TU Wien
Institut für Logic and Computation
Algorithms and Complexity Group

186.866 Algorithmen und Datenstrukturen VU 8.0

1. Test, 2021S

12. Mai 2021

Gruppe A

Es gelten, die in TUWEL verkündeten Regelungen.

Füllen Sie nachfolgende Felder des Deckblattes aus bzw. fertigen Sie ein eigenes Deckblatt mit diesen Informationen an. Fügen Sie das ausgefüllte Deckblatt als erste Seite von Ihrem PDF mit den Lösungen hinzu.

Zoom-Meeting: | Breakout-Raum:

Nachname: | Vorname:

Matrikelnummer: | Unterschrift:

Ausweiskopie:

	A1	A2	A3	A4	A5	Summe
Erreichbare Punkte:	20	16	24	20	20	100
Erreichte Punkte:						

Viel Erfolg!

Aufgabe A1: Algorithmenanalyse **(20 Punkte)**

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Laufzeit des angegebenen Algorithmus in Abhängigkeit vom Eingabeparameter n in Θ-Notation. Verwenden Sie hierfür möglichst einfache Terme.

$a \leftarrow n^3 + n$
$b \leftarrow 1$
while $a > 4$
    $a \leftarrow 2 * a/5$
    $b \leftarrow a + b$
return b

Laufzeit (in Θ-Notation): $\boxed{}$

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Laufzeit und den Rückgabewert des angegebenen Algorithmus in Abhängigkeit vom Eingabeparameter n in Θ-Notation. Verwenden Sie hierfür möglichst einfache Terme.

$b \leftarrow 2$
for $i = 1, \ldots, n$
    $k \leftarrow 1$
    for $j = 1, \ldots, \lceil \log_2 (1 + i) \rceil$
        $k \leftarrow 2 * k$
    $b \leftarrow b + k$
    $j \leftarrow n/2 + i$
    while $j > n/4$
        $j \leftarrow j - 1$
return b

Laufzeit (in Θ-Notation): $\boxed{}$

Rückgabewert (in Θ-Notation): $\boxed{}$

c) (6 Punkte) Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(n) &= n + \log(n^4 + 10) \\ g_1(n) &= \sqrt{n^5}/\log n \\ g_2(n) &= \frac{n^5 - 5n^3}{3n^3} \\ g_3(n) &= \begin{cases} 2n + 7 & \text{falls } 5n < n^2 - 3 \\ \frac{3n^2+5n+6}{7} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die zutreffenden Felder an:

$f(n)$ ist in	$\Theta(.)$	$O(.)$	$\Omega(.)$	keines
$g_1(n)$				
$g_2(n)$				
$g_3(n)$				

Hinweis: Setzen Sie statt dem Punkt die entsprechende Funktion (g_1, g_2 bzw. g_3) ein. Beispielsweise ist die Zelle links oben als „$f(n)$ ist in $\Theta(g_1(n))$" zu lesen.

d) (2 Punkte) Nehmen Sie an, wir haben für ein $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}^+$ gezeigt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sqrt{4n+3} \leq cn.$$

Was haben wir somit gezeigt? Kreuzen/Geben Sie alle zutreffenden Aussagen an:

(MC1) ☐ $\sqrt{4n+3}$ ist in $O(n)$

(MC2) ☐ $\sqrt{4n+3}$ ist in $\Theta(n)$

(MC3) ☐ $\sqrt{4n+3}$ ist in $\Omega(n)$

(MC4) ☐ keine der zuvor genannten Aussagen

Aufgabe A2: Graphen (16 Punkte)

a) (4 Punkte) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(+1 Punkt für jede richtige, -1 Punkt für jede falsche und 0 Punkte für keine Antwort, keine negativen Punkte)

(Q1) Ein gerichteter azyklischer Graph mit 17 Knoten hat mindestens 11 starke Zusammenhangskomponenten.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q2) Jeder gerichtete Graph mit einer Quelle besitzt eine topologische Sortierung.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q3) Jeder zusammenhängende, ungerichtete Graph mit n Knoten und mehr als $n+1$ Kanten enthält mindestens einen Kreis.

☐ Wahr ☐ Falsch

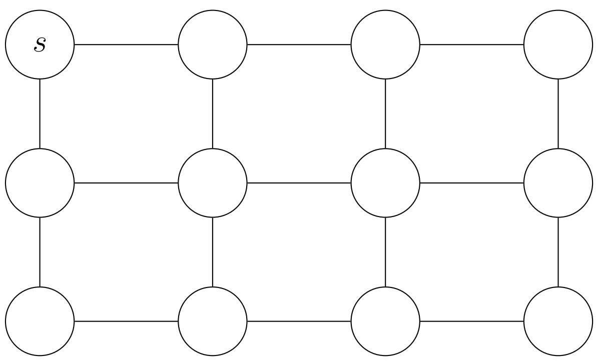
(Q4) In einem ungerichteten Graphen, bei dem alle Kanten ein Gewicht von 1 haben, lassen sich kürzeste Pfade mithilfe einer Breitensuche finden.

☐ Wahr ☐ Falsch

b) (6 Punkte) Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

`Mystery`(G, s):
Discovered$[s] \leftarrow 0$
Discovered$[v] \leftarrow -1$ für alle anderen Knoten $v \in V$
Queue $Q \leftarrow \{s\}$
while Q ist nicht leer
  Entferne ersten Knoten u aus Q
  forall Kante (u, v) inzident zu u **do**
    if Discovered$[v]$ == -1 **then**
      Discovered$[v] \leftarrow$ Discovered$[u] + 1$
    Füge v zu Q hinzu
return maximalen Eintrag in Discovered

Welche Zahl gibt der Algorithmus aus, wenn man ihn auf folgendem Graphen mit Startknoten s aufruft?



c) (6 Punkte)

Das Straßennetzwerk einer Stadt besteht aus Punkten, die ausschließlich durch Einbahnstraßen verbunden sind. Nun hat der Verkehrsminister die Bedenken geäußert, dass Folgendes passieren könnte: Wenn man von einem Punkt A zu einem Punkt B fährt, kommt man unter Umständen nicht mehr von B nach A zurück. Wir wollen untersuchen, unter welchen Umständen es solche zwei Punkte A und B gibt.

(i) Welcher Typ von Graph eignet sich um dieses Problem zu modellieren?

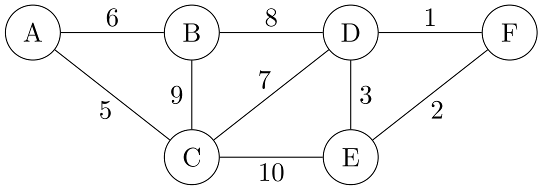
(ii) Welche Rolle haben die Knoten in Ihrem Graph?

(iii) Wann sind zwei Knoten mit einer Kante verbunden?

(iv) Beschreiben Sie mithilfe der Begriffe von starken und schwachen Zusammenhang welche Eigenschaften der Graph genau erfüllen muss, damit es solche zwei Punkte A und B gibt. Insbesondere erwähnen Sie, in welcher Beziehung die starken und schwachen Zusammenhangskomponenten von A und B zueinander stehen müssen.

Aufgabe A3: Greedy **(24 Punkte)**

a) (6 Punkte) Berechnen Sie einen minimalen Spannbaum des untenstehenden Graphen. Geben Sie die Reihenfolge an, in der der Algorithmus von **Prim** (mit Startknoten A) die Kanten des Graphen in einen Spannbaum einfügt. Geben Sie die Reihenfolge als Liste von Knotenpaaren an (z.B.: AB, BC, CD, ...).



b) (2 Punkte) Hat der obige Graph einen eindeutigen minimalen Spannbaum? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) (8 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen über Spannbäume von schlichten, ungerichteten, gewichteten Graphen wahr oder falsch sind:

(korrektes Kreuz: +2 Punkte, inkorrektes Kreuz: -2 Punkte, kein Kreuz: 0 Punkte. Minimum für diese Unteraufgabe: 0 Punkte)

(Q1) Das Kreislemma besagt, dass ein minimaler Spannbaum eines Graphen G zumindest eine Kante jedes Kreises von G enthält.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q2) Jeder Graph hat einen minimalen Spannbaum.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q3) Sei S eine Teilmenge von Knoten eines zusammenhängenden Graphen und e eine Kante minimalen Gewichts, die genau einen Endknoten in S hat. Dann gibt es einen minimalen Spannbaum, der e enthält.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q4) Der Algorithmus von Kruskal hat auf dünnen Graphen eine bessere asymptotische Laufzeit als der Algorithmus von Prim.

☐ Wahr ☐ Falsch

d) (4 Punkte) Begründen Sie mit einem Gegenbeispiel, warum die folgende Greedy-Strategie für das **Interval Scheduling** Problem im Allgemeinen keine optimale Lösung liefert:

> Man sortiert die Jobs aufsteigend nach Startzeitpunkt und fügt sie in dieser Reihenfolge ein (wenn sie mit den bisher gewählten Jobs kompatibel sind).

Geben Sie Ihr Gegenbeispiel als eine Liste von Paaren $(s_1, f_1), (s_2, f_2), \dots$ der Startzeiten s_i und Endzeiten f_i von Jobs an.

e) (4 Punkte) Angenommen, G ist ein Graph mit positiven Kantengewichten c_e und T ein minimaler Spannbaum von G. Sei G' der Graph mit der gleichen Knoten- und Kantenmenge wie G und quadrierten Kantengewichten $c'_e = c_e^2$. Ist T ein minimaler Spannbaum von G'? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Beweisskizze oder einem Gegenbeispiel.

Aufgabe A4: Sortieralgorithmen **(20 Punkte)**

a) (8 Punkte) Benutzen Sie **Mergesort**, um eine aufsteigende Sortierung des Arrays $[18, 6, 1, 14, 2, 17, 11]$ zu berechnen. Geben Sie, wie Sie das in der Vorlesung und Übung kennen gelernt haben, alle Zwischenschritte an.

b) (6 Punkte) Geben Sie bei folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

(korrektes Kreuz: +2 Punkte, inkorrektes Kreuz: -2 Punkte, kein Kreuz: 0 Punkte. Minimum für diese Unteraufgabe: 0 Punkte)

(Q1) Für Arrays mit n Zahlen im Bereich 0 bis z mit $z < n$ hat Countsort eine bessere asymptotische **Worst-Case** Laufzeit als Insertionsort.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q2) Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt zum Sortieren von n paarweise verschiedenen Schlüsseln mindestens $\Omega(n \log(n))$ Laufzeit im **Best-Case**.

☐ Wahr ☐ Falsch

(Q3) Im **Worst-Case** benötigt Mergesort asymptotisch gesehen mehr zusätzlichen Speicher als Quicksort.

☐ Wahr ☐ Falsch

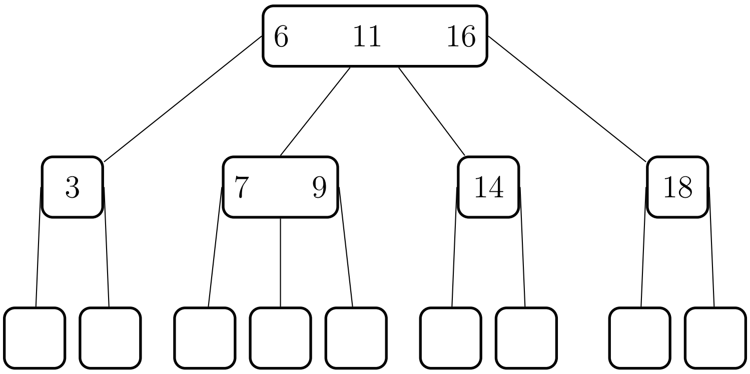
c) (6 Punkte) Bei folgender Mergesort-Variante wird das Eingabearray in jedem Rekursionsschritt in drei statt zwei Teile geteilt:

> `ThreewayMergesort`(A, l, r):
> **if** $l < r$ **then**
> $\quad m_1 \leftarrow l + \lfloor (r-l)/3 \rfloor$
> $\quad m_2 \leftarrow l + 2 \cdot \lfloor (r-l)/3 \rfloor + 1$
> $\quad$`ThreewayMergesort`(A, l, m_1)
> $\quad$`ThreewayMergesort`$(A, m_1 + 1, m_2)$
> $\quad$`ThreewayMergesort`$(A, m_2 + 1, r)$
> $\quad$`ThreewayMerge`(A, l, m_1, m_2, r)

Sei $C(n)$ die Anzahl der Schlüsselvergleiche in `ThreewayMergesort` bei einer Eingabegröße n. Geben Sie eine Rekursionsgleichung zur Berechnung von $C(n)$ an. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Funktion `ThreewayMerge` drei Teilarrays mit einer Gesamtlänge von n immer mit $3n$ Schlüsselvergleichen verschmilzt.

Aufgabe A5: B-Bäume und Hashing **(20 Punkte)**

a) Gegeben ist folgender **B-Baum** der Ordnung 4:



(i) (6 Punkte) Fügen Sie die Schlüssel 8 und 10 in dieser Reihenfolge nacheinander in diesen B-Baum ein. Zeichnen Sie den vollständigen Baum direkt nach dem Einfügen jeden Elementes.

(ii) (6 Punkte) Löschen Sie aus dem **ursprünglichen**, gegebenen B-Baum die Schlüssel 11 und 3 nacheinander in dieser Reihenfolge. Zeichnen Sie den vollständigen Baum direkt nach dem Löschen jeden Elementes.

b) Gegeben ist folgende Hashtabelle, die Double-Hashing mit $h_1(k) = k \bmod 7$ und $h_2(k) = (k \bmod 6) + 1$ verwendet:

Position	0	1	2	3	4	5	6
Schlüssel	8	1	9	3	-3	12	21

(i) (4 Punkte) Geben Sie **eine** Reihenfolge an, in der die enthaltenen Elemente in die Hashtabelle eingefügt worden sein könnten, um diesen Zustand ohne irgendwelche anderen Schritte zu erreichen.

(ii) (4 Punkte) Wie viele Schritte benötigt eine erfolgreiche Suche durchschnittlich in der obigen Hashtabelle?

Hinweis: Die Suche nach Schlüssel 1, benötigt einen Schritt.