INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude des algèbres enveloppantes quantifiées et plus particulièrement de leurs centres. Les travaux de Lusztig, Rosso, De Concini - Kac, Joseph - Letzter et al. ont montré que les propriétés de ces algèbres ressemblent à celles des algèbres enveloppantes classiques. Nous avons essayé d'élargir, et parfois préciser, ces ressemblances tout en nous appuyant sur un phénomène essentiellement quantique : le couplage non dégénéré entre les quantifications des sous-algèbres de Borel opposées d'une algèbre de Lie semi-simple.

Avant de présenter les résultats que nous avons obtenus, dont certains ont fait l'objet des publications [7], [8] et [9], nous devons introduire quelques notations.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang n et $\mathbb{K}$ un corps contenant l'indéterminée q. Soient P, resp. Q, les réseaux des poids entiers, resp. radiciels, associés à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$. On désigne par $U_q = U_q(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}[x_i,\, k_i^{\pm},\, y_i;\, 1 \leq i \leq n]$ l'algèbre enveloppante quantifiée définie comme dans [13], [19] et [20]. On introduit "l'algèbre quantique simplement connexe" $\check{U}_q \supset U_q$ définie en [25, 3.1]. Alors, U_q et $\check{U}_q$ peuvent être munies d'une structure d'algèbre de Hopf où l'on définit une action adjointe notée ad.
L'algèbre $\check{U}_q$ admet une décomposition triangulaire

$$\check{U}_q = U^- \otimes \check{U}_0 \otimes U^+$$

où $U^+ = \mathbb{K}[x_i;\, 1 \leq i \leq n]$, $U^- = \mathbb{K}[y_i, 1 \leq i \leq n]$ et $\check{U}_0$ est isomorphe à $\mathbb{K}[P]$. On désigne par $\tau(\lambda) \in \check{U}_0$ l'image de $\lambda \in P$.
Soit P^+ l'ensemble des poids entiers dominants. Pour $\lambda \in P^+$ on note $L_q(\lambda)$ le $\check{U}_q$-module simple de plus haut poids λ. On introduit l'espace $C(\lambda)$ des coefficients du module $L_q(\lambda)$. On peut alors munir $C(\lambda)$ d'une structure de $ad\,\check{U}_q$-module, cf. [chap. I, 2.2, 2.4]. A l'aide de la forme ad-invariante introduite par M. Rosso, [35], et T. Tanisaki, [40], on définit le morphisme de $ad\,\check{U}_q$-modules $\zeta\,:\,\check{U}_q \to \check{U}_q^*$. On remarque alors que :
— L'homomorphisme ζ se restreint en un isomorphisme de $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$ sur $C(\lambda)$.
— $\mathbb{C}_q[G] := \bigoplus_{\lambda \in P^+} C(\lambda)$ est égal à l'espace des éléments ad-finis, cf. [chap. I, 3.1] de $Im\zeta$.

Le résultat principal du chapitre I consiste en une preuve simplifiée du théorème de Joseph-Letzter qui assure que le sous-espace $F(\check{U}_q)$ des éléments ad-finis de $\check{U}_q$, cf. [chap. I, 1.5], est somme directe des $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$, $\lambda \in P^+$. En utilisant ces résultats, il est facile d'adapter au cas quantique certaines démonstrations sur les algèbres enveloppantes classiques. Nous appliquons cette remarque à l'étude du centre du corps des fractions de $\check{U}_q$.

Pour $\lambda \in P^+$, fixons une base du module $L_q(\lambda)$. On désigne par (s) la matrice à coefficients dans $\check{U}_q$, dont l'image par ζ est égale à la matrice naturelle des coefficients de $L_q(\lambda)$ dans la base donnée. Cette matrice est utile pour l'étude de $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. En particulier, nous montrons que l'image de $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$ par la graduation de Joseph-Letzter possède une décomposition de type triangulaire, cf. [chap. I, 4.3].
Pour terminer le chapitre I, nous donnons des résultats sur l'algèbre $\mathbb{C}_q[B^-]$, déformation quantique de l'algèbre des fonctions régulières sur le sous-groupe de Borel B^-.

Dans le chapitre II, nous étudions, à l'aide des résultats du chapitre I, les centres Z et $\check{Z}$ de U_q et $\check{U}_q$. Tout d'abord, on remarque que $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$, $\lambda \in P^+$, possède un unique élément central à une constante multiplicative près. Ce dernier se calcule à l'aide de la "trace quantique" de la matrice (s) associée à λ. La décomposition de $F(\check{U}_q)$ décrite plus haut donne aisément :

$$\check{Z} = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} z_\lambda.$$

De plus, par une méthode de M. Rosso, cf. [36], on sait calculer l'image de z_λ par une projection sur $\check{U}_0$, analogue au morphisme de Harish-Chandra. On peut alors déterminer les structures d'algèbres des centres Z et $\check{Z}$: Z est isomorphe à la $\mathbb{K}$-algèbre du monoïde $-4P^+ \cap Q$, et $\check{Z}$ est isomorphe à la $\mathbb{K}$-algèbre du monoïde $-4P^+$, cf. [24].
Le centre $\check{Z}$ est donc une algèbre de polynômes engendrée par les $z_i := z_{\varpi_i}$, $1 \leq i \leq n$, que nous pouvons calculer à l'aide de la matrice (s) associée à ϖ_i. En théorie, les z_i peuvent s'exprimer grâce à la matrice (s) associée à un poids commun dit "basique", cf. [chap. I, 4.4]. En pratique un tel calcul se révèle difficile. Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, on montre comment le déterminant quantique fournit une forme explicite pour les z_i.
Lorsqu'on spécialise q en 1, les éléments z_i ne permettent pas de retrouver les générateurs classiques du centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Toutefois on trouve, en combinant linéairement les constantes et les z_i de nouveaux générateurs de $\check{Z}$, appelés Casimir quantiques, qui eux possèdent la propriété voulue.
On s'intéresse ensuite aux singularités de l'algèbre Z, ceci pour $\mathfrak{g}$ de type quelconque. Cela nous amène de façon naturelle à l'étude du réseau $4P^+ \cap Q$. Ainsi, nous prouvons que Z est une algèbre normale et Gorenstein, cf. [chap. II, 5.2, 5.3], quelquesoit le type de $\mathfrak{g}$. Nous donnons en 5.5 les propriétés optimales de Z selon le type de $\mathfrak{g}$.

Soit V^+ l'algèbre engendrée par les $k_i x_i$, $1 \leq i \leq n$. Dans le chapitre III nous montrons que le centre $Z(V^+)$ de l'algèbre V^+ est une $\mathbb{K}$-algèbre de polynômes. Puis nous donnons une méthode pour en calculer les générateurs. Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, on exprime ces derniers en termes de mineurs quantiques.
La démonstration des résultats s'organise de la façon suivante. Par [25, 4.7 et 4.8], on sait que $ad\,U^+.\tau(-4\lambda)$ peut être muni d'une structure de $\check{U}_q$-module simple de

plus haut poids. Un vecteur de plus haut poids de ce module s'écrit sous la forme $\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}$ où $e_{r(\mu)} \in V^+$, $r(\mu) = \mu - w_0(\mu)$, w_0 étant le plus grand élément de W. On démontre alors :

$$Z(V^+) = \mathbb{K}[e_{r(\mu)};\, \mu \in \mathcal{H}]$$

où $\mathcal{H} = \{\mu \in P^+ \mid w_0(\mu) = -\mu\}$. Comme $\mathcal{H}$ est un monoïde libre, on obtient que $Z(V^+)$ est une algèbre de polynômes.
Puisque $e_{r(\mu)}e_{r(\nu)} \in \mathbb{K}e_{r(\mu+\nu)}$, on peut déduire un système de générateurs (algébriquement indépendants) de la connaissance de $e_{r(\varpi_i)}$. On donne en 2.3 une méthode itérative pour calculer ceux-ci.
Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ on peut grâce aux résultats du chapitre II écrire les $e_{r(\varpi_i)}$ comme les déterminants quantiques d'une matrice à coefficients dans V^+.
Dans le paragraphe 5, on obtient des résultats concernant le centre du corps de fractions de V^+ et de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) := \mathbb{K}[\tau(\varpi_i),\, x_i;\, 1 \leq i \leq n]$.

Pour tout $w \in W$, on note $w.$ l'action tordue de w sur le réseau des poids, cf. [chap. I, 1.2]. Dans le cas classique, il est montré dans [4] que le module simple de plus haut poids λ possède une résolution par des sommes directes de modules de Verma $C_i := \bigoplus_{l(w)=i} M(w.\lambda)$, où $l(w)$ désigne la longueur de l'élément w. Dans le chapitre IV, nous montrons qu'il existe une résolution analogue pour les $\check{U}_q$-modules $L_q(\lambda)$, $\lambda \in P^+$.
Soit t complexe non racine de l'unité, on sait par [28] que pour $q = t$, $L_q(\lambda)$ se spécialise en un module simple $L_t(\lambda)$. Il est alors naturel de regarder si la résolution de $L_q(\lambda)$ se transforme en un complexe exact après une telle spécialisation. En s'inspirant de la preuve originale de Bernstein, Gelfand et Gelfand, nous montrons comment un tel résultat découle de l'analogue quantique du théorème de Borel-Weil-Bott, cf. [3]. Signalons que ce problème a déjà été étudié pour le type A_n par M. Rosso dans [37].
Dans le dernier paragraphe, nous prouvons que lorsque μ appartient à certaines chambres de Weyl, cf. [chap. IV, 3.3], alors le module $L_t(\mu)$ est l'image d'un module simple de dimension finie par un foncteur d'induction exact. Il en résulte qu'il existe comme dans le cas classique, cf. [16], une résolution du module simple $L_t(\mu)$ par des sommes directes de modules de Verma.

Notons enfin que la plupart des résultats obtenus dans les chapitres I, II et III se généralisent immédiatement au cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple et restent valables après spécialisation en t non racine de l'unité.

CHAPITRE I

Forme ad-invariante et dualité

Ce chapitre est extrait des articles [7] et [8]. On y expose quelques propriétés de la forme de Rosso à travers l'étude des morphismes β^+, β^- et ζ. Cette forme permet de simplifier la preuve de certains résultats importants de [24] et [25]. En particulier nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de Joseph et Letzter qui montre que l'espace $F(\check{U}_q)$ des éléments ad-finis de $\check{U}_q$ se décompose en la somme directe des $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$, $\lambda \in P^+$.

Comme application, nous donnons une description du centre du corps des fractions de $\check{U}_q$.

Pour tout $\lambda \in P^+$, les morphismes β^+, β^- et ζ permettent de définir des matrices (σ^+), (σ^-) et (s), cf. (4.1.1), utiles à l'étude des $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. La proposition 4.2 (i) donne la relation : $(s) = (\sigma^+).(S\sigma^-)$, où S désigne l'antipode. Notons que (σ^+) et (σ^-) ont été introduites de manière analogue dans [6], β^+ et β^- étant déterminées à l'aide de la $\mathcal{R}$-matrice. Signalons aussi que les matrices (σ^+) et (σ^-) associées à un poids ϖ dit basique, cf. 4.4, sont utilisées pour définir les relations entre les générateurs de l'algèbre quantique $\check{U}_q$. Dans la littérature, elles sont notées (L^+) et (L^-), cf. [30] et [32].

1. NOTATIONS

1.1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Cartan de l'algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$. Soient d_i, $1 \leq i \leq n$, des entiers naturels premiers entre eux tels que $(d_i a_{ij})$ soit symétrique. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. On note P le réseau des poids de $\mathfrak{g}$, engendré par les poids fondamentaux ϖ_i, $1 \leq i \leq n$. On désigne par R le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. On pose

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varpi_i, \quad 1 \leq j \leq n, \qquad \rho = \sum_{i=1}^{n} \varpi_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad Q^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i,$$

$$R^+ = R \cap Q^+, \qquad P^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\varpi_i.$$

On munit P de l'ordre partiel $\leq$, défini par $\mu \leq \nu \Leftrightarrow \nu - \mu \in Q^+$. On définit sur $P \times Q$ une forme bilinéaire par $(\varpi_i, \alpha_j) = \delta_{ij} d_i$. Remarquons que l'on a $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{Z}$. On pose $\check{\alpha_i} = 2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$.

1.2. Soit W le groupe de Weyl associé au système de racines R. On note $W^{(k)}$ le sous-ensemble de W, constitué des éléments de longueur k. Soit w_0 le plus long élément de W et s sa longueur. On définit l'action tordue de W sur P par $w.\lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$. Comme dans [12, 7.7.3], on munit W de l'ordre de Bruhat.

1.3. Soit q une indéterminée. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps engendré sur $\mathbb{C}(q)$ par les puissances $q^{1/m}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_i = q^{d_i}$ et

$$[k]_d = \frac{q^{2dk} - q^{-2dk}}{q^{2d} - q^{-2d}}; \; [k]_d! = [k]_d[k-1]_d \dots [1]_d; \; \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_d = \frac{[k]_d \dots [k-j+1]_d}{[j]_d!}.$$

Soit $\check{U}_0$ la $\mathbb{K}$-algèbre du groupe P, notée multiplicativement, et $\tau : P \to \check{U}_0$ le morphisme canonique tel que si $\lambda, \mu \in P$, $\tau(\lambda + \mu) = \tau(\lambda)\tau(\mu)$. Il vient :

$$\check{U}_0 = \mathbb{K}[\tau(\varpi_i)^{\pm 1}, 1 \leq i \leq n].$$

On pose $k_i = \tau(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$, et $U_0 = \mathbb{K}[k_i^{\pm 1}, 1 \leq i \leq n]$. Soit $\check{U}_q$ la $\mathbb{K}$-algèbre engendrée par $\check{U}_0$, x_i, y_i, $1 \leq i \leq n$, avec les relations :

$$\tau(\lambda) x_j \tau(-\lambda) = q^{(\lambda, \alpha_j)} x_j, \; \tau(\lambda) y_j \tau(-\lambda) = q^{-(\lambda, \alpha_j)} y_j, \; x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} \frac{k_i^2 - k_i^{-2}}{q_i^2 - q_i^{-2}},$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{d_i} x_i^{1-a_{ij}-m} x_j x_i^m = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} - m \\ m \end{bmatrix}_{d_i} y_i^{1-a_{ij}-m} y_j y_i^m = 0.$$

Alors $\check{U}_q$ est une algèbre de Hopf où la comultiplication Δ, l'antipode S, l'augmentation ε sont donnés par :

$$\Delta x_i = x_i \otimes k_i^{-1} + k_i \otimes x_i, \; \Delta y_i = y_i \otimes k_i^{-1} + k_i \otimes y_i, \Delta\tau(\lambda) = \tau(\lambda) \otimes \tau(\lambda)$$

$$S(x_i) = -q_i^{-2} x_i, \; S(y_i) = -q_i^2 y_i, S(\tau(\lambda)) = \tau(-\lambda)$$

$$\varepsilon(x_i) = \varepsilon(y_i) = 0, \; \varepsilon(\tau(\lambda)) = 1.$$

1.4. Nous introduisons les sous-algèbres de $\check{U}_q$ suivantes :

$$U^+ = \mathbb{K}[x_i;\, 1 \le i \le n],\ \ V^+ = \mathbb{K}[e_i := \tau(\alpha_i)x_i;\, 1 \le i \le n],$$

$$\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) = \mathbb{K}[\,\tau(\varpi_i)^{\pm}, x_j;\, 1 \le i,j \le n],\ \ U_q(\mathfrak{b}^+) = \mathbb{K}[\tau(\alpha_i)^{\pm}, x_j;\, 1 \le i,j \le n],$$

$$U^- = \mathbb{K}[y_i;\, 1 \le i \le n],\ \ V^- = \mathbb{K}[f_i := y_i\tau(-\alpha_i);\, 1 \le i \le n],$$

$$\check{U}_q(\mathfrak{b}^-) = \mathbb{K}[\tau(\varpi_i)^{\pm}, y_j;\, 1 \le i,j \le n],\ \ U_q(\mathfrak{b}^-) = \mathbb{K}[\tau(\alpha_i)^{\pm}, y_j;\, 1 \le i,j \le n].$$

On sait, cf. [34], que l'on a les décompositions triangulaires :

$$\check{U}_q = U^- \otimes \check{U}_0 \otimes U^+ = V^- \otimes \check{U}_0 \otimes V^+.$$

On pose

$$U_q = U^- \otimes U_0 \otimes U^+ = \mathbb{K}[k_i^{\pm 1}, x_i, y_i;\, 1 \le i \le n],$$

$$\varphi = \varepsilon \otimes 1 \otimes \varepsilon\,|_{U^- \otimes \check{U}_0 \otimes U^+} \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi} = \varepsilon \otimes 1 \otimes \varepsilon\,|_{U^+ \otimes \check{U}_0 \otimes U^-}\,.$$

On notera $U^{\pm}_{+} := Ker\,\varepsilon\,|_{U^{\pm}}$.
Considérons l'automorphisme ξ de l'algèbre de Hopf $\check{U}_q$ qui vérifie :

$$\xi(x_i) = y_i\,;\, \xi(y_i) = x_i\,;\, \xi(\tau(\lambda)) = \tau(\lambda)\,;\, \xi(q^{1/m}) = q^{-1/m}.$$

Alors ξ est un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\check{U}_q$ qui se restreint en un automorphisme de U_q.

1.5. On définit dans $\check{U}_q$ les actions adjointes à gauche et à droite par

$$ad\,v.u = v_{(1)}uS(v_{(2)}), \qquad u.\widetilde{ad}v = S(v_{(1)})uv_{(2)},$$

où u, $v \in \check{U}_q$ et $\Delta(v) = v_{(1)} \otimes v_{(2)}$ avec les conventions usuelles. Comme S est un antihomomorphisme d'algèbre de Hopf, il vient : $\forall E,\, v \in \check{U}_q$, $S(v).\widetilde{ad}\,(S(E)) = S(ad\,E.v)$. On rappelle la propriété

$$\forall E,\, a,\, b \in \check{U}_q,\ ad\,E(ab) = ad\,E_{(1)}(a)ad\,E_{(2)}(b). \tag{1.5.1}$$

Enfin, on remarque :

$$\forall E,\, u \in \check{U}_q, \quad \xi(ad\,E(u)) = ad\,\xi(E)(\xi(u)). \tag{1.5.2}$$

Soit $\check{Z}$ le centre de $\check{U}_q$, et Z le centre de U_q. On a, cf [24, 2.4] :

$$\check{Z} = \{z \in \check{U}_q \mid \forall u \in \check{U}_q,\, ad\,u(z) = \varepsilon(u)z\},$$

$$Z = \{z \in U_q \mid \forall u \in U_q,\, ad\,u(z) = \varepsilon(u)z\}.$$

Soient $Z(U^+)$ et $Z(V^+)$ les centres respectifs de U^+ et V^+. Il existe un isomorphisme d'algèbres $U^+ \to V^+$, $x_i \mapsto e_i$. En particulier $Z(U^+) \simeq Z(V^+)$.

On définit l'ensemble des éléments ad-finis de $\check{U}_q$ par

$$F(\check{U}_q) = \{x \in \check{U}_q \mid dim_{\mathbb{K}} ad\, \check{U}_q.x < \infty\}.$$

On définit de manière analogue le module $F(U_q)$ des éléments *ad*-finis de U_q.

1.6. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$. On désigne par $\check{U}_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $\check{U}_q$ engendrée par les éléments x_i, y_i, $\tau(\lambda)$, $[k_i\,;0]$, $1 \le i \le n$, $\lambda \in P$, où

$$[k_i\,;m] = \frac{k_i^2 q^{2m} - k_i^{-2} q^{-2m}}{q_i^2 - q_i^{-2}}.$$

On désigne par $U_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de U_q engendrée par x_i, y_i, $k_i^{\pm}$, $[k_i\,;0]$. On montre, comme dans [10, 1.5], que $U_{\mathcal{A}}$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf et que

$$\overline{U_{\mathcal{A}}} := U_{\mathcal{A}}/(q-1)U_{\mathcal{A}} + \sum_i (k_i - 1)U_{\mathcal{A}} \simeq U(\mathfrak{g})$$

où $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. De façon analogue, on a

$$\overline{\check{U}_{\mathcal{A}}} := \check{U}_{\mathcal{A}}/(q-1)\check{U}_{\mathcal{A}} + \sum_\lambda (\tau(\lambda) - 1)\check{U}_{\mathcal{A}} \simeq U(\mathfrak{g}).$$

On désigne par $\check{U}^0_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{A}$-algèbre engendrée par $\tau(\lambda)$, $[k_i;0]$; $\lambda \in P$, $1 \le i \le n$. On posera $H_i = \overline{[k_i\,;0]}$, et pour tout $\lambda = \sum_i a_i\alpha_i$ dans P : $H_\lambda = \sum_i a_i H_i$.
Soit $\mathcal{R}$ le localisé de $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ en l'idéal engendré par $(q-1)$. On définit de manière analogue les algèbres $U_{\mathcal{R}}$ et $\check{U}_{\mathcal{R}}$.

1.7. On vérifie, cf. [25, 2.2, 2.3], que U_q et $\check{U}_q$ sont munis d'une filtration $ad\, U_q$-stable entièrement déterminée par le degré à valeurs dans $\frac{1}{m}\mathbb{Z}$ (pour un $m \in \mathbb{N}^*$) défini comme suit : $deg\, x_i = deg\, y_i = 1$ et pour $\lambda = \sum m_i\alpha_i \in P$, $deg\, \tau(\lambda) = -\sum m_i$. Soit $gr\, \check{U}_q$, resp. $gr\, U_q$ le gradué associé. L'action adjointe confère à $gr\, \check{U}_q$, resp. $gr\, U_q$, une structure de U_q-module.

On pose $G(U_q) = \{a \in gr\, U_q \mid dim_{\mathbb{K}} ad\, U_q(a) < \infty\}$ et on note $\check{Z}(G)$ le centre de $gr\, \check{U}_q$. Pour $E \in \check{U}_q$, $gr\, E$ sera aussi noté $\overline{E}$. Remarquons les isomorphismes d'espace vectoriels :

$$gr\, U^{\pm} \simeq U^{\pm}, \qquad gr\, \check{U}_q \simeq U^- \otimes \check{U}_0 \otimes U^+.$$

Soit $G^+ = gr\, V^+$, $G^- = gr\, S(V^-)$ et pour tout $\lambda \in P$: $G_\lambda = G^- \otimes \mathbb{K}\tau(\lambda) \otimes G^+$, $G^+_\lambda = \mathbb{K}\tau(\lambda) \otimes G^+$. La décomposition suivante est claire : $gr\, \check{U}_q = \bigoplus_{\lambda \in P} G_\lambda$.

1.8. Soit $\lambda \in P$. Alors λ définit un caractère $\chi_\lambda : \check{U}_0 \to \mathbb{K}$, $\tau(\mu) \mapsto q^{-(\lambda,\mu)/4}$. Posons $\theta_\lambda = \chi_{-4\lambda}$. Désignons par $\mathbb{K}v_\lambda$ le $\check{U}_0$-module de dimension 1 associé à θ_λ; il est muni d'une structure de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$-module en posant $U^+_+ v_\lambda = 0$. On pose $M_q(\lambda) = \check{U}_q \otimes_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{K}v_\lambda$. On dit que $M_q(\lambda)$ est le module de Verma de plus haut poids λ. Il possède un unique quotient simple noté $L_q(\lambda)$. Pour $\lambda \in P^+$, on a

$dim_{\mathbb{K}} L_q(\lambda) < \infty$. Si $L_q(\lambda)^*$ est son $\check{U}_q$-module dual, il existe un isomorphisme de $\check{U}_q$-module $L_q(\lambda)^* \simeq L_q(-w_0\lambda)$. Tout module quotient de $M_q(\lambda)$ sera appelé module de plus haut poids.
Pour tout U_0-module M, et pour tout $\beta \in P$, on note :

$$M_\beta = \{m \in M \mid \forall u \in U_0,\, u.m = \theta_\beta(u)m\}.$$

En particulier si M désigne une des sous-algèbres de $\check{U}_q$ définies en 1.4, M_β est le sous-module des éléments de poids λ pour l'action adjointe de U_0.

Soient M un $\check{U}_q$-module de plus haut poids, v son vecteur de plus haut poids. On pose $M_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}^- v$, où $U_{\mathcal{A}}^-$ représente la sous-algèbre de $U_{\mathcal{A}}$ engendrée par les y_i, $1 \leq i \leq n$. Soit $\overline{M}_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{A}}/(q-1)M_{\mathcal{A}}$. Rappelons le résultat de [28, prop.4.2].

Proposition. *Si M est un $\check{U}_q$-module simple de plus haut poids de dimension finie, alors $M_{\mathcal{A}}$ est un $\check{U}_{\mathcal{A}}$-module et $\overline{M}_{\mathcal{A}}$ est simple.*

Soient M et N deux $\check{U}_q$-modules de dimension finie ; on munit $M \otimes N$ de d'une structure de $\check{U}_q$-module par

$$u(m \otimes n) = u_{(1)}m \otimes u_{(2)}n, \qquad u \in \check{U}_q,\; m \in M\,,\; n \in N.$$

Cette action de $\check{U}_q$ sur $M \otimes N$ sera appelée action diagonale.
Soit Δ' le morphisme donné par $\Delta'(u) = u_{(2)} \otimes u_{(1)}$. On sait, cf. [13] et [36], qu'il existe un opérateur $\mathcal{R}$ vérifiant

$$\mathcal{R}\Delta = \Delta'\mathcal{R}.$$

Cet opérateur permet de définir un isomorphisme $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$, où $M \otimes N$ et $N \otimes M$ sont munis de l'action diagonale.

2. FORME DE ROSSO.

2.1. Il existe une unique forme bilinéaire non dégénérée sur $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) \times \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)$, [36, A II, théorème 6], [38] et [40, section 2], notée (,), vérifiant les propriétés :

(2.1.1) $\quad (u^+,\, u_1^- u_2^-) = (\Delta(u^+),\, u_1^- \otimes u_2^-)\,, \qquad u^+ \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)\,;\, u_1^-, u_2^- \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)$

(2.1.2) $\quad (u_1^+ u_2^+,\, u^-) = (u_2^+ \otimes u_1^+,\, \Delta(u^-))\,, \qquad u^- \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)\,;\, u_1^+, u_2^+ \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$

(2.1.3) $\quad (\tau(\lambda),\, \tau(\mu)) = q^{-(\lambda,\mu)/2}\,, \qquad \lambda, \mu \in P$

$$(2.1.4) \qquad (\tau(\lambda),\, f_i) = 0\,, \qquad \lambda \in P\,,\, 1 \leq i \leq n$$

$$(2.1.5) \qquad (e_i,\, \tau(\lambda)) = 0\,, \qquad \lambda \in P\,,\, 1 \leq i \leq n$$

$$(2.1.6) \qquad (e_i,\, f_i) = \delta_{ij}(q_i^{-2} - q_i^2)^{-1}\,, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

On montre que cette forme est non dégénérée sur $V^+_\beta \times V^-_{-\beta}$, $\beta \in Q^+$ et

$$(2.1.7) \qquad (X\tau(\lambda),\, Y\tau(\mu)) = q^{-(\lambda,\mu)/2}(X,\, Y)\,, \qquad X \in V^+,\, Y \in V^-$$

$$(2.1.8) \qquad (S(u^+),\, S(u^-)) = (u^+,\, u^-)\,, \qquad u^+ \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+),\, u^- \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^-).$$

A l'aide de (,) on définit une forme bilinéaire $<,>$ sur $\check{U}_q \times \check{U}_q$ par :

$$(2.1.9) \qquad < X_1\tau(\lambda)S(Y_1),\, Y_2\tau(\mu)S(X_2) >= (X_1,\, Y_2)(X_2,\, Y_1)q^{-(\lambda,\mu)/4}$$

où $X_1, X_2 \in V^+$, $Y_1, Y_2 \in V^-$, $\lambda, \mu \in P$. Cette forme est non dégénérée. De plus, nous avons, cf. [40, prop 2.2.1]

$$(2.1.10) \qquad < ad\, u.v_1,\, v_2 >=< v_1,\, v_2.\widetilde{ad}\, u > \qquad \text{pour } u,\, v_1,\, v_2 \in \check{U}_q.$$

2.2. Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note E^* son dual. On sait définir une structure d'algèbre sur le dual de toute algèbre de Hopf H. Considérons le dual de Hopf H^0 de H, cf. [1, 2.3] ; H° est une sous-algèbre de H^*. Elle est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf. On pourra donc parler des algèbres $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^*$, $\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)^*$ et de l'algèbre de Hopf $(\check{U}_q^\circ, m, S, \Delta, \varepsilon)$.
On munit $\check{U}_q^*$ d'une structure de $\check{U}_q$-bimodule et d'une structure de $ad\,\check{U}_q$-module à gauche en posant

$$v\phi w(u) = \phi(wuv), \quad (ad\, v.\phi)(u) = \phi(u.\widetilde{ad}\, v), \quad \text{pour } u, v, w \in \check{U}_q,\, \phi \in \check{U}_q^*.$$

Définissons les applications :

$$\beta^+ : \check{U}_q(\mathfrak{b}^+) \to \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)^*, \quad \beta^+(u)(v) = (u,\, v)\ ;$$

$$\beta^- : \check{U}_q(\mathfrak{b}^-) \to \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^*, \quad \beta^-(u)(v) = (v,\, S(u))\,;$$

$$\zeta : \check{U}_q \to \check{U}_q^*, \quad \zeta(u)(v) =< u,\, v >\,.$$

Nous pouvons énoncer le lemme

Lemme. *Avec les notations précédentes, on a*
(i) $\beta^\pm$, ζ *sont injectives.*

(ii) *Soit $\alpha \in Q$. La décomposition de $V^{\pm}$ en espaces de poids permet de plonger $(V^{\pm}_{\alpha})^*$ dans $(V^{\pm})^*$. Identifions $\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ à $V^- \otimes \check{U}_0$, $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ à $\check{U}_0 \otimes V^+$ et $\check{U}_q$ à $V^- \otimes \check{U}_0 \otimes V^+$. On a*

$$Im(\beta^+) = \bigoplus_{\alpha\in Q^+} V^{-*}_{-\alpha} \bigotimes \bigoplus_{\delta\in P} \mathbb{K}\chi_{2\delta}, \qquad Im(\beta^-) = \bigoplus_{\delta\in P} \mathbb{K}\chi_{2\delta} \bigotimes \bigoplus_{\alpha\in Q^+} V^{+*}_{\alpha},$$

$$Im(\zeta) = \bigoplus_{\alpha\in Q^+} V^{-*}_{-\alpha} \bigotimes \bigoplus_{\delta\in P} \mathbb{K}\chi_{2\delta} \bigotimes \bigoplus_{\alpha\in Q^+} V^{+*}_{\alpha}.$$

(iii) *β^+ et β^- sont des antihomomorphismes d'algèbres.*
ζ est un morphisme de $ad\,\check{U}_q$-module à gauche pour l'action adjointe.

Preuve. (i) provient des propriétés de non-dégénéréscence de $\beta^{\pm}$ et ζ.
Soit $\delta, \mu \in Q^+$. La restriction de $(\ ,\ )$ à $V^+_{\delta} \times V^-_{-\mu}$ est non dégénérée si $\delta = \mu$ et nulle si $\delta \neq \mu$. En remarquant que $dim_{\mathbb{K}} V^+_{\delta} < \infty$, (ii) découle de (2.1.7) et (2.1.9).
(iii) est donné par (2.1.1), (2.1.2), (2.1.10). $\diamondsuit$

2.3. Soit E un $\check{U}_q$-module de dimension finie, $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E, (v_i^*) sa base duale. On définit dans $\check{U}_q^{\circ}$ les coefficients c_{ij} du $\check{U}_q$-module E par :

$$c_{ij}(u) = v_i^*(u.v_j)\,, \qquad 1 \leq i,j \leq n\,,\, u \in \check{U}_q.$$

On appelle espace des coefficients de E le sous-espace de $\check{U}_q^0$ engendré par les c_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$. On note $C(E)$ cet espace.
Considérons le module simple $L_q(\lambda)$, $\lambda \in P^+$. Soit $\Omega(L_q(\lambda))$ l'ensemble de ses poids. Notons $C(\lambda)$ pour $C(L_q(\lambda))$. Soient $(v_{\mu,j})$, $\mu \in \Omega(L_q(\lambda))$, $1 \leq j \leq dim\, L_q(\lambda)_{\mu}$, une base de vecteurs de poids de $L_q(\lambda)$, ordonnée du plus haut au plus bas poids. Soit $(v^*_{\nu,i})$ sa base duale. Notons $\Omega^{\times}(\lambda)$ la partie de $\Omega(L_q(\lambda)) \times \mathbb{N}$ constituée des éléments (μ, j), $1 \leq j \leq dim L_q(\lambda)_{\mu}$ et $c^{\lambda}_{\nu,i,\mu,j}$, les coefficients de $L_q(\lambda)$ pour la base $(v_{\mu,i})$. Lorsque $dim L_q(\lambda)_{\mu} = 1$, on écrira μ pour $(\mu, 1)$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on posera $c_{\nu,i,\mu,j} = c^{\lambda}_{\nu,i,\mu,j}$.

2.4. Les propriétés suivantes sont claires.

(2.4.1) Soit $\lambda \in P^+$; $C(\lambda)$ est un sous-module de $\check{U}_q^0$ pour l'action adjointe à gauche et on a

$$\Delta\, c_{\nu,i,\mu,j} = \sum_{(\delta,k)\in\Omega^{\times}(\lambda)} c_{\nu,i,\delta,k} \otimes c_{\delta,k,\mu,j}\,, \qquad (\nu,i),\ (\mu,j) \in \Omega^{\times}(\lambda).$$

Supposons que $y_k(v_{\mu,j})$ et $x_k(v_{\mu,j})$, resp. $y_k(v^*_{\nu,i})$ et $x_k(v^*_{\nu,i})$, aient pour coordonnées $(a_{\delta,l})$ et $(c_{\delta,l})$, resp. $(b_{\delta',l'})$ et $(d_{\delta',l'})$, dans la base $(v_{\delta,l})$, resp. $(v_{\delta',l'})$. Alors :

(2.4.2)

$$ad\, y_k.(c_{\nu,i,\mu,j}) = q_k^{-(\alpha_k,\mu)} \sum_{(\delta,l)\in\Omega^{\times}(\lambda)} a_{\delta,l} c_{\nu,i,\delta,l} + q_k^{-(\alpha_k,\mu)} \sum_{\delta',l'\in\Omega^{\times}(\lambda)} d_{\delta',l'} c_{\delta',l',\mu,j}$$

(2.4.3)
$$ad\, x_k.(c_{\nu,i,\mu,j}) = q_k^{-(\alpha_k,\mu)} \sum_{(\delta,l)\in\Omega^\times(\lambda)} c_{\delta,l} c_{\nu,i,\delta,l} + q_k^{-(\alpha_k,\mu)} \sum_{(\delta',l')\in\Omega^\times(\lambda)} d_{\delta',l'} c_{\delta',l',\mu,j}.$$

Munissons $L_q(\lambda)^* \otimes L_q(\lambda)$ et $L_q(\lambda) \otimes L_q(\lambda)^*$ d'une structure de $\check{U}_q$-module pour l'action diagonale, cf. 1.8, $C(\lambda)$ de l'action adjointe et $End\, L_q(\lambda)$ de la structure de $\check{U}_q$-module suivante : $u.\varphi(v) = u_{(1)}(\varphi(Su_{(2)}v))$, $u \in \check{U}_q$, $\varphi \in End\, L_q(\lambda)$, $v \in L_q(\lambda)$. On définit l'homomorphisme $h : C(\lambda) \to L_q(\lambda)^* \otimes L_q(\lambda)$ par $h(c_{\nu,i,\mu,j}) = v^*_{\nu,i} \otimes v_{\mu,j}$. On a alors les isomorphismes de $\check{U}_q$-modules :

$$(2.4.4) \qquad C(\lambda) \xrightarrow{\text{h}} L_q(\lambda)^* \otimes L_q(\lambda) \longrightarrow L_q(\lambda) \otimes L_q(\lambda)^* \longrightarrow End\, L_q(\lambda).$$

Le troisième isomorphisme fait correspondre à $v_{\mu,j} \otimes v^*_{\nu,i}$ l'endomorphisme φ tel que $\varphi(v_{\alpha,k}) = \delta_{(\alpha,k)\,,\,(\mu,j)} v_{\nu,i}$. Le deuxième est l'isomorphisme de commutation rappelé en 1.8.

3. LE MODULE $F(\check{U}_q)$.

3.1.

Lemme *Soit $\lambda \in P^+$, on a $\zeta(\tau(-4\lambda)) = c_{\lambda,\lambda}$ et $\zeta(ad\, \check{U}_q.\tau(-4\lambda)) = C(\lambda)$.*

Preuve. La décomposition $\check{U}_q = \check{U}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha,\beta\in Q^+\setminus\{0\}} V^-_{-\alpha} \otimes \check{U}_0 \otimes V^+_\beta$ permet de plonger $\check{U}_0^*$ dans $\check{U}_q^*$. A l'aide de ce plongement, (2.1.9) donne $\zeta(\tau(-4\lambda)) = \chi_{-4\lambda} = c_{\lambda,\lambda}$. Comme $L_q(\lambda)$ est simple on obtient $C(\lambda) = ad\, \check{U}_q.c_{\lambda,\lambda}$. La seconde égalité du lemme en découle. ♢

On pose :

$$\mathbb{C}_q[G] = \bigoplus_{\lambda\in P^+} C(\lambda) = \zeta(\bigoplus_{\lambda\in P^+} ad\, \check{U}_q.(\tau(-4\lambda)),$$

$$F(\check{U}_q^*) = \{\phi \in \check{U}_q^* \mid dim_{\mathbb{K}} ad\, \check{U}_q.\phi < \infty\}.$$

Il est clair que $F(\check{U}_q^*) \cap Im\zeta = \zeta(F(\check{U}_q))$.

3.2.

Lemme *On a :*

$$Im\zeta = \bigoplus_{\lambda,\mu\in P} (Im\zeta)_{\lambda,\mu} \text{ où } (Im\zeta)_{\lambda,\mu} = \{\phi \in Im\zeta \mid \forall u, v \in \check{U}_0,\ u\phi v = \chi_\lambda(u)\chi_\mu(v)\phi\}.$$

Preuve. Puisque $\check{U}_q = \bigoplus_{\alpha,\delta\in Q^+,\beta\in P} V^+_\alpha \tau(\beta) S(V^-_{-\delta})$, il suffit de montrer qu'un élément de la forme $\zeta(a)$, avec $a = u\tau(\beta)S(v)$, $u \in V^+_\alpha$, $v \in V^-_{-\delta}$, $\beta \in P$ est dans le sous-espace $(Im\zeta)_{\beta+4\delta,\beta+4\alpha}$. Soit $b = v^-\tau(\lambda)S(u^+)$, $u^+ \in V^+_\nu$, $v^- \in V^-_{-\mu}$, $\lambda \in P$. On vérifie aisément que

$$(\zeta(a)\tau(\alpha_i))(b) = q^{-(\mu,\alpha_i)}q^{-(1/4)(\beta,\lambda+\alpha_i)}(u,v^-)(u^+,v) = \chi_{\beta+4\alpha}(\tau(\alpha_i))\zeta(a)(b).$$

Un calcul analogue pour $\tau(\alpha_i)\zeta(a)$ donne le résultat. ♢

3.3. Le théorème qui suit constitue l'un des principaux résultats de [25]. Nous donnons en 3.6, une démonstration différente et sensiblement plus courte de ce résultat.

Théorème. *On a :*

$$F(\check{U}_q) = \bigoplus_{\mu\in -4P^+} ad\,\check{U}_q.\tau(\mu), \qquad F(U_q) = \bigoplus_{\mu\in -4P^+\cap Q} ad\,U_q.\tau(\mu).$$

Grâce au lemme 3.1, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire. *On a :* $\quad \zeta(F(\check{U}_q)) = \mathbb{C}_q[G]$.

3.4.

Lemme. *Soit $\phi \in Im\zeta$. Alors :*
(i) *$dim_{\mathbb{K}}\,\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)\phi < \infty$ et $dim_{\mathbb{K}}\,\phi\check{U}_q(\mathfrak{b}^-) < \infty$,*
(ii) *si $\phi \in F(\check{U}_q^*) \cap Im\zeta$, on a $dim_{\mathbb{K}}\,(\sum_{m\geq 0}\mathbb{K}y_j^m\phi) < \infty$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$.*

Preuve. (i) On peut supposer $\phi = \zeta(u^+u_0S(u^-))$, $u^\pm \in V^\pm$, $u_0 \in \check{U}_0$. Il résulte des relations (2.1.9) et (2.1.2) que $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)\phi$ est contenu dans le $\mathbb{K}$-espace espace vectoriel engendré par les $\zeta(u^+u_0S(u^-_{(1)}))$, où $\Delta(u^-) = u^-_{(1)} \otimes u^-_{(2)}$. La deuxième assertion est analogue.

(ii) On établit facilement par récurrence que, si

$$\psi \in (\check{U}_q^*)_{\lambda,\mu} = \{\eta \in \check{U}_q^* \mid \forall u,\, v \in \check{U}_0,\, u\eta v = \chi_\lambda(u)\chi_\mu(v)\eta\},$$

alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $y_j^m\psi \in \sum_{i=0}^m \mathbb{K}(ad\,y_j^{m-i}.\psi)y_j^i$. Par le lemme 3.2, on peut supposer $\phi \in (\check{U}_q^*)_{\lambda,\mu}$. Soit $E = \sum_{p\leq 0}\mathbb{K}ad\,y_j^p.\phi$. On a $dim_{\mathbb{K}}E < \infty$ par hypothèse et $\sum_{m\leq 0}\mathbb{K}y_j^m\phi \subset E\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ par l'assertion précédente. D'où le résultat par (i). ♢

3.5.

Théorème *On a : $F(\check{U}_q^*) \cap Im(\zeta) = \mathbb{C}_q[G]$.*

Preuve. Soit $\phi \in F(\check{U}_q^*) \cap (Im\zeta)_{\nu,\nu'}$. Grâce à 3.4, on peut définir $\lambda, \mu \in P$ par

$$(\lambda, \check{\alpha}_i) = r_i := Max\{r \mid x_i^r\phi \neq 0\}, \qquad (\mu, \check{\alpha}_i) = s_i := Max\{s \mid y_i^s\phi \neq 0\},$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Un raisonnement similaire à celui de [3], preuve du lemme 1.11, donne $(-1/4)\nu = \mu - \lambda$. L'idéal à gauche $J(\lambda, \mu) = Ker\, \chi_\nu + \sum_{j=1}^n (\check{U}_q x_j^{r_j} + \check{U}_q y_j^{s_j})$ vérifie $J(\lambda, \mu)\phi = 0$.

Considérons le générateur $v_\lambda^* \otimes v_\mu$ du $\check{U}_q$-module $L_q(\lambda)^* \otimes L_q(\mu)$. On sait par [3, 1.30] que $\mathrm{Ann}_{\check{U}_q}\, v_\lambda^* \otimes v_\mu = J(\lambda, \mu)$. Il en résulte que ϕ appartient à l'espace des coefficients de $L_q(\lambda)^* \otimes L_q(\mu)$, donc $\phi \in \mathbb{C}_q[G]$. D'où $F(\check{U}_q^*) \cap Im\zeta \subset \mathbb{C}_q[G]$. L'inclusion inverse est évidente. $\diamondsuit$

3.6. On déduit de 3.1 et 3.5 que $F(\check{U}_q) = \bigoplus_{\lambda \in P^+} ad\, \check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. Ceci démontre la première assertion du théorème 3.1. La deuxième s'en déduit de la façon suivante. Comme $\check{U}_q = \check{U}_0 U_q = U_q \check{U}_0$, U_q est un sous-$ad\, \check{U}_q$-module de $\check{U}_q$; donc $F(U_q) = F(\check{U}_q) \cap U_q$. D'autre part : $\forall \mu \in P$, $ad\, \check{U}_q.\tau(\mu) = ad\, U_q.ad\, \check{U}_0.\tau(\mu) = ad\, U_q \tau(\mu) \subset V^- \tau(\mu + Q) V^+$. Il en résulte que : $ad\, \check{U}_q.\tau(\mu) \subset U_q$ si et seulement si $\mu \in Q$, et $\Big(\bigoplus_{\mu \in -4P^+,\, \mu \notin Q} ad\, \check{U}_q.\tau(\mu) \Big) \cap U_q = 0$.

D'où la décomposition : $F(U_q) = \bigoplus_{\mu \in -4P^+ \cap Q} ad\, U_q.\tau(\mu)$. $\diamondsuit$

3.7. On montre à l'aide de (1.5.1) que $F(\check{U}_q)$ est une sous-algèbre de $\check{U}_q$. On a de plus, à l'aide du lemme 3.1, $\tau(-4\varpi_i) \in F(\check{U}_q)$ pour tout i. En appliquant l'action adjointe de x_i, il vient $\tau(-4\varpi_i)e_i \in F(\check{U}_q)$. Il en découle que pour tout élément v de V^+, on peut trouver un λ dans P^+ tel que $\tau(-4\lambda)v \in F(\check{U}_q)$. Il existe une assertion analogue pour $v \in S(V^-)$.

Théorème. *Soit $\mathcal{S} = \{\mu \in P^+,\, \mu = \sum_i n_i \varpi_i,\ 0 \leq n_i \leq 3\}$. Alors pour tout $u \in \check{U}_q$, on peut trouver λ dans P^+ tel que*

$$\tau(-4\lambda)u = \sum_{s \in \mathcal{S}} \tau(s) u_s = \sum_{s \in \mathcal{S}} u'_s \tau(s), \qquad u_s, u'_s \in F(\check{U}_q).$$

Preuve. Nous venons de voir que le théorème était vérifié pour $v \in V^+$ et $v \in S(V^-)$. Il est aussi valable pour $v \in \check{U}_0$. Pour v quelconque, il suffit de décomposer v sur $\bigoplus_{\alpha, \beta \in Q^+, s \in \mathcal{S}} V_\alpha^+ \otimes \mathbb{K}\tau(s + 4P) \otimes S(V_{-\beta}^-)$ pour conclure. $\diamondsuit$

Remarquons que ce résultat a été démontré dans [24, théorème 6.4], par une méthode différente.
Nous pouvons énoncer :

Corollaire. *Soit $\lambda \in P^+$, on a*
(i) *$L_q(\lambda)$ est simple en tant que $F(\check{U}_q)$-module,*
(ii) *$End_{F(\check{U}_q)}\, L_q(\lambda) = \mathbb{K}$,*
(iii) *Soit $F(I)$ l'annulateur de $L_q(\lambda)$ dans $F(\check{U}_q)$. Alors les algèbres $F(\check{U}_q)/F(I)$ et $End\, L_q(\lambda)$ sont naturellement isomorphes.*

Preuve. Soit M un sous-$F(\check{U}_q)$-module non nul de $L_q(\lambda)$. Remarquons que $F(\check{U}_q)$ contient l'espace $< \tau(-4\mu),\, \mu \in P^+ >$. Il vient facilement que M contient un élément v non nul de poids. Or, il existe $u \in \check{U}_q$ tel que $u.v = v_\lambda$. En appliquant le théorème précédent, on voit que $v_\lambda \in M$, puis que $M = L_q(\lambda)$. Ce qui prouve (i).
En utilisant la remarque ci-dessus, on obtient que tout élément de $End_{F(\check{U}_q)} L_q(\lambda)$ respecte les poids. Il en résulte, par le théorème précédent que $End_{F(\check{U}_q)}\, L_q(\lambda) = End_{\check{U}_q}\, L_q(\lambda) = \mathbb{K}$.
Par le lemme de densité (iii) découle de (i) et (ii). ♢

3.8. Comme application de ces résultats, nous donnons dans cette section l'adaptation au cas quantique d'un théorème sur le centre du corps des fractions d'une algèbre enveloppante, cf. [12, 4.2]. Commençons par un lemme.

Lemme. *Soit $\alpha \in P$, alors $\tau(4P+\alpha)F(\check{U}_q)$ est stable par l'action adjointe de $U^{\pm}$.*

Preuve. Montrons le lemme pour U^+, l'autre partie étant analogue. A une constante multiplicative près, on a : $ad\, x_i.\tau(\alpha) = \tau(\alpha)e_i$, $1 \leq i \leq n$. Donc, $ad\, x_i.\tau(\alpha) = \tau(4\varpi_i)\tau(\alpha)[\tau(-4\varpi_i)e_i] \in \tau(4P+\alpha)F(\check{U}_q)$. En appliquant (1.5.1), et en remarquant que $F(\check{U}_q)$ est une algèbre, on en déduit le lemme. ♢

Nous pouvons maintenant montrer la proposition

Proposition. *Tout idéal bilatère non nul de $\check{U}_q$ contient un élément non nul de $\check{Z}$.*

Preuve. Appelons J cet idéal. Nous allons d'abord montrer que $F(J) := J \cap F(\check{U}_q) \neq (0)$. Avec les notations du théorème 3.7, on peut trouver un $u \in J$ tel que $u = \sum_{s \in \mathcal{S}} \tau(s)u_s$, avec $u_s \in F(\check{U}_q)$. On montre aisément que pour $s \neq 0$, $\tau(s)u_s \notin F(\check{U}_q)$. C'est à dire que l'on peut trouver i tel que, soit x_i, soit y_i agisse sur $\tau(s)u_s$ de façon non nilpotente par l'action adjointe. Soit $\tau(\alpha)u_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{S}$, un élément non nul de la décomposition de u, alors on peut trouver un e tel que
1) e soit la puissance d'un x_i ou d'un y_i,
2) $ad\, e.u_\alpha = 0$,
3) les autres termes de la décomposition de $\tau(-\alpha)u$ ne soient pas tous annulés par l'action adjointe de e.

Par le lemme précédent, $ad\, e.(\tau(-\alpha)u)$ est un élément non nul de J qui une décomposition strictement plus petite que celle de u. En poursuivant cet algorithme, on obtient l'assertion désirée.
Comme $F(J)$ est non nul, et comme $\bigcap_{\lambda \in P^+} Ann\, L_q(\lambda) = 0$, cf. [24, 8.3], il existe un $\lambda \in P^+$ tel que $F(J)$ n'annule pas $L_q(\lambda)$. Soit I l'idéal annulateur de $L_q(\lambda)$, il vient $F(J) \not\subset I$. Notons $F(I) = I \cap F(\check{U}_q)$. D'après le corollaire 3.7 (iii) on a $F(\check{U}_q)/F(I) \simeq End\, L_q(\lambda)$, donc l'algèbre $F(\check{U}_q)/F(I)$ est simple. De plus comme $F(J) \not\subset F(I)$, il vient $F(\check{U}_q) = F(I) + F(J)$. Or, $F(I)$ et $F(J)$ sont des $ad\, \check{U}_q$-modules, on peut donc, à l'aide du théorème 3.3, décomposer $F(J)$ en

$F(I) \cap F(J) \oplus W$ où W est un $ad\,\check{U}_q$-sous-module de $F(\check{U}_q)$. Il vient $F(\check{U}_q) = F(I) \oplus W$. On a donc les isomorphismes de $\check{U}_q$-modules

$$W \simeq F(\check{U}_q)/F(I) \simeq End\, L_q(\lambda).$$

Donc, il existe un élément $ad\,\check{U}_q$-invariant non nul dans W, et a fortiori dans J.$\diamondsuit$

On a clairement le corollaire suivant.

Corollaire. *Le centre du corps des fractions de $\check{U}_q$ est égal au corps des fractions du centre de $\check{U}_q$.*

4. MATRICES $(\sigma^{\pm})$ ET (s).

4.1. Soit λ dans P^+. On fixe une base $(v_{\mu,j})$ de $L_q(\lambda)$. Nous allons construire la matrice (s) et les matrices $(\sigma^{\pm})$ associées à λ. Pour cela, montrons la proposition.

Proposition. *Soit (ν,i), $(\mu,j) \in \Omega^{\times}(\lambda)$. Alors*

$$c_{\nu,i,\mu,j} \,|_{\check{U}_q(\mathfrak{b})^{\mp}} \in Im\, \beta^{\pm} \;\; et \;\; c_{\nu,i,\mu,j} \in Im\, \zeta.$$

Preuve. L'étude du module $L_q(\lambda)$ donne facilement

$$c_{\nu,i,\mu,j} \,|_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)} \in \mathbb{K}\chi_{-4\nu} \otimes (U^+_{\nu-\mu})^* \;,\; c_{\nu,i,\mu,j} \,|_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)} \in (U^-_{\nu-\mu})^* \otimes \mathbb{K}\chi_{-4\mu}.$$

La première assertion découle alors du lemme 2.2 (ii).
La seconde provient du lemme 3.1. $\diamondsuit$

Notons donc $\sigma^{\pm}_{\nu,i,\mu,j}$, $s_{\nu,i,\mu,j}$ les éléments de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^{\pm})$, $\check{U}_q$ tels que :

(4.1.1) $$\beta^{\pm}(\sigma^{\pm}_{\nu,i,\mu,j}) = c_{\nu,i,\mu,j} \,|_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^{\mp})} \;\;,\;\; \zeta(s_{\nu,i,\mu,j}) = c_{\nu,i,\mu,j}.$$

4.2. Soient $(\sigma^{\pm})$ et (s) les matrices :

$$(\sigma^{\pm}) = (\sigma^{\pm}_{\nu,i,\mu,j})_{\,(\nu,i),(\mu,j)\in\Omega^{\times}(\lambda)} \;,\; (s) = (s_{\nu,i,\mu,j})_{\,(\nu,i),(\mu,j)\in\Omega^{\times}(\lambda)}.$$

Remarques. – (σ^+) est une matrice triangulaire inférieure et (σ^-) est une matrice triangulaire supérieure. De plus $\sigma^+_{\lambda,\lambda} = S\sigma^-_{\lambda,\lambda} = \tau(-2\lambda)$.
– Ces matrices dépendent de la base de $L_q(\lambda)$ fixée.

Nous allons voir que (s) s'écrit simplement en fonction des matrices (σ^+) et (σ^-). Pour cela, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme. *Soient* (ν, i), (μ, j) *dans* $\Omega^\times(\lambda)$, *on a*
(i) $\sigma^+_{\nu,i,\mu,j} \in V^+_{\mu-\nu} \otimes \tau(-2\mu)$
(ii) $S\sigma^-_{\nu,i,\mu,j} \in \tau(-2\nu) \otimes SV^-_{\mu-\nu}$.

Preuve. Les poids de ces éléments résultent des définitions 4.1.1.

Soit $\alpha^+ = j \circ \beta^+ \circ i$ où i désigne l'injection canonique de V^+ dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, et j l'homomorphisme de restriction de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)^*$ dans V^{-*}. Alors α^+ est une application linéaire injective. De plus : $\operatorname{Im}\alpha^+ = \bigoplus_{\beta \in Q^+} V^{-*}_{-\beta}$. Soient alors (ν, i), (μ, j) dans $\Omega^\times(\lambda)$. Il vient $c_{\nu,i,\mu,j} \mid_{V^-} \in \operatorname{Im}\alpha^+$. Soit $v_{\nu,i,\mu,j}$ son antécédent par α^+. D'après (2.1.7) et par définition de $c_{\nu,i,\mu,j}$, on obtient

$$\beta^+(v_{\nu,i,\mu,j}\tau(-2\mu)) = c_{\nu,i,\mu,j} \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)} .$$

(i) découle alors de l'injectivité de β^+.
(ii) est similaire. $\diamondsuit$

Proposition. *Posons* $(S\sigma^-) = (S\sigma_{\nu,i,\mu,j})_{(\nu,i),(\mu,j)\in\Omega^\times(\lambda)}$. *Alors, on a :*
(i) $(s) = (\sigma^+).(S\sigma^-)$
(ii) $s_{\nu,i,\lambda} = \sigma^+_{\nu,i,\lambda}\tau(-2\lambda)$, $s_{\lambda,\mu,j} = \tau(-2\lambda)S\sigma^-_{\lambda,\mu,j}$ *et* $s_{\lambda,\lambda} = \tau(-4\lambda)$.
(iii) *Les* $s_{\nu,i,\mu,j}$ *forment une base de* $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. *Les* $s_{\nu,i,\lambda}$, *resp.* $s_{\lambda,\mu,j}$ *forment une base de* $ad\,U^+.\tau(-4\lambda)$, *resp.* $ad\,U^-.\tau(-4\lambda)$.

Preuve. Puisque $<,>$ est une forme non dégénérée, l'assertion (i) équivaut à :

$$\forall\, u \in \check{U}_q,\ c_{\nu,i,\mu,j}(u) = \sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)} < \sigma_{\nu,i,\alpha,l}\, S\sigma^-_{\alpha,l,\mu,j}\, ,\, u > .$$

On peut supposer que $u = u^-\tau(\delta)Su^+$, où $\delta \in P$, $u^+ \in V^+$, $u^- \in V^-$. Alors, par (2.3.1), on a :

$$c_{\nu,i,\mu,j}(u^-\tau(\delta)Su^+) = \sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)} c_{\nu,i,\alpha,l}(u^-\tau(\delta))c_{\alpha,l,\mu,j}(Su^+)$$

$$= \sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)} (\sigma^+_{\nu,i,\alpha,l}\, , u^-\tau(\delta))\,(Su^+,\, S\sigma^-_{\alpha,l,\mu,j}).$$

D'après le lemme 4.2, nous pouvons écrire :

$$\sigma^+_{\nu,i,\alpha,l} = v^+_{\nu,i,\alpha,l}\tau(-2\alpha)\,;\, S\sigma^-_{\alpha,l,\mu,j} = \tau(-2\alpha)Sv^-_{\alpha,l,\mu,j}$$

où $v^+_{\nu,i,\alpha,l} \in V^+$, $v^-_{\alpha,l,\mu,j} \in V^-$.
De (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9), il découle que

$$\begin{aligned} c_{\nu,i,\mu,j}(u^-\tau(\delta)Su^+) &= \textstyle\sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)}(v^+_{\nu,i,\alpha,l}\, ,\, u^-)q^{(\delta,\alpha)}(u^+,\, v^-_{\alpha,l,\mu,j}) \\ &= \textstyle\sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)} < v^+_{\nu,i,\alpha,l}\tau(-4\alpha)Sv^-_{\alpha,l,\mu,j}\, ,\, u^-\tau(\delta)Su^+ > \\ &= \textstyle\sum_{\alpha,l\in\Omega^\times(\lambda)} < \sigma^+_{\nu,i,\alpha,l}S\sigma^-_{\alpha,l,\mu,j}\, ,\, u^-\tau(\delta)Su^+ > . \end{aligned}$$

Nous avons démontré (i). (ii) découle alors de la remarque 4.2.
La première assertion de (iii) résulte de la définition de (s) et le reste provient de (i), (ii) et des formules (2.4.2), (2.4.3). $\diamondsuit$

4.3. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice à coefficients dans $\check{U}_q$ et $d = \max\{deg\, m_{ij}\}$; on définit la matrice : $(gr\, M) = (gr_d\, m_{ij})$, où $gr_d\, a$ désigne la composante de degré d de a.
D'après le lemme 4.2, la matrice (σ^+) est nulle sauf sur sa première colonne, et la matrice $(S\,\sigma^-)$ est nulle sauf sur sa première ligne. Il en résulte, par la proposition 4.2, que :

$$(gr\, s)_{\nu,i,\mu,j} = (gr\,\sigma^+)_{\nu,i,\lambda}.(gr\, S\,\sigma^-)_{lambda,\mu,j}. \tag{4.3.1}$$

On définit des sous-espaces K_λ^+ et K_λ^- par :

$$ad\, U^+.\tau(-4\lambda) = K_\lambda^+\tau(-4\lambda) \text{ et } ad\, U^-.\tau(-4\lambda) = K_\lambda^-\tau(-4\lambda).$$

On obtient alors la proposition

Proposition. *On a la décomposition :*

$$gr\,(ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)) = gr\, K_\lambda^+ \otimes \mathbb{K} gr\,(\tau(-4\lambda)) \otimes gr\, K_\lambda^-.$$

Preuve. Par la proposition 4.2 (iii), les $(gr\, s)_{\nu,i,\mu,j}$ engendrent $gr\,(ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda))$. Par construction du gradué, il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $\check{U}_q(\mathfrak{b}^\pm) \simeq gr\,\check{U}_q(\mathfrak{b}^\pm)$. Ceci prouve que les $(gr\,\sigma^+)_{\nu,i,\lambda}$ ainsi que les $(gr\, S\sigma^-)_{\lambda,\mu,j}$ forment une partie libre pour (ν, i), $(\mu, j) \in \Omega^\times(\lambda)$. Par décomposition triangulaire dans le gradué, cf. 1.7, on en déduit que les $(gr\, s)_{\nu,i,\mu,j}$ forment une base de $gr\, ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. On conclut à l'aide de la proposition 4.2 (ii) et (iii). $\diamondsuit$

Remarquons que ceci entraine $\dim gr\, ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda) = \dim ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$. Donc, la graduation induit un isomorphisme de $ad\,\check{U}_q$-modules de $F(\check{U}_q)$ vers son gradué $G(\check{U}_q)$. Cette proposition est prouvée dans [25, 4.9], par une méthode différente.

4.4. On se propose dans cette section de préciser la structure de $\mathrm{Im}\,\beta^+$ en tant qu'algèbre.
On sait, cf. [31, Table 1], que toute représentation irréductible $L_q(\lambda)$ de dimension finie est facteur direct d'une puissance tensorielle d'une représentation irréductible fondamentale, dite basique.
Soit $L_q(\varpi)$ une telle représentation. Fixons une base (v_k) de $L_q(\varpi)$, où v_k est de poids μ_k. Pour $1 \leq i, j \leq \dim L_q(\varpi)$, on définit la relation $i \prec j \Leftrightarrow \mu_i - \mu_j \in Q^+\backslash\{0\}$. Notons X_{ij}, $1 \leq i, j \leq \dim L_q(\varpi)$ les coefficients du module $L_q(\varpi)$ dans la base (v_k). Pour tout $\lambda \in P^+$, il existe un entier m tel que le module $L_q(\lambda)$ s'injecte dans $L_q(\varpi)^{\otimes m}$ muni de l'action diagonale. Donc, l'algèbre $\mathbb{C}_q[G]$ est engendrée par les X_{ij}, $1 \leq i, j \leq \dim L_q(\varpi)$. L'image de $\mathbb{C}_q[G]$ par

l'homomorphisme de restriction $\mathbb{C}_q[G] \to \mathbb{C}_q[G] \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^{\pm})}$ sera notée $\mathbb{C}_q[B^{\pm}]$. Pour $X \in \mathbb{C}_q[G]$, on notera $\overline{X}$ son image dans $\mathbb{C}_q[B^-]$.
Pour des commodités d'écriture, on notera encore χ_α l'élément de $\check{U}_0^*$ défini en 1.8, étendu sur $\check{U}_q^*$ par : $\chi_\alpha \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^{\pm})_\mu} = 0$ pour $\mu \neq 0$.
Enonçons un lemme.

Lemme. *Soit $\nu \in Q$, $\alpha \in P$ et $v \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)_\nu$, alors*

$$\zeta(v\tau(\alpha)) \in \mathbb{K}\zeta(v)\chi_\alpha.$$

Preuve. Rappelons l'assertion :
Soit $u \in V^-_{-\nu}$, on a :

$$\Delta(u) = u \otimes \tau(-\nu) + a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

où $a_{(1)} \otimes a_{(2)} \in \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\nu, \alpha_2\neq 0\\ \alpha_1,\alpha_2\in Q^+}} \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)_{-\alpha_1} \otimes \check{U}_q(\mathfrak{b}^-)_{-\alpha_2}$.
Il vient facilement que $\zeta(v)\chi_\alpha$ est une forme à support dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)_{-\nu}$. Cette propriété est évidemment vérifiée pour $\zeta(v\tau(\alpha))$. Soit $u \in V^-_{-\nu}$, $\delta \in P$. Par (2.1.9), nous obtenons $\zeta(v\tau(\alpha))(u\tau(\delta)) = \zeta(v)(u)\chi_\alpha(\tau(\delta))$. De plus $\zeta(v)\chi_\alpha(u\tau(\delta)) = (\zeta(v)\otimes\chi_\alpha)(\Delta(u\tau(\delta))) = (\zeta(v)\otimes\chi_\alpha)(u\tau(\delta)\otimes\tau(\delta-\nu))$ d'après l'assertion précédente.
Le lemme en découle. $\diamondsuit$

A l'aide de la proposition 4.1, on remarque que l'algèbre $\operatorname{Im}\beta^+$ est une extension de l'algèbre $\mathbb{C}_q[B^-]$. La proposition qui suit précise cette assertion.

Proposition. *L'algèbre de Hopf $\mathbb{C}_q[B^-]$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}_q[G]$ par l'idéal de Hopf engendré par les X_{ij}, $i \prec j$. L'algèbre $\operatorname{Im}\beta^+$ est l'extension de l'algèbre $\mathbb{C}_q[B^-]$ par les $\chi_{2\delta}$, $\delta \in P$. Pour cette extension, les relations sont données par :*

$$\overline{\chi}_{2\delta}\overline{X}_{ij} = q^{(\delta,\, \mu_i-\mu_j)}\overline{X}_{ij}\overline{\chi}_{2\delta}, \qquad \delta \in P, \qquad i \not\prec j.$$

Preuve. Par (2.4.1), on sait que l'idéal I engendré par les X_{ij} est un idéal de Hopf. Cet idéal est clairement inclus dans le noyau de l'homomorphisme de restriction $\mathbb{C}_q[G] \to \mathbb{C}_q[B^-]$. Nous devons montrer l'inclusion inverse. Soit ϕ un élément de ce noyau. Comme dans la démonstration du théorème 3.5, on montre qu'il existe λ et μ dans P^+ tels que $J(-w_0\lambda,\mu)\phi = 0$. On sait que $J(-w_0\lambda,\mu) = Ann\, v_{w_0\lambda}\otimes v_\mu$, où $v_{w_0\lambda}\otimes v_\mu \in L_q(\lambda)\otimes L_q(\mu)$. Il existe donc une forme linéaire f sur $L_q(\lambda)\otimes L_q(\mu)$ telle que

$$\phi(u) = f(u.(v_{w_0\lambda}\otimes v_\mu)), \tag{4.4.1}$$

pour tout $u \in \check{U}_q$. Or, on a $\check{U}_q(\mathfrak{b}^-).(v_{w_0\lambda}\otimes v_\mu) = \mathbb{K}v_{w_0\lambda}\otimes L_q(\mu)$. L'hypothèse sur ϕ et (4.4.1) entrainent donc que f se décompose dans $\{(v_{\alpha,i}\otimes v_{\nu,j})^*,\ (\alpha,i) \in \Omega^\times(\lambda),\ \alpha \neq w_0\lambda,\ (\nu,j) \in \Omega^\times(\mu)\}$. Par (4.4.1), ceci prouve que ϕ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $c^\lambda_{\alpha,i,w_0\lambda}.c^\mu_{\nu,j,\mu}$. Il suffit donc de montrer que pour

$(\alpha, i) \in \Omega^\times(\lambda)$, $\alpha \neq w_0\lambda$, $c_{\alpha,i,w_0\lambda}$ appartient à I. Ceci est clair car d'une part, $\mathbb{C}_q[G]$ est engendré par les X_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ et d'autre part, $v^*_{\alpha,i} \otimes v_{w_0\lambda}$ a un poids dans $Q^+ \backslash \{0\}$.
Le corollaire 3.3 donne $\mathbb{C}_q[B^-] = \zeta(F(\check{U}_q) \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)}) = \zeta(F(\check{U}_q) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)}$.
Nous allons montrer dans un premier temps :

$$\zeta(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)) \mid_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^-)} = \mathbb{C}_q[B^-][\overline{\chi}_\delta,\, \delta \in P].$$

Considérons pour cela $\zeta(u)$, $u \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Par le théorème 3.7, on peut se ramener au cas : $u = v\tau(\alpha)$, avec $v \in F(\check{U}_q) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, $\alpha \in P$. De plus nous pouvons choisir $v \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)_\nu$, $\nu \in Q$. L'assertion découle donc du lemme 4.4.
La première partie de la proposition est alors une conséquence de (2.1.7), (2.1.9) et du lemme 4.4.
On peut trouver un élément $u \in (\check{U}_q)_{\mu_i - \mu_j}$ tel que $u.v_j = v_i$. Pour obtenir les relations de la proposition, il suffit de comparer l'action de $\chi_{2\delta} X_{ij}$ et de $X_{ij}\chi_{2\delta}$ sur un tel u, puis de quotienter par les X_{ij}, $i \prec j$. $\diamondsuit$

Signalons aussi que dans [27], les auteurs ont défini un système de générateurs de $\check{Z}$ qui se spécialise sur des générateurs de $Z(\mathfrak{g})$, appelés invariants de Gelfand. Pour $n \neq 1, 2$ ceux-ci ne sont pas combinaisons linéaires des constantes et des z_i.

Pour finir, nous nous intéressons aux propriétés géométriques de l'algèbre Z. En 5.2 et 5.3, nous montrons que pour $\mathfrak{g}$ simple arbitraire, Z est normale et Gorenstein. La proposition 5.5 précise cette assertion.

1. TRACES QUANTIQUES.

Nous allons définir dans $\mathbb{C}_q[G]$ des éléments appelés traces quantiques. Ceux-ci nous permettront de déterminer la structure d'algèbre de Z et de $\check{Z}$.

1.1. Fixons λ dans P^+. Grâce à [chap. I, (2.4.4) et lemme 3.1], on a la suite d'isomorphismes.

$$ad\, \check{U}_q.\tau(-4\lambda) \xrightarrow{\sim} C(\lambda) \xrightarrow{\sim} End\, L_q(\lambda).$$

le $\check{U}_q$-module $L_q(\lambda)$ étant simple, l'unique $\check{U}_q$-invariant de $End\, L_q(\lambda)$ est l'identité, notée Id_λ. Via les isomorphismes ci-dessus, on peut définir les invariants, uniques à une constante multiplicative près : $\psi_\lambda \in C(\lambda)$ et $z_\lambda \in ad\, \check{U}_q.\tau(-4\lambda)$.
Le théorème suivant est connu, cf. [36, prop. 10].

Théorème. *Soit $\lambda \in P^+$. L'unique $\check{U}_q$-invariant du module $C(\lambda)$ est donné par :*

$$\psi_\lambda(u) = tr(\tau(4\rho).u\,;\, L_q(\lambda)) \qquad \textit{(à un scalaire près)}$$

où $u \in \check{U}_q$ et tr désigne la trace. $\diamondsuit$

Remarquons que pour l'action à droite ($\psi.x = \psi(ad\, x.-)$), l'invariant $\tilde{\psi}_\lambda$ est donné par $tr(u\tau(-4\lambda)\,;\, L_q(\lambda))$. C'est celui que l'on trouve plus couramment dans la littérature. Il est appelé trace quantique, cf. [40], [35], [24].

1.2. Par 1.1 et [chap. I, 1.5 et th. 3.3], on a

$$\check{Z} = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K}\, z_\lambda. \tag{1.2.1}$$

Posons $\Theta = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K}\, \psi_\lambda$. L'homomorphisme $\widetilde{\varphi}$ ayant été défini en [chap. I, 1.4], on montre, à l'aide de [chap. I, (2.1.1)-(2.1.6)], que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \check{Z} & \xrightarrow{\zeta} & \Theta \\ \widetilde{\varphi}\downarrow & & \downarrow r \\ \check{U}_0 & \xrightarrow{r \circ \zeta} & \check{U}_0^* \end{array}$$

où r désigne l'homomorphisme de restriction. Notons que $\widetilde{\varphi} \mid \check{Z}$ est un homomorphisme d'algèbres, cf. [10, 2.1]. On montre aisément qu'il en est de même de r et de $\zeta \mid_{\check{U}_0}$. Donc ζ induit un isomorphisme d'algèbres de $\check{Z}$ sur Θ.
Notons qu'il s'agit du même homomorphisme que celui introduit par Drinfeld dans [14, prop. 3.3].
De ce diagramme et du théorème 1.1, il découle aisément :

$$\widetilde{\varphi}(z_\lambda) = \sum_{(\mu,i)\in\Omega^\times(\lambda)} q^{(4\rho,\mu)}\tau(-4\mu).$$

La somme tient compte de la multiplicité du poids μ dans $L_q(\lambda)$.
Il est clair que $\xi(z_\lambda)$ est central dans $ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda)$ par [chap. I, (1.5.2)]. Donc $\xi(z_\lambda)$ est égal à z_λ à une constante multiplicative près. En utilisant la graduation Gr définie par $deg\, x_i = deg\, y_i = 1$ et $deg\, \tau(\lambda) = 0$, il découle de [chap. I, lemme 4.2 et proposition 4.2], que $Gr\,\xi(z_\lambda) = Gr\, z_\lambda$. D'où :

(1.2.2) $$\xi(z_\lambda) = z_\lambda.$$

Il vient

(1.2.3) $$\varphi(z_\lambda) = \sum_{(\mu,i)\in\Omega^\times(\lambda)} q^{-(4\rho,\mu)}\tau(-4\mu) \quad ; \quad gr\,\varphi(z_\lambda) = q^{-(4\rho,\mu)}\, gr\,\tau(-4\lambda).$$

On en déduit le théorème :

Théorème. *Le centre $\check{Z}$ est un anneau de polynômes engendré par les $z_i := z_{\varpi_i}$. Le centre Z est isomorphe à la $\mathbb{K}$-algèbre de $Q \cap -4P^+$.*

Remarquons que ce résultat est une conséquence directe de [25, 4.13].
En utilisant [chap. I, proposition 4.2 (i)], on obtient :

(1.2.4) $$z_\lambda = \sum_{(\mu,i)\in\Omega^\times(\lambda)} q^{(4\rho,\mu)} s_{\mu,i,\mu,i} = \sum_{(\mu,i),(\nu,j)\in\Omega^\times(\lambda)} q^{(4\rho,\mu)}\sigma^+_{\mu,i,\nu,j} S\sigma^-_{\nu,j,\mu,i}.$$

1.3. Montrons l'assertion :

Assertion. *Pour tout λ dans P^+, on a $z_\lambda \in \check{U}_{\mathcal{A}}$.*

Preuve. Soit m l'entier positif minimal tel que $(q-1)^m z_\lambda \in \check{U}_{\mathcal{A}}$. Supposons m non nul. Avec les notations de [chap. I, 1.6], cela entraine par (1.2.3) que $(q-1)^m z_\lambda$ s'annule sur tout U-module simple de dimension finie. On en déduit, par un analogue de [12, th. 2.5.7], que ce dernier élément est nul et donc que $(q-1)^m z_\lambda \in (q-1)\check{U}_{\mathcal{A}}$, ce qui contredit la minimalité de m. ♢

Nous en déduisons la proposition, obtenue dans [25, théorème 6.16].

Proposition. *Si $z \in \check{Z}$, alors :*

$$\varphi(z) \in \check{U}^0_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow z \in \check{U}_{\mathcal{A}}.$$

Preuve. L'implication $\Leftarrow$ est évidente.
Montrons $\Rightarrow$. Soit $z \in \check{Z}$ tel que $\varphi(z) \in \check{U}^0_{\mathcal{A}}$. Par (1.2.1), on peut supposer $z \in \mathbb{K}z_\lambda$. Par (1.2.3), il vient $z \in \mathcal{A}z_\lambda$. L'assertion précédente donne alors le résultat. ♢

2. DETERMINANT QUANTIQUE ET GENERATEURS DU CENTRE (pour le type $\mathbf{A}_n$).

Les générateurs z_i de $\check{Z}$ peuvent être calculés à l'aide des matrices (σ^+) et $(S\sigma^-)$ associées à ϖ_i. Supposons $\mathfrak{g}$ de type A_n. Nous exposons une méthode permettant de calculer ceux-ci au moyen des matrices (σ^+) et $(S\sigma^-)$ associées à ϖ_1 et du déterminant quantique.

2.1. On pose $E := L_q(\varpi_1)$.
Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés concernant les puissances extérieures quantiques du $\check{U}_q$-module E.
On considère $B_1 = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ une base de vecteurs de poids de E. On définit l'algèbre tensorielle $T(E)$ munie d'une structure de $\check{U}_q$-module pour l'action diagonale.
On montre que

$$E \otimes E \simeq L_q(2\varpi_1) \oplus L_q(\varpi_2).$$

Posons $L = L_q(2\varpi_1)$. On vérifie que L est engendré par $v_i \otimes v_i$, $v_i \otimes v_j + q^{-2} v_j \otimes v_i$, $1 \leq i < j \leq n+1$. Soit alors $\Lambda_q(E)$ le module quotient de $T(E)$ par l'idéal engendré par L. $T(E)$ est munie d'une graduation naturelle qui permet de définir une graduation sur $\Lambda_q(E)$. On a alors la décomposition en sous-modules :

$$\Lambda_q(E) = \bigoplus_{i=0}^{n+1} \Lambda_q^i(E).$$

Soit $\mathcal{C}_{n+1}^i$ l'ensemble des parties à i éléments de $\{1, \ldots, n+1\}$. Si $I = \{k_1, \ldots, k_i\} \in \mathcal{C}_{n+1}^i$, $k_1 < \ldots < k_i$, on note v_I l'image de $v_{k_1} \otimes \ldots \otimes v_{k_i}$ dans $\Lambda_q^i(E)$. Il est clair que les v_I engendrent l'espace $\Lambda_q^i(E)$ pour $I \in \mathcal{C}_{n+1}^i$. On pose $B_i = \{v_I,\ I \in \mathcal{C}_{n+1}^i\}$. Soit $\mathcal{S}_{n+1}$ le groupe de permutations de $\{1, \ldots, n+1\}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$, on note $l(\sigma)$ la longueur d'une décomposition minimale de σ en produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n$.

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$, où les $a_{i,j}$ appartiennent à une K-algèbre. On pose

$$det_q\, M = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} (-q^2)^{l(\sigma)}\, a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n+1),n+1}$$

$$\widetilde{det}_q M = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} (-q^2)^{l(\sigma)}\, a_{\sigma(n+1),n+1} \ldots a_{\sigma(1),1}.$$

Pour simplifier les notations de [chap. I, 2.3], on note c_{ij}, $1 \leq i,j \leq n+1$, les coefficients matriciels du module E dans la base B_1, et $C_{I,J}$, $I, J \in \mathcal{C}_{n+1}^i$ les coefficients matriciels du module $\Lambda_q^i(E)$ dans la base B_i.
On montre facilement que les $c_{I,J}$ sont les mineurs quantiques de la matrice $R = (c_{i,j})$. Explicitement :

(2.1.1) $$c_{I,J} = det_q\, R_{I,J}$$

où $M_{I,J}$ désigne la matrice extraite de M en gardant les lignes numérotées par I et les colonnes numérotées par J.
Remarquons que L est aussi l'espace engendré par $v_i \otimes v_i$, $v_j \otimes v_i + q^2 v_i \otimes v_j$, $\quad n+1 \geq j > i \geq 1$. De cette remarque et de (2.1.1), il vient :

$$c_{I,J} = \widetilde{det}_{q^{-1}}\, R_{I,J}. \tag{2.1.2}$$

Pour $I, J \in \mathcal{C}_{n+1}^i$, notons $\sigma_{I,J}^+$, $\sigma_{I,J}^-$, $s_{I,J}$ les éléments vérifiants :

$$\beta^{\pm}(\sigma_{I,J}^{\pm}) = c_{I,J}\,|_{\check{U}_q(\mathfrak{b}^{\mp})}, \quad \zeta(s_{I,J}) = c_{I,J}.$$

De (2.1.2) et de [chap. I, lemme 2.2 (iii)], on tire :

$$\begin{array}{c} \sigma_{I,J}^+ = det_{q^{-1}}\,(\sigma^+)_{I,J} \\ S\sigma_{I,J}^- = det_q\,(S\sigma^-)_{I,J} \end{array}. \tag{2.1.3}$$

2.2. Considérons les modules simples $L_q(\varpi_i)$, $1 \leq i \leq n$. On sait

$$L_q(\varpi_i) \simeq \Lambda_q^i\,(L_q(\varpi_1)), \qquad 1 \leq i \leq n+1.$$

Soit $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Avec les notations de 2.1, nous pouvons munir $L_q(\varpi_1)$ d'une base $B_1(a)$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\} \qquad y_j.v_i = \delta_{i,j} a v_{i+1} \text{ en convenant } v_{n+2} = 0. \tag{2.2.1}$$

Il vient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\} \qquad x_j.v_i = \delta_{i,j} a^{-1} v_{i-1} \text{ en convenant } v_0 = 0. \tag{2.2.2}$$

Le poids de v_i est donné par $\varepsilon_i := \varpi_i - \varpi_{i-1}$ en convenant : $\varpi_0 = \varpi_{n+1} = 0$.
Pour la base duale, nous avons :

$$y_j.v_i^* = -q^2 \delta_{i-1,j} a\, v_{i-1}^*, \qquad 1 \leq i \leq n+1. \tag{2.2.3}$$

$$x_j.v_i^* = q^{-2} \delta_{i,j} a^{-1}\, v_{i+1}^*, \qquad 1 \leq i \leq n+1. \tag{2.2.4}$$

Lorsque $L_q(\varpi_i)$ est munie de la base B_i, nous avons pour $1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n$:

$$y_{k_i}.v_{\{k_1,\dots,k_i\}} = a\, v_{\{k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1\}} \tag{2.2.5}$$

$$x_{k_i}.v_{\{k_1,\dots,k_i\}}^* = -q^{-2} a^{-1}\, v_{\{k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1\}}. \tag{2.2.6}$$

Soit $I = \{k_1, \dots, k_i\}$ et ε_I le poids de v_I, alors $\varepsilon_I = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_{k_j}$.

2.3. Nous allons d'abord calculer les coefficients des matrices (σ^+) et $(S\sigma^-)$ pour $L_q(\varpi_1)$, muni de la base $B_1(a)$ donnée en 2.2. Nous utiliserons les éléments $e_{i,j}$ et $\tilde{f}_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, définis par récurrence par :

$$e_{i,i} = e_i \,;\; e_{i,j} = e_j e_{i,j-1} - q^{-2} e_{i,j-1} e_j \,; \quad \tilde{f}_{i,j} = \xi(e_{i,j}).$$

Posons $\gamma = q^2 - q^{-2}$ et $t_i = \tau(-4\varpi_i)$. Remarquons que :

(2.3.1) $\qquad ad\, x_j.(t_i e_{i,j-1}) = q^{-1} t_i e_{i,j} \,;\; ad\, x_i.t_i = \gamma t_i e_i \qquad 1 \leq i < j \leq n.$

Puis par [chap. I, (1.5.2)].

(2.3.2) $\qquad ad\, y_j.(t_i \tilde{f}_{i,j-1}) = q t_i \tilde{f}_{i,j} \,;\; ad\, y_i.t_i = -\gamma t_i \tilde{f}_i \qquad 1 \leq i \leq j \leq n.$

A l'aide de (2.2.2), (2.2.4) et [chap. I, (2.4.3)], nous obtenons :

$$\begin{aligned} ad\, x_1.c_{1,1} &= -q^{-3} a^{-1} c_{2,1} \\ ad\, x_i.c_{i,1} &= -q^{-2} a^{-1} c_{i+1,1} \quad i \neq 1 \end{aligned}$$

Appliquons [chap. I, 4.1], il vient :

$$\begin{aligned} ad\, x_1.s_{1,1} &= -q^{-3} a^{-1} s_{2,1} \\ ad\, x_i.s_{i,1} &= -q^{-2} a^{-1} s_{i+1,1} \quad i \neq 1 \end{aligned}$$

En utilisant [chap. I, proposition 4.2 (ii)] et (2.3.1), nous obtenons la première colonne de (s), puis la première colonne de (σ^+).

$$\sigma^+_{1,1} = \tau(-2\varpi_1)\,; \quad \sigma^+_{j,1} = (-1)^{j+1} \gamma a^{j-1} q^{j-3} e_{1,j-1} \tau(-2\varpi_1), \qquad 1 < j \leq n+1.$$

De la même manière, à l'aide de (2.2.5) et [chap. I, (2.4.3)], nous obtenons pour $i < j$

$$ad\, x_i.c_{I^i_{i-1}, I^i_{i-1}} = -q^{-3} a^{-1} c_{I^{i+1}_{i-1}, I^i_{i-1}}$$

$$ad\, x_j.c_{I^j_{i-1}, I^i_{i-1}} = -q^{-2} a^{-1} c_{I^{j+1}_{i-1}, I^i_{i-1}}$$

où $I^s_k := \{1, \ldots, k, s\}$ pour $k < s$.
Comme précédemment, ceci nous fournit les éléments $\sigma^+_{I^j_{i-1}, I^i_{i-1}}$ pour $i \leq j \leq n$.
Or, par [chap. I, remarque 4.2], et (2.1.3), on a :

$$\sigma^+_{I^j_{i-1}, I^i_{i-1}} = \sigma^+_{1,1} \ldots \sigma^+_{i-1,i-1}.\sigma^+_{j,i} = \tau(-2\varpi_{i-1}) \sigma^+_{j,i}.$$

Nous obtenons ainsi tous les coefficients de la matrice (σ^+) :
(2.3.3)
$\sigma^+_{i,i} = \tau(-2\varepsilon_i)\,;\; \sigma^+_{j,i} = (-1)^{i+j} \gamma a^{j-i} q^{j-i-2} e_{i,j-1} \tau(-2\varepsilon_i), \qquad 1 \leq i < j \leq n+1.$

Le calcul des coefficients de $(S\sigma^-)$ est identique et donne :

(2.3.4) $S\sigma^-_{i,i} = \tau(-2\varepsilon_i)\,;\, S\sigma_{i,j} = -q^{j-i}\gamma a^{i-j}\tau(-2\varepsilon_i)\tilde{f}_{i,j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq n+1.$

Les composantes des matrices (σ^+) et $(S\sigma^-)$ pour $L_q(\varpi_i)$ dans la base B_i sont alors fournies par les formules (2.1.3).

2.4. Pour $I \in \mathcal{C}^i_{n+1}$, $I = \{k_1, \ldots, k_i\}$, on pose : $\mid I \mid = \sum_{j=1}^{i} k_j$.
Par (1.2.4), on sait que $\check{Z}$ est engendré par :

(2.4.1) $$z_i = \sum_{I,K \in \mathcal{C}^i_{n+1}} q^{4(\rho,\varepsilon_I)}\, \sigma^+_{I,K}\, S\sigma^-_{K,I} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Remarque. Un calcul simple donne :

$$\forall I \in \mathcal{C}^i_{n+1}\,,\; 4(\rho, \varepsilon_I) = (2n+4)i - 4 \mid I \mid .$$

Nous allons donner une écriture plus explicite de ces générateurs. Pour cela, nous allons définir les matrices suivantes.
On considère $\mathcal{D}^+ = (d^+_{i,j})$ triangulaire inférieure et $\widetilde{\mathcal{D}}^- = (\tilde{d}^-_{j,i})$ triangulaire supérieure données par :

$$d^+_{i,i} = q^2, \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1\,; \quad d^+_{j,i} = \gamma e_{i,j-1},\ 1 \leq i < j \leq n+1.$$

$$\tilde{d}^-_{i,i} = -1,\ 1 \leq i \leq n+1\,; \quad \tilde{d}^-_{i,j} = \gamma \tilde{f}_{i,j-1},\ 1 \leq i < j \leq n+1.$$

Pour I, J dans $\mathcal{C}^i_{n+1}$, posons :

$$d^+_{I,J} = det_{q^{-1}}\,(\mathcal{D}^+)_{I,J}\,; \quad \tilde{d}^-_{I,J} = \widetilde{det}_{q^{-1}}\,(\widetilde{\mathcal{D}})_{I,J}.$$

On notera aussi :

$$\tilde{d}^+_{I,J} = \xi(\tilde{d}^-_{I,J})\,; \quad d^-_{I,J} = \xi(d^+_{I,J}).$$

Théorème. *Soit $1 \leq i \leq n$, on a :*
(i) *La décomposition du générateur z_i dans $V^+ \otimes \check{U}_0 \otimes SV^-$ est fournie par*

$$z_i = (-1)^i q^{2(n+1)i} \sum_{I,K \in \mathcal{C}^i_{n+1}} (-q^{-2})^{|I|+|K|} d^+_{I,K}\tau(-4\varepsilon_K)\tilde{d}^-_{K,I}.$$

(ii) *La décomposition du générateur z_i dans $SV^- \otimes \check{U}_0 \otimes V^+$ est fournie par*

$$z_i = (-1)^i q^{-2(n+1)i} \sum_{I,K \in \mathcal{C}^i_{n+1}} (-q^2)^{|I|+|K|} \tilde{d}^-_{I,K}\tau(-4\varepsilon_K) d^+_{K,I}.$$

(iii) $\varphi(z_i) = \sum_{J\in\mathcal{C}^i_{n+1}} q^{-4(\rho,\varepsilon_J)}\tau(-4\varepsilon_J)$.

Preuve. Fixons I, J dans $\mathcal{C}^i_{n+1}$.
Pour le choix d'un paramètre $a \in \mathbb{K}$, notons $\sigma^+_{I,J}(a)$ et $S\sigma^-_{I,J}(a)$ les coefficients correspondants, cf. (2.3.3), (2.3.4), (2.1.3). On trouve, par (2.3.3), (2.3.4).

$$\sigma^+_{j,i}(-q^{-1}) = q^{-2}d^+_{j,i}\,\tau(-2\varepsilon_i)\ , \qquad S\sigma^-_{i,j}(q) = -\tau(-2\varepsilon_i)\tilde{d}^-_{i,j}.$$

On peut en déduire facilement que :

$$\sigma^+_{J,I}(-q^{-1}) = q^{-2i}\,d^+_{J,I}\tau(-2\varepsilon_I)\ , \qquad S\sigma^-_{I,J}(q) = (-1)^i\tau(-2\varepsilon_I)\tilde{d}^-_{I,J}. \tag{2.4.2}$$

De plus, d'après (2.3.3) et (2.1.3), on a : $\sigma^+_{J,I}(q) = (-q^2)^{|J|-|I|}\sigma^+_{J,I}(-q^{-1})$.
Par (2.4.1) et la remarque 2.4, il vient :

$$z_i = \sum_{I,K\in\mathcal{C}^i_{n+1}} q^{4(\rho,\varepsilon_I)}\sigma^+_{I,K}(q)\,S\sigma^-_{K,I}(q)$$

$$z_i = (-1)^i q^{2(n+1)i} \sum_{I,K\in\mathcal{C}^i_{n+1}} (-q^{-2})^{|I|+|K|}d^+_{I,K}\tau(-4\varepsilon_K)\tilde{d}^-_{K,I}.$$

D'où (i).
(ii) provient alors de (1.2.2) et (iii) est découle de (1.2.3). ◇

3. FORMULES SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES.

$\mathbf{k}$ désigne un corps quelconque de caractéristique nulle.

3.1. Dans l'anneau des polynômes $\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_m]$, on note σ_p, $1 \le p \le m$ les fonctions symétriques élémentaires et S_k les sommes de Newton, $0 \le k \le m$

$$\sigma_p = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le m} X_{i_1}\ldots X_{i_p}\ ,\ S_k = \sum_{i=1}^m X_i^k\ ,\ S_0 = m.$$

Soit $\mathcal{S}_k$ le groupe des permutations d'un ensemble à k éléments agissant sur $\mathbb{N}^{*k}$. Pour $(I) \in \mathbb{N}^{*k}/\mathcal{S}_k$, $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i(I)$ désigne le nombre de répétitions du nombre i dans (I). On adopte les notations suivantes :

$$(I)\mathbf{!} = \prod_i \beta_i(I)!\,; \qquad \bar{I} = \prod_i i^{\beta_i(I)}\,; \qquad K(I) = \sum_i \beta_i(I)\,;$$

$$\mathcal{N}(I)=\sum_i i\beta_i(I)\,; \qquad\qquad S_{(I)}=\prod_i S_i^{\beta_i(I)}.$$

On sait alors que les σ_p se décomposent dans la base des $S_{(J)}$ en :

$$\text{(3.1.1)} \qquad \sigma_p=\sum_{\mathcal{N}(J)=p}\xi_{(J)}S_{(J)} \ \text{ avec } \ \xi_{(J)}=\frac{(-1)^{\mathcal{N}(J)+K(J)}}{(J)!\,\overline{J}}.$$

(Formule de Waring)

On notera (I,I') la juxtaposition des objets (I) et (I'), cette juxtaposition définit un ordre partiel dans $\cup_k\mathbb{N}^{*k}/\mathcal{S}_k$:

$$(I)<(J)\Leftrightarrow\exists(I'),\,(I,I')=(J).$$

On écrira dans ce cas : $(I')=(J\backslash I)$. D'après (3.1.1), où $(J)=(I,I')$.

$$\text{(3.1.2)} \qquad \xi_{(I,I')}=\frac{(-1)^{\mathcal{N}(I)+K(I)}(I')!\,\xi_{(I')}}{(I,I')!\,\overline{I}}.$$

Si on remplace $(X_1,X_2,\dots,X_m)$ par $(1,1,\dots,1)$, (3.1.1) donne :

$$C_m^p=\sum_{\mathcal{N}(I)=p}\xi_{(I)}m^{K(I)},$$

puis par (3.1.2)

$$\sum_{\mathcal{N}(I')=p}\frac{(I,I')!}{(I')!}\xi_{(I,I')}m^{K(I')}=\frac{(-1)^{\mathcal{N}(I)+K(I)}}{\overline{I}}C_m^p,$$

et par un changement de variables, (I) étant fixé

$$\text{(3.1.3)} \qquad \sum_{\substack{(I)<(J)\\ K(J)=p}}\frac{J!}{(J\backslash I)!}\xi_{(J)}m^{K(J)-K(I)}=\frac{(-1)^{\mathcal{N}(I)+K(I)}}{\overline{I}}C_m^{p-K(I)}.$$

3.2. Soit $(I)\in\cup_k\mathbb{N}^{*k}/\mathcal{S}_k$, on note

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \mathcal{F}_{(I)}(t)=\prod_i\Big(\sum_{j=1}^m exp(itX_j)\Big)^{\beta_i(I)}$$

et on pose $\mathcal{T}_{(I),n}=$

$$\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_{K(I)}\le n}(\underbrace{X_{i_1}+\ldots+X_{i_{\beta_1}}}_{\beta_1}+\underbrace{2X_{i_{\mathfrak{b}eta_1+1}}+\ldots+2X_{i_{\beta_1+\beta_2}}}_{\beta_2}+\ldots\underbrace{+pX_{i_{K(I)}}}_{\beta_s})^n$$

où $s = Max_k \{i_k\}$.

Calculons de deux manières la dérivée n-ième $\mathcal{F}_{(I)}^{(n)}(0)$, l'une en développant le produit, puis en dérivant terme à terme, l'autre en utilisant directement la formule de Leibnitz. En égalisant les résultats obtenus, on trouve :

$$\mathcal{T}_{(I),n} = \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{K(I)}=n} \prod_i i^{\beta_i(I)\lambda_i} \frac{n!}{\prod_i \lambda_i!} S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} \ldots S_{\lambda_{K(I)}}.$$

Par regroupements, on obtient :

$$\text{(3.2.1)} \qquad \mathcal{T}_{(I),n} = \sum_{(\lambda),\, \mathcal{N}(\lambda)=n} (\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{(K(\lambda),K(I))}} (I)^{\sigma(\lambda)}) \frac{c(\lambda)}{\lambda!} S_{(\lambda)}\, m^{K(I)-K(\lambda)}$$

où $c(\lambda) = \dfrac{\mathcal{N}(\lambda)!}{\prod_i \lambda_i!}$, où $\mathcal{E}_{u,r}$ représente l'ensemble des injections de $[1,u] \cap \mathbb{N}$ vers $[1,r] \cap \mathbb{N}$ avec la convention $\begin{cases} \sigma(\lambda)_j = & \lambda_i \ \text{ si } \sigma(i) = j \\ & 0 \ \text{ si } j \notin Im\, \sigma \end{cases}$,

et où
$$(I)^{(\Lambda)} = \prod_i i^{\beta_i(\lambda)\Lambda_i}.$$

3.3. Considérons maintenant :

$$\text{(3.3.1)} \qquad \psi_{p,n} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le m} (X_{i_1} + \ldots + X_{i_p})^n$$

$$\psi_{p,n} = \sum_{(\lambda),\, \mathcal{N}(\lambda)=n} a_{p,(\lambda)}\, S_{(\lambda)}.$$

Par un argument combinatoire, on voit qu'une même relation lie σ_p avec les $S_{(I)}$ et $\psi_{p,n}$ avec les $\mathcal{T}_{(I),n}$.

$$\psi_{p,n} = \sum_{(I),\, \mathcal{N}(I)=p} \xi_{(I)}\, \mathcal{T}_{(I),n}.$$

Donc, d'après (3.2.1)

$$\psi_{p,n} = \sum_{(I),\, \mathcal{N}(I)=p} \xi_{(I)} \sum_{K(\lambda)=n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{(K(\lambda),K(I))}} (I)^{\sigma(\lambda)} \Big) \frac{c(\lambda)}{\lambda!} S_{(\lambda)}\, m^{K(I)-K(\lambda)}.$$

Fixons-nous (λ), tel que $K(\lambda) \le p$, soit k, $K(\lambda) \le k \le p$ et $(\mu) \in \mathbb{N}_k^{K(\lambda)} := \{(\mu) \in \mathbb{N}^{K(\lambda)},\, \mathcal{N}(\mu) = k\}$. On a $K(\mu) = K(\lambda)$.
Le terme en $(\mu)^{(\lambda)}$ de $a_{p,(\lambda)}$ est alors :

$$\frac{c(\lambda)}{(\lambda)!} \sum_{\substack{(I),\, K(I)=p \\ (\mu) \subset (I)}} \xi_{(I)} \frac{(I)!}{(I \backslash \mu)!} m^{K(I)-K(\mu)}.$$

En appliquant (3.1.3), il vient :

Théorème. *La décomposition des fonctions symétriques $\psi_{p,n}$ est donnée par :*

$$\psi_{p,n} = \sum_{(\lambda),\, \mathcal{N}(\lambda)=n} a_{p,(\lambda)}\, S_{(\lambda)} \qquad \textit{où}$$

$$a_{p,(\lambda)} = (-1)^{K(\lambda)} \frac{c(\lambda)}{(\lambda)\mathbf{!}} \sum_{k=1}^{p} (-1)^k\, C_m^{p-k} \sum_{(\mu)\in\mathbb{N}_k^{K(\lambda)}} (\mu)^{(\lambda)-\mathbf{1}}$$

et $\mathbf{1} = (1, 1 \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{K(\lambda)}$. ♢

Remarque. La somme $\sum_{k=1}^{p}$ est en fait une somme $\sum_{k=K(\lambda)}^{p}$, les autres termes étant nuls.

Ecrivons : $a_{i,n}$ à la place de $a_{i,(n)}$. Nous avons la proposition :

Proposition.
(i) $a_{i,n} = \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1}\, C_m^{i-k}\, k^{n-1}$.
(ii) $a_{i,(\lambda)}$ *est combinaison linéaire à coefficients indépendants de* p *des* $a_{i,j}$, $1 \leq j \leq \mathcal{N}(\lambda)$. *Dans cette combinaison linéaire, le coefficient en* $a_{i,\mathcal{N}(\lambda)}$ *est :*

$$O(\lambda) = (-1)^{K(\lambda)+1} \frac{\mathcal{N}(\lambda)}{(\lambda)\mathbf{!}\,\overline{\lambda}}.$$

(iii) $a_{p,n} = (-1)^n\, a_{m-p,n}$.

Preuve. (i) découle immédiatement du théorème 3.3 avec $K(n) = 1$, $(n)\mathbf{!} = 1$, $c(n) = 1$.
(ii) On sait que $\sum_{(\mu)\in\mathbb{N}_k^{K(\lambda)}} (\mu)^{(\lambda)}$ s'écrit sous la forme d'un polynôme en k de degré $\mathcal{N}(\lambda) + K(\lambda) - 1$.
(Exemple : $\sum_{i=0}^{k} (k-i)^n\, i^m$ est un polynôme en k de degré $n+m+1 = (n+m)+2-1$.)
Son terme de plus haut degré, c'est à dire sa valeur asymptotique est donnée par :

$$\in t_\delta\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_{K(\lambda)-1}^{\lambda_{K(\lambda)-1}}\, (k - x_1 \ldots - x_{K(\lambda)-1}^{\lambda_{K(\lambda)-1}})\, dx_1 \ldots dx_{K(\lambda)-1}$$

où δ est le domaine $x_i \geq 0$, $(1 \leq i \leq K(\lambda) - 1)$, $k - x_1 \ldots - x_{K(\lambda)-1} \geq 0$.
Pour avoir le coefficient en $k^{\mathcal{N}(\lambda)+K(\lambda)-1}$, on pose $k = 1$. On trouve :

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i!}{(\mathcal{N}(\lambda) + K(\lambda) - 1)!}.$$

La première partie de l'assertion (ii) est facile et la deuxième s'obtient en remplaçant dans (i) l'expression $\sum_{(\mu)\in\mathbb{N}_k^{K(\lambda)}} (\mu)^{(\lambda)-\mathbf{1}}$ par son terme asymptotique

$$\frac{\prod_{i=1}^{K(\lambda)} (\lambda_i - 1)!}{(\mathcal{N}(\lambda) - 1)!} k^{n-1}.$$

(iii) Soit $n \leq m$. Notons Ω l'ensemble des racines de l'équation $X^m - X^n = 0$, $n \leq m$. On note $S_i(\Omega)$ les sommes de Newton appliquées à Ω. On a $S_i(\Omega) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ et $S_n(\Omega) \neq 0$. Donc $\psi_{p,n}(\Omega) = a_{p,n} \times S_n(\Omega)$ et $\psi_{m-p,n}(\Omega) = a_{m-p,n} \times S_n(\Omega)$.
Or, comme $S_1(\Omega) = 0$, $\psi_{p,n}(\Omega) = (-1)^n \psi_{m-p,n}(\Omega)$ (en remplaçant $\sum_{i\in I} X_i$ par $-\sum_{j\in[1,m]\setminus I} X_j$ dans (3.3.1)).
L'assertion en découle. $\diamondsuit$

5. SINGULARITES DU CENTRE DES ALGEBRES QUANTIQUES

5.1. On considère la $\mathbb{K}$-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$, ainsi que son centre Z. On se propose de chercher les propriétés géométriques de ce dernier pour $\mathfrak{g}$ simple quelconque. On sait, par le théorème 1.2, que Z est isomorphe à la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{Z}$ du monoïde $4P^+ \cap Q$. On peut donc ramener le problème à l'étude de cette algèbre. Posons $X_i = \tau(4\varpi_i)$, $1 \leq i \leq n$. On plonge $\mathcal{Z}$ dans l'anneau $R = \mathbb{K}[X_i,\ 1 \leq i \leq n]$, muni de sa graduation naturelle. On note R_i le sous-espace de R formé des éléments homogènes de degré i.
5.2. Un anneau intègre est dit normal s'il est noethérien et intégralement clos. Soit M un semi-groupe engendré par des monômes de R, et A la sous-algèbre de R engendrée par M. On sait par , [17, proposition 1], que si M vérifie la condition : $p',\ p'' \in M,\ pp' = p'' \Rightarrow p \in M$, alors l'algèbre A est normale. Par 5.1, on obtient

Proposition. *Z est une algèbre normale.*

5.3. Rappelons, cf. [39], que pour une sous-algèbre graduée A de R, on a les implications

A est un anneau de polynômes $\Rightarrow$ A est une hypersurface $\Rightarrow$ A est une intersection complète $\Rightarrow$ A est Gorenstein $\Rightarrow$ A est Cohen-Macaulay.

Il est donc naturel de chercher quelle est dans cette gamme, la propriété optimale commune aux centres des algèbres quantiques $U_q(\mathfrak{g})$. Nous avons

Théorème. *Pour tout algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ simple, le centre de $U_q(\mathfrak{g})$ est Gorenstein.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{Z}$ est Gorenstein. Nous allons démontrer ceci selon le type de $\mathfrak{g}$. Remarquons que si $\mathfrak{g}$ est pas de type A_n, $n \geq 2$ $n \neq 3$, ou E_6, alors $4P^+ \not\subset Q$. Sinon, $4P^+ \subset Q$, et $\mathcal{Z}$ est une algèbre de polynômes.
Nous devons étudier deux cas.
1) Si $\mathfrak{g}$ est de type A_n, $n \geq 2$ $n \neq 3$.
On pose $d = PGCD(4, n+1)$, $\mu = \frac{n+1}{d}$. On rappelle, cf. [5, Planche I], que

$$\varpi_i = \frac{1}{n+1}[(n+1-i)\alpha_1 + 2(n+1-i)\alpha_2 + \ldots + i(n-i)\alpha_{i+1} + \ldots + i\alpha_n].$$

Soit $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{Z}$ est engendré par le semigroupe des monômes $\prod X_i^{k_i}$ tels que $\sum k_i(4\varpi_i) \in Q$, c'est à dire par la formule précédente :

$$(*) \qquad \sum ik_i \equiv 0 \ [\mu].$$

Soit ϑ une racine primitive μ-ième de l'unité et $N = (a_{ij})$ la matrice $n \times n$ donnée par $a_{ii} = \vartheta^i$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. N est la matrice d'un endomorphisme de l'espace R_1 muni de sa base naturelle. Soit G le groupe multiplicatif fini engendré par N. On munit R de la structure naturelle de G-module. Par (*), il est clair que $\mathcal{Z} = R^G$, où R^G désigne la sous-algèbre des invariants. Comme $det\, N = 1$, $G \subset SL(n)$. Par [39, 8.2], on en déduit que $\mathcal{Z}$ est Gorenstein.
2) Si $\mathfrak{g}$ est de type E_6.
Comme pour le cas A_n on montre à l'aide de [5, Planche V], que $\mathcal{Z}$ est engendré par le semi-groupe des monômes $\prod_{i=1}^{6} X_i^{k_i}$ tels que les k_i vérifient $k_1 + 2k_3 + k_5 + 2k_6 \equiv 0$. On peut donc trouver une matrice N tel que $\mathcal{Z}$ soit l'anneau des invariants pour l'action du groupe fini monogène engendré par N. La preuve est alors analogue à celle du premier cas. $\diamondsuit$

Notons $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z} \cap R_i$. on définit la série de Hilbert de $\mathcal{Z}$ par $H(t) = \sum_{i \leq 0} (dim\, \mathcal{Z}_i)t^i$. Alors, à l'aide de la formule de Molien, cf. [39, 2.1], on peut trouver une expression de $H(t)$ lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A_n ou E_6 : $H(t) = \frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{\mu-1} \frac{1}{det\,(Id - tN^i)}$ avec les notations de la démonstration précédente et en posant $\mu = 3$ dans le cas E_6.

5.4. Il reste à chercher les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ telles que Z soit une intersection complète. Pour cela, nous nous servirons du théorème suivant.

Théorème [26]. *Soit G un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{C})$ opérant de façon naturelle sur l'anneau des polynômes à n variables. Alors, si l'anneau des invariants par G est intersection complète, G est engendré par $\{g \,/ rg\,(g - I) \leq 2\}$.*

5.5. Nous pouvons à présent affiner le théorème 5.3.

Proposition. *Soit Z le centre de l'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$. Alors Z possède les propriétés optimales suivantes*
(i) *Si $\mathfrak{g}$ est de type A_n, $n \notin \{1, 2, 3\}$, ou E_6, Z est Gorenstein*
(ii) *Si $\mathfrak{g}$ est de type A_2, Z est une hypersurface.*

(iii) *Sinon, Z est un anneau de polynômes.*

Preuve. (iii) provient clairement de la remarque au début de la preuve du théorème 5.3. Pour prouver (ii) il suffit de constater que si $n = 2$, on a $\mathcal{Z} = \mathbb{K}[X_1^3, X_1X_2, X_2^3]$. Par le théorème 5.3, nous devons maintenant prouver que $\mathcal{Z}$ n'est pas, dans le cas (i), une intersection complète.
Plaçons nous tout d'abord dans le cas A_n. On adopte les notations de la preuve de 5.3. Posons pour tout i, $d(i) = PGCD(i, \mu)$, $a(i) = \frac{\mu}{d(i)}$. La matrice N^i étant diagonale, on voit facilement que la valeur propre 1 apparait dans N^i avec la multiplicité $d.d(i) - 1$. Supposons $rg\,(N^i - I) \leq 2$. Il vient donc $d.d(i) - 1 \geq n - 2$, d'où $n + 1 \geq (n-1).a(i)$. Or, comme $n \neq 3$, on a $a(i) \geq 2$ si $1 \leq i < \mu$. Par conséquent, l'inégalité précédente fournit $n \leq 3$. Donc, si $n > 3$, G ne contient aucun élément autre que l'identité, ayant la propriété $rg\,(g - I) \leq 2$. Il est facile de prouver une assertion identique dans le cas E_6. La partie (i) résulte donc du théorème 5.4. $\diamondsuit$

Soit $w_0 = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une décomposition réduite de w_0.
On pose : $w_j = \sigma_{j+1} \dots \sigma_n$, $0 \leq j \leq n-1$ et on désigne par $\beta(\sigma_i)$ la racine associée à σ_i. Enfin, on définit le foncteur composé : $\mathcal{D}_{w_j} = \mathcal{D}_{\beta(\sigma_{j+1})} \mathcal{D}_{\beta(\sigma_{j+2})} \dots \mathcal{D}_{\beta(\sigma_n)}$.
Pour $\lambda \in P$, notons $\mathbb{C}_\lambda$ le $U(\mathfrak{b}^+)$-module de dimension 1 de poids λ.

Le théorème suivant résume les résultats de [23, 2.13, 3.4].

Théorème. *Soit* $\lambda \in P^+$,

(i) *Pour* $0 \leq i \leq n-1$, *l'espace de plus bas poids de* $\mathcal{D}_{w_j}\mathbb{C}_\lambda$ *est engendré par un vecteur de poids* $w_j\lambda$. *Notons* $u_{w_j\lambda}$ *un tel vecteur.*

(ii) *Soit* $\alpha_i = \beta(\sigma_j)$. *Alors* $(w_j\lambda\, ,\, \check{\alpha_i}) \geq 0$ *et on a* $u_{w_{j-1}\lambda} = x_{-\alpha_i}^{(w_j\lambda, \check{\alpha_i})} u_{w_j\lambda}$ *(à une constante multiplicative près).*

(iii) *Il existe un isomorphisme de* $U(\mathfrak{b}^+)$*-modules* $\mathcal{D}_{w_0}\mathbb{C}_\lambda \simeq L(\lambda)$.

Ce théorème nous fournit un algorithme pour la recherche des X_j, à partir d'une décomposition de w_0. Cette dernière nous est donnée dans [15] pour chaque algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$.
Nous donnons ci-dessous la décomposition de w_0 ainsi que l'élément X_j qui en découle, ceci pour $\mathfrak{g}$ simple classique. L'algorithme s'applique aussi au cas où $\mathfrak{g}$ est exceptionnelle. Nous laissons au lecteur intéressé le soin du détail des calculs dans ce cas. Afin de simplifier les écritures, nous utiliserons le symbole "i" à la place de la réflexion associée à α_i.

a) $\mathfrak{g}$ de type A_n : $w_0 = 1\,2 \dots n\,1\,2 \dots n-1 \dots 1\,2\,1$
Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, soit $a_{i,k} = x_k\, x_{k-1} \dots x_i$, alors :

$$X_j = a_{1,n-j+1} \dots a_{j-1,n-1}\, a_{j,n}\ ,\ 1 \leq j \leq n$$

b) $\mathfrak{g}$ de type B_n : $w_0 = (1\,2 \dots n\, n-1 \dots 1)(2 \dots n\, n-1 \dots 2) \dots (n-1\, n\, n-1)(n)$
Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, soit $b_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2\, x_k \dots x_{n-1} x_n^2\, x_{n-1} \dots x_k$ et $b_i = x_i x_{i+1} \dots x_n$, alors :

$$X_j = b_{j,j} \dots b_{j,2} b_{j,1}\ ,\ 1 \leq j < n\ ;\ X_n = b_n \dots b_1$$

c) $\mathfrak{g}$ de type C_n : $w_0 = (1\,2 \dots n\, n-1 \dots 1)(2 \dots n\, n-1 \dots 2) \dots (n-1\, n\, n-1)(n)$
Pour $1 \leq i \leq k \leq n$, on pose $c_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2\, x_k \dots x_{n-1}\, x_n\, x_{n-1} \dots x_k$, alors:

$$X_j = c_{j,j} \dots c_{j,2} c_{j,1}$$

d) $\mathfrak{g}$ de type D_n :

$$w_0 = (1\,2 \dots n-2\, n-1\, n\, n-2 \dots 1)(2 \dots n\, n-1\, n\, n-2 \dots 2) \dots (n-1\, n)$$

Pour $1 \leq i \leq k \leq n-2$, on pose : $d_{k,i} = x_i^2 \dots x_{k-1}^2\, x_k \dots x_{n-2}\, x_n\, x_{n-1} \dots x_k$,
$d_{n-1,i} = x_i\, x_{i+1} \dots x_{n-1}$, $d_{n,i} = x_i\, x_{i+1} \dots x_{n-2}\, x_n$, alors :

$$X_j = d_{j,j} \dots d_{j,2}\, d_{j,1}\ ,\ 1 \leq j \leq n-2$$

$$X_{n-1} = \begin{cases} d_{n-1,n-1}\dots d_{n-1,3}d_{n,2}d_{n-1,1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ d_{n,n}\dots d_{n-1,3}d_{n,2}d_{n-1,1} & \text{si } n \text{ impair;} \end{cases}$$

$$X_{n} = \begin{cases} d_{n,n}\dots d_{n,3}d_{n-1,2}d_{n,1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ d_{n-1,n-1}\dots d_{n,3}d_{n-1,2}d_{n,1} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Remarque 1.4. Pour $1 \leq i \leq N$, soit λ_i un exposant de x_i dans la décomposition de X_j. Ecrivons alors $X_j = X_\nu x_i^{\lambda_i} X_\lambda$, où $\nu, \lambda \in P$ sont les poids de X_ν et X_λ. Il vient par construction : $\lambda_i = (\varpi_j - \lambda\,,\, \check{\alpha_i})$, cf. théorème 1.4 (ii).

2. STRUCTURE DU CENTRE DE U^+.

2.1. Nous allons tout d'abord chercher les éléments de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ invariants par l'action adjointe de U^+. Ceux-ci seront donnés par la proposition 2.1.

Définition. Soit $\mu \in P^+$. On désigne par X_μ un monôme de U^+ transformant un vecteur de plus bas poids de $L_q(\mu)^*$ en un vecteur de plus haut poids. On pose $r(\mu) = \mu - w_0(\mu)$, $e_{r(\mu)} = \tau(4\mu) ad\, X_\mu.(\tau(-4\mu))$.

Remarquons que par le théorème 1.2 (ii) et (v), $e_{r(\mu)}$ ne dépend du choix du monôme X_μ qu'à une constante multiplicative près. De plus pour l'action adjointe de U_0, le poids de $e_{r(\mu)}$ est $r(\mu)$.
Si M est un sous-$ad\, U^+$-module de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$, nous posons

$$M^{U^+} = \{m \in M,\ adU_+^+(m) = 0\}.$$

Proposition. *Soit $\lambda \in P$, alors on a :*
(i) *L'espace $\mathbb{K}\tau(\lambda) \otimes V^+$ est un sous-$ad\, U^+$-module de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$.*
(ii) *Si $\lambda \in -4P^+$, $(\mathbb{K}\tau(\lambda) \otimes V^+)^{U^+} = \mathbb{K}\tau(\lambda)e_{r(-1/4\lambda)}$.*
(iii) *Si $\lambda \notin -4P^+$, $(\mathbb{K}\tau(\lambda) \otimes V^+)^{U^+} = \{0\}$.*
(iv) $(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} = \bigoplus_{\mu\in P^+} \mathbb{K}\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}$.

Preuve. (i) se vérifie facilement par le calcul de $ad\, x_i.(\tau(\lambda)v)$, $v \in V^+$, $1 \leq i \leq N$, v de poids μ.

Montrons l'inclusion $\supset$ dans (ii). Soit $\lambda \in 4P^+$. Par le théorème 1.2 (ii) et (v), $ad\, X_{-1/4\lambda}.\tau(\lambda)$ est le plus haut poids de $ad\, U^+.\tau(\lambda)$. Par (i), l'inclusion est démontrée.

Montrons l'inclusion $\subset$ dans (ii) et (iii). Soient $\lambda \in P$, $E \in V^+$ tels que $ad\, U^+.(\tau(\lambda) \otimes E) = 0$. Par passage au gradué $ad\, U^+.(\overline{\tau(\lambda)} \otimes \overline{E}) = 0$, donc $\overline{\tau(\lambda)} \otimes \overline{E} \in L^+_\lambda$. D'où, si $\lambda \notin -4P^+$, $\overline{E} = 0$ par le théorème 1.2 (i), et donc $E = 0$; si

$\lambda \in -4P^+$ par le théorème 1.2 (ii), $\overline{\tau(\lambda)}\otimes\overline{E}$ est proportionnel à $ad\, X_{-1/4\lambda}.(\overline{\tau(\lambda)}) = \overline{\tau(\lambda)}\otimes\overline{e}_{r(-1/4\lambda)}$. Le théorème 1.2. (v) implique alors : $\tau(\lambda)\otimes E \in \mathbb{K}\tau(\lambda)\otimes e_{r(-1/4\lambda)}$.

Il reste à montrer (iv). Remarquons pour cela que : $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+) = \bigoplus_{\lambda\in P} \mathbb{K}\tau(\lambda)\otimes V^+$. Donc (iv) résulte de (i), (ii) et (iii). ♢

2.2. Pour tout $\mu \in P^+$, on pose $x_{r(\mu)} = \tau(r(-4\lambda))^{-1}e_{r(\mu)}$. On a $x_{r(\mu)} \in U^+$. Pour tout μ_i dans $\mathcal{B}$, cf. lemme 1.3, on note : $e_{r_i} = e_{r(\mu_i)}$, $x_{r_i} = x_{r(\mu_i)}$, $1 \leq i \leq \text{Card } \mathcal{B}$.

Proposition. *Soient $\mu\,,\,\nu \in P^+$. Alors $e_{r(\mu)}e_{r(\nu)}$, resp. $x_{r(\mu)}x_{r(\nu)}$, est égal à $e_{r(\mu+\nu)}$, resp. $x_{r(\mu+\nu)}$, à une constante multiplicative non nulle près.*

Preuve. Soit $\eta \in P^+$. On sait, cf. proposition 2.1 (iv) que :

$$(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{K}\tau(-4\eta)V^+ = \mathbb{K}\tau(-4\eta)e_{r(\eta)}.$$

On a donc facilement :

$$\begin{aligned}\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}\tau(-4\nu)e_{r(\nu)} \in\ & (\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{K}\tau(-4(\mu+\nu))V^+ \\ &= (\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))^{U^+} \cap \mathbb{K}\tau(-4(\mu+\nu))e_{r(\mu+\nu)}\end{aligned}$$

La proposition en découle. ♢

Nous pouvons maintenant expliciter la structure du centre de $Z(U^+)$.

Théorème. *$Z(U^+)$, resp. $Z(V^+)$, est l'algèbre de polynômes engendrée par les x_{r_i}, resp. les e_{r_i} ,$1 \leq i \leq$ Card $\mathcal{B}$.*

Preuve. ll suffit de montrer le théorème pour $Z(U^+)$, cf. [chap. I, 1.5]. Supposons $\mu \in P^+$, par la proposition 2.1, on a : $\forall i\,,\, ad\, x_i.(\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}) = 0$.
D'où : $x_i\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}k_i - q^{-2d_i}k_i\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}x_i = 0$. Comme $(\alpha_i, \alpha_i) = 2d_i$, il vient

$$\forall i\,,\; q^{-(\alpha_i, r(\mu))}x_i x_{r(\mu)} = q^{(\alpha_i, -4\mu + r(\mu))}x_{r(\mu)}x_i$$

On en déduit facilement :

$$\mu \in P^+\,,\; x_{r(\mu)} \in Z(U^+) \Longleftrightarrow \mu \in \mathcal{H} \tag{2.2.1}$$

Supposons maintenant X non nul dans $Z(U^+)$, de poids η. On prouve alors par calcul : $\forall i\,,\, ad\, x_i.(\tau(-\eta)X) = 0$. D'où $\tau(-2\eta)(\tau(\eta)X) \in (\tau(-2\eta)\otimes V^+)^{U^+}$. Ceci entraine par la proposition 2.1 : $-2\eta \in -4P^+$ et $X \in \mathbb{K}x_{r(\eta/2)}$. Le théorème découle alors de (2.2.1), de la proposition 2.2 et du lemme 1.3. ♢

2.3. Nous donnons dans cette section une méthode permettant de calculer explicitement les générateurs de $Z(U^+)$. Remarquons que par la proposition 2.2, le théorème 2.2 et le lemme 1.3, il suffit de calculer $x_{r(\varpi_j)}$, $1 \leq j \leq N$. Pour cela, nous allons utiliser le monôme X_j décrit en 1.4.
Le théorème 1.2 exprime qu'il existe un isomorphisme de U^+-modules :

$$J_{\varpi_j}\;:\; L_q(\varpi_j)^* \xrightarrow{\sim} ad\, U^+.\tau(-4\varpi_j).$$

Soit $v \in L_q(\varpi_j)^*$ de poids ν, il est clair que l'on peut écrire :

$$J_{\varpi_j}(v) = \tau(-4\varpi_j)\tau(\nu + \varpi_j)x(v) \text{ où } x(v) \in U^+.$$

L'élément $x_{r(\varpi_j)}$ cherché est proportionnel à $x(v'_j)$, où v'_j est le vecteur de plus haut poids de $L_q(\varpi_j)^*$.
Le lemme suivant, joint à la section 1.4, permet de calculer $x_{r(\varpi_j)}$.

Lemme. *Avec les notations de la remarque* 1.4*, soit* $X_j = X_\nu x_i^{\lambda_i} X_\mu$ *.*
Soit v_j *le plus bas poids de* $L_q(\varpi_j)^*$*. Supposons* $v = X_\lambda(v_j)$ *,* $v' = x_i^{\lambda_i}(v)$*. Alors :*

$$x(v') = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\lambda_j} (-1)^s q_j^{2(\lambda_j - 2s)} \begin{bmatrix} \lambda_j \\ s \end{bmatrix}_{d_j} x_j^{\lambda_j - s} x(v) x_j^s, & \text{si } i = j, \\ q_i^{-\lambda_i} \sum_{s=0}^{\lambda_i} (-1)^s q_i^{\lambda_i - 2s} \begin{bmatrix} \lambda_i \\ s \end{bmatrix}_{d_i} x_i^{\lambda_i - s} x(v) x_i^s & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Preuve. Définissons par récurrence les éléments $x_\lambda \in U^+$ de poids λ :

$$\tau(-4\varpi_j)\tau(\lambda + \alpha_i)x_{\lambda+\alpha_i} = ad\, x_i.[\tau(-4\varpi_j)\tau(\lambda)x_\lambda]$$

Il vient alors par calcul : $x_{\lambda+\alpha_i} = q_i^{-2}(q_i^{4\delta_{ij} - 2(\lambda, \check{\alpha}_i)} x_i x_\lambda - x_\lambda x_i)$. Le lemme découle de cette formule en itérant l'action de x_i et en utilisant $\lambda_i = (\varpi_j - \lambda, \check{\alpha}_i)$. $\diamondsuit$

3. CAS $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$.

3.1. Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, les représentations fondamentales $L_q(\varpi_j)$ sont les j-ièmes puissances extérieures de la représentation $L_q(\varpi_1)$. Ceci nous permet un calcul plus commode des générateurs du centre de V^+. On a défini en [chap. II, 2.4] la matrice $\mathcal{D}^+$:

$$\mathcal{D}^+ = (q^2 - q^{-2}) \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ e_1 & \alpha & & 0 & \\ e_{1,2} & e_2 & \alpha & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ e_{1,n} & e_{2,n} & e_n & & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \frac{q^2}{q^2 - q^{-2}}$ et les $e_{i,j}$ sont donnés par récurrence par $e_{i,i} = k_i x_i$,
$e_{i,j} = e_j e_{i,j-1} - q^{-2} e_{i,j-1} e_j$.

On a aussi défini le déterminant quantique d'une matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, à coefficients dans V^+, par : $det_q\, M = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-q^2)^{l(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$, où $l(\sigma)$ est la longueur de la permutation σ. On définit alors de manière évidente les mineurs quantiques extraits de la matrice $\mathcal{D}$.

Théorème.

(i) *Soit* $1 \leq j \leq n$. *On pose* $I = \{n-j+2, \dots, n+1\}$, $J = \{1, \dots j\}$ *et on désigne par* $\Delta_{I,J}$ *le mineur quantique construit sur les lignes* I *et les colonnes* J. *Alors* $e_{r(\varpi_j)} = \Delta_{I,J}(\mathcal{D}^+)$ *à une constante multiplicative près.*

(ii) $Z(V^+)$ *est engendré par* $\{e_{r(\varpi_j)} e_{r(\varpi_{n+1-j})},\ 1 \leq j < \frac{n+1}{2}\}$ *si* n *est pair, et par* $\{e_{r(\varpi_j)} e_{r(\varpi_{n+1-j})},\ 1 \leq j < \frac{n+1}{2}\ ;\ e_{r(\frac{n+1}{2})}\}$ *si* n *est impair.*

Preuve. (i) découle de [chap. II, (2.1.3), (2.4.2)] et de la définition des $e_{r(\lambda)}$.
(ii) est fourni par le lemme 1.3 et le lemme 2.2. ♢

Remarques 3.1.

1 . Ces résultats sont à comparer à ceux de [11] ou [22] pour le cas classique. Mais on ne peut pas retrouver la description du centre de $U(\mathfrak{n}^+)$ du cas classique en spécialisant q en 1.

2 . Remarquons enfin que J.Alev et F.Dumas ont obtenu dans [2] une description analogue du centre de U^+.

4. CENTRES DES CORPS DE FRACTIONS.

4.1. On a défini en [chap. I, 4.3] l'espace K_λ^+ pour $\lambda \in P^+$. Démontrons la proposition suivante.

Proposition. *Soient λ et μ dans P^+. Alors :*
(i) $K_\lambda^+\tau(-4\lambda) = ad\,\check{U}_q.\tau(-4\lambda) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$,
(ii) $K_\lambda^+\tau(-4\lambda) = F(\check{U}_q) \cap V^+\tau(-4\lambda)$,
(iii) $K_\lambda^+ K_\mu^+ = K_{\lambda+\mu}^+$.

Preuve. (i) découle clairement de [chap. I, proposition 4.2].
Pour (ii), $\subset$ est évidente. On montre l'inclusion inverse en passant au gradué et en utilisant [chap. I, proposition 4.3].
$F(\check{U}_q)$ étant une algèbre, on a :

$$K_\lambda^+\tau(-4\lambda)K_\mu^+\tau(-4\mu) \subset F(\check{U}_q) \cap V^+\tau(-4(\lambda+\mu)) = K_{\lambda+\mu}^+\tau(-4(\lambda+\mu)).$$

La partie $\subset$ de (iii) en résulte. L'inclusion inverse provient de [chap. I, (1.5.1)]. $\diamondsuit$

4.2.

Lemme. *On a la décomposition :*

$$\bigoplus_{\lambda\in P^+} \tau(-4\lambda)K_\lambda^+ = F(\check{U}_q) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+).$$

Preuve. On a clairement $\subset$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in F(\check{U}_q)\cap\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. On a par [chap. I, théorème 3.3] : $u = \sum_{\lambda\in P^+} u_\lambda$, où $u_\lambda \in (ad\check{U}_q).\tau(-4\lambda)$. Dans le gradué défini en [chap. I, 1.7], nous avons, cf. [chap. I, 4.3]

$$gr\, u = \sum_{\lambda\in P^+} gr\, u_\lambda = \sum_{\lambda\in P^+} k_\lambda^-.gr\,\tau(-4\lambda).k_\lambda^+ \text{ où } k_\lambda^\pm \in gr\, K_\lambda^\pm.$$

Par décomposition triangulaire dans le gradué, il vient : $k_\lambda^- \in \mathbb{K}$. D'après la remarque qui suit [chap. I, proposition 4.3], le module $F(\check{U}_q)$ et son gradué $gr(F(\check{U}_q))$ sont isomorphes et on peut affirmer que

$$gr\, u \in \bigoplus_{\lambda\in P^+} (adU^+)gr\,\tau(-4\lambda) \Longrightarrow u \in \bigoplus_{\lambda\in P^+} (adU^+)\tau(-4\lambda),$$

donc $u \in \bigoplus_{\lambda\in P^+} \tau(-4\lambda)K_\lambda^+$. $\diamondsuit$

On ordonne P^+ par la relation : $\lambda \prec \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu \in P^+$.

Proposition. *V^+ est limite inductive des K_λ^+. Plus précisément :*
(i) $K_\lambda^+ \subset K_\mu^+$, $\lambda \prec \mu$;
(ii) $V^+ = \sum_{\lambda\in P^+} K_\lambda^+$.

Preuve. On a évidemment $1 \in K_\lambda^+$. (i) provient donc de la proposition 4.1 (iii). Soit maintenant $u \in V^+$, par [chap. I, théorème 3.7], on peut décomposer u sous la forme
$u = \sum_{\alpha \in S} \tau(\alpha) a_\alpha$ où $a_\alpha \in F(\check{U}_q)$, S désignant une partie finie de P^+. Par passage au gradué, comme dans la démonstration du lemme précédent, on prouve $a_\alpha \in F(\check{U}_q) \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Par ce lemme, il vient : $u \in \sum_\lambda \tau(\alpha - 4\lambda) K_\lambda^+$. Comme $U_0 V^+ \simeq U_0 \bigotimes V^+$, on obtient (ii). ♢

Remarque. Ce résultat possède un analogue dans le cas classique, cf. [25, 6.12 (**)].

4.3. Nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. *Soit I un idéal bilatère non nul de V^+. Alors I contient au moins un élément central non nul.*

Preuve. On dira que l'idéal I vérifie la propriété (P_m), si I contient un élément e tel que $e = \sum_{\alpha \in S_m} e_\alpha$, où S_m désigne une partie de P^+ à m éléments et $e_\alpha \in V_\alpha^+$.

Nous allons montrer par récurrence sur $m > 0$ l'assertion :

“ Si I verifie (P_m), alors I contient un élément central non nul ”.

Montrons ceci pour $m = 1$. I contient donc un élément e de poids μ. Par la proposition 4.2, on peut trouver λ tel que $e \in K_\lambda^+$. Il existe alors dans V^+ un élément v tel que $(ad\, v).(\tau(-4\lambda)e) = \tau(-4\lambda) e_{r(\lambda)}$. On peut choisir v de poids $r(\lambda) - \mu$. En développant la partie gauche de l'égalité et moyennant quelques commutations, on déduit : $\sum_i v_i e v_i' = e_{r(\lambda)}$ où v_i , $v_i' \in V^+$.
Donc, $e_{r(\lambda)} \in I$ et $e_{r(\lambda)} e_{r(-w_0\lambda)} \in I \cap Z$ par la proposition 2.2 et le théorème 2.2.
Supposons maintenant le théorème montré pour les idéaux vérifiant (P_{m-1}). Soit I vérifiant (P_m) et e dans I : $e = \sum_{\mu \in S_m} e_\mu = e_{\mu_1} + \sum_{\mu \in S_{m-1}} e_\mu$. Comme précédemment on montre qu'il existe un élément central non nul z tel que $z + \sum_{\mu \in S'_{m-1}} e'_\mu \in I$. Par une considération de poids cette somme est non nulle. Posons $X = \sum_{\mu \in S'_{m-1}} e'_\mu$.
Si X est central, on obtient le résultat désiré. Sinon, on peut supposer $[e_i, X] \neq 0$. Il vient : $[e_i, z + X] \in I$ implique $[e_i, X] \in I$. Donc I vérifie (P_{m-1}) et le théorème est démontré. ♢

Rappelons que V^+ est intègre et possède un corps de fractions. La preuve du corollaire suivant est classique.

Corollaire. *Le centre du corps des fractions de V^+ est égal au corps des fractions du centre de V^+.*

4.4. Le Théorème 4.3 n'a pas d'analogue pour $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Toutefois, nous avons :

Proposition. *Soit I un idéal bilatère non nul de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Alors I contient un élément non nul de poids dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$.*

Preuve. Montrons que I contient un élément de poids. Soit X dans I, on peut décomposer : $X = \sum_\mu X_\mu$, où μ parcourt une partie de Q^+ de cardinal m. Il est clair que l'on peut trouver $\alpha \in Q$ tel que les (α, μ) soient distincts. En appliquant l'action adjointe des $\tau(p\alpha)$, $p \in \mathbb{N}$, on trouve, à l'aide d'un déterminant de Vandermonde, un élément a non nul de poids dans I. Cet élément se décompose dans $U_0 \bigotimes V^+$. Supposons tout d'abord que $a = \tau(\mu)e_\beta$ où $e_\beta \in V^+_\beta$ (i.e. $n = 1$). Alors $e_\beta \in I \cap V^+$, donc par le théorème 4.3 on trouve $e_{r(\lambda)} \in I$ pour un $\lambda \in P^+$. D'où : $\tau(-4\lambda)e_{r(\lambda)} \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$.
Supposons maintenant $a = \sum_{\mu_i \in S_m} \tau(\mu_i)e_{i,\beta}$ où S_m désigne une partie de P^+ à m éléments et $e_{i,\beta} \in V^+_\beta$. Montrons par récurrence sur m que I contient un élément de poids dans $I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$.
On écrit $a = \tau(\mu)e_\beta + \sum_{\mu_i \in S_{m-1}} \tau(\mu_i)e_{i,\beta}$. On peut donc, en appliquant la méthode décrite pour $m = 1$, trouver un élément b dans I de la forme : $b = \tau(-4\lambda)e_{r(\lambda)} + \sum_{\nu_i \in S_{m-1}} \tau(\nu_i)e_{i,\gamma}$. Comme -4λ et les ν_i sont deux à deux distincts, il en résulte que b est non nul.
Posons : $X = \sum_{\mu_i \in S_{m-1}} \tau(\nu_i)e_{i,\gamma}$. Alors, soit X appartient à $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$ et dans ce cas la récurrence est vérifiée, soit X n'appartient pas à $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$ et on a donc $ad\, x_i.(X) \neq 0$ pour un i. D'où : $0 \neq ad\, x_i.(X) = ad\, x_i.(b) \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$. Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

Lemme. *$Ker(u)$ est engendré par les $\alpha_i + w_0(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

Preuve. On rappelle que $u = Id - w_0$. Comme $w_0^2 = Id$ on a : $Ker(Id - w_0) = Im(Id + w_0)$. $\diamondsuit$

Théorème. *Le centre du corps des fractions de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est engendré par les éléments*
$[\tau(-4\alpha_i)e_{r(\alpha_i)}]^{-1}\tau(4w_0(\alpha_i))e_{r(-w_0(\alpha_i))}$, $1 \leq i \leq n$. Lorsque $w_0 = -Id$, le centre est réduit au corps des constantes.

Preuve. Soit z dans le centre de $Fract(\check{U}_q(\mathfrak{b}^+))$. Alors $I := \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)z \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ est un idéal bilatère de $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$. Donc, par la proposition 4.4, il existe v dans $\check{U}_q(\mathfrak{b}^+)$ et β dans Q tels que $vz \in I \cap \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}_\beta$. Par la proposition 2.1 (iv), on peut se ramener au cas $vz = \tau(-4\lambda)e_{r(\lambda)}$. Donc v à pour poids $r(\lambda)$ et $v \in \check{U}_q(\mathfrak{b}^+)^{U^+}$. Ceci revient à dire : $v \in \bigoplus_{\mu, r(\mu)=r(\lambda)} \mathbb{K}\tau(-4\mu)e_{r(\mu)}$.
Le théorème est alors une conséquence du lemme 4.4 et de la proposition 2.2. $\diamondsuit$

CHAPITRE IV

Sur la résolution de Bernstein-Gelfand-Gelfand

On qualifiera de“classique” la théorie des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples. On pourra donc parler d'algèbres classiques, de modules de Verma classiques, de modules simples de plus haut poids classiques, etc.

Dans le cas classique, Bernstein, Gelfand et Gelfand ont montré en [4] que tout module simple de plus haut poids $\lambda \in P^+$ possède une résolution – dite résolution B.G.G – par des sommes directes de modules de Verma. Nous montrons que ce résultat se généralise de façon naturelle : le module simple $L_q(\lambda)$, $\lambda \in P^+$, possède une résolution par les modules $\bigoplus_{l(w)=i} M_q(w.\lambda)$, cf. théorème 1.4. Ce complexe est construit à l'aide d'un résultat bien connu sur les possibilités d'inclusions entre modules de Verma $M_q(\mu)$, $\mu \in P$.

Pour $t \in \mathbb{C}^*$, non racine de l'unité, nous donnons une condition suffisante pour que ce complexe reste exact après spécialisation en $q = t$, cf. théorème 2.3.

Soit B_1 une partie de l'ensemble des racines simples de R et w_1 l'élément le plus long du groupe de Weyl associé à B_1. Alors, pour tout $\mu \in -w_1.P^+$, le module simple $L_t(\mu)$ possède une résolution de type B.G.G, cf. théorème 3.3. Un résultat plus général a été démontré pour le cas classique dans [16].

1. RESOLUTION B.G.G.

1.1. Soit $\mathcal{R}$ le localisé de $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ en l'idéal engendré par $(q-1)$. Comme dans [chap. I, 1.6], on peut définir la sous-$\mathcal{R}$-algèbre $U_\mathcal{R}$ de U_q engendrée par les éléments x_i, y_i, $\frac{\tau(2\alpha_i)-\tau(-2\alpha_i)}{q_i^2-q_i^{-2}}$, $\tau(\pm\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n$. Soit $I_\mathcal{R}$ l'idéal de $U_\mathcal{R}$ engendré par $(q-1)$ et les $\tau(\alpha_i) - 1$. On rappelle que le quotient de $U_\mathcal{R}$ par l'idéal $I_\mathcal{R}$ est isomorphe à la $\mathbb{Q}$-algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On notera $U_q(\mathfrak{n}^-)$, resp. $U_\mathcal{R}(\mathfrak{n}^-)$, la sous-$\mathbb{C}(q)$-algèbre de U_q, resp. la sous-$\mathcal{R}$-algèbre de $U_\mathcal{R}$, engendrée par les y_i. $U_\mathcal{R}(\mathfrak{n}^-)$ est un $\mathcal{R}$-module libre [28, prop. 5.7].

Remarquons que $U_{\mathcal{R}}(\mathfrak{n}^-)/(q-1)U_{\mathcal{R}}(\mathfrak{n}^-)$ est canoniquement isomorphe à $U(\mathfrak{n}^-)$, l'algèbre enveloppante classique de l'algèbre nilpotente.

1.2. Soit $\lambda \in P$. On note $\mathbb{C}(q)_\lambda$ le $U_q(\mathfrak{b}^+)$-module engendré par v_λ tel que : $x_i v_\lambda = 0$, $\tau(\alpha_i)v_\lambda = q^{(\alpha_i,\lambda)}v_\lambda$. On définit de manière analogue le module $\mathcal{R}_\lambda$. On définit les modules de Verma $M_q(\lambda)$ et $M_{\mathcal{R}}(\lambda)$ par : $M_q(\lambda) = U_q \otimes_{U_q(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}(q)_\lambda$ et $M_{\mathcal{R}}(\lambda) = U_{\mathcal{R}}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathcal{R}_\lambda$. Grâce à la décomposition triangulaire, on note que $M_q(\lambda)$, resp. $M_{\mathcal{R}}(\lambda)$, est un module libre sur $U_q(\mathfrak{n}^-)$, resp. $U_{\mathcal{R}}(\mathfrak{n}^-)$. Donc ces modules ont même caractère que dans le cas classique. On sait que $M_q(\lambda)$, resp. $M_{\mathcal{R}}(\lambda)$, possède un unique quotient irreductible noté $L_q(\lambda)$, resp. $L_{\mathcal{R}}(\lambda)$.
Nous supposerons pour l'instant que les possibilités d'inclusions d'un module de Verma dans un autre sont analogues au cas classique, cf. [12, Th. 7.7.7]. Ceci sera démontré en 2.2, dans un cadre plus général.

1.3. Fixons un poids entier dominant λ. Avec les notations de [chap. I, 1.2], posons $C_k = \bigoplus_{w\in W^{(k)}} M_{\mathcal{R}}(w.\lambda)$, $0 \le k \le s$. Nous allons pouvoir construire le complexe de $U_{\mathcal{R}}$-modules C_* analogue à celui introduit dans [4].

$$0 \to C_s \overset{d_s}{\to} \dots C_2 \overset{d_2}{\to} C_1 \overset{d_1}{\to} C_0 \overset{\varepsilon_\lambda}{\to} L_{\mathcal{R}}(\lambda) \to 0$$

où ε_λ désigne la projection naturelle.

Rappelons brièvement la construction des d_i telle qu'elle est introduite dans [4]. Comme les possibilités d'inclusions sont les mêmes que dans le cas classique, les d_i seront entièrement déterminés par une matrice à coefficients dans $\mathcal{R}$, $(c_{w_1\,w_2})$, $w_1 \in W^{(i)}$, $w_2 \in W^{(i-1)}$. On définit donc les d_i par la matrice à coefficients dans $\{-1,0,1\}$, $(c_{w_1\,w_2})$ donnée dans [4].

1.4. Nous allons montrer que complexe C_* est exact. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme. *Soient A, B, C des $\mathcal{R}$-modules. Supposons B de type fini, C sans $(q-1)$-torsion. Considérons le diagramme commutatif de complexes de $\mathcal{R}$-modules*

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{\phi}{\to} & B & \overset{\psi}{\to} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A/(q-1)A & \to & B/(q-1)B & \to & C/(q-1)C \end{array}$$

où les verticales désignent les projections canoniques. Alors l'exactitude de la ligne du bas entraine l'exactitude de celle du haut.

Preuve. Supposons la ligne du bas exacte et considérons $u \in Ker\psi$. Alors on peut écrire : $u = \phi(v) + (q-1)u'$ avec $v \in A$ et $u' \in B$. En appliquant ψ à l'égalité précédente, il vient $u' \in Ker\psi$. Soit $H = Ker\psi/Im\phi$, on a : $H \subset (q-1)H$, donc $H = 0$ par le lemme de Nakayama. $\diamondsuit$

Théorème. *Le complexe C_* est exact.*

Preuve. Ce complexe est clairement exact en ε. Montrons qu'il est exact en d_i. Soit $U_{\mathbb{Q}}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et μ dans P. Considérons $M(\mu)$ le U-module de Verma de poids μ, et u_μ son vecteur de plus haut poids. On considère le morphisme de $M_{\mathcal{R}}(\mu)$ dans $M(\mu)$: $Ev_\mu \to \overline{E}u_\mu$ où $E \in U_q$ et où $\overline{E}$ désigne la classe de E dans $U_{\mathcal{R}}(\mathfrak{n}^-)$ via l'isomorphisme indiqué dans 1.1. Comme $\overline{Ann\, v_\mu} = Ann\, u_\mu$, le morphisme est bien défini.
On a $M_{\mathcal{R}}(\mu)/(q-1)M_{\mathcal{R}}(\mu)$ isomorphe à $M(\mu)$. On a donc le morphisme de complexes

$$C_* \to C_*/(q-1)C_*. \tag{1.4.1}$$

Considérons le complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand introduit en [4, par. 10]. Il s'agit du complexe obtenu en remplaçant dans le complexe 1.3, les modules quantiques par leur analogues classiques. Ce complexe possède un sous-complexe de $U_{\mathbb{Q}}$-modules. On peut aisément calquer la preuve de [4, par. 9 et 10] pour obtenir que ce sous-complexe est aussi exact. Ceci entraine que le complexe de droite dans (1.4.1) est exact. De plus, il est clair que les dérivations d_i ainsi que ε respectent les poids. Le théorème résulte alors du lemme 1.4 en remarquant que les sous-espaces de poids $M_{\mathcal{R}}(\lambda)_\alpha$ sont de type fini et sans $(q-1)$-torsion. $\diamondsuit$

2. SPECIALISATION POUR t DANS $\mathbb{C}^*$.

Nous examinons dans cette section comment le théorème 1.4 se transforme après spécialisation en $t \in \mathbb{C}^*$, t non racine de l'unité.

2.1. On désigne par U_t, resp. $\check{U}_t$, la $\mathbb{C}$-algèbre définie à l'aide des relations de l'algèbre U_q, resp. $\check{U}_q$, en remplaçant q par t. On définit de même les sous-algèbres $U_t(\mathfrak{b}^\pm)$, $\check{U}(\mathfrak{b}^\pm)$, etc. On notera respectivement les modules de Verma, les modules simples de plus haut poids, $M_t(\lambda)$ et $L_t(\lambda)$.

Soit z un élément du centre de U_t, alors z agit comme un scalaire, noté $\Theta_\lambda(z)$ sur $M_t(\lambda)$. Ceci permet de définir le caractère central Θ_λ. Rappelons le théorème, cf. [36].

Théorème. *Soient λ et μ des poids.* $\Theta_\lambda = \Theta_\mu \Leftrightarrow \lambda \in W.\mu$.

Remarque. Ce théorème permet de montrer que tout module $M_t(\lambda)$ est de longueur finie et que tout sous-quotient simple de ce module est isomorphe à $L_t(\mu)$ pour un $\mu \in W.\lambda \cap (\lambda - Q^+)$.
Nous présentons maintenant un équivalent quantique (sans doute bien connu) du théorème sur les inclusions des modules de Verma, pour t non racine de l'unité. Pour cela, on adaptera les démonstrations de [12, chap. 7].
Tout d'abord, on rappelle la formule de commutation, cf. [10, 1.3.2].

$$[x_i, y_i^s] = [s]_i y_i^{s-1}[k_i\,;\, d_i(1-s)]. \tag{2.1.1}$$

A l'aide de [29, proposition 4.2], on constate que le caractère d'un module de Verma $M_t(\lambda)$ ne dépend pas de t. On prouve comme dans [12, 7.6.6] :

Proposition. *Soient λ, $\mu \in P$. L'espace vectoriel $Hom_{U_t}(M(\mu), M(\lambda))$ est nul ou de dimension 1.*

Lemme. *Soit $1 \leq i \leq n$, $p \in \mathbb{N}$, et $u \in U_t^-$. Alors, il existe l tel que $y_i^l u \in U_t^- y_i^p$.*

Preuve. Tout élément de U_t^- se décompose en une somme finie de produits finis de y_j, $1 \leq j \leq n$. Il suffit donc de montrer ce lemme pour $u = y_j$. Or, les relations de Serre quantiques donnent facilement $y_i^{p-a_{ij}} y_j \in U_t^- y_i^p$. ♢

2.2.

Lemme. *Soit $\lambda \in P$, $1 \leq i \leq n$. Supposons $s_i\lambda = \lambda - p\alpha_i$, $p \in \mathbb{N}$.*

(i) *On a $M_t(s_i.\lambda) \subset M_t(\lambda)$. De plus, soit v un vecteur de plus haut poids de $M_t(\lambda)$, alors $y_i^{p+1}v$ est un vecteur de plus haut poids de $M_t(s_i.\lambda)$.*

(ii) *Soit $\mu \in P$, tel que $M_t(s_i.\mu) \subset M_t(\mu) \subset M_t(\lambda)$, alors $M_t(s_i.\mu) \subset M_t(s_i.\lambda)$.*

Preuve. (i) découle de de la formule 2.1.1 et de la proposition 2.1. On en conclut que $M_t(s_i.\lambda)$ est engendré par $y_i^{p+1}v$.
Comme $M_t(s_i.\mu) \subset M_t(\mu)$, on a par (i) $s_i\mu = \mu - m\alpha_i$, pour $m \in \mathbb{N}$. De plus, $M_t(s_i.\mu)$ est engendré par $y_i^{m+1}v'$, où v' désigne un vecteur de plus haut poids de $M_t(\mu)$. Soit u dans U_t^- tel que $v' = uv$. Par le lemme 2.1, il existe l, que l'on peut choisir plus grand que $m+1$, tel que $y_i^l u \in U_t^- y_i^{p+1}$. On en deduit (H_l) : $y_i^l v' \in M_t(s_i.\lambda)$.
(ii) découlera de l'assertion : soit $l > m+1$, tel que (H_l) soit vérifié, alors (H_{l-1}) est vérifié. Or, par 2.1.1 on obtient $y_i^l v' \in M_t(s_i.\lambda) \Rightarrow [l]_i[m+1-l]_i\, y_i^{l-1}v' \in M_t(s_i.\lambda)$. D'où $y_i^{l-1}v' \in M_t(s_i.\lambda)$ car t n'est pas racine de l'unité. ♢

Nous pouvons maintenant prouver le théorème

Théorème. *Soit λ un poids entier dominant. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) w_1, $w_2 \in W$, $w_1 \leq w_2$.

(ii) $M_t(w_1.\lambda) \subset M_t(w_2.\lambda)$.

(iii) $dim\, Hom(M_t(w_1.\lambda), M_t(w_2.\lambda)) = 1$.

Preuve. Soit s_α la réflexion associée à la racine positive α. Compte tenu du théorème 2.1 et de la proposition 2.1, il suffit de voir que si $\mu \in P$ et si $s_\alpha.\mu \leq \mu$, alors $M_t(s_\alpha.\mu) \subset M_t(\mu)$. On peut s'en convaincre en suivant par exemple la preuve de [12, lemme 7.6.11], et en se servant du lemme 2.2. ♢

On peut donc définir un complexe de B.G.G, $C_{t,*}$, de manière analogue à 1.4.

2.3. Soit T la partie de $\mathbb{C}^*$ constituée des éléments transcendants sur $\mathbb{Q}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $p > 3$ si $\mathfrak{g}$ est de type G_2, $p > 2$ sinon. On note A la partie de $\mathbb{C}^*$ formée des éléments algébriques, non racines de l'unité, annulés par un polynôme irréductible tel que $P(1) \in p\mathbb{Z}$ pour un p de $\mathcal{P}$. Nous démontrons dans les sections 2.4-2.7 le résultat suivant.

Théorème. *Supposons $t \in T \cup A$. Alors, le complexe $C_{t,*}$ est exact.*

2.4. Supposons $t \in T$. Alors les algèbres U_q et U_t sont identiques. La première partie du théorème découle donc du théorème 1.4.

2.5. Supposons t dans A, et notons p un entier naturel premier associé. Afin de prouver la seconde partie du théorème, nous allons utiliser un résultat de [3]. Pour cela introduisons quelques notations.

Soit $\mathcal{B}$ le localisé de $\mathbb{Z}[q]$ en $\mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ désigne l'idéal engendré par $(q-1)$ et p. On peut définir comme dans [chap. I, 1.6] l'algèbre quantique $U_{\mathcal{B}}$. Soit P le polynôme irréductible qui annule t, alors l'idéal I de $\mathbb{Z}[q]$ engendré par $P(q)$ est inclus dans $\mathcal{M}$. On peut définir sur $\mathbb{C}$ une structure de $\mathcal{B}$-algèbre en faisant opérer q comme le scalaire t. Il est clair que $U_t \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{B}} U_{\mathcal{B}}$.

2.6. Selon une idée de P. Polo, nous allons nous servir de la théorie de Borel-Weil-Bott quantifiée, cf. [3]. Soit M un U_t^0-module. On note $\Omega(M)$ l'ensemble des poids μ tels que $M_\mu \neq 0$. Considérons les conditions :
1) $M = \bigoplus_{\mu \in P} M_\mu$
2) $\Omega(M)$ est majoré par un ensemble fini de poids.
On introduit les catégories suivantes :
$\mathcal{C}^0$ des U_t^0-modules vérifiant 1),
$\mathcal{C}^b$ des $U_t(\mathfrak{b}^-)$-modules finis pour l'action de $U_t(\mathfrak{b}^-)$,
$\mathcal{C}$ des U_t-modules de dimension finie,
$\mathcal{C}_{bs}^-$ des $U_t(\mathfrak{b}^-)$-modules qui vérifient 1) et 2).
On note V l'algèbre U_t^- ou $U_t(\mathfrak{b}^-)$. On définit les foncteurs suivants.

$$H_0(V,-) : \mathcal{C}_{bs}^- \to \mathcal{C}^0,\ M \mapsto M/(Ker\varepsilon \cap V)M\ ;\ H^0(V,-) : \mathcal{C}^b \to \mathcal{C}^0,\ M \mapsto M^V$$

$$\delta : \mathcal{C}_{bs}^- \to \mathcal{C}^b,\ M \mapsto \bigoplus M_\mu^*\ ;\ \mathbf{H} : \mathcal{C}^b \to \mathcal{C},\ M \mapsto \mathcal{F}(Hom_{U_t(\mathfrak{b}^-)}(U_t, M))$$

où

$$M^V = \{m \in M \mid vm = \varepsilon(v)m, \forall v \in V\},$$

$$\mathcal{F}(Hom_{U_t(\mathfrak{b}^-)}(U_t, M)) = \{\, h \in Hom_{U_t(\mathfrak{b}^-)}(U_t, M) \mid dim\, U_t(\mathfrak{b}^-).h < +\infty\}.$$

L'espace $Hom_{U_t(\mathfrak{b}^-)}(U_t, M)$ est muni de la structure de $U_t(\mathfrak{b}^-)$-module donnée par $(u.h)(m) = u_{(1)}(h(Su_{(2)}m))$.
Enfin, π_0 désigne dans $\mathcal{C}^0$ la projection sur l'espace de poids 0.

On démontre que $\mathcal{C}_{bs}^-$, resp. $\mathcal{C}^b$, possède suffisamment de projectifs, resp. d'injectifs, et que δ est un foncteur exact qui transforme tout objet projectif de $\mathcal{C}_{bs}^-$ en un objet injectif de $\mathcal{C}^b$. $H_0(V,-)$, resp. $H^0(V,-)$, est un foncteur exact à droite, resp. à gauche. On désigne par $H_i(V,-)$, resp. $H^i(V,-)$, le i-ème foncteur dérivé, $L^i H_0(V,-)$, resp. $R^i H^0(V,-)$. Notons que π_0 est exact.

Comme $\delta(H_0(U_t^-, L_t(\lambda)) = H^0(U_t^-, \delta L_t(\lambda))$, on a

$$\delta H_i(U_t^-, L_t(\lambda)) = H^i(U_t^-, \delta L_t(\lambda)).$$

D'où :

$$(*) \qquad \delta(H_i(U_t^-, L_t(\lambda))_\mu) = H^i(U_t^-, \delta L_t(\lambda))_{-\mu} = \pi_0(H^i(U_t^-, \delta L_t(\lambda)) \otimes \mathbb{C}_\mu) =$$

$$\pi_0(H^i(U_t^-, \delta L_t(\lambda) \otimes \mathbb{C}_\mu)) = H^i(U_t(\mathfrak{b}^-), \delta L_t(\lambda) \otimes \mathbb{C}_\mu) = H^i(U_t(\mathfrak{b}^-), L_t(\lambda)^* \otimes \mathbb{C}_\mu).$$

Soit $N \in \mathcal{C}^b$, la loi de réciprocité de Frobenius, cf. [3, Proposition 2.12], donne

$$H^0(U_t(\mathfrak{b}^-), N) = Hom_{U_t(\mathfrak{b}^-)}(\mathbb{C}, N) = Hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}, \mathbf{H}^0(N)).$$

Rappelons, cf. [34], que la catégorie $\mathcal{C}$ est semi-simple, donc le foncteur $Hom_{\mathcal{C}}$ est exact. Il vient :

$$H^i(U_t(\mathfrak{b}^-), N) = Hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}, \mathbf{H}^i(N)).$$

D'où par (*) :

$$\delta(H_i(U_t^-, L_t(\lambda))_\mu) = Hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}, \mathbf{H}^i(L_t(\lambda)^* \otimes \mathbb{C}_\mu))$$

$$= Hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}, L_t(\lambda)^* \otimes \mathbf{H}^i(\mathbb{C}_\mu)) = Hom_{\mathcal{C}}(L_t(\lambda), \mathbf{H}^i(\mathbb{C}_\mu)).$$

Or, par [3], th. 6.4, cet espace est de dimension 1 si $\mu = w.\lambda$, $w \in W^{(i)}$ et 0 sinon. Ceci, avec la section 2.5, donne :

Théorème. *Sous les conditions précédentes, on a pour tout λ dans P^+,*

$$\dim Tor^i_{U_t^-}(\mathbb{C}, L_t(\lambda)) = Card\, W^{(i)}. \ \diamondsuit$$

2.7. Rappelons que d_i est la i-ème différentielle du complexe $C_{t,*}$, et désignons par K le noyau de d_i. K est un sous-U_t-module de $C_{t,i}$.

Lemme. *Les facteurs de composition d'une suite de Jordan-Hölder de K sont de la forme $L_t(w.\lambda)$, $l(w) > i$.*

Preuve. Par la remarque 2.1, les facteurs de composition d'une suite de Jordan-Hölder de $C_{t,i}$, donc a fortiori, de K, sont de la forme $L_t(w.\lambda)$, avec $l(w) \geq i$. De plus, si $l(u) = i$, pour $u \in W$, alors $L_t(u.\lambda)$ est de multiplicité 1 dans $C_{t,i}$. Constatons que, par construction, la restriction de d_i à $M_t(u.\lambda)$ est injective. Il en résulte $L_t(u.\lambda) \in \mathcal{JH}(d_i(M_t(u.\lambda))) \subset \mathcal{JH}(Im(d_i))$. Le lemme en découle directement. $\diamondsuit$

Preuve du théorème 2.3. On doit montrer que $Imd_{i+1} = K$. Soit $\overline{d_{i+1}}$ le morphisme quotient de $C_{i+1}/(U_t^- \cap Ker\, \varepsilon)C_{i+1}$ vers $K/(U_t^- \cap Ker\, \varepsilon)K$. On procède par étapes.

a) Si $\overline{d_{i+1}}$ est surjective alors $Im(d_{i+1}) = K$.

b) $\overline{d_{i+1}}$ est injective.

c) $dim\, C_{i+1}/(U_t^- \cap Ker\, \varepsilon)C_{i+1} = dim\, K/(U_t^- \cap Ker\, \varepsilon)K$.
Il suffit de se rapporter à la démonstration de [4, théorème 10.1'], pour voir que : a) est clair, b) découle du lemme 2.7, c) provient du théorème 2.6. $\diamondsuit$

2.8. Afin de compléter cet exposé, rappelons le résultat de Rosso, cf. [37, th. 12].

Théorème. *Si $\mathfrak{g}$ est de type A_n et si t n'est pas racine de l'unité, alors le complexe $C_{t,*}$ est exact.*

D'autre part P. Polo a récemment montré que l'analogue quantique du théorème de Borel-Weil-Bott, cf. [3, 6.4], pouvait s'étendre au cas où t est quelconque non racine de l'unité. A l'aide de ce résultat, on peut montrer comme précédemment que le théorème 2.7 reste valable pour $\mathfrak{g}$ semi-simple quelconque.

3. GENERALISATION DE LA RESOLUTION B.G.G.

Nous allons montrer qu'il existe une résolution B.G.G. pour les modules simples $L_t(\mu)$, lorsque μ appartient à certaines chambres de Weyl. On choisit t non racine de l'unité si $\mathfrak{g}$ est de type A_n, et $t \in T \cup A$ sinon.

3.1. Soit B l'ensemble des racines simples du système R. Scindons B en deux parties disjointes B_1 et B_2. Ceci correspond à une décomposition $[1, n] = I_1 \cup I_2$. On note R_i^+ l'ensemble des racines positives, $U_t(\mathfrak{g}_i)$ et $U_t(\mathfrak{n}_i^-)$ les algèbres de Lie semi-simples et nilpotentes correspondant à B_i, $i = 1, 2$. Soit $\check{U}_t^1$, la sous-algèbre dite parabolique engendrée par $\check{U}_t(\mathfrak{b}^+)$ et y_i, $i \in I_1$. Soit W_i le groupe de Weyl associé à B_i et w_1 l'élément le plus long de W_1.

3.2. Dans [10, 1.7], les auteurs définissent une filtration pour U_t qui permet de fournir à cette algèbre une base à la P.B.W. Rappelons que cette base est construite à partir de monômes $E^{(k)} = E_{\beta_1}^{k_1} \dots E_{\beta_n}^{k_n}$, resp. $F^{(k)} = F_{\beta_n}^{k_n} \dots F_{\beta_1}^{k_1}$, où les β_i sont les éléments de R^+ munis d'un ordre précis et où E_{β_i}, resp. F_{β_i}, désigne un vecteur de $U_t(\mathfrak{n}^+)$, Resp. $U_t(\mathfrak{n}^-)$ associé à la racine β_i. Signalons que la filtration permet de définir un gradué dans lequel les monômes commutent à un scalaire t^s près. Ceci permet la construction d'une autre base à la P.B.W. en fixant un ordre différent pour les β_i. Donc, en choisissant un ordre sur R^+ tel que les racines de $R^+ \backslash R_1$ précèdent celles de R_1, on constate que $U_t(\mathfrak{n}^\pm)$ est libre comme $U_t(\mathfrak{n}_1^\pm)$-module à droite.

3.3. Fixons μ dans $-w_1.P^+$. On a la décomposition $\mu = \sum_{\alpha \in B_1} n_\alpha \varpi_\alpha + \sum_{\alpha \in B_2} n_\alpha \varpi_\alpha$. Remarquons que $\mu \in -w_1.P^+$ implique $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in B_1$. On pose $\mu_1 = \sum_{\alpha \in B_1} n_\alpha \varpi_\alpha$ et $\nu = \sum_{\alpha \in B_2} n_\alpha \varpi_\alpha$.

Lemme 1. *Dans $\check{U}_t^1$, l'idéal bilatère $\mathcal{M}$ engendré par les $\{x_\alpha\, ;\, \tau(\varpi_i) - t^{(\nu, \varpi_i)},\ \alpha \in B_2,\ i \in I_2\}$ vérifie $\check{U}_t^1/\mathcal{M} \simeq \check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$.* $\diamondsuit$

Preuve. L'algèbre $\check{U}_t^1/\mathcal{M}$ est engendrée par les classes modulo $\mathcal{M}$ des éléments $\overline{x_\alpha}$, $\overline{y_\alpha}$, $\overline{\tau(\varpi_i)}$, $\alpha \in B_1$, $i \in I_1$. En considérant les relations de définition de $\check{U}_t^1$ et de $\check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$, on constate qu'il existe un isomorphisme canonique entre les deux algèbres. $\diamondsuit$

A l'aide du lemme, on voit que tout $\check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$-module M peut être doté d'une unique structure de $\check{U}_t^1$-module en faisant agir $\tau(\alpha)$, resp. x_α, $\alpha \in B_2$, comme la multiplication par $t^{(\alpha,\nu)}$, resp. 0. Notons M^ν le module obtenu. Par induction nous pouvons construire un $\check{U}_t$-module $I^\nu\, M\ = U_t \otimes_{U_t^1} M^\nu$. Par 3.2, I^ν est un foncteur exact de la catégorie des $\check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$-modules dans celle des $\check{U}_t$-modules. A l'aide des théorèmes 2.3 et 2.8, nous pouvons construire une résolution à la B.G.G du $\check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$-module simple, $L_t(\mu_1)$, de plus haut poids μ_1. Nous obtenons ainsi un complexe exact. Notons $\mathcal{C}_{t,*}$ l'image de ce complexe par le foncteur I^ν.
Par [5, par. 6, corollaire 1], nous avons.

Lemme 2. *W_1 laisse stable $R^+ \backslash R_1$.* $\diamondsuit$

Proposition. *$I^\nu\, L_t(\mu_1)$ est un $\check{U}_t$-module simple. Il s'identifie au module simple $L_t(\mu)$.*

Preuve. Montrons la première assertion, la seconde en découlant facilement. En adaptant, à l'aide du théorème 2.2, la preuve de [18, 1.17], on constate qu'il suffit de prouver $(\mu + \rho, \alpha) < 0$ pour tout α dans $R^+ \backslash R_1$. Ceci est une conséquence directe du lemme précédent. $\diamondsuit$

On montre comme dans [18, 1.16], que pour tout $\lambda_1 \in P_1$, l'image par I^ν du $\check{U}_t(\mathfrak{g}_1)$-module de Verma de plus haut poids λ_1 est égal au $\check{U}_t$-module de Verma de plus haut poids $\lambda_1 + \nu$. On a alors

Théorème. *Soit $\mu \in -w_1.P^+$. Il existe une résolution du $\check{U}_t$-module simple $L_t(\mu)$*

$$C_{t,*} \to L_t(\mu) \to 0 \text{ où } C_{t,k} = \bigoplus_{w \in W_1^{(k)}} M_t(w.\mu). \qquad \diamondsuit$$

Remarque 1. La proposition prouve que le caractère de $L_t(\mu)$ ne dépend pas de t.

Remarque 2. Le théorème 3.3 donne l'analogue quantique d'un cas particulier d'un résultat plus général démontré dans le cas classique dans [16, 2.6].

INDEX DES NOTATIONS

REFERENCES

1. E. ABE. *Hopf algebras*, Cambridge University Press, 1980.

2. J. ALEV et F. DUMAS. *Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques*, preprint.

3. H. H. ANDERSON, P. POLO et K. WEN. *Representations of quantum algebras*, Inv. Math., 104, (1991), 1-59.

4. I. N. BERNSTEIN, I. M. GELFAND and S. I. GELFAND. *Differential operators on the base affine space and a study of* $\mathfrak{g}$*-modules, part* II *: The resolution of a finite dimensional* $\mathfrak{g}$*-module*, in “Lie Groups and their representations”, (I. M. Gelfand, Ed.), Wiley, New-York (1975).

5. N. BOURBAKI. *Groupes et Algèbres de Lie, Chap.* IV, Masson, Paris, 1981.

6. N. BURROUGHS. *Relating the approaches to quantized algebras and quantum groups*, Comm. Math. Phys., 133, (1990), 91-117.

7. P. CALDERO. *Générateurs du centre de* $U_q(sl(N+1))$, Bull. Sci. Math., (à paraître).

8. P. CALDERO. *Elements ad-finis de certains groupes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Serie I, (1993), 327-329.

9. P. CALDERO. *Sur le centre de* $U_q(\mathfrak{n}^+)$, Beiträge zur Algebra und Geometrie, (à paraître).

10. C. DE CONCINI and V. G. KAC. *Representations of quantum groups at roots of 1*, Colloque Dixmier, Progress in Math., 92, (1990), 471-506.

11. J. DIXMIER. *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* IV, Can. J. Math., 11, (1959), 321-344.

12. J. DIXMIER. *Algèbres enveloppantes*, Cahiers scientifiques n° 37, Gauthiers-Villars, Paris, 1974.

13. V. G. DRINFELD. *Quantum groups*, Proc. ICM, Berkeley, (1986), 798-820.

14. V. G. DRINFELD. *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J., Vol. I, (1990), n° 2, 321-342.

15. F. DU CLOUX. *Un algorithme de forme normale pour les groupes de Coxeter*, (1985), manuscrit.

16. O. GABBER and A. JOSEPH. *On the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution and the Duflo sum formula*, Comp. Math., 43, Fasc. I, (1981), 107-131.

17. M. HOCHSTER. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, Ann. Math., 96, (1976), 318-337.

18. J. C. JANTZEN. *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lecture notes in math. 750, Springer Verlag, 1979.

19. M. JIMBO. *A q-difference analog of* $U\mathfrak{g}$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10, (1985), 63-69.

20. M. JIMBO. *A q-analog of* $U\,gl(N+1)$*, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 11, (1986), 237-249.

21. M. JIMBO. *Quantum R-matrix related to the generalized Toda system : an algebraic approach*, in "Non-linear equations in classical and quantum field theory", Lecture notes in Physics, Springer.

22. A. JOSEPH. *A preparation theorem for the prime sprectrum of a semi-simple Lie algebra*, 48, (1977), 241-289.

23. A. JOSEPH. *On the Demazure character formula*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 18, (1985), 389-419.

24. A. JOSEPH and G. LETZTER. *Local finiteness of the adjoint action for quantized envelopping algebras*, J. Algebra, 153, (1992), 289-318.

25. A. JOSEPH and G. LETZTER. *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, Amer. J. Math., (à paraître).

26. V. G. KAC and WATANABE. *Finite linear groups whose ring of invariants is a complete intersection*, Bull. A.M.S., Vol. 6, Number 2, (1982), 221-223.

27. J. R. LINKS and M. D. GOULD. *Casimir invariants for Hopf algebras*, Reports on Math. Phys., 31, (1992), 91-111.

28. G. LUSZTIG. *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. in Math., 70, (1988), 237-249.

29. G. LUSZTIG. *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Ded., (1990), 1-25.

30. S. MAJID. *Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations*, Int. J. Mod. Phys. A, vol. 5, n° 1, (1990), 1-91.

31. N. Yu. RESHETIKHIN. *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equations and invariants of links*, I and II, LOMI preprint, (1987).

32. N. Yu. RESHETIKHIN, L. A. TAKHTADZHYAN and L. D. FADEEV. *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Alg. Anal., vol. I, (1990), 129-139 .

33. M. J. RODRIGUEZ-PLAZA. *Casimir operators of* $U_q(sl(3))$, J. Math. Phys., 32, (1991), 2020-2027.

34. M. ROSSO. *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys., 117, (1988), 581-593.

35. M. ROSSO. *Analogues de la forme de Killing et du théorème de Harish-Chandra pour les groupes quantiques*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 23, (1990), 445-467.

36. M. ROSSO. *Groupes quantiques, représentations linéaires et applications*, Thèse Université Paris VII, (1990).

37. M. ROSSO. *An analogue of B.G.G. resolution for the quantum SL(N)-group*, in Symplectic Geometry and Mathematical Physics, PM 99, Birkhäuser 1991, 422-432.

38. M. ROSSO. *Certaines formes bilineaires sur les groupes quantiques et une conjecture de Schechtman et Varchenko*, C.R. Acad. Sc. Paris 314, (1992), 5-8.

39. R. P. STANLEY. *Invariants of finite groups and their applications to combinatorics*, Bull. Am. Math. Soc., Vol. I, n° 3, (1979), 475-511.

40. T. TANISAKI. *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras*, Int. J. Mod. Phys. A, Vol. 7, Suppl. 1B, (1992), 941-961.