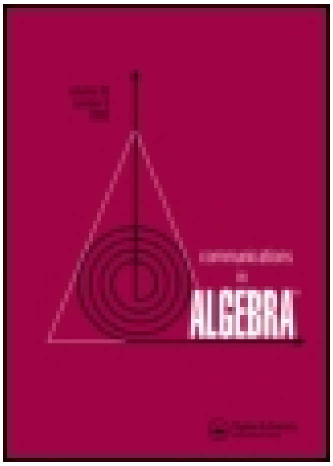

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.tandfonline.com/loi/lagb20

Invariants du corps de weyl sous l'action de groupes finis

J. Alev [a] & F. Dumas [b]

[a] Université de Reims, Mathématiques , U.R.A. 1870 da C.N.R.S B . P . 1039, Reims Cedex, 51687, France E-mail:

[b] Laboratoire de Mathématiques Pares , Université Blaise Pascal (Clermoni 2) , Aubière cedex, 63177, France E-mail:

Published online: 27 Jun 2007.

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 25(5), 1655–1672 (1997)

INVARIANTS DU CORPS DE WEYL SOUS L'ACTION DE GROUPES FINIS

J. Alev

Université de Reims, Mathématiques, U.R.A. 1870 du C.N.R.S. B.P. 1039, 51687 Reims Cedex, France.

jacques.alev@univ-reims.fr

F. Dumas

Université Blaise Pascal (Clermont 2), Laboratoire de Mathématiques Pures, 63177 Aubière Cedex, France.

fdumas@ucfma.univ-bpclermont.fr

ABSTRACT. Let R be an iterated Ore extension $k[y][x\,;\,\sigma,\delta]$ of the complex number field k, with σ a k-automorphism of $k[y]$ and δ a σ-derivation of $k[y]$ vanishing on k. We suppose that the center of R is k. Up to a change of variables, any finite group G of k-automorphisms of R acts linearly on $kx \oplus ky$. When the quotient division ring D of R is isomorphic to the Weyl skewfield $D_1(k)$, then $D^G \simeq D_1(k)$. In any other noncommutative case, D is isomorphic to the quantum Weyl skewfield $D_1^q(k)$ for some $q \in k^*$ not a root of one, and $D^G \simeq D_1^s(k)$ with $s = q^{|G|}$.

INTRODUCTION

Toute représentation d'un groupe fini G dans un espace vectoriel V de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ induit une action de G par automorphismes sur l'algèbre des fonctions régulières $\mathbb{C}[V]$. Le problème de Noether considère les invariants du prolongement de cette action au corps $\mathbb{C}(V)$ des fonctions rationnelles; il s'agit plus précisement de déterminer sous quelles hypothèses $\mathbb{C}(V)^G$ est extension transcendante pure de $\mathbb{C}$. Par application directe des théorèmes de Lüroth et Castelnuovo, la réponse est positive quel que soit G si $n \leq 2$. Un théorème classique (W. Burnside, E. Noether) établit que c'est aussi le cas pour $n = 3$ (*cf.* [9], [11]). L'objet de cet article est de résoudre, pour $n = 2$, un analogue non-commutatif du problème de Noether (théorème 3.7). A la suite des travaux initiés par I. M. Gelfand et A. A. Kirillov, définissant pour certaines algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie algébriques une forme d'équivalence birationnelle, il est naturel de conférer aux corps de Weyl (corps de fractions des algèbres de Weyl) le rôle correspondant à celui des corps commutatifs de fonctions rationnelles pour les groupes algébriques. Dans ce contexte, en désignant par R une algèbre de polynômes non-commutatifs en deux variables x et y sur $\mathbb{C}$ (remplaçant l'algèbre symétrique sur $V = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$), telle que R admette un corps gauche de fractions D isomorphe au corps de Weyl $D_1(\mathbb{C})$, la question s'énonce sous la forme:

D^G est-il $\mathbb{C}$-isomorphe à $D_1(\mathbb{C})$ pour tout sous-groupe fini G de $Aut_{\mathbb{C}}\, R$?

Les algèbres R considérées sont des extensions de Ore itérées de $\mathbb{C}$ en x et y ; on établit dans la partie 1 un résultat général sur les invariants des anneaux de polynômes de Ore à coefficients dans un corps K sous l'action d'un groupe d'automorphismes (non nécessairement fini) stabilisant K. Ce résultat est de même nature qu'un théorème classique de T. Miyata (*cf.* [11]) permettant de déduire le théorème de Burnside cité ci-dessus du théorème de Castelnuovo, ou d'établir un théorème de E. B. Vinberg sur les actions de groupes algébriques résolubles connexes en dimension finie quelconque (*cf.* [14]). La section 2 est consacrée au cas où R est l'algèbre de Weyl $A_1(\mathbb{C})$. Les sous-groupes finis de $Aut_{\mathbb{C}}\, R$ sont alors tous isomorphes à des sous-groupes finis de $SL(2,\mathbb{C})$, dont la classification à conjugaison près est bien connue. Les analogues R^G des algèbres (commutatives) de fonctions sur les surfaces de Klein ont fait l'objet d'une étude approfondie en [4], établissant en particulier que R^G est isomorphe à $R^{G'}$ si et seulement si les groupes G et G' sont isomorphes. On montre ici que, dans tous les cas, le corps de fractions de R^G est isomorphe à $D_1(\mathbb{C})$, répondant ainsi au problème énoncé plus haut. Dans la dernière partie de l'article, on résoud la question pour toute autre algèbre de polynômes R admettant un corps de fractions $\mathbb{C}$-isomorphe à $D_1(\mathbb{C})$; on établit un résultat semblable pour les algèbres R dont le corps de fractions est celui d'un plan quantique de centre $\mathbb{C}$, ce qui couvre toutes les situations.

Nous tenons à remercier T. Levasseur de nous avoir signalé l'article [9] de M. Kervaire et T. Vust.

1. Action d'un groupe d'automorphismes d'une extension de Ore sur son corps de fractions

1.1 Rappels et notations. (*Cf.* [6], [7], [8], [10].) Soit A un anneau non nécessairement commutatif. Pour tout endomorphisme σ de A, et toute σ-dérivation δ de A (*i.e.* δ additive vérifiant $\delta(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\delta(\beta) + \delta(\alpha)\beta$ pour tous $\alpha, \beta \in A$), on note $R = A[x\,;\sigma, \delta]$ l'anneau des polynômes de Ore en une indéterminée x, à coefficients (à gauche) dans A, avec la loi de commutation $x\alpha = \sigma(\alpha)x + \delta(\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$. On abrège en $R = A[x\,;\sigma]$ lorsque δ est nulle, et en $R = A[x\,;\delta]$ lorsque $\sigma = id_A$ et δ une dérivation de A. On note deg_x le degré en x naturellement défini sur R. Pour tout anneau noethérien intègre R, on désigne par $Frac\,R$ le corps gauche des fractions de R. En particulier, si A est noethérien intègre et $K = Frac\,A$, un automorphisme σ et une σ-dérivation δ de A se prolongent canoniquement en un automorphisme de K, que l'on note encore σ, et en une σ-dérivation de K, que l'on note encore δ. Les anneaux $R = A[x\,;\sigma, \delta]$ et $S = K[x\,;\sigma, \delta]$ sont intègres et noethériens, et admettent le même corps de fractions. On note : $K(x\,;\sigma, \delta) = Frac\,R = Frac\,S$, avec naturellement $K(x\,;\sigma) = Frac\,A[x\,;\sigma]$ et $K(x\,;\delta) = Frac\,A[x\,;\delta]$. Suivant un procédé classique, le corps gauche de fractions rationnelles $D = K(x\,;\sigma, \delta)$ peut être plongé dans le corps gauche de séries de Laurent $F = K((x^{-1}\,;\sigma^{-1}, -\delta\sigma^{-1}))$. Les éléments de F sont des séries de Laurent $\sum_{n\geq m} \alpha_n x^{-n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_n \in K$ pour tout $n \geq m$, avec, pour tout $\alpha \in K$:

$$x^{-1}\alpha = \sum_{n\geq 1} \sigma^{-1}(-\delta\sigma^{-1})^n(\alpha)x^{-n} = \sigma^{-1}(\alpha)x^{-1} - x^{-1}\delta\sigma^{-1}(\alpha)x^{-1}.$$

On note $v_{x^{-1}}$ la valuation discrète en x^{-1} naturellement définie sur F, et donc en particulier sur D. Elle est liée au degré en x sur l'anneau S par: $v_{x^{-1}}(s) = -deg_x(s)$ pour tout $s \in S$. Les lemmes suivants explicitent certaines propriétés bien connues des anneaux de polynômes de Ore sous une forme utile pour la suite.

1.2 Lemme. *Soient K un corps non nécessairement commutatif, σ un automorphisme et δ une σ-dérivation de K, et S l'anneau de polynômes de Ore $K[x\,;\,\sigma,\delta]$. Pour tous $a,b \in S$, $b \neq 0$, il existe $q,r \in S$ uniques tels que $a = qb + r$ avec $deg_x(r) < deg_x(b)$, et il existe $q',r' \in S$ uniques tels que $a = bq' + r'$ avec $deg_x(r') < deg_x(b)$.*

Preuve. La démonstration du théorème 1.6 p. 92 de [6] est valable pour K non nécessairement commutatif. Le fait que σ soit un automorphisme de K assure l'existence de la division euclidienne à gauche et à droite (*cf.* [6] proposition 10.2 p. 53). □

1.3 Lemme. *Les notations et hypothèses sont celles du lemme 1.2. Soit u un élément de S tel que $deg_x(u) \geq 1$.*

(i) *Pour tout sous-corps L non nécessairement commutatif de K, la famille $\mathcal{U} = \{u^i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ est L-libre à gauche et à droite.*

(ii) *Si le L-module libre à gauche T engendré par $\mathcal{U}$ est un sous-anneau de S, il existe un endomorphisme d'anneau σ' de L et une σ'-dérivation δ' de L tels que $T = L[u\,;\,\sigma',\delta']$. Si de plus T est égal au L-module libre à droite T' engendré par $\mathcal{U}$, alors σ' est un automorphisme de L.*

(iii) *Si K est commutatif, σ' est égal à la restriction à L de σ^n, avec $n = deg_x(u)$.*

Preuve. Le premier point est clair en considérant le terme de plus haut degré d'une combinaison L-linéaire à gauche d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$. Pour le second, soit $\alpha \in L \subseteq T$. Le produit $u\alpha$ est de même degré en x que u et appartient à l'anneau T ; il est donc de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 u$ avec $\alpha_0, \alpha_1 \in L$ déterminés de façon unique. On définit ainsi de L dans L deux applications $\sigma' : \alpha \longmapsto \alpha_1$ et $\delta' : \alpha \longmapsto \alpha_0$ telles que $u\alpha = \sigma'(\alpha)u + \delta'(\alpha)$ pour tout $\alpha \in L$. Si l'on note $u = \lambda_n x^n + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0$ avec $n \geq 1$, $\lambda_i \in K$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et $\lambda_n \neq 0$, alors $\lambda_n \sigma^n(\alpha) = \sigma'(\alpha)\lambda_n$ pour tout $\alpha \in L$, ce qui prouve que σ' est un endomorphisme d'anneau de L, et montre le point (iii). L'associativité du produit et la distributivité dans l'anneau T assurent que δ' est une σ'-dérivation. Si $T' = T$, il existe pour tout $\beta \in L$ deux éléments β_1 et β_0 de L tels que $\beta u = u\beta_1 + \beta_0 = \sigma'(\beta_1)u + \delta'(\beta_1) + \beta_0$, d'où $\beta = \sigma'(\beta_1)$ et la surjectivité de σ'. □

1.4 Notations. Pour tout anneau A, on note $Aut\,A$ le groupe des automorphismes d'anneau de A. Si A est une algèbre sur un corps commutatif k, on pose $Aut_k\,A = \{g \in Aut\,A\,;\, g(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in k\}$. Pour tout $g \in Aut\,A$, on désigne par A^g le sous-anneau $\{a \in A\,;\, g(a) = a\}$. Si G est un sous-groupe de $Aut\,A$, le sous-anneau $\{a \in A\,;\, g(a) = a$ pour tout $g \in G\}$ des invariants de A sous l'action de G est noté A^G. Lorsque A admet un corps gauche de fractions $D = Frac\,A$, tout $g \in G$ se prolonge naturellement en un automorphisme de D, et D^G est un sous-corps de D.

Le théorème suivant, fondamental pour les résultats des sections 2 et 3, décrit les invariants des anneaux de polynômes de Ore sous l'action des groupes d'automorphismes stabilisant le corps de coefficients. Il constitue un analogue non commutatif d'un résultat de T. Miyata (*cf.* [11]) à la base de démonstrations de théorèmes classiques de W. Burnside ou E. B. Vinberg (*cf.* [9], [14]).

1.5 Théorème. *Soient K un corps non nécessairement commutatif, σ un automorphisme et δ une σ-dérivation de K. Notons S l'anneau de polynômes de Ore $K[x\,;\,\sigma,\delta]$ et $D = K(x\,;\,\sigma,\delta)$ son corps de fractions. Soit G un sous-groupe de $Aut\,S$ tel que $g(K) \subseteq K$ pour tout $g \in G$.*

(i) *Si $S^G \subseteq K$, alors $S^G = D^G = K^G$.*

(ii) *Si $S^G \not\subseteq K$, alors, pour tout $u \in S^G$ de degré ≥ 1 minimum parmi les degrés des éléments de S^G de degré ≥ 1, il existe σ' un automorphisme de K^G et δ' une σ'-dérivation de K^G tels que $S^G = K^G[u\,;\,\sigma',\delta']$ et $D^G = Frac(S^G) = K^G(u\,;\,\sigma',\delta')$.*

Preuve. On convient de noter ici simplement deg au lieu de deg_x le degré en x dans S. Soient $g \in G$ et $m = deg(g(x))$; l'hypothèse $g(K) \subseteq K$ implique $deg(g(s)) \in m\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ pour tout $s \in S$ et donc $m = 1$ par surjectivité de g. On en déduit:

$$deg(g(s)) = deg(s) \text{ pour tous } g \in G \text{ et } s \in S. \qquad (*)$$

Si $S^G \subset K$, alors $S^G = K^G$. Si $S^G \not\subseteq K$, on choisit dans l'ensemble des éléments s de S^G tels que $deg(s) \geq 1$ un élément u de degré minimum. Afin d'appliquer le lemme 1.3 à $L = K^G$, on vérifie que le K^G-module libre à gauche T engendré par les puissances de u est égal au sous-anneau S^G de S. L'inclusion $T \subseteq S^G$ est claire. Pour la réciproque, fixons $s \in S^G$. D'après le lemme 1.2, il existe q_1 et r_1 uniques dans S tels que $s = q_1u + r_1$ et $deg(r_1) < deg(u)$. Pour tout $g \in G$, on a alors: $s = g(s) = g(q_1)g(u) + g(r_1) = g(q_1)u + g(r_1)$. Puisque $deg(g(r_1)) = deg(r_1) < deg(u)$ d'après (*), il résulte de l'unicité de q_1 et r_1 que $g(q_1) = q_1$ et $g(r_1) = r_1$. Ainsi $r_1 \in S^G$ ce qui, comme $deg(r_1) < deg(u)$ et par choix de u, implique $deg(r_1) < 1$ et donc $r_1 \in K^G$. De plus, $q_1 \in S^G$, et $deg(q_1) < deg(s)$ car $deg(u) \geq 1$. En résumé, on a obtenu $s = q_1u + r_1$ avec $r_1 \in K^G$ et $q_1 \in S^G$ tel que $deg(q_1) < deg(s)$. On décompose de même q_1 en $q_1 = q_2u + r_2$ avec $r_2 \in K^G$ et $q_2 \in S^G$ tel que $deg(q_2) < deg(q_1)$. On obtient $s = q_2u^2 + r_2u + r_1$. On réitère i fois jusqu'à obtenir $q_i \in K^G$, d'où $s \in T$. Le même raisonnement en utilisant la division euclidienne à droite dans S établit que S^G est aussi égal au L-module libre à droite T' engendré par les puissances de u. D'après le point (ii) du lemme 1.3, il existe σ' un automorphisme de K^G et δ' une σ'-dérivation de K^G tels que $S^G = K^G[u\,;\,\sigma', \delta']$.

Dans les deux cas (i) et (ii), l'inclusion $Frac(S^G) \subseteq D^G$ est claire. Pour la réciproque (qui découle du théorème 5.3 de [12] dans le cas particulier où G est fini), il s'agit de montrer que:

pour tous a et b non-nuls dans S, $ab^{-1} \in D^G$ implique $ab^{-1} \in Frac(S^G)$ (**)

On raisonne par récurrence sur $deg(a) + deg(b)$. Si $deg(a) + deg(b) = 0$, on a $a \in K$, $b \in K$. Donc $ab^{-1} \in D^G$ équivaut à $ab^{-1} \in K^G \subseteq S^G$; d'où le résultat. Supposons la propriété (**) vraie pour tous les couples (a, b) tels que $deg(a) + deg(b) \leq n$, avec $n \geq 0$ entier fixé. Choisissons alors a et b non-nuls dans S satisfaisant $ab^{-1} \in D^G$ et $deg(a) + deg(b) = n + 1$. Quitte à remplacer ab^{-1} par son inverse, on peut supposer que $deg(b) \leq deg(a)$. D'après le lemme 1.2, il existe $q, r \in S$ uniques tels que:

$$a = qb + r \quad \text{avec } deg(r) < deg(b) \leq deg(a). \qquad (***)$$

Pour tout $g \in G$, l'égalité $g(ab^{-1}) = ab^{-1}$ permet d'introduire l'élément $c = a^{-1}g(a) = b^{-1}g(b)$ de D. On a vu en 1.1 que D est munie de la valuation discrète $v_{x^{-1}}$, (que l'on convient de noter ici simplement v), telle que $v(s) =$

$-deg(s)$ pour tout $s \in S$. Il résulte donc de (*) que $v(c) = 0$. Appliquant g à (***), il vient $g(a) = g(q)g(b) + g(r)$, c'est-à-dire $qbc + rc = ac = g(q)bc + g(r)$, que l'on réécrit: $(g(q) - q)bc = rc - g(r)$. La valuation du premier membre est $v(g(q) - q) + v(b)$. Pour le second, $v(g(r)) = -deg(g(r)) = -deg(r) = v(r) = v(rc)$, d'où $v(rc - g(r)) \geq v(r)$. Comme $g(q) - q$, b et r sont dans S, on a ainsi vérifié que: $deg(g(q) - q) + deg(b) \leq deg(r)$. Puisque $deg(b) \leq deg(r)$ est incompatible avec (***), on déduit que $g(q) = q$, et donc $g(r) = rc$. Remarquons alors que $g(rb^{-1}) = rc(bc)^{-1} = rb^{-1}$. Ceci étant vrai pour tout $g \in G$, on a finalement obtenu $ab^{-1} = (qb + r)b^{-1} = q + rb^{-1}$ avec $q \in S^G$ et $rb^{-1} \in D^G$ tel que $deg(r) + deg(b) < 2deg(b) \leq deg(a) + deg(b) = n + 1$. Si $r = 0$, alors $ab^{-1} = q \in S^G$. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence à rb^{-1}: il existe r_1 et b_1 non nuls dans S^G tels que $rb^{-1} = r_1 b_1^{-1}$, de sorte que $ab^{-1} = (qb_1 + r_1)b_1^{-1} \in Frac(S^G)$. □

2. Application aux groupes finis d'automorphismes de l'algèbre de Weyl

2.1 Rappels et notations. Dans toute cette section, k désigne le corps des nombres complexes. L'algèbre de Weyl $A_1(k)$ est l'extension de Ore $k[y][x\,;\,\delta]$ de l'anneau $k[y]$ pour δ la dérivation usuelle ∂_y de $k[y]$, avec donc la relation de commutation $xy - yx = 1$. Le corps de fractions de $A_1(k)$ est le corps de Weyl sur k, désigné par $D_1(k)$. On a: $D_1(k) = k(y)(x\,;\,\partial_y) = k(w)(x\,;\,\tau)$ où $w = xy$ et τ est le k-automorphisme de $k(w)$ défini par $\tau(w) = w + 1$. Le groupe $Aut_k\, A_1(k)$ a fait l'objet de nombreux travaux (*cf.* bibliographie de [4]). En particulier, sa structure de somme amalgamée suivant leur intersection du sous-groupe des automorphismes linéaires et d'un sous-groupe d'automorphismes triangulaires permet de démontrer le résultat fondamental suivant (*cf.* [4]):

L'action naturelle de $SL(2,k)$ sur $kx \oplus ky$ induit une injection de $SL(2,k)$ dans $Aut_k\, A_1(k)$, et tout sous-groupe fini de $Aut_k\, A_1(k)$ est conjugué à l'image par cette injection d'un sous-groupe fini de $SL(2,k)$.

Ces derniers sont classifiés à conjugaison près en cinq types (*cf.* par exemple [13]). En notant $\zeta_n = \exp(2i\pi/n) \in k$ pour tout entier $n \geq 1$, considérons dans $SL(2,k)$ les éléments:

$$\theta_n = \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} -\zeta_5^3 & 0 \\ 0 & -\zeta_5^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8^7 & \zeta_8^7 \\ \zeta_8^5 & \zeta_8 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \frac{1}{\zeta_5^2 - \zeta_5^{-2}} \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^{-1} & 1 \\ 1 & -(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \end{pmatrix}.$$

On définit dans $SL(2,k)$:

le groupe cyclique $\mathbb{C}_n$ d'ordre n, engendré par θ_n,

le groupe diédral binaire $\mathbb{D}_n$ d'ordre $4n$, engendré par θ_{2n} et μ,

le groupe tétraédral binaire $\mathbb{T}$ d'ordre 24, engendré par θ_4, μ et η,

le groupe octaédral binaire $\mathbb{O}$ d'ordre 48, engendré par θ_8, μ et η,

le groupe icosaédral binaire $\mathbb{I}$ d'ordre 120, engendré par φ, ν et ψ.

Un sous-groupe de $Aut_k\, A_1(k)$ est dit ***admissible*** s'il est l'image par l'injection canonique ci-dessus d'un sous-groupe fini de $SL(2,k)$ de l'un des cinq types précédents. Tout sous-groupe fini G de $Aut_k\, A_1(k)$ est donc conjugué à un sous-groupe admissible G_0, et $D_1(k)^G \simeq D_1(k)^{G_0}$. Remarquons que $\mu^2 = \nu^2 = \theta_2$, de sorte que tout sous-groupe admissible de $Aut_k\, A_1(k)$ du type $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{O}$ ou $\mathbb{I}$ contient l'involution e de $A_1(k)$ définie par $e(x) = -x$ et $e(y) = -y$.

L'étude des algèbres $A_1(k)^G$ est l'objet de l'article [4]. Il y est en particulier démontré que, pour deux sous-groupes finis G_1 et G_2 non isomorphes de $Aut_k\, A_1(k)$, les algèbres $A_1(k)^{G_1}$ et $A_1(k)^{G_2}$ ne sont pas isomorphes. Comme $A_1(k)^{G_i} = D_1(k)^{G_i} \cap A_1(k)$, pour $i = 1, 2$, les sous-corps $D_1(k)^{G_1}$ et $D_1(k)^{G_2}$ sont distincts. Ils sont cependant isomorphes, comme le montre le théorème suivant.

2.2 Théorème. *On désigne par k le corps des nombres complexes. Pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k A_1(k)$, on a : $D_1(k)^G \simeq D_1(k)$.*

Preuve. On allège les notations en posant $R = A_1(k)$ et $D = D_1(k) = Frac\, R$. L'élément $w = xy$ de R vérifie $x^m w - w x^m = m x^m$ pour tout $m \geq 1$. Le corps de fractions de la sous-algèbre U_m de R engendrée par x^m et w est $Q_m = k(w)(x^m\,;\,\tau^m)$, où τ est le k-automorphisme de $k(w)$ défini par $\tau(w) = w + 1$. En particulier, $Q_1 = k(w)(x\,;\,\tau) = D$. Il est clair que $Q_m \simeq D$

pour tout $m \geq 1$. Posons encore $v = x^{-1}y$, de sorte que $wv - vw = 2v$. Comme $wv^{-1} = x^2$, on a $Q_2 = k(w)(x^2\,; \tau^2) = k(v)(w\,; 2v\partial_v)$. On note S la sous-algèbre $k(v)[w\,; 2v\partial_v]$.

Soit G un sous-groupe fini de $Aut_k\, R$. Comme on l'a vu en 2.1, on peut sans restriction supposer que G est admissible. Dans le cas cyclique d'ordre n, le groupe G est engendré par l'élément g_n vérifiant $g_n(x) = \zeta_n x$ et $g_n(y) = \zeta_n^{-1} y$. On a: $g(w) = w$, donc $D^G = D^{g_n} = Q_1^{g_n} = Q_n \simeq D$. Supposons maintenant que l'on est dans l'un des cas $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{O}$, ou $\mathbb{I}$. Comme on l'a remarqué plus haut, G contient alors l'involution e définie par $e(x) = -x$ et $e(y) = -y$, dont le sous-corps invariant n'est autre que $D^e = Q_2$. Soit $g \in G$ quelconque. Il existe $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in k$, satisfaisant $\alpha\varepsilon - \beta\gamma = 1$, tels que $g(x) = \alpha x + \beta y$ et $g(y) = \gamma x + \varepsilon y$. En observant simplement que $g(x) = x(\alpha + \beta v)$ et $g(y) = x(\gamma + \varepsilon v)$, on obtient:

$$g(v) = \frac{\gamma + \varepsilon v}{\alpha + \beta v} \in k(v). \qquad (\dagger)$$

Par ailleurs, $g(w) = \alpha\gamma x^2 + \beta\varepsilon y^2 + \alpha\varepsilon xy + \beta\gamma yx$. Avec les relations $yx = w - 1$, $x^2 = wv^{-1} = v^{-1}w - 2v^{-1}$ et $y^2 = v + vw = wv - v$, il vient:

$$g(w) = \Big(\frac{\beta\varepsilon v^2 + (\alpha\varepsilon + \beta\gamma)v + \alpha\gamma}{v}\Big)w + \Big(\frac{\beta\varepsilon v^2 - \beta\gamma v - 2\alpha\gamma}{v}\Big). \qquad (\ddagger)$$

Il résulte de ($\dagger$) et ($\ddagger$) que les restrictions à l'algèbre $S = k(v)[w\,; 2v\partial_v]$ des prolongements à D des éléments de G détermine un sous-groupe $G' \simeq G/(e)$ de $Aut_k\, S$. Comme $e \in G$ et $D^e = Q_2 = Frac\, S$, on en déduit que $D^G = Q_2^{G'}$.

L'assertion ($\dagger$) permet d'appliquer à S le théorème 1.5, pour $K = k(v)$, $\delta = 2v\partial_v$ et $S = K[w\,; \delta]$. D'après le lemme 2.18 de [12], on a: $[Q_2 : Q_2^{G'}] \leq |G'| < +\infty$ donc $S^{G'} \not\subseteq K$. (On peut en fait montrer ici, à l'aide du théorème 3.3.4 de [7], que $[Q_2 : Q_2^{G'}] = |G'|$.) Avec la remarque 1.3.(iii), il existe alors $u \in S^{G'}$ de degré en w strictement positif et δ' dérivation de $k(v)^{G'}$ tels que $S^{G'} = k(v)^{G'}[u\,; \delta']$ et $Q_2^{G'} = k(v)^{G'}(u\,; \delta')$. D'après le théorème de Lüroth, $k(v)^{G'}$ est une extension transcendante pure $k(z)$ de k. Si l'on avait δ' identiquement nulle sur $k(z)$, le sous-corps $Q_2^{G'}$ de Q_2 serait $k(z, u)$ commutatif de degré de transcendance > 1 sur k. Comme $Q_2 \simeq D_1(k)$ et comme k est de caractéristique nulle, ceci est impossible (*cf.* [10] corollaire 6.6.18). Donc $\delta'(z) \neq 0$; en posant $t = \delta'(z)^{-1}u$, on obtient $Q_2^{G'} = k(z)(t\,;\,\partial_z) \simeq D_1(k)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.3 Exemples. Reprenons les notations de la preuve de 2.2. Pour $G = \mathbb{C}_n$, on a vu que $D^G = Q_n$ est engendré par $w = xy$ et x^n; un couple (p_n, q_n) de générateurs de $D^{\mathbb{C}_n}$ satisfaisant $[p_n, q_n] = 1$, (figurant déja en [4]), est donc simplement donné par: $p_n = x^n$ et $q_n = (nx^n)^{-1}xy$.

A titre d'exemple moins immédiat, donnons ici un calcul de générateurs de D^G dans le cas où $G = \mathbb{D}_n$. En appliquant ce qui précède au sous-groupe normal $\mathbb{C}_{2n}$ de $\mathbb{D}_n$, et en rappelant que $\mu \in Aut_k\, A_1(k)$ est défini par $\mu(x) = iy$ et $\mu(y) = ix$, on a: $D^{\mathbb{D}_n} = (D^{\mathbb{C}_{2n}})^\mu = Q_{2n}^\mu$. L'élément $v = x^{-1}y$ vérifie $v^n = (w-2)(w-4)\cdots(w-2n)x^{-2n}$. En notant τ le k-automorphisme de $k(w)$ défini par $\tau(w) = w+1$, on déduit:

$$Q_{2n} = k(w)(x^{2n}\,;\,\tau^{2n}) = k(w)(v^n\,;\,\tau^{-2n}) = k(v^n)(w\,;\,2nv^n\partial_{v^n}).$$

En outre, $\mu(w) = 1 - w$ et $\mu(v) = v^{-1}$, d'où $\mu(v^n) = v^{-n}$. Posons $u_n = 4n(2w-1)^{-1}$, c'est-à-dire $w = (4n + u_n)(2u_n)^{-1}$, de sorte que l'action de μ sur $k(w) = k(u_n)$ se simplifie en $\mu(u_n) = -u_n$. La commutation entre u_n et v^n se déduit du calcul de $\tau^{-2n}(u_n) = u_n(1-u_n)^{-1}$ et s'exprime sous la forme: $u_n^{-1}v^n - v^n u_n^{-1} = v^n$. On a ainsi:

$$Q_{2n} = k(u_n)(v^n\,;\,\tau^{-2n}) = k(v^n)(u_n^{-1}\,;\,v^n\partial_{v^n}).$$

Soit $s_n = \frac{1}{2}(v^{-n} - v^n)u_n^{-1}$, qui vérifie $\mu(s_n) = s_n$ et $Q_{2n} = k(v^n)(s_n\,;\,\delta)$, avec $\delta = \frac{1}{2}(1 - v^{2n})\partial_{v^n}$. On effectue un dernier changement de variable $t_n = (v^n+1)(v^n-1)^{-1}$ pour ramener l'action de μ sur $k(v^n) = k(t_n)$ à $\mu(t_n) = -t_n$. Le calcul de $\delta(t_n) = t_n$ permet d'expliciter la relation de commutation $s_nt_n - t_ns_n = t_n$. Ainsi: $Q_{2n} = k(t_n)(s_n\,;\,\delta)$ et $D^{\mathbb{D}_n} = Q_{2n}^\mu = k(t_n^2)(s_n\,;\,\delta)$ qui, avec la relation $s_nt_n^2 - t_n^2s_n = 2t_n^2$, est clairement isomorphe à $D_1(k)$.

Un couple (p_n, q_n) de générateurs du sous-corps $D^{\mathbb{D}_n}$ tel que $[p_n, q_n] = 1$ est donné par:

$$p_n = \frac{1}{16n}\big((x^{-1}y)^{-n} - (x^{-1}y)^n\big)\Big(\frac{(x^{-1}y)^n - 1}{(x^{-1}y)^n + 1}\Big)^2(2xy-1),$$

$$q_n = \Big(\frac{(x^{-1}y)^n + 1}{(x^{-1}y)^n - 1}\Big)^2.$$

Par une méthode comparable, dont nous ne reproduisons pas ici les calculs, on peut de même déterminer explicitement en fonction de x et y des générateurs p et q de D^G tels que $[p,q]=1$ pour $G=\mathbb{T}$ et $G=\mathbb{O}$.

3. Application aux algèbres non commutatives de polynômes en deux variables

3.1 Notations. L'algèbre de Weyl en caractéristique nulle est un exemple d'anneau de polynômes de Ore en deux variables sur k, de dimension infinie sur son centre k. L'objet de cette section est de montrer que le théorème 1.5 s'applique aux sous-groupes finis de k-automorphismes de toute algèbre de ce type. Précisons d'abord les données.

Dans toute cette section, k est un corps commutatif. On considère dans l'anneau commutatif de polynômes $A=k[y]$ en une indéterminée y un k-automorphisme σ et une σ-dérivation δ s'annulant sur k. On note R la k-algèbre $A[x\,;\,\sigma,\delta]$. En désignant par K le corps $Frac\,A=k(y)$ commutatif, R est une sous-k-algèbre de $S=K[x\,;\,\sigma,\delta]$, de même corps gauche de fractions $D=K(x\,;\,\sigma,\delta)$. En résumé:

$$R=k[y][x\,;\,\sigma,\delta]\subseteq S=k(y)[x\,;\,\sigma,\delta]\subseteq D=k(y)(x\,;\,\sigma,\delta).$$

Plusieurs choix particuliers de σ et δ joueront dans la suite un rôle déterminant. Si $\sigma=id_A$ et $\delta=\partial_y$, on retrouve l'algèbre de Weyl $R=A_1(k)$. Toujours avec $\sigma=id_A$, mais pour $\delta=y\partial_y$, on obtient pour R l'algèbre enveloppante $U_1(k)$ de l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2 sur k, avec $xy-yx=y$. Considérons maintenant un scalaire $q\in k$ non-nul, et prenons pour σ le k-automorphisme de A défini par $\sigma(y)=qy$. En choisissant $\delta=0$, on obtient pour R le plan quantique $P_1^q(k)$, dans lequel $xy=qyx$. Si δ est la σ-dérivation de Jackson sur A, définie par $\delta(y)=1$, l'anneau R obtenu est l'algèbre de Weyl quantique sur k, notée $A_1^q(k)$, avec $xy-qyx=1$.

On note toujours $D_1(k)$ le corps de fractions de $A_1(k)$; donc $D_1(k)=k(y)(x\,;\,\partial_y)=k(w)(x\,;\,\tau)$ avec $w=xy$ et $\tau\in Aut_k k(w)$ défini par $\tau(w)=w+1$. On appelle corps de Weyl quantique sur k, et l'on note $D_1^q(k)$, le corps de fractions du plan quantique $P_1^q(k)$. On a: $D_1^q(k)=k(y)(x\,;\,\sigma)$ avec $\sigma\in$

$Aut_k k(y)$ défini par $\sigma(y) = qy$. Lorsque $q \neq 1$, $D_1^q(k)$ est encore isomorphe au corps de fractions de l'algèbre de Weyl quantique $A_1^q(k)$; *cf.* proposition 3.2 ci-dessous. Pour $q = 1$, on a: $P_1^q(k) = k[x,y]$ et $D_1^q(k) = k(x,y)$ commutatifs, alors que $A_1^q(k) = A_1(k)$.

L'objectif est de d'étudier, pour un sous-groupe fini G de $Aut_k\, R$, le sous-corps D^G de D. On s'appuie pour cela sur la classification de la proposition 3.2 ci-dessous. La situation commutative (i) est résolue par le théorème de Noether-Castelnuovo: $D^G = k(x,y)^G$ est une extension transcendante pure sur k. Le théorème 3.7 synthétise les résultats non-commutatifs lorsque k est le corps des nombres complexes et lorsque D n'est pas de dimension finie sur son centre. Les propositions 3.4 à 3.6 sont des étapes pour y parvenir.

3.2 Proposition. *A k-isomorphisme près, quatre cas seulement sont possibles pour l'algèbre $R = k[y][x\,;\,\sigma,\delta]$, en s'excluant deux à deux:*

(i) $R = k[x,y]$ *est commutatif;*
(ii) *il existe $q \in k$ non-nul et différent de 1 tel que $R = P_1^q(k)$;*
(iii) *il existe $q \in k$ non-nul et différent de 1 tel que $R = A_1^q(k)$;*
(iv) *δ est une k-dérivation non-nulle de $k[y]$ et $R = k[y][x\,;\,\delta]$.*

De plus, $D = Frac\, R$ est k-isomorphe à $D_1^q(k)$ dans les cas (ii) *et* (iii), *et à $D_1(k)$ dans le cas* (iv).

Preuve. La classification correspond essentiellement au résultat 2.1 de [5]; on en redonne ici le principe sous une forme adaptée à l'énoncé. Il existe $q \in k$ non-nul et $s \in k$ tels que $\sigma(y) = qy + s$. Si $q \neq 1$, on pose $y' = y + s(q-1)^{-1}$ pour obtenir $R = k[y'][x\,;\,\sigma,\delta]$ avec $\sigma(y') = qy'$ et $\delta(y') = \delta(y) \in A$. Dans $k[y']$, on décompose $\delta(y') = \phi(y')(1-q)y' + r$ avec $\phi(y') \in k[y']$ et $r \in k$. Il en résulte que $x' = x - \phi(y')$ vérifie $x'y' - qy'x' = r$. Ainsi $R = k[y'][x'\,;\,\sigma,\delta']$ avec $\delta'(y') = r \in k$. Si $r = 0$, alors $R = P_1^q(k)$. Sinon, on fait le nouveau changement de variable $x'' = r^{-1}x'$ pour conclure que $R = A_1^q(k)$. On suppose maintenant que $q = 1$. Si $s = 0$, alors $\sigma = id_A$ et $R = k[y][x\,;\,\delta]$, ce qui correspond aux cas (i) ou (iv) suivant que δ est nulle ou non sur A. Si $s \neq 0$, on pose d'abord $y' = s^{-1}y$ pour se ramener à $R = k[y'][x\,;\,\sigma,\delta]$ avec $\sigma(y') = y' + 1$ et $\delta(y') = s^{-1}\delta(y)$. Puis on note $x' = x + \delta(y')$, qui satisfait

$x'y' = (y'+1)x'$, de sorte que $R = k[y'][x'\,;\sigma]$ est l'algèbre enveloppante $U_1(k)$. Elle est du type (iv) en écrivant $R = k[x'][y'\,; -x'\partial_{x'}]$.

Le fait que $Frac\,A_1^q(k) \simeq D_1^q(k)$ lorsque $q \neq 1$ est démontré par exemple à la proposition 3.2 de [2]. Dans le cas (iv), on écrit $R \subseteq S = k(y)[x\,;\delta] = k(y)[x'\,;\partial_y]$ avec $x' = \delta(y)^{-1}x$ pour conclure que $Frac\,R \simeq D_1(k)$. Enfin, $P_1^q(k)$ et $A_1^{q'}(k)$ ne sont pas k-isomorphes (on peut par exemple observer avec les propositions 1.5 de [3] et 1.1.4 de [1] que leurs groupes de k-automorphismes respectifs diffèrent). Il est clair alors, d'après le corollaire 3.11.a de [2], que les quatre cas s'excluent deux à deux à k-isomorphisme près. □

3.3 Lemme. *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition 3.2. Dans les cas* (ii) *et* (iii), *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *le centre de R est k;*

(2) *le centre de D est k;*

(3) *le corps D n'est pas de dimension finie sur son centre;*

(4) *le scalaire q de k n'est pas racine de l'unité dans k.*

Dans le cas (iv), *on a encore l'équivalence de* (1), (2), (3), *et la condition* (4) *est remplacée par: le corps k est de caractéristique nulle.*

Preuve. Ces résultats sont classiques; *cf.* par exemple [2] lemme 1.2, [5] lemmes 2.2 et 2.3, et [10] proposition 6.6.14. □

3.4 Proposition. *On suppose que q est un élément non-nul et non racine de l'unité dans k de caractéristique nulle, et que R est le plan quantique $P_1^q(k)$. Alors:*

(i) *quel que soit $q' \in k$, $D \simeq D_1^{q'}(k)$ si et seulement si $q' = q^{\pm 1}$, ce qui équivaut encore à $R \simeq P_1^{q'}(k)$;*

(ii) *pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k\,R$, on a : $D^G \simeq D_1^{q'}(k)$ pour $q' = q^{|G|}$.*

Preuve. Si $D \simeq D_1^{q'}(k)$, alors $q' = q^{\pm 1}$ d'après le corollaire 3.11.c de [2]. Si réciproquement $q' = q^{-1}$, il existe un k-isomorphisme ϕ de $P_1^q(k)$ sur $P_1^{q'}(k)$, engendré par x' et y' avec $x'y' = q'y'x'$, tel que $\phi(x) = y'$ et

$\phi(y) = x'$, ce qui montre (i). Pour (ii), fixons G un sous-groupe fini de $Aut_k R$. D'après la proposition 1.4.4 de [1], il existe pour tout $g \in G$, un couple $(\alpha_g, \beta_g) \in k^* \times k^*$ tel que $g(y) = \alpha_g y$ et $g(x) = \beta_g x$. On note m et m' les ordres respectifs des sous-groupes cycliques $\{\alpha_g \,;\, g \in G\}$ et $\{\beta_g \,;\, g \in G\}$ de k^*. En particulier, $k(y)^G = k(y^m)$. On peut appliquer le théorème 1.5 à l'extension $S = k(y)[x\,;\,\sigma]$ de $R = k[y][x\,;\,\sigma]$, où $\sigma(y) = qy$. On a $S^G \neq k(y)^G$ car $x^{m'} \in S^G$. Soit n le minimum des degré en x des éléments de S^G de degré en x strictement positif. Pour tout $u \in S^G$ de degré en x égal à n, il existe σ' et δ' tels que $S^G = k(y^m)[u\,;\,\sigma', \delta']$. D'après l'assertion (iii) du lemme 1.3, l'automorphisme σ' de $k(y^m)$ est la restriction de σ^n à $k(y^m)$. Montrons d'abord que l'on peut choisir pour u un monôme. Pour cela, développons $u = a_n(y)x^n + \cdots + a_1(y)x + a_0(y)$ avec $n \geq 1$, $a_i(y) \in k(y)$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et $a_n(y) \neq 0$. Notons $p \in \mathbb{Z}$ la valuation en y de $a_n(y)$ dans l'extension $k((y))$ de $k(y)$. Le groupe G opérant diagonalement sur $kx \oplus ky$, le monôme $v = y^p x^n$ appartient comme u à S^G. Ainsi, $S^G = k(y^m)[v\,;\,\sigma^n]$ et $D^G = k(y^m)(v\,;\,\sigma^n) \simeq D_1^{q'}$ pour $q' = q^{mn}$. Il reste à vérifier que $mn = |G|$. Soit $g \in G$ se prolongeant en un automorphisme intérieur de D; il existe $r \in D$ non-nul tel que $g(s) = rsr^{-1}$ pour tout $s \in D$. En notant d l'ordre de g dans G, on a alors r^d central dans D, donc $r^d \in k$ d'après le lemme 3.3. On plonge $D = k(y)(x\,;\,\sigma)$ dans $k(y)((x\,;\,\sigma))$ pour obtenir $r \in k$ et donc $g = id_R$. Par un argument classique de théorie de Galois non-commutative, (*cf.* [7] théorème 3.3.4), on en déduit que $[D : D^G] = |G|$. Dès lors, considérons:

$$\begin{aligned} D^G = k(y^m)(y^p x^n\,;\,\sigma^{mn}) \;\subseteq\; L = k(y)(y^p x^n\,;\,\sigma^n) &= k(y)(x^n\,;\,\sigma^n) \\ \subseteq\; D = k(y)(x\,;\,\sigma). \end{aligned}$$

On a: $[D : L] = n$ et $[L : D^G] = m$. On conclut $|G| = [D : D^G] = mn$. □

3.5 Proposition. *On suppose que q est un élément non-nul et non racine de l'unité dans k, et que R est l'algèbre de Weyl quantique $A_1^q(k)$. Alors:*

(i) *quel que soit $q' \in k$, $D \simeq D_1^{q'}(k)$ si et seulement si $q' = q^{\pm 1}$, ce qui équivaut encore à $R \simeq A_1^{q'}(k)$;*

(ii) *pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k R$, on a : $D^G \simeq D_1^{q'}(k)$ pour $q' = q^{|G|}$.*

Preuve. Le point (i) se montre comme en 3.4, en remarquant que si $q' = q^{-1}$, il existe un k-isomorphisme ϕ de $A_1^q(k)$ sur $A_1^{q'}(k)$, engendré par x' et y' avec $x'y' - q'y'x' = 1$, tel que $\phi(x) = -q'y'$ et $\phi(y) = x'$. Pour (ii), fixons G un sous-groupe fini de $Aut_k R$. D'après la proposition 1.5 de [3], il existe pour tout $g \in G$ un scalaire $\alpha_g \in k$ non-nul tel que $g(x) = \alpha_g^{-1} x$ et $g(y) = \alpha_g y$. Ainsi G est isomorphe au sous-groupe cyclique $\{\alpha_g\,;\, g \in G\}$ de k^*, d'ordre $m = |G|$, avec $k(y)^G = k(y^m)$. Posons $u = yx$, de sorte de $u \in R^G$. En notant δ' la σ-dérivation de $k(y)$ définie par $\delta'(y) = y$, l'anneau $S = k(y)[x\,;\,\sigma,\delta]$ est encore égal à $S = k(y)[u\,;\,\sigma,\delta']$. La restriction à S du prolongement à D de tout $g \in G$ détermine un automorphisme de S. Puisque u est de degré en x égal à 1, on déduit du théorème 1.5 que $S^G = k(y)^G[u\,;\,\sigma,\delta'] = k(y^m)[u\,;\,\sigma,\delta']$ et $D^G = k(y^m)(u\,;\,\sigma,\delta')$. Par récurrence à partir de $xy - qyx = 1$, la relation de commutation dans S^G est: $uy^m - q^m y^m u = [m]_q y^m$, avec $[m]_q = 1 + q + \cdots + q^{m-1}$. Il suffit de poser $w = y^{-m}u + (q-1)^{-1}y^{-m}$ pour obtenir $S^G = k(y^m)[w\,;\,\sigma]$, avec donc $wy^m = q^m y^m w$. On conclut que $D^G = k(y^m)(w\,;\,\sigma) \simeq D_1^{q'}(k)$ pour $q' = q^m$. □

3.6 Proposition. *On suppose que k est de caractéristique nulle et que $R = k[y][x\,;\,\delta]$, avec δ une dérivation non-nulle de $A = k[y]$.*

(i) *Pour toute dérivation δ' de A, les k-algèbres $R = k[y][x\,;\,\delta]$ et $R' = k[y][x'\,;\,\delta']$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $\lambda \in k^*$, $\alpha \in k^*$ et $\beta \in k$, tels que les polynômes $p = xy - yx = \delta(y)$ et $p' = x'y - yx' = \delta'(y)$ de $k[y]$ vérifient $p'(y) = \lambda p(\alpha y + \beta)$.*

(ii) *Un automorphisme g de R est triangulaire (c'est-à-dire $g(A) \subseteq A$) si et seulement s'il existe $\alpha_g \in k^*$, $\beta_g \in k$, $\lambda_g \in k^*$, et $a_g \in A$ tels que $g(y) = \alpha_g y + \beta_g$ et $g(x) = \lambda_g x + a_g$, avec $p(\alpha_g y + \beta_g) = \alpha_g \lambda_g p(y)$.*

(iii) *Si de plus $\delta(y) \notin k$, alors tout $g \in Aut_k R$ est triangulaire, et $D^G \simeq D_1(k)$ pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k R$.*

Preuve. On a: $xa = ax + p\partial_y(a)$ pour tout $a \in A = k[y]$. En particulier, $xp = p[x + \partial_y(p)]$. Donc p est un élément normalisant de l'anneau R. Il en résulte que l'idéal bilatère I de R engendré par les commutateurs $[r,s] = rs - sr$ avec $r, s \in R$ est l'idéal principal engendré par $p = [x,y]$. Notons de même $p' = [x', y]$ générateur de I' dans $R' = k[y][x'\,;\,\delta']$. Si θ est un k-isomorphisme de R sur R', on a $\theta(I) = I'$, et il existe donc $\lambda \in k^*$ tel que: $p' = \lambda\theta(p) = \lambda p(\theta(y))$. Lorsque $p \notin k$, il en résulte que le degré en x' de $\theta(y)$ est nul. La restriction de θ à $k[y]$ détermine alors un k-automorphisme de $k[y]$, d'où l'existence de $\alpha \in k$ non-nul et $\beta \in k$ tels que $\theta(y) = \alpha y + \beta$. Lorsque $p \in k^*$, il en est de même de $p' = \lambda p$, et $p'(y) = \lambda p(\alpha y + \beta)$ pour tous α et β. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in k^*$, $\alpha \in k^*$ et $\beta \in k$ tels que $p'(y) = \lambda p(\alpha y + \beta)$, on définit un k-isomorphisme θ de R sur R' en posant $\theta(y) = \alpha y + \beta$ et $\theta(x) = \alpha^{-1}\lambda^{-1}x'$, ce qui achève la preuve de l'assertion (i). Le point (ii) est clair, en raisonnant sur les degrés en x et y dans R et A, et en notant que $p(\alpha_g y + \beta_g) = g(p) = [g(x), g(y)] = \alpha_g\lambda_g p(y)$.

Supposons maintenant que le degré en y dans A de $p = \delta(y)$ est un entier $n \geq 1$. Tout k-automorphisme g de R transforme p en un générateur $\varepsilon_g p$ de I, pour un scalaire $\varepsilon_g \in k^*$, de sorte que $g(p) \in A$. Comme $deg_x g(p) = n\, deg_x g(y)$, on a nécessairement $deg_x g(y) = 0$, c'est-à-dire $g(y) \in A$ et g triangulaire. Le corps $K = k(y)$ vérifie ainsi $g(K) \subseteq K$, et la restriction à $S = k(y)[x\,;\,\delta]$ du prolongement de g à D détermine un automorphisme de S. Si G est un sous-groupe fini de $Aut_k\, R$, on applique à S le théorème 1.5. avec la remarque (iii) du lemme 1.3. Comme dans la preuve du théorème 2.2, on a $[D : D^G] < +\infty$, d'où $D^G \neq k(y)^G$. Il existe $u \in S^G$ de degré en x strictement positif, et δ' une k-dérivation de $k(y)^G$, tels que $S^G = k(y)^G[u\,;\,\delta']$, et $D^G = k(y)^G(u\,;\,\delta')$. Puisque $D \simeq D_1(k)$ d'après la proposition 3.2, et k est de caractéristique nulle, le théorème de Lüroth et le corollaire 6.6.18 de [10] permettent de conclure de la même façon que dans la preuve de 2.2 que $D^G \simeq D_1(k)$. □

3.7 Théorème. *Soit $R = k[y][x\,;\,\sigma, \delta]$ sur le corps des complexes k, avec σ un k-automorphisme et δ une σ-dérivation de $k[y]$. Soit $D = Frac\, R$. On suppose que D n'est pas de dimension finie sur son centre. Deux cas seulement sont possibles et s'excluent mutuellement:*

(1) *$D \simeq D_1(k)$, et alors $D^G \simeq D_1(k)$ pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k\, R$;*

(2) *il existe $q \in k$ non-nul et non racine de l'unité tel que $D \simeq D_1^q(k)$, et alors $D^G \simeq D_1^{q^{|G|}}(k)$ pour tout sous-groupe fini G de $Aut_k\, R$.*

Preuve. Il suffit de montrer le théorème pour R vérifiant l'une des trois assertions (ii), (iii), (iv) de la proposition 3.2. On conclut à (2) dans les cas (ii) et (iii) en utilisant le lemme 3.3 et les propositions 3.4 et 3.5. Pour $R = k[y][x\,;\,\delta]$ algèbre d'opérateurs différentiels, (1) est démontré par le lemme 3.3 et la proposition 3.6 lorsque $\delta(y) \notin k$. Le seul cas non commutatif restant est celui où $\delta(y) \in k$ non-nul. Alors $R = k[y][x'\,;\,\partial_y]$ pour $x' = \delta(y)^{-1}x$ est l'algèbre de Weyl $A_1(k)$. Comme k est ici le corps des complexes, on applique le théorème 2.2. □

3.8 Remarque. Pour toute extension de Ore $R = k[y][x\,;\,\sigma, \delta]$, l'action d'un groupe fini G d'automorphismes triangulaires de R peut se ramener par changement de variables à une action diagonale sur $kx \oplus ky$. En effet, pour tout $g \in G$, on a $g(y) = \alpha_g y + \beta_g$ et $g(x) = \lambda_g x + a_g$ avec $\alpha_g \in k^*, \lambda_g \in k^*, \beta \in k$ et $a_g \in k[y]$. Le groupe G opère sur $E = k[y] \oplus kx$ en stabilisant $k[y]$ et sur $F = k \oplus ky$ en fixant k. Par semi-simplicité, il existe $y' \in F$ et $x' \in E$ tels que $F = k \oplus ky'$ et $E = k[y] \oplus kx'$, avec les droites ky' et kx' stables sous l'action de G. Les éléments x' et y' engendrent R sur k. Le même raisonnement s'applique par récurrence aux sous-groupes finis d'automorphismes triangulaires de toute extension de Ore itérée en n variables.

References

1. J. Alev et M. Chamarie, *Automorphismes et dérivations de quelques algèbres quantiques*, Commun. Algebra **20** (1992), 1787–1802.
2. J. Alev et F. Dumas, *Sur le corps de fractions de certaines algèbres quantiques*, J. Algebra **170** (1994), 229–265.
3. J. Alev et F. Dumas, *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi*, Nagoya Math. J. (à paraître).
4. J. Alev, T. J. Hodges and J. -D. Velez, *Fixed Rings of the Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$*, J. Algebra **130** (1990), 83–96.
5. M. Awami, M. Van den Bergh and F. Van Oystaeyen, *Note on derivations of graded rings and classification of differential polynomial rings*, Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988), 175–183.
6. P. M. Cohn, *Free rings and their relations (second edition)*, Academic Press, London, 1985.
7. P. M. Cohn, *Skew Field constructions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
8. K. R. Goodearl and R. B. Warfield, *An introduction to noncommutative Noetherian rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

9. M. Kervaire et T. Vust, *Fractions rationnelles invariantes par un groupe fini*, in "Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie", D.M.V. Sem. **13**, 157–179, Birkhäuser, Basel, 1989.

10. J. C. Mc Connell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Wiley, Chichester, 1987.

11. T. Miyata, *Invariants of certain groups I*, Nagoya Math. J. **41** (1971), 68–73.

12. S. Montgomery, *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings*, Lecture Notes in Maths. **818**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

13. T.A. Springer, *Invariant Theory*, Lecture Notes in Maths. **585**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

14. E. B. Vinberg, *Rationality of the field of invariants of a triangular group*, Vestnik Mosk. Univ. Mat. **37** (1982), 23–24.

Received: July 1996

Revised: September 1996