SUR LE CENTRE DE $U_q(\mathfrak{n}^+)$

PHILIPPE CALDERO

RÉSUMÉ. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple et* $\mathfrak{n}^+$ *une sous-algèbre nilpotente maximale de* $\mathfrak{g}$. *On définit comme dans* [8] *l'algèbre enveloppante quantifiée* $U_q(\mathfrak{g})$ *et sa sous-algèbre* $U_q(\mathfrak{n}^+)$. *Nous donnons ici le centre de* $U_q(\mathfrak{n}^+)$ *et de son corps des fractions.*

ABSTRACT. *Let* $\mathfrak{g}$ *be a simple Lie algebra with maximal nilpotent subalgebra* $\mathfrak{n}^+$. *Let* $U_q(\mathfrak{g})$ *and* $U_q(\mathfrak{n}^+)$ *be the quantized enveloping algebras as defined in* [8]. *We describe the centre of* $U_q(\mathfrak{n}^+)$ *and of its field of fractions.*

0. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Notons $P^+ = \mathbb{N}\varpi_1 + \dots \mathbb{N}\varpi_n$ l'ensemble des poids dominants, où les $\varpi_i, 1 \leq i \leq n = \operatorname{rang}\mathfrak{g}$, sont les poids fondamentaux. On désigne par $\check{U} = \mathbb{C}(q)\,[\tau(\varpi_i)^{\pm 1},\, x_i, y_i, 1 \leq i \leq n]$ l'algèbre enveloppante quantifiée comme définie par A. Joseph et G. Letzter dans [9, 3.1]. C'est une extension de l'algèbre $U = U_q(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}(q)\,[k_i^{\pm 1}, x_i\,, y_i\,, 1 \leq i \leq n]$ définie comme dans [10]. Soit $U^+ = U_q(\mathfrak{n}^+) = \mathbb{C}(q)\,[x_i,\, 1 \leq i \leq n]$. Le but de ce travail est la description du centre de U^+. Comme U^+ est isomorphe à $V^+ := \mathbb{C}(q)\,[k_i x_i,\, 1 \leq i \leq n]$, il revient au même d'étudier le centre de V^+, noté $Z(V^+)$.

Nous montrons que $Z(V^+)$ est une $\mathbb{C}(q)$-algèbre de polynômes puis nous donnons une méthode pour en calculer les générateurs. Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, on exprime ces derniers en termes de mineurs quantiques. Cette formulation est analogue à celle du cas classique donnée par J. Dixmier dans [4].

La démonstration de ces résultats s'organise de la façon suivante. On désigne par ad l'action adjointe de l'algèbre de Hopf U. Il résulte de [9, 4.7,4.8] que, si $\mu \in P^+$, alors, $ad\, U^+(\tau(-4\mu))$ peut être muni d'une structure de U-module, simple de plus haut poids. Un vecteur de plus haut poids de ce module s'écrit sous la forme $\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}$ où $e_{s(\mu)} \in V^+$, $s(\mu) = \mu - w_0(\mu)$, w_0 étant le plus grand élément du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, cf. section 2.

On démontre alors, cf. Théorème 3.2, que $Z(V^+) = \mathbb{C}(q)\,[e_{s(\mu)}; \mu \in \mathcal{H}]$ où $\mathcal{H} = \{\mu \in P^+ \mid w_0(\mu) = -\mu\}$. Comme $\mathcal{H}$ est un monoïde libre, cf. Lemme 2.3, on obtient que $Z(V^+)$ est une algèbre de polynômes.

Puisque $e_{s(\mu)}e_{s(\nu)} \in \mathbb{C}(q)\, e_{s(\mu+\nu)}$, cf. Proposition 3.2, on peut déduire un système de générateurs (algébriquement indépendants) de la connaissance des $e_{s(\varpi_i)}$. On donne en 3.3 une méthode itérative pour calculer ceux-ci.

Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ on peut, grâce aux résultats de [3], écrire les $e_{s(\varpi_i)}$ comme des déterminants quantiques extraits d'une matrice à coefficients dans V^+, cf. section 4.

On trouvera en section 5 des résultats concernant le centre du corps des fractions de V^+ et de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) := \mathbb{C}(q)[\tau(\varpi_i)^{\pm 1},\; x_i,\, 1 \leq i \leq n]$.

1. Notations

1.1. Soit $A=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Cartan de l'algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$. Soient d_i, $1\leq i\leq n$, des entiers naturels premiers entre eux tels que $[d_i a_{ij}]$ soit symétrique. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. On note P le réseau des poids de $\mathfrak{g}$, engendré par les poids fondamentaux $\varpi_i, 1\leq i\leq n$. On désigne par R le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, par W le groupe de Weyl associé et par $w_0\in W$ l'élément le plus long. On pose : $\alpha_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}\varpi_i$, $\check{\alpha_j}=2\alpha_j/(\alpha_j,\alpha_j)$, $(1\leq j\leq n)$, $\rho=\sum_{i=1}^n \varpi_i$, $Q=\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$, $Q^+=\sum_{i=1}^n \mathbb{N}\alpha_i$, $P^+=\sum_{i=1}^n \mathbb{N}\varpi_i$. On définit sur $P\times Q$ une forme bilinéaire par $(\varpi_i,\alpha_j)=\delta_{ij}d_i$.

1.2. Soit q une indéterminée. Pour $k\in\mathbb{Z}, d\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$[k]_d=\frac{q^{2dk}-q^{-2dk}}{q^{2d}-q^{-2d}};\ [k]_d!=[k]_d[k-1]_d\dots[1]_d;\ \begin{bmatrix}k\\ j\end{bmatrix}_d=\frac{[k]_d\dots[k-j+1]_d}{[j]_d!};\ q_i=q^{d_i}.$$

On désigne par $\check{U}_0$ la $\mathbb{C}(q)$-algèbre du groupe P, notée multiplicativement. Soit $\tau: P\to\check{U}_0$ le morphisme canonique tel que si $\lambda,\mu\in P$, $\tau(\lambda+\mu)=\tau(\lambda)\tau(\mu)$. Il vient : $\check{U}_0=\mathbb{C}(q)\left[\tau(\varpi_i)^{\pm1}, 1\leq i\leq n\right]$. On pose $k_i=\tau(\alpha_i)$, $1\leq i\leq n$, et $U_0=\mathbb{C}(q)\left[k_i^{\pm1}, 1\leq i\leq n\right]$. Soit $\check{U}$ la $\mathbb{C}(q)$-algèbre engendrée par $\check{U}_0$, x_i, y_i, $1\leq i\leq n$, avec les relations

$$\tau(\lambda)x_j\tau(-\lambda)=q^{(\lambda,\alpha_j)}x_j,\ \tau(\lambda)y_j\tau(-\lambda)=q^{-(\lambda,\alpha_j)}y_j,\ x_iy_j-y_jx_i=\delta_{ij}\frac{k_i^2-k_i^{-2}}{q_i^2-q_i^{-2}},$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}}(-1)^m\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ m\end{bmatrix}_{d_i}x_i^{1-a_{ij}-m}x_jx_i^m=0,\ \sum_{m=0}^{1-a_{ij}}(-1)^m\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ m\end{bmatrix}_{d_i}y_i^{1-a_{ij}-m}y_jy_i^m=0.$$

Alors $\check{U}$ est une algèbre de Hopf où la comultiplication Δ, l'antipode S, l'augmentation ε sont donnés par :

$$\Delta x_i=x_i\otimes k_i^{-1}+k_i\otimes x_i,\ \Delta y_i=y_i\otimes k_i^{-1}+k_i\otimes y_i,\ \Delta\tau(\lambda)=\tau(\lambda)\otimes\tau(\lambda)$$

$$S(x_i)=-q_i^{-2}x_i,\ S(y_i)=-q_i^2y_i,\ S(\tau(\lambda))=\tau(-\lambda)$$

$$\varepsilon(x_i)=\varepsilon(y_i)=0,\ \varepsilon(\tau(\lambda))=1.$$

$\check{U}$ est un U-module à gauche par l'action adjointe :

$$\forall E\in U,\, u\in\check{U},\ adE(u)=\sum E_{(1)}uS(E_{(2)}),\text{ où }\ \Delta E=\sum E_{(1)}\otimes E_{(2)}.$$

1.3. Soient U^+,U^-,V^+,V^- les sous-algèbres de U engendrées respectivement par x_i, y_i, k_ix_i, $y_ik_i^{-1}$, $(1\leq i\leq n)$. On sait, cf. [11], que l'on a les décompositions triangulaires : $\check{U}=U^-\otimes\check{U}_0\otimes U^+=V^-\otimes\check{U}_0\otimes V^+$. On pose $U=U^-\otimes U_0\otimes U^+=\mathbb{C}(q)[k_i^{\pm1},x_i,y_i,\ 1\leq i\leq n]$, et on désigne par $Z(U^+)$, resp. $Z(V^+)$, le centre de U^+, resp.V^+. Il existe un isomorphisme d'algèbres $U^+\simeq V^+$ tel que $x_i\mapsto k_ix_i$. En particulier $Z(U^+)\simeq Z(V^+)$.

1.4. On vérifie, cf. [9, 2.2,2.3], que $\check{U}$ est munie d'une filtration adU-stable, à valeur dans $(1/k)\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ (k suffisamment grand), entièrement déterminée par : $d^o x_i = d^o y_i = 1$, et pour $\lambda = \sum_i m_i\alpha_i$, $d^o\,\tau(\lambda) = -\sum m_i$. Soit $gr\check{U}$ le gradué associé. L'action adjointe confère à $gr\check{U}$ une structure de U-module. Si $E \in \check{U}$, grE sera noté $\bar{E}$.
Soit $G^+ = grV^+$, $G^- = grS(V^-)$ et pour $\lambda \in P$: $G_\lambda = G^- \otimes \mathbb{C}(q)\tau(\lambda) \otimes G^+$, $G_\lambda^+ = \mathbb{C}(q)\tau(\lambda) \otimes G^+$. La décomposition suivante est claire : $gr\check{U} = \oplus_{\lambda\in P} G_\lambda$.

1.5. Soit $\lambda \in P$; λ définit un caractère de U_0 vers $\mathbb{C}(q)$ par $\langle\lambda, \tau(\lambda)\rangle = q^{(\lambda,\mu)}$. Désignons par $\mathbb{C}(q)v_\lambda$ le U_0-module de dimension 1 associé. Soit $U_q(\mathfrak{b}^+) = U_0U^+$. On définit une structure de $U_q(\mathfrak{b}^+)$-module sur $\mathbb{C}(q)v_\lambda$ en posant $x_iv_\lambda = 0$, $(1 \leq i \leq n)$.
Soit $M(\lambda) = U \otimes_{U_q(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}(q)v_\lambda$ le module de Verma de plus haut poids λ. Il possède un unique quotient simple noté $L(\lambda)$. On a $\dim_{\mathbb{C}(q)} L(\lambda) < +\infty$ pour $\lambda \in P^+$. Si $L(\lambda)^*$ est le U-module dual de $L(\lambda)$, il existe un isomorphisme de U-modules $L(\lambda)^* \simeq L(-w_0\lambda)$.

2. Préliminaires

Pour $\lambda \in P$, on pose : $L_\lambda^+ = \{m \in G_\lambda^+ \mid \dim_{\mathbb{C}(q)} adU^+(m) < +\infty\}$. Les résultats qui suivent sont contenus dans [9, 4.7,4.8].

2.1. Pour $\lambda \in P$ on peut définir une action de U sur G_λ^+, notée ad_λ, vérifiant :

(2.1.1) $\qquad ad_\lambda y_i(\overline{\tau(\lambda)}) = 0\,,\ ad_\lambda k_i(\overline{\tau(\lambda)}) = q^{1/4(\lambda,\alpha_i)}\overline{\tau(\lambda)}$

(2.1.2) $\qquad ad_\lambda x_i(\overline{\tau(\lambda)}) = q^{1/4(\lambda,\alpha_i)} adx_i(\overline{\tau(\lambda)})$

et pour $v^+ \in G^+$, $u \in U$ et $\Delta u = \sum u_{(1)} \otimes u_{(2)}$

(2.1.3) $\qquad ad_\lambda u(\overline{\tau(\lambda)}v^+) = \sum ad_\lambda u_{(1)}(\overline{\tau(\lambda)}) adu_{(2)}(v^+)$.

Remarque. Par (2.1.2) et (2.1.3), on remarque que $ad_\lambda u^+\tau(\lambda)$ et $adu^+\tau(\lambda)$, $u^+ \in U^+$, sont égaux à une constante multiplicative non nulle près.

2.2. Résumons les propriétés de L_λ^+.

Théorème 2.2. *Pour $\lambda \in P$, L_λ^+ est un sous-U-module de G_λ^+ pour l'action ad_λ.*

(i) *Soit $\lambda \notin -4P^+$, alors $L_\lambda^+ = 0$.*

On suppose $\lambda \in -4P^+$.

(ii) *Il existe un isomorphisme de U-modules : $I_\lambda : L_\lambda^+ \to L(-1/4\,\lambda)^*$.*

(iii) *$\overline{\tau(\lambda)} \in L_\lambda^+$ et $I_\lambda(\overline{\tau(\lambda)})$ est un vecteur de plus bas poids de $L(-1/4\,\lambda)^*$.*

(iv) *$L_\lambda^+ = (adU^+)\,\overline{\tau(\lambda)}$.*

(v) *Il existe un isomorphisme de U^+-modules : $L_\lambda^+ \simeq adU^+(\tau(\lambda))$, L_λ^+ étant muni de sa structure de adU^+-module.*

Preuve. La première assertion, (i) et (ii) se déduisent de [9, Corollaire 4.8]. De plus [9, Lemme 4.5] implique $\overline{\tau(\lambda)} \in L_\lambda^+$ et

$$(*) \qquad \dim_{\mathbb{C}(q)} adU^+\,\overline{\tau(\lambda)} = \dim_{\mathbb{C}(q)}(adU^+)\tau(\lambda).$$

(iii) découle de (2.1.2). Par (ii) on conclut $L_\lambda^+ = ad_\lambda U^+\,\overline{\tau(\lambda)}$ et (iv) résulte de 2.1. (v) est conséquence de (iv) et $(*)$. ◇

2.3. Nous cherchons maintenant les modules simples $L(\eta)$, $\eta \in P^+$, isomorphes à leurs duals. Nous sommes amenés à étudier le monoïde

$$\mathcal{H} := \{\eta \in P^+ \mid w_0(\eta) = -\eta\}$$

Lemme 2.3. *Pour toute algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$, $\mathcal{H}$ possède une $\mathbb{N}$-base $\mathcal{B}$. On a*

(i) *Cas* B_n , C_n , E_7, E_8, F_4, G_2 : $\mathcal{B} = \{\varpi_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ *i.e.* $\mathcal{H} = P^+$;

(ii) *Cas* A_n : $\mathcal{B} = \{\varpi_i + \varpi_{n+1-i}\,, 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\}$ *si n pair,* $\mathcal{B} = \{\varpi_i + \varpi_{n+1-i}\,, 1 \leq i < \frac{n+1}{2}\,,\ \varpi_{\frac{n+1}{2}}\}$ *si n impair;*

(iii) *Cas* D_n : $\mathcal{B} = \{\varpi_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ *si n pair,* $\mathcal{B} = \{\varpi_i\,, 1 \leq i \leq n-2\,,\ \varpi_{n-1} + \varpi_n\}$ *si n impair;*

(iv) *Cas* E_6 : $\mathcal{B} = \{\varpi_2\,,\ \varpi_4\,,\ \varpi_1 + \varpi_6\,,\ \varpi_3 + \varpi_5\,\}$.

Preuve. Les assertions se déduisent aisément de l'action de w_0 sur les poids fondamentaux décrite dans [2, Planches I à IV]. $\diamond$

2.4. Soit $1 \leq j \leq n$. On cherche un monôme X_j de U^+ tel que $X_j v_j = v'_j$ où v_j et v'_j sont respectivement le plus bas poids et le plus haut poids du module $L(\varpi_j)^*$. Cet élément sera utile dans la section 3.

Soit ξ le $\mathbb{C}$-automorphisme de U défini par :

$$\xi(x_i) = y_i,\ \xi(y_i) = x_i,\ \xi(k_i) = k_i,\ 1 \leq i \leq n, \quad \xi(q) = q^{-1}.$$

Grâce à ξ, il nous suffit de trouver un monôme Y_j de U^- tel que $Y_j u_j = u'_j$ où u_j et u'_j sont respectivement les plus bas poids et plus haut poids du module $L(\varpi_j)$. Par [10, Théorème 4.12], nous pouvons ramener ce problème à l'étude du module $E(\varpi_j)$, $E(\lambda)$ désignant le module simple de plus haut poids λ sur l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Rappelons la définition des foncteurs d'induction de Joseph [7], ainsi que quelques notations. Pour tout $\alpha \in R$ on choisit un vecteur $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. On désigne par $\mathfrak{b}^+$ la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha>0} \mathbb{C}x_\alpha)$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{b}^+ \oplus \mathbb{C}x_{-\alpha_i}$. Soit F un $U(\mathfrak{b}^+)$-module de dimension finie. On note $\mathcal{D}_{\alpha_i} F$ le plus grand quotient de dimension finie du $U(\mathfrak{p}_i)$-module $U(\mathfrak{p}_i) \otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} F$. Le foncteur $\mathcal{D}_{\alpha_i}$ est bien défini. Soit $w_0 = \sigma_1 \ldots \sigma_m$ une décomposition réduite de w_0. On pose : $w_j = \sigma_{j+1} \ldots \sigma_m\,,\ 0 \leq j \leq m-1$ et on désigne par $\beta(\sigma_i)$ la racine associée à σ_i. On définit alors le foncteur composé : $\mathcal{D}_{w_j} = \mathcal{D}_{\beta(\sigma_{j+1})} \mathcal{D}_{\beta(\sigma_{j+2})} \ldots \mathcal{D}_{\beta(\sigma_m)}$. Pour $\lambda \in P$, notons $\mathbb{C}_\lambda$ le $U(\mathfrak{b}^+)$-module de dimension 1 de poids λ.

Le théorème suivant résume les résultats de [7, 2.13,3.4].

Théorème 2.4. *Soit* $\lambda \in P^+$.

(i) *Pour* $0 \leq j \leq m-1$, *l'espace de plus bas poids de* $\mathcal{D}_{w_j}\mathbb{C}_\lambda$ *est engendré par un vecteur de poids* $w_j\lambda$. *Notons* $u_{w_j\lambda}$ *un tel vecteur.*

(ii) *Soit* $\alpha_i = \beta(\sigma_j)$. *Alors* $(w_j\lambda\,,\ \check{\alpha_i}) \geq 0$ *et on a* $u_{w_{j-1}\lambda} = x_{-\alpha_i}^{(w_j\lambda, \check{\alpha_i})} u_{w_j\lambda}$ *(à une constante multiplicative près).*

(iii) *Il existe un isomorphisme de* $U(\mathfrak{b}^+)$*-modules* $\mathcal{D}_{w_0}\mathbb{C}_\lambda \simeq E(\lambda)$.

Ce théorème nous fournit un algorithme pour la recherche des X_j, à partir d'une décomposition de w_0. Cette dernière est donnée dans [5] pour chaque algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Nous donnons ci-dessous la décomposition de w_0 ainsi que l'élément X_j qui en découle, ceci pour $\mathfrak{g}$ simple classique. L'algorithme s'applique aussi au cas où $\mathfrak{g}$ est exceptionnelle. Nous laissons au lecteur intéressé le soin du détail des calculs dans ce cas. Afin de simplifier les écritures, nous utiliserons le symbole "i" à la place de la réflexion associée à α_i.

a) $\mathfrak{g}$ de type A_n : $w_0 = 1\,2 \dots n\,1\,2 \dots n-1 \dots 1\,2\,1$. Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, soit $a_{i,k} = x_k\, x_{k-1} \dots x_i$, alors

$$X_j = a_{1,n-j+1} \dots a_{j-1,n-1} a_{j,n},\ 1 \leq j \leq n.$$

b) $\mathfrak{g}$ de type B_n : $w_0 = (1\,2 \dots n\,n-1 \dots 1)(2 \dots n\,n-1 \dots 2) \dots (n-1\,n\,n-1)(n)$. Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, soient $b_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2 x_k \dots x_{n-1} x_n^2 x_{n-1} \dots x_k$, $b_i = x_i x_{i+1} \dots x_n$, alors

$$X_j = b_{j,j} \dots b_{j,2} b_{j,1},\ 1 \leq j < n\,;\ X_n = b_n \dots b_1.$$

c) $\mathfrak{g}$ de type C_n : $w_0 = (1\,2 \dots n\,n-1 \dots 1)(2 \dots n\,n-1 \dots 2) \dots (n-1\,n\,n-1)(n)$. Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, on pose $c_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2 x_k \dots x_{n-1} x_n x_{n-1} \dots x_k$, alors

$$X_j = c_{j,j} \dots c_{j,2} c_{j,1}.$$

d) $\mathfrak{g}$ de type D_n : $w_0 = (1\,2 \dots n-2\,n-1\,n\,n-2 \dots 1)(2 \dots n\,n-1\,n\,n-2 \dots 2) \dots (n-1\,n)$. Pour $1 \leq i \leq k \leq n-2$, on pose : $d_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2 x_k \dots x_{n-2} x_n x_{n-1} \dots x_k$, $d_{n-1,i} = x_i\, x_{i+1} \dots x_{n-1}$; $d_{n,i} = x_i x_{i+1} \dots x_{n-2}\, x_n$; alors

$$X_j = d_{j,j} \dots d_{j,2} d_{j,1},\ 1 \leq j \leq n-2\,;$$

p 1cm

$$X_{n-1} = \begin{cases} d_{n-1,n-1} \dots d_{n-1,3} d_{n,2} d_{n-1,1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ d_{n,n} \dots d_{n-1,3} d_{n,2} d_{n-1,1} & \text{si } n \text{ impair;} \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} d_{n,n} \dots d_{n,3} d_{n-1,2} d_{n,1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ d_{n-1,n-1} \dots d_{n,3} d_{n-1,2}\, d_{n,1} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Remarque. Pour $1 \leq i \leq n$, soit λ_i un exposant de x_i dans la décomposition de X_j. Ecrivons $X_j = X_\nu x_i^{\lambda_i} X_\lambda$, où $\nu, \lambda \in P$ sont les poids de X_ν et X_λ. On a par construction : $\lambda_i = (\varpi_j - \lambda\,,\, \check{\alpha_i})$, cf. Théorème 2.4 (ii).

3. Structure du centre de U^+

3.1. Nous allons tout d'abord déterminer les éléments de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ invariants par l'action adjointe de U^+.

Définition. Soit $\mu \in P^+$. On désigne par X_μ un monôme de U^+ transformant un vecteur de plus bas poids de $L(\mu)^*$ en un vecteur de plus haut poids. On pose $s(\mu) = \mu - w_0(\mu)$, $e_{s(\mu)} = \tau(4\mu) ad X_\mu(\tau(-4\mu))$.

Remarquons que par le Théorème 2.2 (ii) et (v), $e_{s(\mu)}$ ne dépend du choix du monôme X_μ qu'à une constante multiplicative près. De plus pour l'action adjointe de U_0, le poids de $e_{s(\mu)}$ est $s(\mu)$.

Si M est un sous-adU^+-module de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, on pose $M^{U^+} = \{m \in M,\ adU^+(m) = 0\}$.

Proposition 3.1. *Soit $\lambda \in P$, alors on a :*

(i) *L'espace $\mathbb{C}(q)\tau(\lambda) \otimes V^+$ est un sous-adU^+-module de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$;*

(ii) *si $\lambda \in -4P^+$, $(\mathbb{C}(q)\tau(\lambda) \otimes V^+)^{U^+} = \mathbb{C}(q)\tau(\lambda) e_{s(-1/4\lambda)}$;*

(iii) *Si* $\lambda \notin -4P^+$, $(\mathbb{C}(q)\tau(\lambda)\otimes V^+)^{U^+} = \{0\}$;

(iv) $(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} = \oplus_{\mu\in P^+}\mathbb{C}(q)\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}$.

Preuve. (i) se vérifie facilement par le calcul de $adx_i(\tau(\lambda)v)$, $v \in V^+$, $1 \le i \le n$, v de poids μ.

Montrons l'inclusion $\supset$ dans (ii). Soit $\lambda \in -4P^+$. Par le Théorème 2.2 (ii) et (v), $adX_{-1/4\lambda}\tau(\lambda)$ est le plus haut poids de $adU^+\tau(\lambda)$. Par (i), l'inclusion est démontrée.

Montrons l'inclusion $\subset$ dans (ii) et (iii). Soient $\lambda \in P$ et $E \in V^+$ tels que $adU^+ (\tau(\lambda)\otimes E) = 0$. Par passage au gradué $adU^+(\overline{\tau(\lambda)}\otimes \bar{E}) = 0$, donc $\overline{\tau(\lambda)}\otimes\bar{E} \in L^+_\lambda$. D'où, si $\lambda \notin -4P^+$, $\bar{E} = 0$ par le Théorème 2.2 (i) et donc $E = 0$; si $\lambda \in -4P^+$, par le Théorème 2.2 (ii) $\overline{\tau(\lambda)}\otimes\bar{E}$ est proportionnel à $adX_{-1/4\lambda}(\overline{\tau(\lambda)}) = \overline{\tau(\lambda)}\otimes\bar{e}_{s(-1/4\lambda)}$. Le Théorème 2.2 (v) implique alors $\tau(\lambda)\otimes E \in \mathbb{C}(q)\tau(\lambda)\otimes e_{s(-1/4\lambda)}$.

Il reste à montrer (iv). Remarquons pour cela que $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) = \oplus_{\lambda\in P}\mathbb{C}(q)\tau(\lambda)\otimes V^+$; donc (iv) résulte de (i), (ii) et (iii). ◇

3.2. Pour tout $\mu \in P^+$, on pose $x_{s(\mu)} = \tau(s(-4\lambda))^{-1}e_{s(\mu)}$. On a $x_{s(\mu)} \in U^+$. Pour tout μ_i dans $\mathcal{B}$, cf. Lemme 2.3, on note : $e_{u_i} = e_{s(\mu_i)}$, $x_{u_i} = x_{s(\mu_i)}$, $1 \le i \le \text{card } \mathcal{B}$.

Proposition 3.2. *Soient* μ, $\nu \in P^+$. *Alors* $e_{s(\mu)}e_{s(\nu)}$, *resp.* $x_{s(\mu)}x_{s(\nu)}$, *est égal à* $e_{s(\mu+\nu)}$, *resp.* $x_{s(\mu+\nu)}$, *à une constante multiplicative non nulle près.*

Preuve. Soit $\eta \in P^+$. On sait, cf. Théorème 3.1 (iv), que $(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{C}(q)\tau(-4\eta)V^+ = \mathbb{C}(q)\tau(-4\eta)e_{s(\eta)}$. On a facilement

$$\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}\tau(-4\nu)e_{s(\nu)} \in (\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{C}(q)\tau(-4(\mu+\nu))V^+.$$

Comme cette intersection est égale à $(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{C}(q)\tau(-4(\mu+\nu))e_{s(\mu+\nu)}$, la proposition en découle. ◇

Nous pouvons maintenant expliciter la structure du centre de $Z(U^+)$.

Théorème 3.2. $Z(U^+)$, *resp.* $Z(V^+)$, *est l'algèbre de polynômes engendrée par les* x_{u_i}, *resp. les* e_{u_i}, $1 \le i \le$ *card* $\mathcal{B}$.

Preuve. ll suffit de montrer le théorème pour $Z(U^+)$, cf. 1.3. Supposons $\mu \in P^+$. Par le Théorème 3.1, on a : $adx_i(\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}) = 0$. D'où

$$\forall\, i, \quad x_i\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}k_i - q^{-2d_i}k_i\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}x_i = 0.$$

Comme $(\alpha_i, \alpha_i) = 2d_i$, il vient $q^{-(\alpha_i, s(\mu))}x_ix_{s(\mu)} = q^{(\alpha_i, -4\mu+s(\mu))}x_{s(\mu)}x_i$. On en déduit

(3.2.1) $$\mu \in P^+,\ x_{s(\mu)} \in Z(U^+) \iff \mu \in \mathcal{H}.$$

Supposons X non nul dans $Z(U^+)$, de poids η. Le calcul donne : $adx_i(\tau(-\eta)X) = 0$. D'où $\tau(-2\eta)(\tau(\eta)X) \in (\tau(-2\eta)\otimes V^+)^{U^+}$. Donc, par la Proposition 3.1, $-2\eta \in -4P^+$ et $X \in \mathbb{C}(q)x_{s(\eta/2)}$. Le théorème résulte alors de (3.2.1), de la Proposition 3.2 et du Lemme 2.3. ◇

3.3. Nous donnons dans cette section une méthode permettant de calculer explicitement les générateurs de $Z(U^+)$. Remarquons que par la Proposition 3.2, le Théorème 3.2 et le Lemme 2.3, il suffit de calculer $x_{s(\varpi_j)}$, $1 \le j \le n$. Pour cela nous allons utiliser le monôme X_j décrit en 2.4.

Le Théorème 2.2 exprime qu'il existe un isomorphisme de U^+-modules :

$$J_{\varpi_j} : L(\varpi_j)^* \xrightarrow{\sim} adU^+ \, \tau(-4\varpi_j).$$

Soit $v \in L(\varpi_j)^*$ de poids ν, il est clair que l'on peut écrire $J_{\varpi_j}(v) = \tau(-4\varpi_j)\tau(\nu+\varpi_j)x(v)$ où $x(v) \in U^+$. L'élément $x_{s(\varpi_j)}$ cherché est proportionnel à $x(v_j')$, où v_j' est le vecteur de plus haut poids de $L(\varpi_j)^*$.

Le lemme suivant, joint à la section 2.4, permet de calculer $x_{s(\varpi_j)}$.

Lemme 3.3. *Avec les notations de la Remarque 2.4, soit $X_j = X_\nu x_i^{\lambda_i} X_\mu$. Soit v_j le plus bas poids de $L(\varpi_j)^*$. Supposons $v = X_\lambda(v_j)$, $v' = x_i^{\lambda_i}(v)$. Alors :*

$$x(v') = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\lambda_j} (-1)^s q_j^{2(\lambda_j - 2s)} \begin{bmatrix} \lambda_j \\ s \end{bmatrix}_{d_j} x_j^{\lambda_j - s} x(v) x_j^s & si\ i = j; \\ q_i^{-\lambda_i} \sum_{s=0}^{\lambda_i} (-1)^s q_i^{\lambda_i - 2s} \begin{bmatrix} \lambda_i \\ s \end{bmatrix}_{d_i} x_i^{\lambda_i - s} x(v) x_i^s & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Preuve. Définissons par récurrence des éléments $x_\lambda \in U^+$ de poids λ par

$$\tau(-4\varpi_j)\tau(\lambda+\alpha_i)x_{\lambda+\alpha_i} = adx_i[\tau(-4\varpi_j)\tau(\lambda)x_\lambda].$$

Le calcul donne $x_{\lambda+\alpha_i} = q_i^{-2}(q_i^{4\delta_{ij} - 2(\lambda, \check{\alpha_i})} x_i x_\lambda - x_\lambda x_i)$. Le lemme découle de cette formule en itérant l'action de x_i et en utilisant $\lambda_i = (\varpi_j - \lambda, \check{\alpha_i})$. $\diamond$

4. Cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$

4.1. Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, les représentations fondamentales $L(\varpi_j)$ sont les j-ièmes puissances extérieures de la représentation $L(\varpi_1)$. Ceci nous permet un calcul plus commode des générateurs du centre de V^+. On a défini en [3, 5.3] la matrice fondamentale pour V^+ :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ e_1 & \alpha & & 0 & \\ e_{1,2} & e_2 & \alpha & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ e_{1,n} & e_{2,n} & e_n & & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha = q^2(q^2 - q^{-2})^{-1}$ et les $e_{i,j}$ sont donnés par récurrence par $e_{i,i} = k_i x_i$, $e_{i,j} = e_j e_{i,j-1} - q^{-2} e_{i,j-1} e_j$.

On a aussi défini le déterminant quantique d'une matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, à coefficients dans V^+, par $det_q\, M = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-q^2)^{l(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$, où $l(\sigma)$ est la longueur de la permutation σ. On définit alors de manière évidente les mineurs quantiques extraits de la matrice $\mathcal{D}$.

Théorème 4.1. (i) *Soit $1 \leq j \leq n$. On pose $I = \{n-j+2, \ldots, n+1\}$, $J = \{1, \ldots, j\}$ et on désigne par $\Delta_{I,J}$ le mineur quantique construit sur les lignes I et les colonnes J. Alors $e_{s(\varpi_j)} = \Delta_{I,J}(\mathcal{D})$ à une constante multiplicative près.*

(ii) *$Z(V^+)$ est engendré par $\{e_{s(\varpi_j)} e_{s(\varpi_{n+1-j})}, 1 \leq j < \frac{n+1}{2}\}$ si n est pair et par $\{e_{s(\varpi_j)} e_{s(\varpi_{n+1-j})}, 1 \leq j < \frac{n+1}{2} \,;\, e_{s(\varpi_{\frac{n+1}{2}})}\}$ si n est impair.*

Preuve. (i) découle de [3, 3.4, 5.3] et de la définition des $e_{s(\lambda)}$. (ii) est conséquence des Lemmes 2.3 et 3.2. $\diamond$

Remarques. 1. Ces résultats sont à comparer à ceux de [4] ou [6] pour le cas classique.

2. On ne peut pas retrouver la description du centre de $U(\mathfrak{n}^+)$ du cas classique en spécialisant q en 1.

3. J. Alev et F. Dumas ont obtenu dans [1] une description analogue du centre de U^+.

5. Centres des corps de fractions

5.1. On note $F(\check{U})$ l'espace des éléments *ad*-finis de $\check{U}$. Donc

$$F(\check{U}) = \{m \in \check{U} \mid \dim_{\mathbb{C}(q)} ad\check{U}(m) < +\infty\}.$$

On rappelle la décomposition, cf. [9 ,4.12]

$$F(\check{U}) = \oplus_{\lambda \in P^+}(ad\check{U})\tau(\lambda). \tag{5.1.1}$$

On note $K_\lambda^\pm$ le sous-espace de V^+ tel que $(adU^\pm)\tau(-4\lambda) = \tau(-4\lambda)K_\lambda^\pm$.

Lemme 5.1. *On a la décomposition :*

$$F(\check{U}) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+) = \oplus_{\lambda \in P^+} L_\lambda^+ = \oplus_{\lambda \in P^+}\tau(-4\lambda)K_\lambda^+.$$

Preuve. Il est clair que $\oplus_{\lambda \in P^+} L_\lambda^+ \subset F(\check{U}) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in F(\check{U}) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. On a par (5.1.1) : $u = \sum_{\lambda \in P^+} u_\lambda$, où $u_\lambda \in (ad\check{U})\tau(-4\lambda)$. Dans le gradué défini en 1.4, nous avons, cf. [9, 4.9]

$$\bar{u} = \sum_{\lambda \in P^+} \bar{u}_\lambda = \sum_{\lambda \in P^+} k_\lambda^- \overline{\tau(-4\lambda)} k_\lambda^+ \quad \text{où} \quad k_\lambda^\pm \in \bar{K}_\lambda^\pm.$$

Par décomposition triangulaire dans le gradué, il vient $k_\lambda^- \in \mathbb{C}(q)$. Par [3, 2.2], les modules $F(\check{U})$ et $gr(F(\check{U}))$ sont isomorphes et on a

$$\bar{u} \in \oplus_{\lambda \in P^+}(adU^+)\overline{\tau(-4\lambda)} \quad \text{implique} \quad u \in \oplus_{\lambda \in P^+}(adU^+)\tau(-4\lambda).$$

Donc $u \in \oplus_{\lambda \in P^+}\tau(-4\lambda)K_\lambda^+$. $\diamond$

On ordonne P^+ par la relation : $\lambda \leq \mu$ si $\lambda - \mu \in P^+$.

Proposition 5.1. V^+ *est limite inductive des* K_λ^+. *Precisément :*

(i) $K_\lambda^+ \subset K_\mu^+$, $\lambda \leq \mu$;

(ii) $V^+ = \sum_{\lambda \in P^+} K_\lambda^+$.

Preuve. On a évidemment $1 \in K_\lambda^+$. De plus, par [9, 4.12] il vient $K_\lambda^+ K_\mu^+ = K_{\lambda+\mu}^+$; (i) en découle aisément. Soit maintenant $u \in V^+$, par [8, Théorème 6.4], on peut décomposer u sous la forme $u = \sum_{\alpha \in S}\tau(\alpha)a_\alpha$ où $a_\alpha \in F(\check{U})$, S désignant une partie finie de P^+. Par passage au gradué, comme dans la démonstration du Lemme 5.1, on prouve $a_\alpha \in F(\check{U}) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Par le Lemme 5.1, il vient $u \in \sum_\lambda \tau(\alpha - 4\lambda)K_\lambda^+$. Comme $U_0V^+ \simeq U_0 \otimes V^+$, on obtient (ii). $\diamond$

Remarque. Ce résultat possède un analogue dans le cas classique, cf. [9, 6.12 (**)].

5.2. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Soit I un idéal bilatère non nul de V^+. Alors I contient au moins un élément central non nul.*

Preuve. On dira que l'idéal I vérifie la propriété (P_k), si I contient un élément e tel que $e = \sum_{\alpha \in S_k} e_\alpha$, où S_k désigne une partie de P^+ à k éléments et $e_\alpha \in V^+_\alpha$. Nous allons montrer par récurrence sur $k > 0$ l'assertion

"*Si I verifie (P_k), alors I contient un élément central non nul.*"

Montrons ceci pour $k = 1$. I contient donc un élément e de poids μ. Par la Proposition 5.1, on peut trouver λ tel que $e \in K^+_\lambda$. Il existe alors dans V^+ un élément v tel que $(adv)(\tau(-4\lambda)e) = \tau(-4\lambda)e_{s(\lambda)}$. On peut choisir v de poids $s(\lambda) - \mu$. En développant la partie gauche de l'égalité et moyennant quelques commutations on obtient $\sum_i v_i e v'_i = e_{s(\lambda)}$ où v_i , $v'_i \in V^+$. Donc $e_{s(\lambda)} \in I$ et $e_{s(\lambda)} e_{s(-w_0\lambda)} \in I \cap Z$ par la Proposition 3.2 et le Théorème 3.2. Supposons maintenant le théorème démontré pour les idéaux vérifiant (P_{k-1}). Soit I vérifiant (P_k) et e dans I. Ecrivons $e = \sum_{\mu \in S_k} e_\mu = e_{\mu_1} + \sum_{\mu \in S_{k-1}} e_\mu$. Comme précédemment on montre qu'il existe un élément central non nul z tel que $z + \sum_{\mu \in S'_{k-1}} e'_\mu \in I$. Par une considération de poids cette somme est non nulle. Posons $X = \sum_{\mu \in S'_{k-1}} e'_\mu$. Si X est central on a terminé. Sinon, on peut supposer $[e_i, X] \neq 0$. Alors $[e_i, z + X] \in I$ implique $[e_i, X] \in I$. Donc I vérifie (P_{k-1}) et le théorème est démontré. $\diamond$

Rappelons que V^+ est intègre, il possède donc un corps de fractions. La preuve du corollaire suivant est classique.

Corollaire 5.2. *Le centre du corps des fractions de V^+ est égal au corps des fractions du centre de V^+.*

5.3. Le Théorème 5.2 n'a pas d'analogue pour $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Toutefois, nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Soit I un idéal bilatère non nul de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Alors I contient un élément non nul de poids dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$.*

Preuve. Montrons que I contient un élément de poids. Soit X dans I, $X = \sum_\mu X_\mu \in I$, où μ parcourt une partie de Q^+ de cardinal k. Il est clair que l'on peut trouver $\alpha \in Q$ tel que les (α, μ) soient distincts. En appliquant l'action adjointe des $\tau(m\alpha)$, $m \in \mathbb{N}$, on obtient (à l'aide d'un déterminant de Vandermonde) un élément a non nul de poids dans I. Cet élément se décompose dans $U_0 \otimes V^+$. Supposons tout d'abord que $a = \tau(\mu)e_\beta$ où $e_\beta \in V^+_\beta$ (i.e. $k = 1$). Alors $e_\beta \in I \cap V^+$, et par le Théorème 5.2 on trouve $e_{s(\lambda)} \in P^+$ pour un $\lambda \in P^+$. D'où $\tau(-4\lambda)e_{s(\lambda)} \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$.

Supposons maintenant $a = \sum_{\mu_i \in S_k} \tau(\mu_i)e_{i,\beta}$ où S_k désigne une partie de P^+ à k éléments et $e_{i,\beta} \in V^+_\beta$. Montrons par récurrence sur k que I contient un élément de poids dans $I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$. On écrit $a = \tau(\mu)e_\beta + \sum_{\mu_i \in S_{k-1}} \tau(\mu_i)e_{i,\beta}$. En appliquant la méthode décrite pour $k = 1$ on trouve un élément b dans I de la forme $b = \tau(-4\lambda)e_{s(\lambda)} + \sum_{\nu_i \in S_{k-1}} \tau(\nu_i)e_{i,\gamma}$. Comme -4λ et les ν_i sont deux à deux distincts, il en résulte que b est non nul. Posons $X = \sum_{\mu_i \in S_{k-1}} \tau(\nu_i)e_{i,\gamma}$. Alors, soit $X \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$ et dans ce cas la récurrence est vérifiée; soit $X \notin \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$ et on a $adx_i(X) \neq 0$ pour un i. D'où $0 \neq adx_i(X) = adx_i(b) \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$. Ceci termine la démonstration. $\diamond$

Lemme 5.3. *$Ker\, s$ est engendré par les $\alpha_i + w_0(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

Preuve. Rappelons que $s = Id - w_0$ et $w_0^2 = Id$. Donc $\mathrm{Ker}\,(Id - w_0) = Im\,(Id + w_0)$. $\diamond$

Théorème 5.3. *Le centre du corps des fractions de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est engendré par les éléments $[\tau(-4\alpha_i)e_{s(\alpha_i)}]^{-1}\tau(4w_0(\alpha_i))e_{s(-w_0(\alpha_i))}$, $1 \leq i \leq n$. Lorsque $w_0 = -Id$, le centre est réduit au corps des constantes.*

Preuve. Soit z dans le centre de $Fract(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. Alors $I := \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)z \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est un idéal bilatère de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Donc par la Proposition 5.3 il existe v dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et β dans Q tels que $vz \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}_\beta$. Par la Proposition 3.1 (iv), on peut se ramener au cas $vz = \tau(-4\lambda)e_{s(\lambda)}$. Donc v a pour poids $s(\lambda)$ et $v \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$. Ceci équivaut à $v \in \oplus_{\{\mu | s(\mu) = s(\lambda)\}}\mathbb{C}(q)\tau(-4\mu)e_{s(\mu)}$. Le théorème est alors conséquence du Lemme 5.3 et de la Proposition 3.2. $\diamond$

Références

1. J. ALEV et F. DUMAS. *Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques*, preprint.
2. N. BOURBAKI. Groupes et Algèbres de Lie, Chap. VI, *Masson, Paris* 1981.
3. P. CALDERO. *Générateurs du centre de $U_q(\mathfrak{sl}(N+1))$*, Bull. Sci. Math., (à paraître).
4. J. DIXMIER. *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents IV*, Can. J. Math., 11 (1959), 321-344.
5. F. DU CLOUX. *Un algorithme de forme normale pour les groupes de Coxeter*, (1985), manuscrit.
6. A. JOSEPH. *A preparation theorem for the prime spectrum of a semi-simple Lie algebra* J. Algebra, 48 (1977), 241-289.
7. A. JOSEPH. *On the Demazure character formula*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 18 (1985), 389-419.
8. A. JOSEPH and G. LETZTER. *Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras*, J. Algebra, 153 (1992), 289-318.
9. A. JOSEPH and G. LETZTER. *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, Amer. J. Math., (à paraître).
10. G. LUSZTIG. *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math., 70 (1988), 237-249.
11. M. ROSSO. *Groupes quantiques, représentations linéaires, applications*, Thèse Paris VII, 1990.

13, rue Henry Dunant
94350 Villiers sur Marne, France