei der keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Nehmen Sie an, dass P $\neq$ NP gilt. Gelten nachfolgende Behauptungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Interval 3-Color $\leq_P$ 3-Color

(b) 3-Color $\leq_P$ Interval 3-Color

(c) 3-Color $\leq_P$ Ham-Cycle
