Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

808

Guy Maury
Jacques Raynaud

Ordres Maximaux au Sens de K. Asano

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Auteurs

Guy Maury
Jacques Raynaud
Université Claude-Bernard (Lyon I)
43 bd. du Onze Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex
France

AMS Subject Classifications (1980): Primary: 16-02, 16A08, 16A18, 16A66;
Secondary: 16A02, 16A04, 16A05, 16A10, 16A12, 16A14, 16A33, 16A34, 16A38, 16A50, 16A52, 16B35

ISBN 3-540-10016-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-10016-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Maury, Guy:
Ordres maximaux au sens de K. Asano / Guy Maury ; Jacques Raynaud.
– Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980. –
(Lecture notes in mathematics; 808)
ISBN 3-540-10016-4 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-10016-4 (New York, Heidelberg, Berlin)
NE: Raynaud, Jacques:

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

PREFACE.

La notion d'ordre maximal au sens de K. Asano, introduite par K.ASANO en 1949 [3], est une généralisation au cas non commutatif de la notion de domaine d'intégrité complètement intégralement clos.

Les R-ordres maximaux classiques, les R-ordres maximaux de Fossum dans une algèbre centrale simple sont des cas particuliers d'ordres maximaux au sens de K. Asano (Chapitre I), ainsi que les ordres d'Asano (Chapitre III) et les anneaux de Krull premiers réguliers au sens de Marubayashi (Chapitre XI).

Le but de ces Notes est de donner des propriétés des ordres maximaux au sens de K. Asano connus à ce jour (premier septembre 1979) ainsi que de nombreux exemples de tels anneaux de différents types. Les R-ordres maximaux classiques très étudiés ont des propriétés particulières qui ne figurent pas toutes dans ce travail. Les livres de DEURING [41] et de I. REINER [94], uniquement consacrés aux R-ordres maximaux classiques, contiennent de nombreuses propriétés de ces anneaux et une bibliographie très complète jusqu'en 1975.

L'intérêt de la théorie des ordres maximaux est double : d'une part elle utilise un très grand nombre de théories de l'algèbre moderne (la théorie des treillis, des groupes réticulés, la théorie de Lesieur et Croisot, la théorie de la localisation, des anneaux à identité polynômiale, des anneaux d'endomorphismes, des algèbres enveloppantes, etc...) et conduit à la découverte de belles propriétés. D'autre part cette théorie s'applique : elle permet de donner des propriétés des R-ordres classiques ou de Fossum, non obligatoirement maximaux (Chapitre IX). Elle permet aussi d'obtenir des propriétés nouvelles des algèbres enveloppantes d'une algèbre de Lie, k-module libre de type fini sur un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos k, car d'après un résultat récent de M. CHAMARIE, ces algèbres enveloppantes sont des ordres maximaux (Chapitre X).

Nous venons de voir que la théorie des ordres maximaux utilise de nombreuses théories d'algèbre : il est donc impossible que le présent travail soit "self contained". Nous avons adopté la règle suivante : dans chaque chapitre, généralement au début, nous rappelons les définitions et les résultats de la théorie utilisée, sans démonstrations mais avec des références précises, par contre tout résultat concernant la théorie des ordres maximaux ou ses applications est démontré (si l'on excepte ceux donnés au dernier chapitre).

Chaque chapitre sauf le dernier se termine par une notice bibliographique qui indique de façon précise de quels mémoires sont tirés les résultats énoncés et démontrés dans le chapitre.

Le lecteur trouvera à la fin de ces Notes un index des principaux termes utilisés et une bibliographie que nous espérons complète (à la date du premier septembre 1979) pour les mémoires sur les ordres maximaux au sens de K. Asano, mais qui ne l'est certainement pas en ce qui concerne les R-ordres maximaux.

Les notions de base pourront être trouvées dans un traité d'algèbre non commutative (par exemple [46] ou [105] ou [96]).

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans ce travail, tous les anneaux considérés seront des anneaux associatifs (mais non nécessairement commutatifs) avec élément unité (noté 1). Tous les morphismes d'anneaux et tous les modules seront unitaires. Les sous-anneaux seront supposés avoir le même élément unité que l'anneau.

Pour simplifier, lorsque nous parlerons d'une notion ou d'une propriété sans indication de côté cela voudra dire que cette notion ou propriété est supposée vraie à gauche et à droite (par exemple : anneau noethérien signifie anneau noethérien à gauche et à droite), sinon nous préciserons.

Si R est un anneau, nous désignerons par u(R) le groupe des éléments inversibles de R ; si A et B sont deux sous-ensembles non vides de R alors nous désignerons par AB l'ensemble de tous les élements de R qui s'écrivent comme somme finie de produits ab, avec $a \in A$ et $b \in B$, et AB sera appelé le produit de A et de B.

D'une manière générale (et sauf précisions contraires) les notions et notations utilisées sont celles de [105] ou de [46].

CHAPITRE I.

ORDRES, ORDRES MAXIMAUX, EXEMPLES.

§ 1. ANNEAUX DE FRACTIONS.

Ce paragraphe contient des rappels sur les anneaux de fractions. Pour des démonstrations et pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [2], [105], [46] et [53].

Soit R un anneau. Désignons par M l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro (ou éléments réguliers) de R et considérons M' un sous-demi-groupe du demi-groupe multiplicatif M.

DEFINITION. - *On dit qu'un anneau* S *est un* anneau de fractions à gauche *de* R *selon* M' *si l'on a :*

1) R *est un sous-anneau de* S *(voir les conventions).*
2) *Tout élément de* M' *est inversible dans* S *(donc appartient à* u(S)*).*
3) *Tout élément* x *de* S *est de la forme* $x = \alpha^{-1}a$, *avec* $\alpha \in M'$ *et* $a \in R$.

Un anneau de fractions à gauche S de R selon M' existe si et seulement si R vérifie la *condition de Ore à gauche* selon M', c'est-à-dire : $\forall a \in R$, $\forall \alpha \in M'$, $\exists b \in R$, $\exists \beta \in M'$ $\quad b\alpha = \beta a$.

Si R vérifie la condition de Ore à gauche selon M' nous avons la très utile propriété suivante : si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments quelconques de M', il existe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ éléments de R tels que $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = \cdots = c_n\lambda_n = \gamma$ et $\gamma \in M'$.

Un anneau de fractions à gauche de R selon M' est déterminé à un isomorphisme près.

On définit de même un anneau de fractions à droite de R selon M'.

Si les anneaux de fractions à gauche et à droite de R selon M' existent alors ils coïncident à un isomorphisme près, et on parle alors de l'*anneau de fractions* de R selon M'.

L'anneau de fractions à gauche de R selon M est appelé l'*anneau classique* (ou l'*anneau total*) *de fractions à gauche* de R.

DEFINITION. - *Un anneau* R *est appelé* anneau de quotients *si tout élément non diviseur de zéro de* R *est inversible dans* R *(c'est-à-dire si* R *est son propre anneau classique de fractions).*

Avant de terminer ce paragraphe avec l'un des plus imporants résultats sur les anneaux de fractions, rappelons qu'un *anneau de Goldie à gauche* R est un anneau qui vérifie la condition de chaîne ascendante sur les annulateurs à gauche et qui ne possède aucune somme directe infinie d'idéaux à gauche non nuls. On a :

THEOREME 1.1. (Théorème de GOLDIE). - *Les propriétés suivantes de l'anneau* R *sont équivalentes :*

(a) R *est un anneau de Goldie à gauche semi-premier.*

(b) R *a un anneau classique de fractions à gauche qui est semi-simple.*

(c) Un idéal à gauche de R *est essentiel (dans* R*) si et seulement s'il contient un élément régulier.*

Si on appelle *anneau simple* un anneau n'admettant pas d'autres idéaux bilatères que 0 et lui-même, il vient :

COROLLAIRE 1.2. - *Les propriétés suivantes de l'anneau* R *sont équivalentes :*

(a) R *est un anneau de Goldie à gauche premier.*

(b) R *a un anneau classique de fractions à gauche qui est simple artinien.*

En particulier si R est un anneau noethérien à gauche sans diviseurs de zéro alors l'anneau classique de fractions à gauche de R est un corps.

§ 2. ORDRES ET IDEAUX.

Dans tout ce paragraphe S désigne un anneau.

DEFINITION. - *On dit qu'un sous-anneau* $\mathcal{O}$ *de* S *est un* ordre à gauche *de* S *si* S *est un anneau de fractions à gauche de* $\mathcal{O}$ *selon* $u(S) \cap \mathcal{O}$. *On dira que* $\mathcal{O}$ *est un* ordre *de* S *si* $\mathcal{O}$ *est un ordre à gauche et à droite de* S.

Dans tout ce travail nous ne nous intéresserons qu'aux ordres dans les anneaux.

EXEMPLE. - Si R est un anneau de Goldie semi-premier et si Q est l'anneau semi-simple classique de fractions de R (voir le théorème 1.1), alors R est un ordre de Q.

PROPOSITION 2.1. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Si* $\mathcal{O}'$ *est un sous-anneau de* S *et si* a, b *sont des éléments de* u(S) *tels que* $a\mathcal{O}b \subseteq \mathcal{O}'$, *alors* $\mathcal{O}'$ *est un ordre de* S.

DEMONSTRATION. - Si $z \in S$ alors il existe $p \in \mathcal{O}$ et $q \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $a^{-1}za = pq^{-1}$. On obtient $z = apq^{-1}a^{-1} = apbb^{-1}q^{-1}a^{-1} = (apb)(aqb)^{-1}$ avec $apb \in \mathcal{O}'$ et $aqb \in u(S) \cap \mathcal{O}'$. De même il existe $p' \in \mathcal{O}$ et $q' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $bzb^{-1} = q'^{-1}p'$ ce qui nous donne $z = (aq'b)^{-1}(ap'b)$ avec $ap'b \in \mathcal{O}'$ et $aq'b \in u(S) \cap \mathcal{O}'$. Donc $\mathcal{O}'$ est un ordre de S. ∎

DEFINITION. - *Deux* ordres $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{O}'$ *de* S *sont dits* équivalents *s'il existe* $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in u(S)$ *tels que* $\alpha\mathcal{O}'\beta \subseteq \mathcal{O}$ *et* $\alpha'\mathcal{O}\beta' \subseteq \mathcal{O}'$. *(Il est clair qu'on peut supposer* $\alpha,\beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *et* $\alpha',\beta' \in u(S) \cap \mathcal{O}'$*).*

La proposition 2.1 nous donne alors :

COROLLAIRE 2.2. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Si* $\mathcal{O}'$ *est un sous-anneau de* S *et si* a, b, a', b' *sont des éléments de* u(S) *tels que* $a\mathcal{O}b \subseteq \mathcal{O}'$ *et* $a'\mathcal{O}'b' \subseteq \mathcal{O}$, *alors* $\mathcal{O}'$ *est un ordre de* S *équivalent à* $\mathcal{O}$.

Si R est un ordre d'un anneau de quotients Q, alors Q est l'anneau classique de fractions de R.

PROPOSITION 2.3. - *Soient* R *et* R' *deux ordres équivalents d'un anneau de quotients* Q *tels que* $R \subseteq R'$. *Alors il existe un ordre* R" *de* Q *et des éléments* a, b *de* $u(Q) \cap R$ *tels que* $R \subseteq R'' \subseteq R'$, $aR' \subseteq R''$ *et* $R''b \subseteq R$.

DEMONSTRATION. - Il existe $x,y \in u(Q)$ tels que $xR'y \subseteq R$. On peut écrire $x = ac^{-1}$ et $y = bd^{-1}$, avec $a,b,c,d \in u(Q) \cap R$. Comme on a $Rd \subseteq R$ et $R' \subseteq c^{-1}R'$, on obtient $aR'b \subseteq ac^{-1}R'b \subseteq Rd \subseteq R$. Désignons par R" le sous-anneau de R' engendré par R et aR'. Il est alors clair que R" est un ordre de Q tel que $R \subseteq R'' \subseteq R'$, avec $aR' \subseteq R''$ et $R''b \subseteq R$. ■

REMARQUE. - Sous les hypothèses de la proposition 2.3 il existe, de même, un ordre R"' de Q et des éléments a', b' de $u(Q) \cap R$ tels que $R \subseteq R''' \subseteq R'$, $R'a' \subseteq R'''$ et $b'R''' \subseteq R$.

DEFINITION. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *On dit qu'un sous-ensemble* A *de* S *est un* $\mathcal{O}$-idéal à gauche *(resp. à droite) si :*

1) A *est un sous-*$\mathcal{O}$*-module à gauche (resp. à droite) de* S.

2) $A \cap u(S) \neq \phi$.

3) *Il existe* $\lambda \in u(S)$ *tel que* $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ *(resp.* $\lambda A \subseteq \mathcal{O}$ *).*

Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux ordres de S et si A est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche et un $\mathcal{O}'$-idéal à droite, alors A s'appelle un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal. Un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal est appelé $\mathcal{O}$-idéal bilatère ou plus simplement *$\mathcal{O}$-idéal*.

Si $\mathcal{O}$ est un ordre de S et si $x \in S$, alors $\mathcal{O} + \mathcal{O}x$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche qui contient x (si $x \in u(S)$, alors $\mathcal{O}x$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche qui contient x). Mais il n'existe pas toujours de $\mathcal{O}$-idéal contenant x (voir § 4 et un exemple § 8).

REMARQUE. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S. Les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche contenus dans $\mathcal{O}$ sont les idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ qui contiennent un élément inversible dans S. Par exemple, si $\mathcal{O}$ est un anneau de Goldie semi-premier, alors $\mathcal{O}$ est un ordre de son anneau classique de fractions, et le théorème 1.1 nous donne : les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche contenus dans $\mathcal{O}$ sont les idéaux à gauche essentiels de $\mathcal{O}$.

PROPOSITION 2.4. - *Soient* $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ *des ordres de* S. *Alors la somme* A+B *et l'intersection* $A \cap B$ *de deux* $\mathcal{O}$*-idéaux à gauche (resp. à droite ; resp. bilatères)* A *et* B *sont des* $\mathcal{O}$*-idéaux à gauche (resp. à droite ; resp. bilatères). De plus, si* A *est un* $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$*-idéal et si* B *est un* $\mathcal{O}'$- $\mathcal{O}''$*-idéal, alors le produit* AB *est un* $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}''$*-idéal ; en particulier le produit de deux* $\mathcal{O}$*-idéaux est un* $\mathcal{O}$*-idéal.*

PROPOSITION 2.5. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S *et* A *un* $\mathcal{O}$*-idéal. Si* B *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche, alors* $A.{}^{\bullet}B = \{x \in S | Bx \subseteq A\}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à droite. Si* C *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à droite, alors* $A^{\bullet}.C = \{x \in S | xC \subseteq A\}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche.*

DEMONSTRATION. - $A.{}^{\bullet}B$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à droite. Il existe $\sigma,\tau \in u(S)$ tels que $\sigma \in A$ et $B\tau \subseteq \mathcal{O}$. Il vient $B\tau\sigma \subseteq \mathcal{O}\sigma \subseteq \mathcal{O}A \subseteq A$ et ainsi $(A.{}^{\bullet}B) \cap u(S) \neq \phi$. Il existe aussi $\lambda,\mu \in u(S)$ tels que $\lambda A \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu \in B$. On obtient $\lambda\mu(A.{}^{\bullet}B) \subseteq \lambda A \subseteq \mathcal{O}$. Donc $A.{}^{\bullet}B$ est un $\mathcal{O}$-idéal à droite. De manière analogue $A^{\bullet}.C$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche. ■

DEFINITION. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Si* I *est un* $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté, on appelle* ordre à gauche *de* I *l'ensemble* $\mathcal{O}_\ell(I) = \{x \in S | xI \subseteq I\}$, *et on appelle* ordre à droite *de* I *l'ensemble* $\mathcal{O}_r(I) = \{x \in S | Ix \subseteq I\}$.

Cette terminologie est justifiée par :

PROPOSITION 2.6. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S *et* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Alors :*

(i) $\mathcal{O}_\ell(I)$ *et* $\mathcal{O}_r(I)$ *sont des ordres de* S *équivalents à* $\mathcal{O}$.

(ii) I *est un* $\mathcal{O}_\ell(I)$*-idéal à gauche et un* $\mathcal{O}_r(I)$*-idéal à droite.*

(iii) $\mathcal{O}_\ell(I)$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche qui contient* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Il est clair que $\mathcal{O}_\ell(I)$ et $\mathcal{O}_r(I)$ sont des sous-anneaux de S, que I est un sous- $\mathcal{O}_\ell(I)$-module à gauche et un sous- $\mathcal{O}_r(I)$-module à droite de S, et que $\mathcal{O}_\ell(I)$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de S tel que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)$. Il existe $\lambda,\mu \in u(S)$ tels que $I\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu \in I$. On obtient $\mathcal{O}_\ell(I)\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)I\lambda \subseteq I\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu\,\mathcal{O}_r(I)\lambda \subseteq I\,\mathcal{O}_r(I)\lambda \subseteq I\lambda \subseteq \mathcal{O}$. On a de plus $I\lambda\mathcal{O}\mu \subseteq \mathcal{O}\mu \subseteq I$ et $I\lambda I \subseteq \mathcal{O}I \subseteq I$ ce qui nous donne $\lambda\mathcal{O}\mu \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ et $\lambda I \subseteq \mathcal{O}_r(I)$. La propriété *(i)* s'obtient par application du corollaire 2.2 et les propriétés *(ii)* et *(iii)* sont alors établies. ■

DEFINITION. - *Si* $\mathcal{O}$ *est un ordre de* S *et si* I *est un* $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté, on pose :*

$I^{-1} = \{x \in S \mid Ix \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)\} = \{x \in S \mid xI \subseteq \mathcal{O}_r(I)\} = \{x \in S \mid IxI \subseteq I\}$.

On a :

PROPOSITION 2.7. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S *et* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Alors* I^{-1} *est un* $\mathcal{O}_\ell(I)$*-idéal à droite et un* $\mathcal{O}_r(I)$*-idéal à gauche (c'est-à-dire* I^{-1} *est un* $\mathcal{O}_r(I)$*-* $\mathcal{O}_\ell(I)$*-idéal).*

DEMONSTRATION. - Il est clair que I^{-1} est un sous- $\mathcal{O}_\ell(I)$-module à droite et un sous- $\mathcal{O}_r(I)$-module à gauche de S. Puisqu'il existe $\lambda, \mu \in u(S)$ tels que $I\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu \in I$, on a $I\lambda \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)$ c'est-à-dire $\lambda \in I^{-1}$, et on a aussi $I^{-1}\mu \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ et $\mu I^{-1} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)$. D'où le résultat. ■

DEFINITION. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Un* $\mathcal{O}$-idéal à gauche *(resp. à droite ; resp. bilatère)* A *est dit* entier *si l'on a* $A^2 \subseteq A$.

Il est alors clair que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $A^2 \subseteq A$, (b) $A \subseteq \mathcal{O}_\ell(A)$, (c) $A \subseteq \mathcal{O}_r(A)$.

PROPOSITION 2.8. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Si* I *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche, alors* $\mathcal{O}_\ell(I)$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche entier qui contient* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 2.6 on sait que $\mathcal{O}_\ell(I)$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche qui contient $\mathcal{O}$ et on a $\mathcal{O}_\ell(I)^2 \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)$ puisque $\mathcal{O}_\ell(I)$ est un sous-anneau de S. ■

§ 3. ORDRES MAXIMAUX.

Dans tout ce paragraphe S désigne toujours un anneau.

DEFINITION. - *On appelle* ordre maximal *de* S *tout ordre de* S *qui n'est strictement contenu dans aucun ordre de* S *qui lui soit équivalent.*

Dans le cas général, c'est un problème ouvert que de savoir si tout ordre est ou n'est pas contenu dans un ordre maximal.

PROPOSITION 3.1. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre de* S. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{O}$ est un ordre maximal.

(b) Pour tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche A *on a* $\mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}$, *et pour tout $\mathcal{O}$-idéal à droite* B *on a* $\mathcal{O}_r(B) = \mathcal{O}$.

(c) Pour tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche A *contenu dans $\mathcal{O}$ on a* $\mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}$, *et pour tout $\mathcal{O}$-idéal à droite* B *contenu dans $\mathcal{O}$ on a* $\mathcal{O}_r(B) = \mathcal{O}$.

(d) Pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère I *on a* $\mathcal{O}_\ell(I) = \mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}$.

(e) Pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère I *contenu dans $\mathcal{O}$ on a* $\mathcal{O}_\ell(I) = \mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}$.

(f) Tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier A *contenant $\mathcal{O}$ est égal à $\mathcal{O}$, et tout $\mathcal{O}$-idéal à droite entier* B *contenant $\mathcal{O}$ est égal à $\mathcal{O}$.*

DEMONSTRATION. - *(a) ⇒ (f)* : $\mathcal{O}_\ell(A)$ est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}$ et qui contient $\mathcal{O}$ d'après la proposition 2.6. On a donc $\mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}$. Comme A est entier, on a $A \subseteq \mathcal{O}_\ell(A)$ ce qui donne $A \subseteq \mathcal{O}$. D'où $A = \mathcal{O}$. De même avec B.

(f) ⇒ (b) : résulte de la proposition 2.8.

Les implications *(b) ⇒ (c)* et *(c) ⇒ (e)* sont claires.

(e) ⇒ (d) : Il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $I\lambda \subseteq \mathcal{O}$. Il est immédiat de vérifier que $I\lambda\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{O}$. On a donc $\mathcal{O}_\ell(I\lambda\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Comme on a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I) \subseteq \mathcal{O}_\ell(I\lambda\mathcal{O})$ on obtient $\mathcal{O}_\ell(I) = \mathcal{O}$. De même $\mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}$.

(d) ⇒ (a) : Montrons d'abord que si M est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de S et si λ est un élément de $u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $\lambda M \subseteq \mathcal{O}$ alors on a aussi $M\lambda \subseteq \mathcal{O}$: en effet on a $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}M\lambda = \mathcal{O}\lambda M\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda\mathcal{O}$, et comme $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère dont l'ordre à droite $\mathcal{O}_r(\mathcal{O}\lambda\mathcal{O})$ est égal à $\mathcal{O}$, on obtient $M\lambda \subseteq \mathcal{O}$. Considérons maintenant un ordre $\mathcal{O}'$ de S qui est équivalent à $\mathcal{O}$ et qui contient $\mathcal{O}$. Il existe alors $\lambda,\mu \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $\lambda\mathcal{O}'\mu \subseteq \mathcal{O}$. D'après ce qui précède on a donc $\mathcal{O}'\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu\lambda\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. Ainsi $\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère et son ordre à gauche est égal à $\mathcal{O}$. Comme on a $\mathcal{O}'\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'$ on obtient $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$. ∎

PROPOSITION 3.2. - *Soient $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S *et* I *un $\mathcal{O}$-idéal à gauche. Alors $\mathcal{O}_\ell(I^{-1})$, l'ordre à gauche de* I^{-1}, *est un ordre maximal de* S.

DEMONSTRATION. - Posons $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_r(I)$ et $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}_\ell(I^{-1})$. Il résulte des propositions 2.6 et 2.7 que $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ sont des ordres équivalents de S avec $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}''$. Considérons $\mathcal{O}_1$ un ordre de S, équivalent à $\mathcal{O}''$ et contenant $\mathcal{O}''$. Posons $A = I\,\mathcal{O}_1\, I^{-1}$; c'est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S. Comme I^{-1} est un $\mathcal{O}'$-idéal à gauche, il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $I^{-1}\lambda \subseteq \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'' \subseteq \mathcal{O}_1$, et comme I est un $\mathcal{O}'$-idéal à droite il existe $\mu \in u(S)$ tel que $\mu I \subseteq \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'' \subseteq \mathcal{O}_1$. On obtient $\mu A \lambda \subseteq \mathcal{O}_1$. Alors, puisque $\mathcal{O}_1$ est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}''$ et donc à $\mathcal{O}$, il existe $\alpha, \beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $\alpha A \beta \subseteq \mathcal{O}$. On en déduit $\mathcal{O}\alpha\mathcal{O} A\beta \subseteq \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un ordre maximal et $\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, on déduit de $\mathcal{O}_\ell(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}) = \mathcal{O}_r(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ qu'on a $(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})^{-1} = \{x \in S \mid \mathcal{O}\alpha\mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}\} = \{x \in S \mid x\,\mathcal{O}\alpha\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}\}$. En conséquence on obtient $A\beta\alpha \subseteq \mathcal{O}$. De même on a $\beta\alpha A \subseteq \mathcal{O}$. De plus en prenant $\lambda' \in u(S) \cap I$ et $\mu' \in u(S) \cap I^{-1}$ on a $\lambda'\mu' \in u(S) \cap A$. Donc A est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère. En outre on peut écrire $A^2 = I\,\mathcal{O}_1 I^{-1} I\,\mathcal{O}_1 I^{-1} \subseteq I\,\mathcal{O}_1\,\mathcal{O}'\,\mathcal{O}_1 I^{-1} \subseteq I\,\mathcal{O}_1 I^{-1} = A$ ce qui montre que A est entier. Il en résulte qu'on a $A \subseteq \mathcal{O}$, c'est-à-dire $I\,\mathcal{O}_1 I^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. D'où $\mathcal{O}_1 I^{-1} \subseteq I^{-1}$ et ainsi on obtient $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}''$. Par suite $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}''$. ■

LEMME 3.3. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Si $\mathcal{O}'$ est un sous-anneau de* S *et si* λ, μ *sont des éléments de* $u(S) \cap \mathcal{O}$ *tels que* $\lambda\,\mathcal{O}'\,\mu \subseteq \mathcal{O}$, *alors il existe un ordre maximal de* S *qui contient* $\mathcal{O}'$ *et qui est équivalent à* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Posons $I = \mathcal{O}\lambda + \mathcal{O}\lambda\,\mathcal{O}'$. Alors I est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche dont l'ordre à droite contient $\mathcal{O}'$ (en effet on a $I\,\mathcal{O}' = \mathcal{O}\lambda\,\mathcal{O}' \subseteq I$). L'ordre à gauche de I^{-1} est, d'après la proposition 3.2, un ordre maximal de S qui, d'après les propositions 2.7 et 2.6, contient l'ordre à droite de I (donc $\mathcal{O}'$) et est équivalent à $\mathcal{O}$. ■

On en déduit immédiatement :

PROPOSITION 3.4. - *Tout ordre de* S *équivalent à un ordre maximal de* S *est contenu dans un ordre maximal de* S.

Donnons des propriétés des $\mathcal{O}$-idéaux qui seront utiles dans d'autres chapitres.

PROPOSITION 3.5. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère tel qu'il existe un élément* a *de* u(S) *tel que* $A = \mathcal{O}a$ *alors on a aussi* $A = a\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Puisque A est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère on a $a\mathcal{O} \subseteq A = \mathcal{O}a$ ce qui donne $\mathcal{O} \subseteq a^{-1}\mathcal{O}a$. Posons $\mathcal{O}' = a^{-1}\mathcal{O}a$. Alors $\mathcal{O}'$ est un sous-anneau de S tel que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ et $a\mathcal{O}'a^{-1} = \mathcal{O}$. On déduit du corollaire 2.2 que $\mathcal{O}'$ est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}$. Comme on a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$, la maximalité de $\mathcal{O}$ implique $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. D'où l'égalité $a\mathcal{O} = \mathcal{O}a$. ■

PROPOSITION 3.6. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Si* A *et* B *sont deux $\mathcal{O}$-idéaux, alors* $A.{}^{\bullet}B = \{x \in S \mid Bx \subseteq A\}$ *et* $A{}^{\bullet}.B = \{x \in S \mid xB \subseteq A\}$ *sont des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères.*

DEMONSTRATION. - $A.{}^{\bullet}B$ est un $\mathcal{O}$-idéal à droite d'après la proposition 2.5. De plus il est clair que $A.{}^{\bullet}B$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de S, et il existe $\alpha \in u(S)$ tel que $\alpha(A.{}^{\bullet}B) \subseteq \mathcal{O}$. On peut choisir α tel que $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$. Alors, d'après la démonstration de *(d)* $\Rightarrow$ *(a)* de la proposition 3.1, on a $(A.{}^{\bullet}B)\alpha \subseteq \mathcal{O}$. Ainsi $A.{}^{\bullet}B$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche. On démontre de même que $A{}^{\bullet}.B$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère. ■

PROPOSITION 3.7. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Si pour tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche* A *on pose* $A^* = (A^{-1})^{-1}$, *alors on a* $A \subseteq A^*$ *et* $(A^*)^{-1} = A^{-1}$. *De plus, si* B *désigne aussi un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, on a* $(A + B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$ *et* $A^* \cap B^* = (A^* \cap B^*)^*$ *; en particulier* $(A + B)^* = (A^* + B^*)^*$, *et* $A \subseteq B$ *implique* $A^* \subseteq B^*$.

DEMONSTRATION. - D'après les propositions 3.1 et 2.7, on a $\mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_r(A^{-1}) = \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_\ell(A^*) = \mathcal{O}$. Avec la définition de A^{-1}, $(A^{-1})^{-1}$ et $(A^*)^{-1}$, il en résulte que $A \subseteq A^*$ et $(A^*)^{-1} = A^{-1}$. D'après les propositions 3.1 et 2.4, on a aussi $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}_\ell(B) = \mathcal{O}_\ell(A + B)$. Il est alors immédiat que $(A + B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$. En particulier $(A + B)^* = (A^{-1} \cap B^{-1})^{-1} = [(A^*)^{-1} \cap (B^*)^{-1}]^{-1} = (A^* + B^*)^*$. Posons $C = A^* \cap B^*$. Alors $C \subseteq A^*$ implique $(A^*)^{-1} \subseteq C^{-1}$, et donc $C^* \subseteq A^*$. De même $C^* \subseteq B^*$. D'où $C^* \subseteq A^* \cap B^* = C$, et ainsi $C^* = C$. ■

§ 4. ORDRES REGULIERS.

Dans tout ce paragraphe S désigne toujours un anneau.

DEFINITION. - *On dit qu'un* ordre $\mathcal{O}$ *de* S *est* régulier *(en anglais "bounded") si tout* $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté contient un* $\mathcal{O}$*-idéal bilatère.*

PROPOSITION 4.1. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre de* S. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{O}$ *est un ordre régulier de* S.

(b) Tout $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté entier contient un* $\mathcal{O}$*-idéal bilatère.*

(c) Tout $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté contenu dans* $\mathcal{O}$ *contient un* $\mathcal{O}$*-idéal bilatère.*

(d) Pour tout $x \in S$ *il existe un* $\mathcal{O}$*-idéal qui contient* x.

(e) Si M *est un sous-ensemble de* S *non vide et si* λ, μ *sont des éléments de* $u(S)$ *tels que* $\lambda M \mu \subseteq \mathcal{O}$, *alors il existe* $\alpha, \beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *tels que* $\alpha M \subseteq \mathcal{O}$ *et* $M\beta \subseteq \mathcal{O}$.

(f) Pour tout $x \in S$ *il existe* $\alpha, \beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *tels que* $\alpha \mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}$ *et* $x \mathcal{O} \beta \subseteq \mathcal{O}$.

(g) Pour tout $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *il existe* $\alpha', \alpha'' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *tels que* $\alpha' \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}\alpha$ *et* $\mathcal{O}\alpha'' \subseteq \alpha\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* et *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* : c'est immédiat.

(c) $\Rightarrow$ *(g)* : Soit $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$. Alors $\mathcal{O}\alpha$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$. Donc il existe un $\mathcal{O}$-idéal A tel que $A \subseteq \mathcal{O}\alpha$. Ainsi, comme il existe $\alpha' \in u(S) \cap A$, on a $\alpha' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ et $\alpha'\mathcal{O} \subseteq A \subseteq \mathcal{O}\alpha$. De même il existe $\alpha'' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}\alpha'' \subseteq \alpha\mathcal{O}$.

(g) $\Rightarrow$ *(f)* : Si $x \in S$ il existe $a \in \mathcal{O}$ et $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $x = a\alpha^{-1}$. Par hypothèse il existe $\alpha'' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}\alpha'' \subseteq \alpha\mathcal{O}$. D'où $\alpha^{-1}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}\alpha''^{-1}$, et par suite $x\mathcal{O} \subseteq a\mathcal{O}\alpha''^{-1}$ ce qui implique $x\mathcal{O}\alpha'' \subseteq a\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$. De même il existe $\alpha' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\alpha'\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$.

(f) $\Rightarrow$ *(d)* : $\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S qui contient 1. Il existe $\alpha, \beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $\alpha\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$ et $x\mathcal{O}\beta \subseteq \mathcal{O}$. Donc il vient $\alpha(\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$ et $(\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O})\beta \subseteq \mathcal{O}$. Ainsi $\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenant x. (Si $x \in u(S)$ alors $\mathcal{O}x\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère qui contient x).

(d) $\Rightarrow$ *(e)* : On peut supposer que μ, λ sont des éléments de $u(S) \cap \mathcal{O}$. De $\lambda M \mu \subseteq \mathcal{O}$ on déduit $\lambda M \subseteq \mathcal{O}\mu^{-1}$. Or il existe un $\mathcal{O}$-idéal A tel que $\mu^{-1} \in A$, et il vient

$\mathcal{O}\mu^{-1} \subseteq A$. Il existe $\alpha' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\alpha' A \subseteq \mathcal{O}$. On obtient $\alpha'\lambda M \subseteq \alpha'\mathcal{O}\mu^{-1} \subseteq \alpha' A \subseteq \mathcal{O}$ avec $\alpha'\lambda \in u(S) \cap \mathcal{O}$. De même il existe $\beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $M\beta \subseteq \mathcal{O}$.

(e) ⇒ (a) : Si A est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $\lambda \in A$. On peut alors écrire $\lambda = b^{-1}a$ avec $b \in u(S) \cap \mathcal{O}$ et $a \in u(S) \cap A \cap \mathcal{O}$. Posons $M = \mathcal{O}a^{-1}$. On obtient $Ma = \mathcal{O}$, et ainsi il existe $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\alpha M \subseteq \mathcal{O}$, c'est-à-dire $\alpha\mathcal{O}a^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. D'où $\alpha\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}a \subseteq A$. On a donc $\mathcal{O}\alpha\mathcal{O} \subseteq A$ et $\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.

■

PROPOSITION 4.2. - *Tout ordre de* S *qui est équivalent à un ordre régulier de* S *est un ordre régulier de* S.

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{O}'$ un ordre de S équivalent à un ordre régulier $\mathcal{O}$ de S. En utilisant la proposition 4.1 il existe $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in u(S)$ tels que $\alpha\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, $\mathcal{O}'\beta \subseteq \mathcal{O}$ et $\alpha'\mathcal{O}\beta' \subseteq \mathcal{O}'$. Le $\mathcal{O}$-idéal à droite $\alpha'\mathcal{O}$ contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, et ainsi il existe $\alpha'' \in u(S)$ tel que $\mathcal{O}\alpha'' \subseteq \alpha'\mathcal{O}$. De même il existe $\beta'' \in u(S)$ tel que $\beta''\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}\beta'$. On obtient $\mathcal{O}\alpha''\beta' \subseteq \mathcal{O}'$ et $\alpha'\beta''\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$. Si M est un sous-ensemble non vide de S et si λ, μ sont des éléments de $u(S)$ tels que $\lambda M\mu \subseteq \mathcal{O}'$, il vient $\alpha\lambda M\mu \subseteq \alpha\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et par la proposition 4.1, il existe $\lambda', \mu' \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $\lambda' M \subseteq \mathcal{O}$ et $M\mu' \subseteq \mathcal{O}$. On obtient $\alpha'\beta''\lambda' M \subseteq \mathcal{O}'$ et $M\mu'\alpha''\beta' \subseteq \mathcal{O}'$, avec $\alpha'\beta''\lambda' \in u(S)$ et $\mu'\alpha''\beta' \in u(S)$. Donc il existe $\sigma, \tau \in u(S) \cap \mathcal{O}'$ tel que $\sigma M \subseteq \mathcal{O}'$ et $M\tau \subseteq \mathcal{O}'$. D'après la proposition 4.1, $\mathcal{O}'$ est un ordre régulier de S. ■

On a la propriété suivante des $\mathcal{O}$-idéaux :

PROPOSITION 4.3. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre régulier de* S. *Si* A *et* B *sont deux* $\mathcal{O}$*-idéaux bilatères, alors* $A.\!\cdot B = \{x \in S \mid Bx \subseteq A\}$ *et* $A\cdot\!. B = \{x \in S \mid xB \subseteq A\}$ *sont des* $\mathcal{O}$*-idéaux bilatères.*

DEMONSTRATION. - $A.\!\cdot B$ est un $\mathcal{O}$-idéal à droite d'après la proposition 2.5. De plus il est clair que $A.\!\cdot B$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de S, et il existe $\alpha \in u(S)$ tel que $\alpha(A.\!\cdot B) \subseteq \mathcal{O}$. D'après la proposition 4.1 il existe $\beta \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $(A.\!\cdot B)\beta \subseteq \mathcal{O}$. Donc $A.\!\cdot B$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche. De même $A\cdot\!. B$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.

■

Le résultat suivant sera utilisé au chapitre VI.

PROPOSITION 4.4. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre régulier de* S. *Soit* A *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Si* B *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche contenu dans* $\mathcal{O}$ *, alors* $A^{\bullet}\!\cdot B = \{x \in S \mid xB \subseteq A\}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal bilatère. Si* C *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à droite contenu dans* $\mathcal{O}$*, alors* $A.^{\bullet}C = \{x \in S \mid Cx \subseteq A\}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche.*

DEMONSTRATION. - Il est clair que $A^{\bullet}\!\cdot B$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S, et que $A.^{\bullet}C$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de S. Il existe un $\mathcal{O}$-idéal bilatère A' tel que $A' \subseteq A$. On a alors $A'B \subseteq A' \subseteq A$ et $CA' \subseteq A' \subseteq A$, ce qui implique $(A^{\bullet}.B) \cap u(S) \neq \phi$ et $(A.^{\bullet}C) \cap u(S) \neq \phi$. Il existe $\lambda,\mu,\nu \in u(S)$ tels que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, $\mu \in B$ et $\nu \in C$. Il vient $(A^{\bullet}\!\cdot B)\mu\lambda \subseteq (A^{\bullet}\!\cdot B)B\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\nu(A.^{\bullet}C)\lambda \subseteq C(A.^{\bullet}C)\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}$. D'après la proposition 4.1, il existe $\alpha,\beta,\gamma \in u(S)$ tels que $\alpha(A^{\bullet}\!\cdot B) \subseteq \mathcal{O}$, $\beta(A.^{\bullet}C) \subseteq \mathcal{O}$ et $(A.^{\bullet}C)\gamma \subseteq \mathcal{O}$. D'où le résultat. ∎

§ 5. ORDRES MAXIMAUX COMMUTATIFS.

Soient R un domaine d'intégrité (anneau commutatif sans diviseurs de zéro) et K son corps de fractions.

DEFINITION. - *On dit que* R *est un* anneau complètement intégralement clos *si la condition suivante est vérifiée : tout élément* $x \in K$ *tel qu'il existe un élément non nul* $c \in R$ *tel que* $cx^n \in R$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, appartient à* R.

Si R est complètement intégralement clos, alors R est intégralement clos. Si R est un domaine d'intégrité noethérien, alors R est complètement intégralement clos si et seulement si il est intégralement clos. (Pour plus de détails on peut se reporter à [19] ou [109, Vol. II]).

PROPOSITION 5.1. - *Soit* R *un domaine d'intégrité de corps de fractions* K. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* R *soit un ordre maximal de* K, *est que* R *soit un anneau complètement intégralement clos.*

DEMONSTRATION. - Si x est un élément de K tel qu'il existe un élément non nul $c \in R$ tel que $cx^n \in R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a $cR[x] \subseteq R$, et par suite $R[x]$ est un ordre de K équivalent à R. En conséquence si R est un ordre maximal de K on obtient $R[x] = R$ et donc $x \in R$. Réciproquement si R est un anneau complètement intégralement clos, considérons R' un ordre de K équivalent à R et contenant R. Il existe alors un élément non nul $c \in R$ tel que $cR' \subseteq R$, et ainsi si x est un élément de R' on a $cx^n \in R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on obtient $x \in R$ ce qui implique $R' = R$. ∎

§ 6. SUR LES ALGEBRES CENTRALES SIMPLES.

Le lecteur pourra se reporter à [95] ou [17] pour plus de détails sur tout ce qui est rappelé dans ce paragraphe.

DEFINITION. - *Soit* K *un corps commutatif. Une* K-algèbre centrale simple Σ *est une* K-*algèbre unitaire de dimension finie sur* K, *de centre* K, *et ne possédant pas d'autres idéaux bilatères que* 0 *et* Σ.

Un corps gauche de dimension finie sur son centre, par exemple le corps des quaternions, est un exemple d'algèbre centrale simple.

Dans toute la suite de ce paragraphe Σ désignera une K-algèbre centrale simple.

La dimension n de Σ sur K est de la forme $n = m^2$, et Σ est un anneau simple artinien.

Soit $\{u_1,\dots,u_n\}$ une base du K-espace vectoriel Σ. Si $a \in \Sigma$ on peut écrire $au_j = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}u_i$, avec $k_{ij} \in K$. Donc à tout élément a de Σ on peut associer la matrice $A = (k_{ij})$ telle que $aU = UA$, où U désigne la matrice ligne $(u_1,\dots,u_n)$. L'application $a \longmapsto A$ est un homomorphisme d'anneaux (en effet, si A et B sont les matrices respectivement associées à a et b, il vient $(a+b)U = aU + bU = UA + UB = U(A+B)$ et $(ab)U = a(bU) = a(UB) = (aU)B = UAB$; $1U = UI$), et c'est une injection (en effet $A = 0$ implique $au_i = 0$ pour tout $i = 1,\dots,n$, donc $a = 0$ puisque Σ est unitaire).

Soient a un élément de Σ et A la matrice associée.

Le polynôme minimal de a est le polynôme unitaire de plus petit degré à coefficients dans K annulé par a. C'est aussi le polynôme minimal de la matrice A.

On note $Tr(a)$ la trace de la matrice A. C'est un élément de K, et pour deux éléments a, b de Σ on a $Tr(a + b) = Tr(a) + Tr(b)$ et $Tr(ab) = Tr(ba)$. Si le polynôme caractéristique de A (ou de a) est $P(X) = X^n + k_1X^{n-1} + \cdots + k_n$, avec $k_i \in K$, on sait que $Tr(A) = Tr(a) = -k_1$; de plus on a $P(X) = (p(X))^m$, où $p(X) \in K[X]$ et où $n = m^2$ est la dimension de Σ sur K. Le polynôme $p(X)$ s'appelle le *polynôme caractéristique réduit* de a (ou de A). Si l'on a $p(X) = X^m + k'_1X^{m-1} + \cdots + k'_m$ on pose $tr(a) = -k'_1$. Alors $tr(a)$ s'appelle la *trace réduite* de a et l'on a $Tr(a) = m\, tr(a)$.

Le polynôme caractéristique de A divise une puissance de son polynôme minimal. Donc si R est un domaine intégralement clos de corps de fractions K et si le polynôme minimal de l'élément a de Σ appartient à $R[X]$, il en est de même du polynôme caractéristique $P(X)$ et du polynôme caractéristique réduit $p(X)$ de a ce qui donne $Tr(a) \in R$ et $tr(a) \in R$ (voir par exemple le théorème 5 page 260 de [109, Vol. I]).

La forme bilinéaire symétrique, qui à $(x,y) \in \Sigma \times \Sigma$ associe $Tr(xy)$, n'est pas en général non dégénérée (c'est cependant vrai par exemple si la caractéristique de K est nulle) mais par contre la forme bilinéaire symétrique, qui à $(x,y) \in \Sigma \times \Sigma$ associe $tr(xy)$, est non dégénérée.

§ 7. R-ORDRES D'UNE ALGEBRE CENTRALE SIMPLE : EXEMPLE D'ORDRE MAXIMAL REGULIER DE TYPE FINI SUR SON CENTRE.

Dans tout ce paragraphe R désigne un domaine d'intégrité complètement intégralement clos de corps de fractions K et Σ une K-algèbre centrale simple de dimension n sur K.

Rappelons qu'un élément x de Σ est dit entier sur R s'il existe une relation de la forme $x^p + a_{p-1}\, x^{p-1} + \cdots + a_0 = 0$ avec $a_i \in R$ pour tout $i = 0,\ldots,p-1$.

DEFINITION. - *On appelle* R-ordre *de* Σ *tout sous-anneau* Λ *de* Σ *contenant* R *tel que tout élément soit entier sur* R *et tel que l'on ait* $K\Lambda = \Sigma$.

EXISTENCE D'UN R-ORDRE DE Σ : Soit $u_1,\ldots,u_n$ une base du K-espace vectoriel Σ. On a $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} Ku_i$. Posons $M = \sum_{i=1}^{n} Ru_i$ et considérons $\Lambda = \{x \in \Sigma \mid xM \subseteq M\}$. Il est trivial que Λ est un sous-anneau de Σ contenant R. Pour tout $a \in \Sigma$ on peut écrire $au_j = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}u_i$, avec $k_{ij} \in K$. Or il existe un élément non nul $r \in R$ tel que $rk_{ij} \in R$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, et par suite on obtient $rau_j \in M$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Il vient $raM = \sum_{i=1}^{n} Rrau_i \subseteq M$ ce qui entraîne $ra \in \Lambda$. Ceci prouve que l'on a $\Sigma = K\Lambda$. Si $x \in \Lambda$ on déduit de $xM \subseteq M$ qu'on a $xu_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}u_i$, avec $r_{ij} \in R$. D'où $\sum_{i=1}^{n} (x\delta_{ij} - r_{ij})u_i = 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, et avec δ_{ij} symbole de Kronecker. Les coefficients $(x\delta_{ij} - r_{ij})$ appartiennent à l'anneau commutatif $R[x]$. Si l'on pose $d = \text{déterminant } (x\delta_{ij} - r_{ij})$, il vient $du_i = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et comme $1 \in \Sigma$ on obtient $d = 0$. En calculant d on voit que x est entier sur R. Donc Λ est un R-ordre de Σ.

PROPOSITION 7.1. - *Si Λ est un R-ordre de Σ alors Λ est un ordre régulier de Σ.*

DEMONSTRATION. - La relation $K\Lambda = \Sigma$ implique que Λ est un ordre de Σ. Si x est un élément de Λ inversible dans Σ on a $K\Lambda x = \Sigma x = \Sigma$ et ainsi on peut écrire $1 = \sum_{i=1}^{p} k_i y_i$ avec $k_i \in K$ et $y_i \in \Lambda x$; comme il existe un élément non nul $r \in R$ tel que $rk_i \in R$ pour tout $i = 1,\ldots,p$, on obtient $r \in \Lambda x$. Donc la propriété *(g)* de la proposition 4.1 est vérifiée et Λ est un ordre régulier de Σ. ■

Un R-ordre Λ de Σ étant un ordre de l'anneau artinien simple Σ est un anneau de Goldie premier (c'est une conséquence du corollaire 1.2).

Le centre d'un R-ordre Λ de Σ est R (d'abord il est clair que le centre de Λ est $K \cap \Lambda$ et ensuite on a $K \cap \Lambda = R$ puisque R est intégralement clos).

PROPOSITION 7.2. - *Tout R-ordre Λ de Σ est un sous-module d'un R-module libre de type fini.*

DEMONSTRATION. - Soit Λ un R-ordre de Σ. Considérons $u_1,\ldots,u_n$ une base du K-espace vectoriel Σ qui est contenu dans Λ (c'est possible puisque $K\Lambda = \Sigma$). Utilisons la forme bilinéaire symétrique non dégénérée déduite de la trace réduite (voir § 6). Pour tout $v \in \Sigma$, la forme linéaire, notée tr(.v), qui à $u \in \Sigma$ associe

$tr(uv) \in K$, est un élément de l'espace dual Σ^* de Σ ; l'application, qui à $v \in \Sigma$ associe $tr(.v) \in \Sigma^*$, est un isomorphisme de K-espaces vectoriels et l'image réciproque de la base duale $u_1^*,\ldots,u_n^*$ de la base $u_1,\ldots,u_n$ de Σ est une base $v_1,\ldots,v_n$ de Σ (on a donc $tr(.v_i) = u_i^*$). Pour tout élément x de Λ on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, avec $x_i \in K$, ce qui entraîne

$tr(xu_i) = tr(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j u_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j\ tr(v_j u_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j\ tr(u_i v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j^*(u_i) = x_i$, pour tout $i = 1,\ldots,n$. Puisque xu_i est un élément de Λ c'est un élément entier sur R. Ainsi le polynôme minimal de xu_i divise un polynôme unitaire de $R[X]$ et, d'après le théorème 5 page 260 de [109, Vol. I], c'est un élement de $R[X]$. On a donc $tr(xu_i) \in R$ (voir § 6), c'est-à-dire $x_i \in R$. En conséquence Λ est un sous-module du R-module libre de type fini $\sum_{i=1}^{n} Rv_i$. ∎

COROLLAIRE 7.3. - *Si Λ et Λ' sont deux R-ordres de Σ alors Λ et Λ' sont des ordres équivalents de Σ.*

DEMONSTRATION. - Λ et Λ' sont des ordres de Σ d'après la proposition 7.1. D'après la proposition 7.2 il existe $v_1,\ldots,v_n$ éléments de Σ tels que $\Lambda \subseteq \sum_{i=1}^{n} Rv_i$. Comme on a $K\Lambda' = \Sigma$ il existe un élément non nul $r \in R$ tel que $rv_i \in \Lambda'$ pour tout $i = 1,\ldots,n$. On obtient $r\Lambda \subseteq r\sum_{i=1}^{n} Rv_i \subseteq \Lambda'$. De même il existe un élément non nul $r' \in R$ tel que $r'\Lambda' \subseteq \Lambda$. ∎

COROLLAIRE 7.4. - *Si de plus R est un anneau noethérien alors pour qu'un sous-anneau Λ de Σ soit un R-ordre de Σ il faut et il suffit que ce soit un R-module de type fini tel que l'on ait $K\Lambda = \Sigma$.*

DEMONSTRATION. - Si Λ est un R-ordre de Σ c'est, d'après la proposition 7.2, un sous-module d'un R-module de type fini. Puisque R est un anneau noethérien, Λ est alors un R-module de type fini. Réciproquement, si Λ est un R-module de type fini tel que $K\Lambda = \Sigma$ alors il est clair que Λ contient R et, puisque R est un anneau noethérien, Λ est un R-module noethérien. Pour tout $x \in \Lambda$, $R[x]$ est un sous-module de Λ et donc $R[x]$ est un R-module de type fini. On en déduit que x est entier sur R. Donc Λ est un R-ordre de Σ. ∎

DEFINITION. - *On appelle* R-ordre maximal *de* Σ *tout* R-*ordre de* Σ *qui n'est strictement contenu dans aucun* R-*ordre de* Σ.

La famille non vide des R-ordres de Σ étant inductive pour l'inclusion, le théorème de Zorn implique que tout R-ordre de Σ est contenu dans un R-ordre maximal.

THEOREME 7.5. - *Tout* R-*ordre maximal de* Σ *est un ordre maximal régulier de* Σ.

DEMONSTRATION. - Soit Λ un R-ordre maximal de Σ. D'après la proposition 7.1 c'est un ordre régulier de Σ. Considérons Λ' un ordre de Σ qui contient Λ et qui est équivalent à Λ. Il existe des éléments inversibles α ,β de Σ tels que $\alpha\Lambda'\beta \subseteq \Lambda$ ce qui implique, d'après la proposition 4.1, qu'il existe un élément inversible τ de Σ tel que $\tau\Lambda' \subseteq \Lambda$. Il vient $\Lambda' \subseteq \tau^{-1}\Lambda$ et, comme on peut écrire $\tau^{-1} = r^{-1}\lambda$, avec $\lambda \in \Lambda$ et $0 \neq r \in R$, on obtient $r\Lambda' \subseteq \lambda\Lambda \subseteq \Lambda$. Tout élément de Σ étant algébrique sur K, si x est un élément de Λ' notons f(X) son polynôme minimal et désignons par $x_1,\dots,x_k$ les racines (distinctes ou non) de f(X) dans une clôture algébrique de K. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on déduit de $r\Lambda' \subseteq \Lambda$ que rx^p est entier sur R et on a une relation de la forme $(rx^p)^\ell + r_1(rx^p)^{\ell-1} + \dots + r_\ell = 0$, avec $r_i \in R$. Le polynôme $(rX^p)^\ell + r_1(rX^p)^{\ell-1} + \dots + r_\ell$ est alors un multiple de f(X), et est donc annulé par $x_1,\dots,x_k$. Il en résulte que rx_i^p est entier sur R pour tout $i = 1,\dots,k$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme les coefficients de $f(X) = X^q + k_1X^{q-1} + \dots + k_q$ sont au signe près les fonctions symétriques élémentaires de $x_1,\dots,x_k$ on en déduit que les éléments $r^qk_1^p,\dots,r^qk_q^p$ sont entiers sur R pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme ces éléments appartiennent à K et puisque R est complètement intégralement clos, les coefficients $k_1,\dots,k_q$ de f(X) appartiennent à R. Donc $f(X) \in R[X]$ et x est un élément entier sur R. En conséquence Λ' est formé d'éléments entiers sur R, contient R et vérifie $\Sigma = K\Lambda \subseteq K\Lambda' \subseteq \Sigma$. Donc Λ' est un R-ordre de Σ qui contient Λ ce qui implique $\Lambda' = \Lambda$ par maximalité de Λ. Ainsi Λ est un ordre maximal régulier de Σ. ■

Revenons au cas particulier où R est de plus un anneau noethérien : le corollaire 7.4 implique que tout R-ordre maximal de Σ est un module de type fini sur son centre R. Le résultat suivant constitue alors une réciproque partielle du théorème 7.5 :

PROPOSITION 7.6. - *Soit Λ un anneau premier noethérien qui est un R-module de type fini sur son centre R. Désignons par Σ l'anneau de fractions de Λ. Alors, si Λ est un ordre maximal de Σ, c'est un R-ordre maximal de l'algèbre centrale simple Σ (et c'est en particulier un ordre régulier de Σ).*

DEMONSTRATION. - Comme Λ est un anneau premier noethérien il possède un anneau de fractions Σ qui est simple artinien (d'après le corollaire 1.2), et comme Λ est un anneau noethérien qui est un R-module de type fini sur son centre R, ce centre R est un anneau noethérien (voir [49]).

Si r est un élément non nul de R et si $\lambda \in \Lambda$ vérifient $r\lambda = 0$ alors on a $r\Lambda\lambda = 0$ et, comme Λ est un anneau premier, il vient $\lambda = 0$. Donc tout élément non nul de R étant non diviseur de zéro dans Λ est inversible dans Σ. Par suite le domaine d'intégrité R possède un corps de fractions K qui est un sous-anneau de Σ. D'autre part, puisque R est le centre de Λ, que Σ est l'anneau de fractions de Λ, et que K est le corps de fractions de R, il est facile de vérifier que K est contenu dans le centre de Σ. Si on considère I un R-idéal de K et x un élément de K tel que $xI \subseteq I$ on obtient $xI\Lambda \subseteq I\Lambda$; comme $I\Lambda$ est un Λ-idéal et comme Λ est un ordre maximal de Σ il en résulte qu'on a $x \in \Lambda$ ce qui implique alors que x appartient au centre de Λ, c'est-à-dire $x \in R$. Ainsi R est un ordre maximal de K.

Puisque Λ est un R-module de type fini, $K\Lambda$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u_1,\dots,u_n$ une base de $K\Lambda$. Si c est un élément non diviseur de zéro de Λ, alors $cu_1,\dots,cu_n$ est aussi une base de $K\Lambda$ et on peut écrire $1 = \sum_{i=1}^{n} k_i cu_i = c(\sum_{i=1}^{n} k_i u_i)$, avec $k_i \in K$, ce qui implique que c est inversible dans $K\Lambda$. Il en résulte alors que $K\Lambda$ est l'anneau de fractions de Λ ce qui donne $K\Lambda = \Sigma$. D'autre part, comme tout élément x de $\Sigma = K\Lambda$ peut se mettre sous la forme $x = r^{-1}\lambda$, avec $\lambda \in \Lambda$ et $0 \neq r \in R$, il est facile de vérifier que le centre de Σ est contenu dans K. Donc le centre de Σ est égal à K.

D'après tout ce qui précède nous avons démontré que Σ est une K-algèbre centrale simple, que R est un domaine d'intégrité noethérien complètement intégralement clos, et, d'après le corollaire 7.4, que Λ est un R-ordre de Σ puisque c'est un sous-anneau de Σ qui est un R-module de type fini tel que l'on ait $K\Lambda = \Sigma$. Si Λ' est un

R-ordre de Σ contenant Λ, c'est, d'après le corollaire 7.3, un ordre de Σ équivalent à Λ et, comme Λ est un ordre maximal de Σ, on obtient $\Lambda' = \Lambda$. Donc Λ est un R-ordre maximal de Σ. (Λ est un ordre régulier de Σ d'après la proposition 7.1). ■

REMARQUE. - Nous donnerons des compléments dans les chapitres VII et VIII.

DEFINITIONS. - *Soient* R *un domaine d'intégrité complètement intégralement clos de corps de fractions* K *et* Σ *une* K-*algèbre centrale simple.*

Si R *est noethérien, on appelle* R-ordre classique *(resp.* R-ordre maximal classique*) tout* R-*ordre (resp.* R-*ordre maximal) de* Σ.

Si R *est un domaine de Krull, on appelle* R-ordre de Fossum *(resp.* R-ordre maximal de Fossum*) tout* R-*ordre (resp.* R-*ordre maximal) de* Σ.

Dans ce paragraphe nous avons donc établi l'existence d'ordres maximaux réguliers et en particulier d'ordres maximaux réguliers qui sont des anneaux noethériens premiers et modules de type fini sur leur centre.

§ 8. EXEMPLES D'ORDRE MAXIMAL NON REGULIER ET D'ORDRE MAXIMAL REGULIER QUI N'EST PAS DE TYPE FINI SUR SON CENTRE.

C'est une conséquence du théorème de Goldie qu'un anneau noethérien sans diviseurs de zéro possède un corps de fractions (voir § 1, ou [53] page 422).

PROPOSITION 8.1. - *Soit* Λ *un anneau noethérien sans diviseurs de zéro ordre maximal de son corps de fractions* K. *Soit* x *une inconnue commutant avec tout élément de* Λ. *L'anneau des polynômes* $\Lambda[x]$ *est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro ordre maximal de son corps de fractions* Q. *Si* Λ *n'est pas un ordre régulier de* K *alors* $\Lambda[x]$ *n'est pas un ordre régulier de* Q. *Si dans* Λ *tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, il n'en est pas de même dans* $\Lambda[x]$.

DEMONSTRATION. - Il est évident que $\Lambda[x]$ est sans diviseurs de zéro. La démonstration que l'anneau $\Lambda[x]$ est noethérien, est identique à celle du commutatif (voir

[109, Vol. I] page 201 par exemple). D'après la proposition 3.1, démontrons que si I est un idéal à gauche non nul de $\Lambda[x]$ alors ($x'I \subseteq I$, où $x' = g^{-1}f$ avec $g,f \in \Lambda[x]$) implique $x' \in \Lambda[x]$. Il est facile de démontrer que $IK[x]$ est un idéal à droite non nul de $K[x]$ et qu'il est engendré par un élément $\sigma \in K[x]$ (on utilise la division euclidienne dans $K[x]$). On a donc $IK[x] = \sigma K[x]$. De $g^{-1}fIK[x] \subseteq IK[x]$ on déduit qu'il existe $\lambda \in K[x]$ tel que $g^{-1}f\sigma = \sigma\lambda$. D'où $f\sigma = g\sigma\lambda$ et ainsi le degré de f ne peut être plus petit que celui de g. On peut écrire $f = g\ell + r$ avec $\ell, r \in K[x]$ et degré de r < degré de g. D'autre part on a $K[x]I = KI$: en effet on a $KI \subseteq K[x]I$; si $\sum_{j=1}^{n} k_j(x)i_j(x) \in K[x]I$, avec $k_j(x) \in K[x]$ et $i_j(x) \in I$, pour tout $j = 1,\dots,n$, on peut écrire $k_j(x) = \gamma_j^{-1}\lambda_j(x)$, avec $\lambda_j(x) \in \Lambda[x]$ et $\gamma_j \in \Lambda$ (d'après la condition de Ore dans Λ) et aussi $\gamma_j^{-1} = \gamma^{-1}a_j$, avec $a_j \in \Lambda$ et $\gamma \in \Lambda$, pour tout $j = 1,\dots,n$. On obtient alors $\sum_{j=1}^{n} k_j(x)i_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma^{-1}a_j\lambda_j(x)i_j(x) = \gamma^{-1}p(x)$, où $p(x) \in I$, ce qui donne $K[x]I \subseteq KI$. Il existe également $\sigma' \in K[x]$ tel que $K[x]I = KI = K[x]\sigma'$ et on peut écrire $\sigma' = ki$, avec $k \in K$ et $i \in I$. On a $g^{-1}fI \subseteq I$ aussi il existe $i' \in I$ tel que $fi = g\ell i + ri = gi'$. On obtient $ri = g(i' - \ell i) = g\lambda\sigma' = g\lambda ki$ avec $\lambda \in K[x]$ (puisque $i' - \ell i \in K[x]I$). En conséquence on a degré de $r \geqslant$ degré de g, ce qui est impossible si r est non nul. Donc $r = 0$ et ainsi $f = g\ell$ ce qui donne $g^{-1}f \in K[x]$. Posons $g^{-1}f = k_nx^n + \cdots + k_o$, avec $k_i \in K$ pour tout $i = 0,\dots,n$, et soit k_p le premier coefficient n'appartenant pas à Λ (donc $k_o,\dots,k_{p-1} \in \Lambda$). Comme on a $(k_nx^n + \cdots + k_o)I \subseteq I$, on peut écrire $(k_nx^{n-p} + \cdots + k_p)x^p\, I \subseteq I$ c'est-à-dire $f'x^pI \subseteq I$ en posant $f' = k_nx^{n-p} + \cdots + k_p$; on obtient $(\Lambda f'x^p)^hI \subseteq I$, pour tout h. Si on désigne par I_q l'idéal à gauche de Λ formé par les coefficients de x^q dans les polynômes appartenant à I, alors il existe un entier q tel que $I_q \neq 0$ puisque I est non nul ; on prend le plus petit $q \geqslant 0$ pour lequel $I_q \neq 0$. Alors si on considère les coefficients de x^{ph+q} au premier membre de la relation $(\Lambda f'x^p)^hI \subseteq I$, il vient $(\Lambda k_p)^hI_q \subseteq \Lambda$. Ainsi le sous-anneau de K engendré par Λ et par k_p est un ordre de K équivalent à Λ. Comme Λ est un ordre maximal de K on obtient $k_p \in \Lambda$: contradiction. Donc tous les coefficients de $g^{-1}f$ appartiennent à Λ et ainsi $x' = g^{-1}f \in \Lambda[x]$. Ceci démontre que $\Lambda[x]$ est un ordre maximal de Q.

Si Λ n'est pas un ordre régulier de K, considérons I un idéal à gauche de Λ ne contenant aucun idéal bilatère non nul (I existe d'après la proposition 4.1). Si

$\Lambda[x]I$ contenait un idéal bilatère non nul A de $\Lambda[x]$ alors, si A contient seulement des polynômes (autres que 0) de degré supérieur ou égal à q, les coefficients de x^q dans les polynômes de A forment un idéal bilatère non nul de Λ contenu dans I ce qui est impossible. Donc $\Lambda[x]I$ est un idéal à gauche de Λ qui ne contient aucun idéal bilatère non nul. Ainsi $\Lambda[x]$ n'est pas un ordre régulier de Q.

Enfin si P est un idéal bilatère non nul maximal (comme idéal bilatère) de Λ, alors $\Lambda[x]P$, qui est l'ensemble des polynômes à coefficients dans P, est un idéal bilatère non nul de $\Lambda[x]$. De plus $\Lambda[x]P$ est premier : si on a $p(x)\Lambda[x]q(x) \subseteq \Lambda[x]P$ avec $p(x),q(x) \notin \Lambda[x]P$, posons $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ et $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$, et considérons a_ℓ (resp. $b_{\ell'}$) le premier coefficient de $p(x)$ (resp. de $q(x)$) qui n'appartient pas à P (on a donc $a_0,\ldots,a_{\ell-1},b_0,\ldots,b_{\ell'-1} \in P$) ; on peut écrire $(a_n x^{n-\ell} + \cdots + a_\ell)\Lambda(b_n x^{n-\ell'} + \cdots + b_{\ell'})x^{\ell+\ell'} \subseteq \Lambda[x]P$ ce qui donne $a_\ell \Lambda b_{\ell'} \subseteq P$: contradiction puisque P est premier et a_ℓ , $b_{\ell'} \notin P$. Donc $\Lambda[x]P$ est un idéal premier. Mais $\Lambda[x]P$ n'est pas un idéal bilatère maximal de $\Lambda[x]$ car il est strictement contenu dans l'idéal bilatère propre $\Lambda[x]P + \Lambda[x]x$ de $\Lambda[x]$. ∎

Dans ce qui suit nous allons donner un exemple d'anneau noethérien sans diviseurs de zéro qui est un ordre maximal non régulier.

LEMME 8.2. - *Si* K' *est un corps de centre* K *et si* x *est une indéterminée commutant avec tout élément de* K', *alors les idéaux bilatères de* $K'[x]$ *sont engendrés par les éléments de* $K[x]$.

DEMONSTRATION. - Voir par exemple [65] page 46. ∎

LEMME 8.3. - *Si* K' *est un corps de centre* K *et si* x *est une indéterminée commutant avec tout élément de* K', *alors pour que* $K'[X]$ *soit un ordre maximal régulier de son corps de fractions il faut que chaque élément de* K' *soit algébrique sur* K.

DEMONSTRATION. - $K'[x]$ est un ordre maximal de son corps de fractions d'après la proposition 8.1. D'après la proposition 4.1 c'est un ordre régulier si et seulement si tout idéal d'un côté non nul contient un idéal bilatère non nul. Supposons que $K'[x]$ soit un ordre régulier et considérons le polynôme $x - k$ avec $k \in K'$. Alors, d'après le lemme 8.2, il existe un polynôme $\alpha_0 + \cdots + \alpha_p x^p \in K[x]$ et un polynôme $k'_0 + \cdots + k'_{p-1}x^{p-1} \in K'[x]$ tels que $\alpha_0 + \cdots + \alpha_p x^p = (x-k)(k'_0 + \cdots + k'_{p-1}x^{p-1})$, et les coefficients k'_i appartiennent au corps commutatif $K[k]$. On a donc $\alpha_0 + \cdots + \alpha_p k^p = 0$, c'est-à-dire k est algébrique sur K. ∎

REMARQUE. - Hilbert [62] a considéré un corps K'_0 qui contient deux éléments transcendants sur son centre K_0.

Il vient :

PROPOSITION 8.4. - *Soit* K'_0 *le corps construit par Hilbert. Considérons* $x_1,\ldots,x_n$ *des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de* K'_0. *Alors* $K'_0[x_1,\ldots,x_n]$ *est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro, ordre maximal non régulier de son corps de fractions.*

DEMONSTRATION. - Immédiate d'après la remarque précédente, le lemme 8.3 et la proposition 8.1. ∎

Si K' désigne un corps de dimension infinie sur son centre K, il est facile de vérifier que K' est un ordre maximal régulier de lui-même (et n'est pas de type fini sur son centre). Nous allons donner des exemples moins triviaux d'anneaux noethériens sans diviseurs de zéro ordres maximaux réguliers de leur corps de fractions.

Köthe [66] a construit des corps K' de dimension infinie sur leur centre K qui possèdent la propriété suivante : chaque ensemble fini d'éléments de K' appartient à un sous-corps de K' dont le centre est K, celui de K', et ce sous-corps est de dimension finie sur K. Nous appellerons de tels corps des *corps de Köthe.*

LEMME 8.5. - *Soit* K' *un corps de centre* K *de dimension finie sur* K. *Considérons* $x_1,\ldots,x_n$ *des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de* K'. *Alors tout idéal d'un côté non nul de* $K'[x_1,\ldots,x_n]$ *contient un élément non nul de* $K[x_1,\ldots,x_n]$, *et* $K'[x_1,\ldots,x_n]$ *est un ordre maximal régulier de son corps de fractions.*

DEMONSTRATION. - Nous avons considéré dans la proposition 7.6 un anneau premier noethérien Λ qui est un R-module de type fini sur son centre R, et Λ était de plus un ordre maximal de son anneau de fractions Σ ; si $\bar{R}$ désigne le corps de fractions de R on avait établi que $\bar{R}\Lambda = \Sigma$. On peut utiliser cela ici en prenant $\Lambda = K'[x_1,\dots,x_n]$ et $R = K[x_1,\dots,x_n]$ (en particulier d'après la proposition 8.1). Soit alors I un idéal à gauche non nul de Λ. On a $\bar{R}I = \bar{R}\Lambda I = \Sigma I = \Sigma$ et il vient $1 = \sum_{j=1}^{p} k_j i_j$, avec $k_j \in \bar{R}$ et $i_j \in I$ pour tout $j = 1,\dots,p$. Soit c un élément non nul de R tel que $ck_j \in R$ pour tout $j = 1,\dots,p$. On obtient $c = \sum_{j=1}^{p} (ck_j)i_j$ ce qui donne $c \in I \cap R$. D'autre part le fait que Λ est régulier s'en déduit immédiatement, ou se déduit de la proposition 7.6. ∎

PROPOSITION 8.6. - *Soit* K' *un corps de Köthe de centre* K. *Considérons* $x_1,\dots,x_n$ *des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de* K'. *Alors* $K'[x_1,\dots,x_n]$ *est un ordre maximal régulier, qui n'est pas de type fini sur son centre* $K[x_1,\dots,x_n]$, *et tous ses éléments sont entiers sur son centre.*

DEMONSTRATION. - Il est clair que $K[x_1,\dots,x_n]$ est le centre de $K'[x_1,\dots,x_n]$ et que $K'[x_1,\dots,x_n]$ n'est pas de type fini sur $K[x_1,\dots,x_n]$. De plus $K'[x_1,\dots,x_n]$ est un ordre maximal d'après la proposition 8.1. Si u est un élément non nul de $K'[x_1,\dots,x_n]$ alors l'ensemble de ses coefficients appartient à un sous-corps L de K' dont le centre est K et qui est de dimension finie sur K. Ainsi u appartient à $L_u = L[x_1,\dots,x_n]$ qui est de type fini sur son centre $K[x_1,\dots,x_n]$. D'après le lemme 8.5 tout idéal d'un côté non nul de L_u contient un élément non nul de $K[x_1,\dots,x_n]$ et L_u est un ordre maximal régulier de son corps de fractions. On déduit de cela : tout d'abord que u est un élément entier sur $K[x_1,\dots,x_n]$ (il suffit par exemple d'appliquer les propositions 8.1 et 7.6), et ensuite que si I est un idéal à gauche non nul de $K'[x_1,\dots,x_n]$ alors il contient un élément non nul u et, d'après ce qui précède, $I \cap L_u$ est un idéal à gauche non nul de L_u qui contient un élément non nul de $K[x_1,\dots,x_n]$ ce qui implique que I contient un idéal bilatère non nul de $K'[x_1,\dots,x_n]$. En conséquence $K'[x_1,\dots,x_n]$ est un ordre régulier et tous ses éléments sont entiers sur $K[x_1,\dots,x_n]$. ∎

§ 9. NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les définitions et résultats principaux des paragraphes 2, 3 et 4 sont dûs à ASANO [3], sauf la proposition 2.3 due à ROBSON [100] et la proposition 3.5 due à CHAMARIE [25]. Les exemples et résultats du paragraphe 8 ainsi que la proposition 7.6 sont dûs à MAURY [83]. La notion de R-ordre maximal classique dans une algèbre centrale simple est étudiée par DEURING [41] lorsque R est un anneau de Dedekind, puis lorsque R est un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos par AUSLANDER et GOLDMAN [8]. On trouvera dans le livre de REINER [95] de nombreuses propriétés des R-ordres maximaux classiques et une bibliographie. La notion de R-ordre maximal au sens de Fossum est due à FOSSUM [50]. Le théorème 7.5 est extrait de CHAMARIE [25].

CHAPITRE II.

L'EQUIVALENCE D'ARTIN.

§ 1. LE GROUPE D'ARTIN.

Soit T un ensemble muni d'une loi de composition interne $(a,b) \longmapsto ab$ et d'une relation d'ordre $\leqslant$, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. T est un demi-groupe avec élément unité e.

2. T est un treillis ($a \cup b = \sup(a,b)$ et $a \cap b = \inf(a,b)$ existent).

3. Quels que soient $a,b,c \in T$ on a :

$$a \leqslant b \quad \text{implique} \quad ac \leqslant bc \quad \text{et} \quad ca \leqslant cb,$$
$$c(a \cup b) = ca \cup cb \quad \text{et} \quad (a \cup b)c = ac \cup bc.$$

4. Si $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille non vide majorée d'éléments de T alors, pour tout élément c de T, les bornes supérieures $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} ca_\alpha$ et $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha c$ existent dans T et vérifient $(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha)c = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha c$ et $c(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} ca_\alpha$.

5. Il existe une application $a \longmapsto a^{-1}$ de T dans T telle que l'on a :

   a) Pour tout $a \in T$, $aa^{-1}a \leqslant a$;

   b) Pour tout $a \in T$ et pour tout $x \in T$, $axa \leqslant a$ implique $x \leqslant a^{-1}$.

EXEMPLE. - Si $\mathcal{O}$ est un ordre d'un anneau S alors l'ensemble T_0 des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères muni du produit de deux $\mathcal{O}$-idéaux et de la relation d'inclusion vérifie les propriétés 1 à 5 ci-dessus (cf. I.2).

DEFINITIONS. - *Un* élément a *de* T *est dit* entier *si* $a^2 \leqslant a$. *Un élément entier* a *de* T *est dit* entier maximal *s'il est maximal parmi les éléments entiers de* T *(c'est-à-*

dire $c^2 \leqslant c$ *et* $a \leqslant c$ *impliquent* $a = c$*)*.

Par exemple tout élément a de T vérifiant $a \leqslant e$ est un élément entier. Quel que soit $a \in T$, les éléments aa^{-1} et $a^{-1}a$ sont des éléments entiers de T (d'après les propriétés 5.a) et 3. de T).

L'élément e est entier. Si e est un entier maximal alors il est le seul entier maximal et c'est le plus grand élément de l'ensemble T' des éléments entiers de T : en effet, si b est un élément entier et si on considère $c = b \cup e$, il vient $c^2 = (b \cup e)(b \cup e) = [b(b \cup e)] \cup (b \cup e) = b^2 \cup b \cup b \cup e = b \cup e = c$, et comme on a $e \leqslant c$ on obtient $e = c$, d'où $b \leqslant e$.

LEMME 1.1. - *Si* e *est un entier maximal de* T, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $ax \leqslant e$.

(b) $axa \leqslant a$.

(c) $xa \leqslant e$.

(d) $x \leqslant a^{-1}$.

DEMONSTRATION. - Il est clair qu'on a *(a)* ⇒ *(b)*, *(c)* ⇒ *(b)* et *(b)* ⟺ *(d)*. De $axa \leqslant a$ on déduit $axax \leqslant ax$ et $xaxa \leqslant xa$ ce qui implique $ax \leqslant e$ et $xa \leqslant e$ puisque e est le plus grand élément de l'ensemble des éléments entiers de T. Ainsi *(b)* ⇒ *(a)* et *(b)* ⇒ *(c)*. ■

PROPOSITION 1.2. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) e *est un entier maximal.*

(b) *Si* a *est entier alors* $a \leqslant e$.

(c) *S'il existe* $c \in T$ *tel que* $a^n \leqslant c$, *pour tout* $n = 1,2,\dots$, *alors* $a \leqslant e$.

(d) *Si* $ax \leqslant a$ *alors* $x \leqslant e$.

(e) *Si* $xa \leqslant a$ *alors* $x \leqslant e$.

DEMONSTRATION. - Il est clair que *(a)* ⟺ *(b)*, *(d)* ⇒ *(b)* et *(e)* ⇒ *(b)*.
(b) ⟺ *(c)* : en posant $b = \bigcup_{n=1}^{\infty} a^n$ on obtient $b^2 = \bigcup_{n=2}^{\infty} a^n \leqslant b$ ce qui donne $a \leqslant b \leqslant e$.

Réciproquement, si $a^2 \leqslant a$ il vient $a^n \leqslant a$ pour tout $n = 1,2,\ldots$, ce qui implique $a \leqslant e$.

(c) $\Rightarrow$ *(d)* : si $ax \leqslant a$ alors $ax^n \leqslant a$ pour tout $n = 1,2,\ldots$, d'où $a^{-1}\,ax^n\,a^{-1}a \leqslant a^{-1}aa^{-1}a \leqslant a^{-1}a$ ce qui implique $x^n \leqslant (a^{-1}a)^{-1}$ et on obtient $x \leqslant e$ par l'hypothèse *(c)*.

(c) $\Rightarrow$ *(e)* : De même que *(c)* $\Rightarrow$ *(d)*. ∎

Dans la suite nous supposerons que T vérifie de plus la propriété suivante :

6. e est un entier maximal de T.

Ainsi d'après ce qui précède tout élément entier de T est $\leqslant e$, et en particulier, pour tout $a \in T$, on a $aa^{-1} \leqslant e$ et $a^{-1}a \leqslant e$.

Notons que si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal d'un anneau S alors la propriété 6 est vérifiée par l'ensemble T_0 des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères.

Rappelons que, pour $a,b \in T$, si l'ensemble des $x \in T$ tels que $ax \leqslant b$ (resp. $xa \leqslant b$) posssède un plus grand élément, on le note $b.\!\cdot a$ (resp. $b\cdot\!.a$). Si $b.\!\cdot a$ et $b\cdot\!.a$ existent, quels que soient a et b de T, alors on dit que T est un *treillis résidué* (voir [11] pour plus de détails).

PROPOSITION 1.3. - T *est un treillis résidué.*

DEMONSTRATION. - Soient $a,b \in T$ et posons $X = \{x \in T \mid ax \leqslant b\}$. On a $X \neq \phi$ (car $aa^{-1} \leqslant e$ implique $aa^{-1}b \leqslant b$, c'est-à-dire $a^{-1}b \in X$). De $ax \leqslant b$ on déduit $b^{-1}ax \leqslant b^{-1}b \leqslant e$ ce qui implique $b^{-1}axb^{-1}a \leqslant b^{-1}a$ et ainsi $x \leqslant (b^{-1}a)^{-1}$. Donc X est un ensemble majoré et ainsi $c = \sup X$ existe. Comme on a $ac = \sup(aX) \leqslant b$, on obtient $c \in X$. En conséquence c est le plus grand élément de X. Donc $b.\!\cdot a$ existe. De même $b\cdot\!.a$ existe. ∎

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans T :

1) $e = a.\!\cdot a = a\cdot\!.a$.

2) $a^{-1} = e.\!\cdot a = e\cdot\!.a$. Si $a = e$ alors $e^{-1} = e$.

3) $(c \,.^{\bullet} a) \,{}^{\bullet}. b = (c \,{}^{\bullet}. b) \,.^{\bullet} a$.   Si $c = e$ alors $a^{-1} \,{}^{\bullet}. b = b^{-1} \,.^{\bullet} a$.

4) Si $a \leqslant b$ alors $c \,.^{\bullet} a \geqslant c \,.^{\bullet} b$ et $c \,{}^{\bullet}. a \geqslant c \,{}^{\bullet}. b$. Si $c = e$ alors $a \leqslant b$ implique $a^{-1} \geqslant b^{-1}$.

5) Si $b \leqslant c$ alors $b \,.^{\bullet} a \leqslant c \,.^{\bullet} a$ et $b \,{}^{\bullet}. a \leqslant c \,{}^{\bullet}. a$.

6) $a \,.^{\bullet} bc = (a \,.^{\bullet} b) \,.^{\bullet} c$ et $a \,{}^{\bullet}. cb = (a \,{}^{\bullet}. b) \,{}^{\bullet}. c$.

7) $a \,.^{\bullet} (b \cup c) = (a \,.^{\bullet} b) \cap (a \,.^{\bullet} c)$ et $a \,{}^{\bullet}. (b \cup c) = (a \,{}^{\bullet}. b) \cap (a \,{}^{\bullet}. c)$. Si $a = e$ alors $(b \cup c)^{-1} = b^{-1} \cap c^{-1}$.

8) $e \,.^{\bullet} [e \,{}^{\bullet}. (e \,.^{\bullet} a)] = e \,.^{\bullet} a$ et $e \,{}^{\bullet}. [e \,.^{\bullet} (e \,{}^{\bullet}. a)] = e \,{}^{\bullet}. a$.

9) $(a \cap b) \,.^{\bullet} c = (a \,.^{\bullet} c) \cap (b \,.^{\bullet} c)$ et $(a \cap b) \,{}^{\bullet}. c = (a \,{}^{\bullet}. c) \cap (b \,{}^{\bullet}. c)$.

10) $ab \,.^{\bullet} c \geqslant (a \,.^{\bullet} c)b$ et $ab \,{}^{\bullet}. c \geqslant a(b \,{}^{\bullet}. c)$.

DEFINITION. - *On pose* $a^{*} = (a^{-1})^{-1} = e \,{}^{\bullet}. (e \,.^{\bullet} a) = e \,.^{\bullet} (e \,{}^{\bullet}. a)$.

On obtient alors les propriétés suivantes :

I) $a \leqslant a^{*}$.

II) $a^{**} = a^{*}$.

III) $a \leqslant b$ implique $a^{*} \leqslant b^{*}$.

IV) $a^{*} b^{*} \leqslant (ab)^{*}$.

V) $(ab)^{*} = (a^{*}b)^{*} = (ab^{*})^{*} = (a^{*}b^{*})^{*}$.

VI) $(a \cup b)^{*} = (a^{*} \cup b)^{*} = (a \cup b^{*})^{*} = (a^{*} \cup b^{*})^{*}$.

VII) $(a^{*} \cap b^{*})^{*} = a^{*} \cap b^{*}$.

VIII) Si $(b_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille majorée d'éléments de T alors on a

$\left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right]^{*} = \left[a\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha^{*}\right)\right]^{*} = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha^{*}\right]^{*} = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (ab_\alpha^{*})^{*}\right]^{*} = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (ab_\alpha)^{*}\right]^{*}$: en effet il suffit de montrer qu'on a $\left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right]^{-1} = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha^{*}\right]^{-1} = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (ab_\alpha)^{*}\right]^{-1}$. Or de $ab_\alpha \leqslant ab_\alpha^{*} \leqslant (ab_\alpha^{*})^{*} = (ab_\alpha)^{*}$ on déduit $\left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (ab_\alpha)^{*}\right]^{-1} \leqslant \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha^{*}\right]^{-1} \leqslant \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right]^{-1}$; si on pose $x = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right]^{-1} = e \,.^{\bullet} \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right]$ il vient $ab_\alpha x \leqslant \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ab_\alpha\right] x \leqslant e$ ce qui donne

$ab_\alpha \leqslant e^{\bullet}.x$. On en déduit $(ab_\alpha)^* \leqslant (e^{\bullet}.x)^*$ et comme $(e^{\bullet}.x)^* = e^{\bullet}.[e.^{\bullet}(e^{\bullet}.x)] = e^{\bullet}.x$, il vient $(ab_\alpha)^* x \leqslant e$ ce qui implique qu'on a $\left[\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(ab_\alpha)^*\right]x \leqslant e$, c'est-à-dire $x = \left[\bigcup_{\alpha\in\Lambda} ab_\alpha\right]^{-1} \leqslant \left[\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(ab_\alpha)^*\right]^{-1}$.

DEFINITION. - *Deux* éléments a *et* b *de* T *sont dits* quasi-égaux *si* $a^* = b^*$ *(ou, ce qui est équivalent d'après 8), si* $a^{-1} = b^{-1}$*).* *Notation :* $a \sim b$.

La relation de "quasi-égalité" est une relation d'équivalence dans T dite *équivalence d'Artin.* Elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) $a \sim a^*$ [résulte de la propriété 8)].

(2) $aa^{-1} \sim e$ et $a^{-1}a \sim e$ [résulte des propriétés 6), 1) et 2)].

(3) a^* est le plus grand élément de la classe de a, et en particulier $a \leqslant e$ et $a \sim b$ impliquent $b \leqslant e$ [en effet $a \leqslant a^*$ et $a \sim b$ impliquent $b \leqslant b^* = a^*$: d'où le résultat].

(4) Si $a \leqslant c \leqslant b$ et $a \sim b$ alors $a \sim c$ et $c \sim b$ [d'après la propriété III) il vient $a^* \leqslant c^* \leqslant b^*$, et comme $b^* = a^*$ on obtient $a^* = c^* = b^*$].

(5) Si $a \sim b$ et $c \sim d$ alors $ac \sim bd$, $a \cup c \sim b \cup d$, et $a \cap c \sim b \cap d$ [$ac \sim bd$ résulte de la propriété V), et $a \cup c \sim b \cup d$ résulte de la propriété VI). Des relation $bb^{-1} \leqslant e$, $aa^{-1} \leqslant e$ et $a^{-1} = b^{-1}$ on déduit
$bb^{-1}(a \cap c) \leqslant bb^{-1}a \cap bb^{-1}c \leqslant ba^{-1}a \cap ec \leqslant be \cap ec = b \cap c$, et
$aa^{-1}bb^{-1}(a \cap c) \leqslant aa^{-1}(b \cap c) \leqslant b \cap c$; en utilisant les propriétés III), V) et (2) on obtient alors $(a \cap c)^* \leqslant (b \cap c)^*$. De même $(b \cap c)^* \leqslant (a \cap c)^*$. Ainsi $a \cap c \sim b \cap c$ et de manière analogue $b \cap c \sim b \cap d$].

(6) Si $a \leqslant b$ alors il existe deux éléments entiers c et d tels que $a \sim cb \sim bd$ [si on pose $c = ab^{-1}$, il vient $c \leqslant bb^{-1} \leqslant e$ ce qui montre que c est entier, et comme $cb = abb^{-1}$ on obtient $cb \sim a$ par les propriétés (2) et (5)].

(7) Si $a \sim b$ alors il existe deux éléments entiers u et v tels que $au = vb$ et $u \sim v \sim e$ [de $a^{-1} = b^{-1}$ on tire $ab^{-1}b = aa^{-1}b$ avec $b^{-1}b \sim e$ et $aa^{-1} \sim e$ par la propriété (2)].

Considérons G l'ensemble quotient de T par l'équivalence d'Artin, et désignons par A la classe d'un élément a, par E celle de e, etc...

D'après la propriété (5) on peut définir AB comme la classe de l'élément ab ce qui munit G d'une loi de composition interne $(A,B) \longmapsto AB$ qui est associative et qui possède E comme élément neutre. D'après la propriété (2), si A^{-1} désigne la classe de a^{-1}, on obtient $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Ainsi G est un groupe.

D'après la propriété (5) on peut définir $A \cup B$ comme la classe de l'élément $a \cup b$, et $A \cap B$ comme celle de $a \cap b$. Il est clair que les lois de composition interne $(A,B) \longmapsto A \cup B$ et $(A,B) \longmapsto A \cap B$ sont associatives, commutatives, idempotentes et qu'elles sont liées par l'axiome d'absorption. Ainsi G est un treillis (dans lequel la relation d'ordre correspondante peut être définie par : $A \leqslant B$ si et seulement si $a^* \leqslant b^*$).

De T on déduit les propriétés suivantes pour G :

. $C(A \cup B) = CA \cup CB$ et $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

. Si $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille non vide majorée d'éléments de G, alors, pour tout élément C de G, les bornes supérieures $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} CA_\alpha$ et $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha C$ existent [ce sont respectivement les classes de $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} ca_\alpha$ et de $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha c$] et vérifient [d'après la propriété VIII)] $C(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} CA_\alpha$ et $(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)C = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha C$.

Donc G est un groupe conditionnellement complet ("$c\ell$-group" en anglais). Nous dirons que G est le *groupe d'Artin* de T.

PROPOSITION 1.4. - *Le groupe d'Artin* G *de* T *est un groupe commutatif et est un treillis distributif.*

DEMONSTRATION. - Cela résulte du théorème de Iwasawa, page 317 de [11], et du théorème 4 page 294 de [11]. ∎

COROLLAIRE 1.5. - *Quels que soient* a *et* b *éléments de* T *on a* $ab \sim ba$.

Dans ce qui suit G' désignera l'ensemble des éléments A de G tels que $A \leqslant E$, et T' désignera l'ensemble des éléments entiers de T.

DEFINITIONS. - *Soit* P *un élément de* G'. *On dira que* P *est un* élément premier *de* G' *si* $P \neq E$ *et si, pour* $A,B \in G'$, *la relation* $AB \leqslant P$ *implique* $A \leqslant P$ *ou* $B \leqslant P$. *On dira que* P *est un* élément maximal *de* G' *si* $P \neq E$ *et si, pour* $A \in G'$, *la relation* $P \leqslant A$ *implique* $P = A$ *ou* $A = E$. *On dira que* P *est un* élément irréductible *de* G' *si* $P \neq E$ *et si, pour* $A,B \in G'$, *la relation* $P = AB$ *implique* $P = A$ *ou* $P = B$. *Définitions analogues dans* T'.

REMARQUE. - Si P est un élément premier de G' et si p est le plus grand élément de cette classe P alors p est un élément premier de T' : en effet, pour $a,b \in T'$, la relation $ab \leqslant p$ donne, d'après les propriétés III) et (3), $(ab)^* \leqslant p^* = p$ ce qui implique $AB \leqslant P$, d'où $A \leqslant P$ ou $B \leqslant P$, c'est-à-dire $a \leqslant a^* \leqslant p^* = p$ ou $b \leqslant b^* \leqslant p^* = p$.

PROPOSITION 1.6. - *Si* P *est un élément de* G' *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) P *est un élément maximal de* G'.

(b) P *est un élément premier de* G'.

(c) P *est un élément irréductible de* G'.

DEMONSTRATION. - *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* : Si $A,B \in G'$ vérifient $AB \leqslant P$ et $A \not\leqslant P$, il vient $P < A \cup P \leqslant E$ et par maximalité de P on obtient $A \cup P = E$. D'où $(A \cup P)B = AB \cup PB \leqslant P \cup PE = P$, c'est-à-dire $EB \leqslant P$. Donc $B \leqslant P$.

(b) $\Rightarrow$ *(c)* : Si $A,B \in G'$ vérifient $P = AB$, on en déduit $P \leqslant AE = A$ et $P \leqslant EB = B$; en outre $P = AB$ donne $AB \leqslant P$ ce qui implique $A \leqslant P$ ou $B \leqslant P$ par l'hypothèse. Ainsi $P = A$ ou $P = B$.

(c) $\Rightarrow$ *(a)* : Si $A \in G'$ vérifie $P \leqslant A < E$ alors, en considérant p et a les plus grands éléments respectivement des classes P et A (c'est-à-dire $p = p^*$ et $a = a^*$), on obtient $p \leqslant a$. D'après la propriété (6), si on pose $c = pa^{-1}$ alors c est un élément entier de T et $p \sim ca$. Donc $P = CA$ ce qui implique, par l'hypothèse, $P = C$ ou

$P = A$. Si l'on avait $P = C$, c'est-à-dire $P = PA^{-1}$, on obtiendrait $E = P^{-1}P = (PA^{-1})^{-1}P = AP^{-1}P = A$ ce qui est impossible. Donc on a $P = A$. ■

PROPOSITION 1.7. - *Si* G' *vérifie la condition noethérienne alors tout élément* A *de* G', *distinct de* E, *se met d'une façon et d'une seule sous la forme* $A = P_1^{n_1}\ldots P_r^{n_r}$, *où* P_i *est un élément premier de* G' *et* $n_i \in \mathbb{N}$ *pour tout* $i = 1,\ldots,r$.

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments de G' distincts de E qui ne s'écrivent pas comme produits finis d'éléments irréductibles de G'. Montrons que $\mathcal{G}$ est vide. Si $\mathcal{G}$ n'est pas vide il possède un élément maximal A qui ne s'écrit pas comme produit fini d'éléments irréductibles de G'. Donc A n'est pas irréductible et ainsi il existe $B,C \in G'$ tels que $A = BC$ avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Il vient $A < B < E$ et $A < C < E$. En conséquence B et C sont des éléments de G', distincts de E, qui n'appartiennent pas à $\mathcal{G}$ (d'après la maximalité de A). Donc B et C s'écrivent comme produits finis d'éléments irréductibles de G' et il s'ensuit que $A = BC$ s'écrit aussi comme produit fini d'éléments irréductibles de G' : contradiction. Donc $\mathcal{G}$ est vide et tout élément A de G' distinct de E se met sous la forme $A = P_1^{n_1}\ldots P_r^{n_r}$ avec P_i élément premier de G' et $n_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1,\ldots,r$. Une telle représentation est unique : si on a $A = P_1^{n_1}\ldots P_r^{n_r} = Q_1^{m_1}\ldots Q_s^{m_s}$, avec $P_1,\ldots,P_r$ éléments distincts, et $Q_1,\ldots,Q_s$ éléments distincts, alors si $Q_1 = P_1$ n'a pas le même exposant au premier membre et au second membre (si Q_1 ne figure pas au premier membre on convient de le faire figurer avec un exposant nul), par exemple si $n_1 \leqslant m_1$, il vient $P_2^{n_2}\ldots P_r^{n_r} = Q_1^{\ell}Q_2^{m_2}\ldots Q_s^{m_s} \leqslant Q_1$ et, comme Q_1 est premier, il existe $i \in \{2,\ldots,r\}$ tel que $P_i \leqslant Q_1 = P_1$ ce qui, d'après la proposition 1.6, implique $P_i = P_1$: contradiction car on a supposé au départ $P_i \neq P_1$. ■

COROLLAIRE 1.8. - *Si* G' *vérifie la condition noethérienne alors tout élément* A *de* G *distinct de* E *se met sous la forme* $A = P_1^{\alpha_1}\ldots P_r^{\alpha_r}$, *où* P_i *est un élément premier de* G' *et* $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $i = 1,\ldots,r$.

DEMONSTRATION. - Si $A \in G'$ ou si $A^{-1} \in G'$ alors le résultat se déduit immédiatement de la proposition 1.7. Si $A \notin G'$ et si $A^{-1} \notin G'$ alors, si on pose $B = A^{-1} \cap E$ et

$C = BA$, on a $B \in G'$, $B \neq E$, $C \in G'$, $C \neq E$ et donc B et C s'écrivent comme produits finis d'éléments premiers de G' ce qui implique que $A = B^{-1}C$ se met sous la forme $P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$ avec P_i élément premier de G' et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i = 1,\ldots,r$. ∎

PROPOSITION 1.9. - *Si* G' *vérifie la condition noethérienne alors, quels que soient* $P_1,\ldots,P_r$ *éléments premiers distincts de* G' *et* $n_1,\ldots,n_r$ *éléments de* $\mathbb{N}$ *on a*
$$\bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}.$$

DEMONSTRATION. - Le résultat est vrai pour $r = 1$. Si $r \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour tout $s < r$. Posons $A = \bigcup_{i=1}^{r} P_i^{n_i}$. On a $A \leqslant E$; si $A \neq E$, d'après la proposition 1.7, on peut écrire $A = \prod_{j=1}^{t} Q_j^{m_j}$, avec Q_j élément premier de G' et $m_j \in \mathbb{N}$, et ainsi, pour tout $i = 1,\ldots,r$ et pour tout $j = 1,\ldots,t$, on a $P_i^{n_i} \leqslant A \leqslant Q_j$ ce qui implique $P_i \leqslant Q_j$, donc $P_i = Q_j$ (par la proposition 1.6) : ceci est impossible car les éléments $P_1,\ldots,P_r$ sont distincts. Donc $A = E$ et comme par hypothèse de récurrence on a $\bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i} \leqslant \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} P_k^{n_k} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} P_k^{n_k}$ pour tout $j = 1,\ldots,r$ il vient
$$\bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i} = \left[\bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i}\right]\left[\bigcup_{j=1}^{r} P_j^{n_j}\right] = \bigcup_{j=1}^{r}\left[\left(\bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i}\right)P_j^{n_j}\right] \leqslant \bigcup_{j=1}^{r}\left[\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} P_k^{n_k}\right)P_j^{n_j}\right] = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i} \leqslant \bigcap_{i=1}^{r} P_i^{n_i}.$$
D'où le résultat. ∎

PROPOSITION 1.10. - *Si l'ensemble* T' *des éléments entiers de* T *vérifie les conditions suivantes :*

(i) T' *vérifie la condition noethérienne.*

(ii) Tout élément premier de T' *est maximal.*

(iii) Pour tout élément premier p *de* T' *il existe* $a \in T$ *tel que* $a = a^*$ *et* $a \leqslant p$.

alors, quels que soient $a,b \in T$, *la relation* $a \sim b$ *est équivalente à la relation* $a = b$. *Ainsi* $T = G$ *et* T *est un groupe commutatif et un treillis distributif dans lequel tout élément distinct de* e *est représentable sous la forme* $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, *où les* p_i *sont des éléments premiers de* T' *et* $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

DEMONSTRATION. - Un élément premier p de T' n'est pas quasi-égal à e : en effet si l'on prend $a = a^* \leqslant p$ il vient $a \sim p_1 \ldots p_n$ où les p_i sont des éléments premiers de T' non nécessairement distincts et non quasi-égaux à e (d'après la proposition 1.7 et la remarque qui précède la proposition 1.6) ; on en déduit $p_1 \ldots p_n \leqslant a^* \leqslant p$ et donc il existe un p_i tel que $p_i \leqslant p$ ce qui entraîne $p_i = p$: en conséquence p n'est pas quasi-égal à e. Si $u \in T'$ et $u \sim e$ alors $u = e$: en effet si $u \neq e$ il existe un élément maximal p dans T' tel que $u \leqslant p < e$; comme p est un élément premier de T' [si $bc \leqslant p$ et $b \nleqslant p$ on a $b \cup p = e$ ce qui implique $c = (b \cup p)c = bc \cup pc \leqslant p$] il n'est pas quasi-égal à e : contradiction car de $u \leqslant p < e$ et $u \sim e$ on déduit $p \sim e$ par la propriété (4). Ceci étant si $a,b \in T$ vérifient $a \sim b$ alors, d'après la propriété (7), il existe deux éléments entiers u et v tels que $au = vb$ et $u \sim v \sim e$. D'après ce qui précède il vient $u = v = e$, d'où $a = b$. Ainsi $T = G$. ■

REMARQUE. - Supposons que l'ensemble T vérifie seulement les propriétés 1, 2, 3, 4 et 6 du début du paragraphe et considérons une application de T dans lui-même $a \longmapsto \bar{a}$ telle que $a \leqslant \bar{a}$, $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, $a \leqslant b$ implique $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \leqslant \overline{ab}$ (par exemple, lorsque T vérifie aussi la propriété 5, l'application $a \longmapsto a^*$ vérifie ce qui précède ; mais il peut y en avoir d'autres). On obtient alors les propriétés suivantes : $\overline{ab} = \overline{\bar{a}b} = \overline{a\bar{b}} = \overline{\bar{a}\bar{b}}$, $\overline{\bar{a} \cap \bar{b}} = \bar{a} \cap \bar{b}$, $\overline{a \cup b} = \overline{\bar{a} \cup b} = \overline{a \cup \bar{b}} = \overline{\bar{a} \cup \bar{b}}$, et plus généralement si $\bigcup_\alpha a_\alpha$ existe alors $\overline{\bigcup_\alpha a_\alpha} = \overline{\bigcup_\alpha \bar{a}_\alpha}$. La relation $\bar{a} = \bar{b}$ définit une relation d'équivalence entre a et b que nous noterons $a \sim b$. Si on a $a \sim b$ et $c \sim d$, alors on obtient $ac \sim bd$ et $a \cup c \sim b \cup d$ (mais par contre on n'a pas nécessairement ici $a \cap c \sim b \cap d$). Notons aussi que $\bar{a}$ est le plus grand élément de la classe de l'élément a. Désignons par H l'ensemble des classes d'équivalences (par A la classe de a...). On peut munir H d'une structure de treillis : si on ordonne H par la relation $A \leqslant B$ si $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, alors on peut définir la borne supérieure $A \cup B$ comme la classe de $a \cup b$ [si C est la classe de $a \cup b$, de $\bar{a} \leqslant \overline{a \cup b}$ on déduit $A \leqslant C$, et de même $B \leqslant C$; si $A \leqslant D$ et $B \leqslant D$ alors $\bar{a} \leqslant \bar{d}$ et $\bar{b} \leqslant \bar{d}$, d'où $\overline{a \cup b} = \overline{\bar{a} \cup \bar{b}} \leqslant \bar{\bar{d}} = \bar{d}$ et ainsi $C \leqslant D$] et la borne inférieure $A \cap B$ comme la classe de $\bar{a} \cap \bar{b}$ [si C est la classe de $\bar{a} \cap \bar{b}$, de $\overline{\bar{a} \cap \bar{b}} \leqslant \bar{a}$ on déduit $C \leqslant A$, et de même $C \leqslant B$; si $D \leqslant A$ et $D \leqslant B$ alors $\bar{d} \leqslant \bar{a}$ et $\bar{d} \leqslant \bar{b}$, d'où $\bar{d} \leqslant \bar{a} \cap \bar{b} = \overline{\bar{a} \cap \bar{b}}$ et ainsi $D \leqslant C$]. On peut munir H d'une structure de demi-groupe qui possède E, classe de e, comme élément neutre : on définit AB comme la classe de l'élément ab où $a \in A$ et $b \in B$ (et ceci ne dépend pas du choix de a et de b dans A et B respectivement). On a les propriétés : $C(A \cup B) = CA \cup CB$, $(A \cup B)C = AC \cup BC$, et si $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille non vide majorée d'éléments de H alors les bornes supérieures $\underset{\alpha}{\cup} CA_\alpha$ et $\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha C$ existent et vérifient $C(\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha) = \underset{\alpha}{\cup} CA_\alpha$, $(\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha)C = \underset{\alpha}{\cup} A_\alpha C$ pour tout $C \in H$. Avant d'énoncer deux résultats notons que, puisqu'on suppose que e est un entier maximal dans T, alors e est le plus grand élément de l'ensemble des éléments entiers de T [même démonstration que celle faite au début du paragraphe] et on a $\bar{e} = e$ [en effet $\bar{e}\bar{e} \leqslant \overline{ee} = \bar{e}$ implique $\bar{e} \leqslant e$ et comme $e \leqslant \bar{e}$ on obtient l'égalité].

PROPOSITION 1.11. - *Sous les hypothèses de la remarque précédente et si* H *forme un groupe alors* T *vérifie aussi la propriété* 5, *c'est-à-dire il existe une application* $a \longmapsto a^{-1}$ *de* T *dans* T *telle que :*

(i) *Pour tout* $a \in T$, $aa^{-1}a \leqslant a$.

(ii) *Pour tout* $a \in T$ *et pour tout* $x \in T$, $axa \leqslant a$ *implique* $x \leqslant a^{-1}$.

DEMONSTRATION. - Soient $a \in T$ et A sa classe. Comme H est un groupe, A^{-1} existe et l'on peut considérer un élément t de A^{-1}. Posons $a^{-1} = \bar{t}$ le plus grand élément de la classe A^{-1}. De $AA^{-1} = E$ (avec E classe de e) on déduit $aa^{-1} = a\bar{t} \leqslant \overline{a\bar{t}} = \overline{at} = \bar{e} = e$ ce qui donne $aa^{-1}a \leqslant a$. De plus si $axa \leqslant a$ alors $(ax)^2 \leqslant ax$, d'où $ax \leqslant e$, et ainsi il vient $x \leqslant \bar{x} = \overline{ex} = \overline{\bar{e}\bar{x}} = \overline{\overline{ta}\,\bar{x}} = \overline{tax} \leqslant \overline{te} = \bar{t} = a^{-1}$. Donc T vérifie la propriété 5.

■

PROPOSITION 1.12. - *Sous les hypothèses de la remarque précédente et si* T *vérifie également la propriété* 5, *alors on a, pour tout élément* a *de* T, $a \leqslant \bar{a} \leqslant a^* = (a^{-1})^{-1}$, $(\bar{a})^* = a^*$, *et* $\bar{a} \leqslant \bar{b}$ *implique* $a^* \leqslant b^*$. *De plus si* H *forme un groupe on a* $\bar{a} = a^*$ *et* $H = G$.

DEMONSTRATION. - De $\overline{aa^{-1}} \leqslant \overline{\bar{a}a^{-1}} \leqslant \overline{aa^{-1}} \leqslant \bar{e} = e$ on déduit, par le lemme 1.1, qu'on a : $\overline{a^{-1}} \leqslant a^{-1}$ et $\bar{a} \leqslant (\overline{a^{-1}})^{-1}$. Donc $\overline{a^{-1}} = a^{-1}$ et il vient $a \leqslant \bar{a} \leqslant (\overline{a^{-1}})^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a^*$. De plus $(\bar{a})^* \leqslant a^{**} = a^*$ et, comme $a \leqslant \bar{a}$ implique $a^* \leqslant (\bar{a})^*$, on obtient $(\bar{a})^* = a^*$. Si H forme un groupe alors A^{-1} existe dans H et l'on a $AA^{-1} = E$ (avec E classe de e) ;

notons A' la classe contenant l'élément a^{-1}. Si $x \in A^{-1}$ il vient $ax \leqslant \overline{ax} = \bar{e} = e$ ce qui, par le lemme 1.1, implique $x \leqslant a^{-1}$; on a donc $ax \leqslant aa^{-1} \leqslant e$ et, comme $\overline{ax} = \bar{e}$, on obtient $aa^{-1} \in E$. Ainsi $AA' = E$ ce qui entraîne $A' = A^{-1}$. En conséquence si $a \in A$ alors $a^{-1} \in A^{-1}$ et, comme $a^* = (a^{-1})^{-1}$, on obtient $a^* \in A$ ce qui entraîne $a^* \leqslant \bar{a}$ puisque $\bar{a}$ est le plus grand élément de A ; d'où $a^* = \bar{a}$ et ainsi $H = G$. ■

§ 2. APPLICATION A UN ORDRE MAXIMAL.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ désignera un ordre maximal d'un anneau S.

On notera par L_0 le treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche et par T_0 le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères. On désignera par L_0' (resp. par T_0') le sous-treillis de L_0 (resp. de T_0) formé des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche (resp. bilatères) entiers (c'est-à-dire ceux qui sont inclus dans $\mathcal{O}$).

L'ensemble T_0 vérifie les propriétés 1 à 6 du paragraphe 1. D'après la proposition 1.3, on sait donc que T_0 est un treillis résidué, c'est-à-dire que, quels que soient $A,B \in T_0$, les éléments $B.{}^{\bullet}A$ et $B^{\bullet}.A$ existent ; d'après la proposition I.3.6 on obtient alors les précisions $B.{}^{\bullet}A = \{x \in S \mid Ax \subseteq B\}$ et $B^{\bullet}.A = \{x \in S \mid xA \subseteq B\}$. On notera par G_0 le groupe d'Artin de T_0 et G_0' l'ensemble des classes (pour l'équivalence d'Artin) des éléments de T_0'.

La relation d'équivalence d'Artin dans T_0 peut se prolonger en une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans L_0 : pour $A,B \in L_0$ on pose $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A^{-1} = B^{-1}$, (ou, ce qui est équivalent d'après la proposition I.3.7, si $A^* = B^*$ (avec la notation $A^* = (A^{-1})^{-1}$ pour tout $A \in L_0$)).

Cette relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans L_0 a les propriétés suivantes qui résultent presque toutes de la proposition I.3.7 :

(1') $A\mathcal{R}A^*$.

(3') A^* est le plus grand élément de la classe de A, et en particulier $A \subseteq \mathcal{O}$ et $A\mathcal{R}B$ impliquent $B \subseteq \mathcal{O}$.

(4') Si $A \subseteq C \subseteq B$ et $A\mathcal{R}B$, alors $A\mathcal{R}C$ et $C\mathcal{R}B$.

(5') Si $A\mathcal{R}B$ et $C\mathcal{R}D$, alors $(A+C)\mathcal{R}(B+D)$ et $(A^* \cap C^*)\mathcal{R}(B^* \cap D^*)$.

(5") Pour $A,B \in T_0$ et $X,Y \in L_0$, les relations $A \sim B$ (ce qui équivaut à $A\mathscr{R}B$) et $X\mathscr{R}Y$ impliquent $AX\mathscr{R}BY$ [en effet, si $x \in S$, on a, en utilisant les propositions I.2.4 et I.3.1 : $x \in (AX)^{-1} \Leftrightarrow AXx \subseteq \mathcal{O} \Leftrightarrow Xx \subseteq A^{-1} \Leftrightarrow Xx \subseteq B^{-1} \Leftrightarrow XxB \subseteq \mathcal{O} \Leftrightarrow xB \subseteq X^{-1} \Leftrightarrow xB \subseteq Y^{-1} \Leftrightarrow YxB \subseteq \mathcal{O} \Leftrightarrow Yx \subseteq B^{-1} \Leftrightarrow BYx \subseteq \mathcal{O} \Leftrightarrow x \in (BY)^{-1}$].

Considérons $(\bar{L}_0)$ l'ensemble quotient de L_0 par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$, et $(\bar{L}'_0)$ l'ensemble des classes (pour l'équivalence $\mathscr{R}$) des éléments de L'_0. Si $X \in L_0$, on désignera sa classe modulo $\mathscr{R}$ par $\bar{X}$; si $A \in T_0$, on désignera par $\bar{\bar{A}}$ sa classe d'Artin (c'est-à-dire sa classe modulo l'équivalence d'Artin) et par $\bar{A}$ sa classe modulo $\mathscr{R}$.

Si $X,Y \in L_0$ sont respectivement des représentants des classes $\bar{X}$, $\bar{Y}$, alors d'après la propriété (5') on peut définir dans $(\bar{L}_0)$ une union $\bar{\cup}$ et une intersection $\bar{\cap}$ de la manière suivante : $\bar{X} \mathbin{\bar{\cup}} \bar{Y}$ sera la classe modulo $\mathscr{R}$ de l'élément $X + Y$ de L_0, et $\bar{X} \mathbin{\bar{\cap}} \bar{Y}$ sera la classe modulo $\mathscr{R}$ de l'élément $X^* \cap Y^*$ de L_0 ; il est clair que les lois de composition interne $(\bar{X},\bar{Y}) \longmapsto \bar{X} \mathbin{\bar{\cup}} \bar{Y}$ et $(\bar{X},\bar{Y}) \longmapsto \bar{X} \mathbin{\bar{\cap}} \bar{Y}$ sont associatives, commutatives, idempotentes et qu'elles sont liées par l'axiome d'absorption. Ainsi $(\bar{L}_0)$ est un treillis dans lequel la relation d'ordre correspondante peut être définie par : $\bar{X} \leqslant \bar{Y}$ si et seulement si $X^* \subseteq Y^*$ (c'est immédiat à voir en utilisant la proposition I.3.7). De plus il est facile de vérifier que $(\bar{L}'_0)$ est un sous-treillis de $(\bar{L}_0)$.

Si $A \in T_0$ et si $X \in L_0$ sont respectivement des représentants des classes $\bar{\bar{A}} \in G_0$ et $\bar{X} \in (\bar{L}_0)$, alors, d'après la propriété (5"), on peut définir le produit $\bar{\bar{A}}.\bar{X}$ comme la classe modulo $\mathscr{R}$ de l'élément AX de L_0. Il est clair que la loi de composition externe $G_0 \times (\bar{L}_0) \longrightarrow (\bar{L}_0)$, qui à $(\bar{\bar{A}},\bar{X})$ associe le produit $\bar{\bar{A}}.\bar{X}$, vérifie les conditions suivantes :

(C_1) $\bar{\bar{A}}.(\bar{X} \mathbin{\bar{\cup}} \bar{Y}) = (\bar{\bar{A}}.\bar{X}) \mathbin{\bar{\cup}} (\bar{\bar{A}}.\bar{Y})$.

(C_2) $(\bar{\bar{A}} \mathbin{\bar{\bar{\cup}}} \bar{\bar{B}}).\bar{X} = (\bar{\bar{A}}.\bar{X}) \mathbin{\bar{\cup}} (\bar{\bar{A}}.\bar{Y})$, où $\bar{\bar{\cup}}$ désigne ici l'union dans G_0.

(C_3) $(\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{B}}).\bar{X} = \bar{\bar{A}}.(\bar{\bar{B}}.\bar{X})$.

(C_4) $\bar{\bar{\mathcal{O}}}.\bar{X} = \bar{X}$.

(C_5) Quels que soient $\bar{\bar{A}} \in G'_0$ et $\bar{X} \in (\bar{L}'_0)$, l'ensemble des $\bar{Y} \in (\bar{L}'_0)$ tels que $\bar{\bar{A}}.\bar{Y} \leqslant \bar{X}$ est non vide et possède un plus grand élément [en effet si on pose $Y = \{x \in \mathcal{O} \mid Ax \subseteq X^*\}$ alors Y est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$ et $\bar{Y}$ est le plus grand élément de $(\bar{L}'_0)$ tel que $\bar{\bar{A}}.\bar{Y} \leqslant \bar{X}]$.

(C_6) Si de plus $\mathcal{O}$ est un ordre régulier alors, quels que soient $\bar{X},\bar{Y} \in (\bar{L}'_0)$, l'ensemble des $\bar{\bar{A}} \in G'_0$ tel que $\bar{\bar{A}}.\bar{Y} \leqslant \bar{X}$ est non vide et possède un plus grand élément [en effet si on pose $A = \{x \in \mathcal{O} \mid xY \subseteq X^*\}$ alors, d'après les propositions I.4.4 et I.2.4, A est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{O}$ et $\bar{\bar{A}}$ est le plus grand élément de G'_0 tel que $\bar{\bar{A}}.\bar{Y} \leqslant \bar{X}]$.

Notons que les conditions (C_3) et (C_4) signifient que le groupe d'Artin G_0 opère à gauche sur l'ensemble $(\bar{L}_0)$.

On verra au chapitre VI que les résultats qui précèdent permettent d'appliquer la théorie de Lesieur-Croisot à un ordre maximal régulier noethérien à gauche.

DEFINITION. - *On dira qu'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère* A *est un* c-idéal *si l'on a* $A = A^* = \mathcal{O}.\cdot(\mathcal{O}\cdot.A) = \mathcal{O}\cdot.(\mathcal{O}.\cdot A)$.

En cas de risque de confusion on parlera de c-$\mathcal{O}$-idéal (ou de c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal).

LEMME 2.1. - *Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de* S *alors tout $\mathcal{O}$-idéal* A *contient un* c-*idéal* A'.

DEMONSTRATION. - A contient un élément a de $\mathcal{O}$ qui est inversible dans S. Puisque $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de S le $\mathcal{O}$-idéal à gauche $\mathcal{O}a$ contient un $\mathcal{O}$-idéal. La somme de tous les $\mathcal{O}$-idéaux contenus dans $\mathcal{O}a$ est un $\mathcal{O}$-idéal A' tel que $A' \subseteq \mathcal{O}a \subseteq \mathcal{O}$. Il vient $\mathcal{O}.\cdot A' \supseteq \mathcal{O}.\cdot \mathcal{O}a = a^{-1}\mathcal{O}$ ce qui donne $\mathcal{O}\cdot.(\mathcal{O}.\cdot A') \subseteq \mathcal{O}\cdot.a^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}a$, c'est-à-dire $A'^* \subseteq \mathcal{O}a$. Par définition de A' il vient $A' = A'^*$. ∎

PROPOSITION 2.2. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Si* P *est un élément premier de* T'_0 *non quasi-égal à $\mathcal{O}$, alors* P *est maximal dans sa classe d'Artin* $\bar{\bar{P}}$ *(c'est-à-dire* $P = P^*$*) et* $\bar{\bar{P}}$ *est un élément premier de* G'_0 *; réciproquement si* $\bar{\bar{P}}$ *est un élément premier de* G'_0 *alors le plus grand élément* P *de* $\bar{\bar{P}}$ *est un élément premier minimal de* T'_0. *De plus si $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de* S *et si* G'_0 *vérifie la condition noethérienne alors la relation* $P \sim \mathcal{O}$ *pour un élément premier minimal* P *de* T'_0 *est impossible.*

DEMONSTRATION. - Soit P un élément premier de T'_0 non quasi-égal à $\mathcal{O}$. Puisqu'on a, d'après la propriété (1), $P \sim P^*$ il existe d'après la propriété (7) deux éléments U et V de T'_0 tels que $UP = P^*V$ et $U \sim V \sim \mathcal{O}$. Comme $UP \subseteq P$ on a $P^*V \subseteq P$ ce qui implique $P^* \subseteq P$ ou $V \subseteq P$ puisque P est premier ; si $V \subseteq P$ on a $V \subseteq P \subseteq \mathcal{O}$, et $V \sim \mathcal{O}$ implique, par la propriété (4), $P \sim \mathcal{O}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $V \not\subseteq P$ ce qui entraîne $P^* \subseteq P$. D'où $P = P^*$. Pour $\bar{A},\bar{B} \in G'_0$, la relation $\bar{A}.\bar{B} \leqslant \bar{P}$ implique $AB \subseteq (A^*B^*)^* \subseteq P^* = P$, avec $A,B \in T'_0$, ce qui entraîne $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$, et donc $\bar{A} \leqslant \bar{P}$ ou $\bar{B} \leqslant \bar{P}$.

Réciproquement si $\bar{P}$ est un élément premier de G'_0 et P le plus grand élément de $\bar{P}$ alors, d'après la remarque précédant la proposition 1.6, P est un élément premier de T'_0. Si P' est un élément premier de T'_0 tel que $P' \subseteq P$ alors P' n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$ (car de $P' \sim \mathcal{O}$ et de $P' \subseteq P \subseteq \mathcal{O}$ on déduirait, par la propriété (4), $P \sim \mathcal{O}$ et donc $\bar{P} = \bar{\mathcal{O}}$ ce qui n'est pas) ; d'après le début de la démonstration $\bar{P}'$ est un élément premier de G'_0 donc un élément maximal de G'_0 d'après la proposition 1.6. De $P' \subseteq P$ on déduit $P'^* \subseteq P^*$ ce qui implique $\bar{P}' \leqslant \bar{P}$ et par maximalité de $\bar{P}'$ on obtient $\bar{P}' = \bar{P}$. D'où $P'^* = P^*$ c'est-à-dire $P' = P$ (car $P' = P'^*$ et $P = P^*$). Donc P est un élément premier minimal de T'_0.

Si $\mathcal{O}$ est de plus un ordre régulier de S et si G'_0 vérifie la condition noethérienne, considérons P un élément premier minimal de T'_0. D'après le lemme 2.1, il existe un c-idéal A' tel que $A' \subseteq P$. Alors A' n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$ (car $A'^* = A' \subseteq P \subsetneq \mathcal{O} = \mathcal{O}^*$ implique $A'^* \neq \mathcal{O}^*$), et ainsi d'après la proposition 1.7 on peut écrire $\bar{A}' = \bar{P}_1^{n_1} \dots \bar{P}_r^{n_r}$, où les $\bar{P}_i$ sont des éléments premiers de G'_0 et $n_i \in \mathbb{N}$. On en déduit $P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \subseteq (P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r})^* \subseteq P$ ce qui implique qu'il existe un P_i tel que $P_i \subseteq P$, et ce qui entraîne $P_i = P$ par minimalité de P. Il en résulte que $\bar{P}_i = \bar{P}$ et donc P n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$. ■

COROLLAIRE 2.3. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier de S tel que T'_0 vérifie la condition noethérienne. Si tout élément premier de T'_0 est maximal, alors les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe (avec le produit des $\mathcal{O}$-idéaux) et l'on a $T_0 = G_0$.*

DEMONSTRATION. - C'est une conséquence du lemme 2.1 et de la proposition 1.10. ■

DEFINITION. - *Si* A *et* B *sont deux* c-*idéaux, on définit le* produit des c-idéaux *par* $A.B = (AB)^*$.

Si A et B sont deux $\mathcal{O}$-idéaux alors A^* et B^* sont des c-idéaux et le produit des c-idéaux est $A^*.B^* = (A^*B^*)^* = (AB)^*$ d'après la propriété V).

REMARQUES. - 1) Le produit des c-idéaux est commutatif d'après le corollaire 1.5.

2) Si A est un $\mathcal{O}$-idéal alors A^{-1} est un c-idéal : en effet on a $A^{-1} = \mathcal{O}.{}^{\bullet}A = \mathcal{O}{}^{\bullet}.A$ puisque $\mathcal{O}$ est un ordre maximal, et ainsi
$(A^{-1})^* = \mathcal{O}{}^{\bullet}.(\mathcal{O}.{}^{\bullet}A^{-1}) = \mathcal{O}{}^{\bullet}.[\mathcal{O}.{}^{\bullet}(\mathcal{O}{}^{\bullet}.A)] = \mathcal{O}{}^{\bullet}.A = A^{-1}$ d'après la propriété 8).

PROPOSITION 2.4. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre maximal de* S. *Si* A *est un* c-*idéal et si* I *est un* $\mathcal{O}$-*idéal alors* $A.{}^{\bullet}I$ *et* $A{}^{\bullet}.I$ *sont des* c-*idéaux et on a*
$A.{}^{\bullet}I = A.{}^{\bullet}I^* = I^{-1}.A = A.I^{-1} = A{}^{\bullet}.I^* = A{}^{\bullet}.I$.

DEMONSTRATION. - $(A^{-1}I)^{-1}$ et $I^{-1}.A$ sont des c-idéaux dont les classes d'Artin respectives sont $(\bar{\bar{A}}^{-1}.\bar{\bar{I}})^{-1}$ et $\bar{\bar{I}}^{-1}.\bar{\bar{A}}$; comme dans G_0 on a $(\bar{\bar{A}}^{-1}.\bar{\bar{I}})^{-1} = \bar{\bar{I}}^{-1}.\bar{\bar{A}}$ on obtient $(A^{-1}I)^{-1} = I^{-1}.A$. Soit x un élément de S. Si $Ix \subseteq A$ il vient $A^{-1}Ix \subseteq A^{-1}A \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $x \in (A^{-1}I)^{-1}$; réciproquement si $x \in I^{-1}.A$ on obtient
$Ix \subseteq I(I^{-1}A)^* \subseteq I^*(I^{-1}A)^* \subseteq A$ en utilisant les propriétés IV) et V). Donc on a $A.{}^{\bullet}I = I^{-1}.A$ ce qui prouve que $A.{}^{\bullet}I$ est un c-idéal. De même on démontre que $A.I^{-1} = A{}^{\bullet}.I$ est aussi un c-idéal. Comme le produit des c-idéaux est commutatif et comme on a $(I^*)^{-1} = I^{-1}$ on obtient $A.{}^{\bullet}I = A.{}^{\bullet}I^* = I^{-1}.A = A.I^{-1} = A{}^{\bullet}.I^* = A{}^{\bullet}.I$. ■

COROLLAIRE 2.5. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre maximal de* S. *Si* A *et* B *sont deux* $\mathcal{O}$-*idéaux bilatères alors on a :* $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} = A^{-1}.B^{-1} = (BA)^{-1}$.

DEMONSTRATION. - D'après la propriété 6) on a $\mathcal{O}.{}^{\bullet}AB = (\mathcal{O}.{}^{\bullet}A).{}^{\bullet}B$. Donc il vient $(AB)^{-1} = \mathcal{O}.{}^{\bullet}AB = (\mathcal{O}.{}^{\bullet}A).{}^{\bullet}B = A^{-1}.{}^{\bullet}B = B^{-1}.A^{-1}$ en utilisant la proposition 2.4. De même $(BA)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$. Comme le produit des c-idéaux est commutatif on a le résultat. ■

En ce qui concerne l'ensemble des c-idéaux on a :

PROPOSITION 2.6. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal de* S. *Alors l'ensemble des* c*-idéaux muni du produit des* c*-idéaux est un groupe commutatif isomorphe au groupe d'Artin* G_0.

DEMONSTRATION. - Si A est un $\mathcal{O}$-idéal alors A^* est un c-idéal et c'est le plus grand élément de la classe d'Artin $\bar{\bar{A}}$. Ainsi l'application $A^* \longmapsto \bar{\bar{A}}$ est un isomorphisme de l'ensemble des c-idéaux muni du produit des c-idéaux sur le groupe d'Artin G_0. ■

Dans tout ce qui suit $\mathcal{O}$ désigne un ordre maximal régulier de S *tel que* G_0' *vérifie la condition noethérienne* (c'est-à-dire, d'après la proposition 2.6, que l'on a la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux contenus dans $\mathcal{O}$). Il vient :

LEMME 2.7. - *Sous les hypothèses précédemment fixées, l'ensemble des* c*-idéaux contenus dans un* c*-idéal* C *vérifie la condition noethérienne.*

DEMONSTRATION. - Soit $\mathscr{C}$ un ensemble non vide de c-idéaux contenus dans C. Alors l'ensemble $\{C^{-1}.A | A \in \mathscr{C}\}$ est un ensemble non vide de c-idéaux contenus dans $\mathcal{O}$ qui, par hypothèse, possède un élément maximal B. Il existe $A_0 \in \mathscr{C}$ tel que $B = C^{-1}.A_0$, ce qui implique qu'on a $A_0 = C.B$ et que A_0 est un élément maximal de $\mathscr{C}$. ■

DEFINITION. - *On dira qu'un* c-idéal C *est* engendré *par un nombre fini d'éléments* $c_1,\dots,c_n$ *de* S *si* $\mathcal{O}c_1\mathcal{O} + \cdots + \mathcal{O}c_n\mathcal{O}$ *est un $\mathcal{O}$-idéal et si* $C = (\mathcal{O}c_1\mathcal{O} + \cdots + \mathcal{O}c_n\mathcal{O})^*$. *On notera alors* $C = (c_1,\dots,c_n)$.

LEMME 2.8. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal il existe* $c_1,\dots,c_n$ *éléments de* A *tels que* c_1 *est inversible dans* S *et* A^* *est le* c*-idéal engendré par* $c_1,\dots,c_n$.

DEMONSTRATION. - Soit $c_1 \in A \cap u(S)$. Alors $\mathcal{O}c_1\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans A (d'après la proposition I.4.1). S'il existe $c_2 \in A$ tel que $c_2 \notin (\mathcal{O}c_1\mathcal{O})^*$ alors $\mathcal{O}c_1\mathcal{O} + \mathcal{O}c_2\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans A ; on peut considérer le c-idéal

$(c_1,c_2) = (\mathcal{O}c_1\mathcal{O}+\mathcal{O}c_2\mathcal{O})^*$ et on a $(c_1) \subsetneqq (c_1,c_2) \subseteq A^*$.... D'après le lemme 2.7, il existe donc $c_2,\dots,c_n$ éléments de A tels que $A \subseteq (\mathcal{O}c_1\mathcal{O}+\cdots+\mathcal{O}c_n\mathcal{O})^*$ ce qui donne $(\mathcal{O}c_1\mathcal{O}+\cdots+\mathcal{O}c_n\mathcal{O})^* = A^*$. ■

DEFINITION. - *Soit* A *un sous-*$\mathcal{O}$*-module à gauche et à droite de* S *contenant un élément inversible de* S. *Alors la réunion ensembliste de tous les* c-*idéaux engendrés par un nombre fini d'éléments de* A *s'appellera la* clôture *de* A *et se notera* $\widetilde{A}$. *Si l'on a* $A = \widetilde{A}$ *on dira que* A *est* clos.

REMARQUE 2.9. - D'après le lemme 2.8, la clôture $\widetilde{A}$ d'un $\mathcal{O}$-idéal A est A^*.

PROPOSITION 2.10. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *(resp.* B*) est un sous-*$\mathcal{O}$*-module à gauche et à droite de* S *contenant un élément inversible de* S *alors* $\widetilde{A}$ *(resp.* $\widetilde{B}$*) est un sous-*$\mathcal{O}$*-module à gauche et à droite de* S, *et on a les propriétés suivantes :*

$A \subseteq \widetilde{A}$; $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$; $A \subseteq B$ *implique* $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$; $\widetilde{A}\widetilde{B} \subseteq \widetilde{AB}$ *et* $\widetilde{\widetilde{A}\,\widetilde{B}} = \widetilde{AB}$.

DEMONSTRATION. - Il est immédiat de vérifier que $\widetilde{A}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S. Puisque A contient un élément inversible λ de S alors, pour tout $a \in A$, la proposition I.4.1 implique que $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}+\mathcal{O}a\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal et il vient $a \in (\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}+\mathcal{O}a\mathcal{O})^*$; donc on a $A \subseteq \widetilde{A}$. Si $a \in \widetilde{\widetilde{A}}$ il existe $a_1,\dots,a_r \in \widetilde{A}$ tels que $a \in (a_1,\dots,a_r)$; pour tout $i = 1,\dots,r$, il existe $b_{i_1},\dots,b_{i_{s_i}} \in A$ tels que $a_i \in (b_{i_1},\dots,b_{i_{s_i}})$. Soit $b_1,\dots,b_n$ l'ensemble de tous les b_{i_j}. Il vient $(b_{i_1},\dots,b_{i_{s_i}}) \subseteq (b_1,\dots,b_n)$; donc, pour tout $i = 1,\dots,r$, on a $a_i \in (b_1,\dots,b_n)$, et ainsi on obtient $(a_1,\dots,a_r) \subseteq (b_1,\dots,b_n)$ ce qui implique $a \in \widetilde{A}$. Donc $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$. La propriété $A \subseteq B$ implique $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ est triviale. Si $a \in \widetilde{A}$ et $b \in \widetilde{B}$, il existe $a_1,\dots,a_r \in A$ et $b_1,\dots,b_s \in B$ tels que $a \in (a_1,\dots,a_r)$ et $b \in (b_1,\dots,b_s)$. Alors $(\sum_{i=1}^{r}\mathcal{O}a_i\mathcal{O})(\sum_{j=1}^{s}\mathcal{O}b_j\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans AB et d'après le lemme 2.8, il existe alors $c_1,\dots,c_n \in AB$ tels que $\left[(\sum_{i=1}^{r}\mathcal{O}a_i\mathcal{O})(\sum_{j=1}^{s}\mathcal{O}b_j\mathcal{O})\right]^* = (c_1,\dots,c_n)$. Il résulte alors de la propriété V) qu'on a $ab \in (c_1,\dots,c_n)$. D'où $\widetilde{A}\,\widetilde{B} \subseteq \widetilde{AB}$. On en déduit $\widetilde{\widetilde{A}\,\widetilde{B}} \subseteq \widetilde{\widetilde{AB}} = \widetilde{AB}$; comme on a $A \subseteq \widetilde{A}$ et $B \subseteq \widetilde{B}$ il vient $AB \subseteq \widetilde{A}\,\widetilde{B}$ ce qui implique $\widetilde{AB} \subseteq \widetilde{\widetilde{A}\,\widetilde{B}}$. Ainsi $\widetilde{\widetilde{A}\,\widetilde{B}} = \widetilde{AB}$. ■

REMARQUE 2.11. - Sous les hypothèses précédemment fixées : si A et B sont comme dans la proposition 2.10 et s'il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $A\lambda \subseteq B$, alors, pour tout sous-ensemble non vide M de S tel que $AM \subseteq B$, on a $\widetilde{A}M \subseteq \widetilde{B}$ [en effet $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}+\mathcal{O}M\mathcal{O}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S contenant λ et on a $\widetilde{A}M \subseteq \widetilde{\widetilde{A}(\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}+\mathcal{O}M\mathcal{O})} \subseteq \widetilde{A(\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}+\mathcal{O}M\mathcal{O})} \subseteq \widetilde{B}$].

DEFINITION. - *Un sous-anneau* S' *de* S *est appelé* $\mathcal{O}$-anneau *si* $\mathcal{O}$ *est un sous-anneau de* S' *et si* $S' = \widetilde{S'}$ *(c'est-à-dire si* S' *est clos).*

REMARQUE 2.12. - Un sous-anneau S' de S est un $\mathcal{O}$-anneau si et seulement si, pour toute famille $c_1,\dots,c_n$ d'éléments de S', le c-idéal engendré par $1,c_1,\dots,c_n$ est contenu dans S'.

Les résultats techniques qui précèdent seront surtout utilisés au chapitre IV dans lequel nous caractériserons les $\mathcal{O}$-anneaux et où nous montrerons que ce sont des ordres maximaux réguliers de S.

§ 3. NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Ce chapitre est tiré de K. ASANO et K. MURATA [5], excepté le début du paragraphe 2 jusqu'à la proposition 2.2 incluse qui provient de G. MAURY [76].

CHAPITRE III.

ORDRES D'ASANO.

§ 1. PRELIMINAIRES.

PROPOSITION 1.1. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre d'un anneau* S *et* A,B *deux* $\mathcal{O}$*-idéaux à gauche. Alors* $\{x \in S \mid Ax \subseteq B\} \simeq \mathrm{Hom}^{\ell}_{\mathcal{O}}(A,B)$.

DEMONSTRATION. - Si $x \in S$ vérifie $Ax \subseteq B$, alors l'application φ_x de A dans B, qui à y associe yx, est un homomorphisme de A dans B. Comme A est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche il contient un élément λ inversible dans S et ainsi la correspondance φ, qui à un tel x associe φ_x, est injective. Considérons $f \in \mathrm{Hom}^{\ell}_{\mathcal{O}}(A,B)$; pour tout $y \in A$ il existe des éléments z, μ, ν de $\mathcal{O}$ tels que μ et ν sont inversibles dans S et qui vérifient $\nu y \in \mathcal{O}$ et $\nu y\lambda^{-1} = \mu^{-1}z$, c'est-à-dire $\mu\nu y = z\lambda$. Il vient $\mu\nu f(y) = f(\mu\nu y) = f(z\lambda) = zf(\lambda)$, d'où $\mu\nu f(y) = z\lambda\lambda^{-1}f(\lambda) = \mu\nu y\lambda^{-1}f(\lambda)$ ce qui implique $f(y) = y\lambda^{-1}f(\lambda)$. Donc, si on pose $x = \lambda^{-1}f(\lambda)$, on déduit, de la relation $f(y) = yx$, que x vérifie $Ax \subseteq B$, et on a $f = \varphi_x$. Ainsi la correspondance φ est surjective. ■

COROLLAIRE 1.2. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre d'un anneau* S *et* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Alors on a* $I^{-1} \simeq \mathrm{Hom}^{\ell}_{\mathcal{O}}(I, \mathcal{O}_{\ell}(I))$.

DEMONSTRATION. - Résulte de la proposition I.2.6, de la définition de I^{-1} (voir I.2) et de la proposition 1.1. ■

LEMME 1.3. - *Soient* R *un anneau et* M *un* R*-module à gauche. Alors* M *est projectif si et seulement s'il existe des familles* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *d'éléments de* M *et* $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *d'éléments de* $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ *telles que tout élément* x *de* M *puisse s'écrire sous la forme* $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x)x_\lambda$ *avec* $\varphi_\lambda(x) = 0$ *sauf pour un nombre fini d'indices* $\lambda \in \Lambda$.

DEMONSTRATION. - Voir [22] proposition 3.1 page 132, ou [105] proposition 6.3 page 20. ■

PROPOSITION 1.4. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre d'un anneau* S *et* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Alors* I *est un* $\mathcal{O}_\ell(I)$*-module à gauche projectif si et seulement si* $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$. *Si cela est,* I *est un* $\mathcal{O}_\ell(I)$*-module à gauche de type fini.*

DEMONSTRATION. - Si I est un $\mathcal{O}_\ell(I)$-module à gauche projectif il existe, d'après le lemme 1.3, des familles $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de I et $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\ell(I)}(I, \mathcal{O}_\ell(I))$ telles que, pour tout $x \in I$, on peut écrire $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x)x_\lambda$ (avec $\varphi_\lambda(x) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices). Comme $\mathcal{O}_\ell(I)$ contient $\mathcal{O}$ (voir la proposition I.2.6) et comme on a $I^{-1} \simeq \mathrm{Hom}^\ell_{\mathcal{O}}(I, \mathcal{O}_\ell(I))$ d'après le corollaire 1.2, il vient : pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $y_\lambda \in I^{-1}$ tel que, pour tout $x \in I$, on a $\varphi_\lambda(x) = xy_\lambda$. Puisque I est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche il contient un élément s inversible dans S et ainsi, d'après ce qui précède, il existe $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$ tels que $s = \sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda_i}(s)x_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n sy_{\lambda_i}x_{\lambda_i}$ ce qui donne $s = s(\sum_{i=1}^n y_{\lambda_i}x_{\lambda_i})$ et ce qui entraîne $1 = \sum_{i=1}^n y_{\lambda_i}x_{\lambda_i}$. Donc $1 \in I^{-1}I$ ce qui implique $\mathcal{O}_r(I) \subseteq I^{-1}I$ $\mathcal{O}_r(I) \subseteq I^{-1}I \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ c'est-à-dire $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$. Réciproquement, si $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$ il existe $y_1,\ldots,y_n \in I^{-1}$ et $x_1,\ldots,x_n \in I$ tels que $1 = \sum_{i=1}^n y_ix_i$. Donc, pour tout $x \in I$, il vient $x = \sum_{i=1}^n xy_ix_i$. Comme on a $xy_i \in II^{-1}$ et $II^{-1} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I)$ et puisque, d'après la proposition I.2.6, I est un $\mathcal{O}_\ell(I)$-idéal à gauche, l'application φ_i de I dans $\mathcal{O}_\ell(I)$, qui à x associe xy_i, est un homomorphisme de $\mathcal{O}_\ell(I)$-modules à gauche. On a donc, pour tout $x \in I$, $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)x_i$ ce qui, d'après le lemme 1.3, implique que I est un $\mathcal{O}_\ell(I)$-module à gauche projectif, et montre aussi que I est un $\mathcal{O}_\ell(I)$-module à gauche de type fini. ■

COROLLAIRE 1.5. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre d'un anneau* S *et* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche. Si* I *est un* $\mathcal{O}$*-module à gauche projectif alors* I *est un* $\mathcal{O}$*-module à gauche de type fini et on a* $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$.

DEMONSTRATION. - Posons $I^+ = \{x \in S \mid Ix \subseteq \mathcal{O}\}$. Comme I est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche on a $I^+ \simeq \mathrm{Hom}^\ell_{\mathcal{O}}(I, \mathcal{O})$ d'après la proposition 1.1, et puisque I est projectif comme

$\mathcal{O}$-module à gauche on obtient par une démonstration analogue au début de celle de la proposition 1.4 que $1 \in I^+I$ ce qui implique que I est alors un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini. De plus, avec la proposition I.2.6, on déduit de $1 \in I^+I$ que $\mathcal{O}_r(I) \subseteq I^+I\ \mathcal{O}_r(I) \subseteq I^+I$; comme on a $II^+ \subseteq \mathcal{O}$ il vient $II^+I \subseteq \mathcal{O}\, I \subseteq I$ ce qui implique $I^+I \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ et $I^+ \subseteq I^{-1}$. Donc $I^+I = \mathcal{O}_r(I)$ ce qui entraîne $\mathcal{O}_r(I) = I^+I \subseteq I^{-1}I \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ c'est-à-dire $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$. ■

PROPOSITION 1.6. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal d'un anneau* S. *Alors :*

(i) Si I *est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche,* I *est un $\mathcal{O}$-module à gauche projectif si et seulement si* $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$, *et dans ce cas* I *est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini.*

(ii) Si I *est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère,* I *est un $\mathcal{O}$-module à gauche projectif si et seulement si* $I^{-1}I = \mathcal{O}$, *et dans ce cas* I *est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini.*

DEMONSTRATION. - Résulte de la proposition I.3.1 et de la proposition 1.4. ■

COROLLAIRE 1.7. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier d'un anneau* S *tel que l'ensemble* T'_0 *des $\mathcal{O}$-idéaux entiers vérifie la condition noethérienne. Si tout élément premier de* T'_0 *est maximal, alors chaque $\mathcal{O}$-idéal entier est un $\mathcal{O}$-module à gauche et à droite projectif de type fini.*

DEMONSTRATION. - D'après le corollaire II.2.3 les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe et par suite pour chaque $\mathcal{O}$-idéal I on a $I^{-1}I = II^{-1} = \mathcal{O}$. Il suffit alors d'appliquer *(ii)* de la proposition 1.6. ■

DEFINITION. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre dans un anneau de quotients* Q. *Pour tout sous-$\mathcal{O}$-module à gauche* I *de* Q *on pose* $I^+ = \{q \in Q \mid Iq \subseteq \mathcal{O}\}$ *et on dit que* I *est* inversible à gauche *s'il existe* $a_1,\dots,a_n \in I$ *et* $q_1,\dots,q_n \in I^+$ *tels que* $1 = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i$.

Pour plus de détails sur cette notion on pourra se reporter au paragraphe II.4 de [105] d'où est issu le résultat suivant :

PROPOSITION 1.8. - *Soient $\mathcal{O}$ un ordre dans un anneau de quotients* Q *et* I *un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche de* Q. *Alors* I *est inversible à gauche si et seulement si* I *est un*

$\mathcal{O}$-module à gauche projectif contenant un élément non diviseur de zéro de Q.

DEMONSTRATION. - Supposons que I soit inversible à gauche : on a $1 = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i$, $a_i \in I$, $q_i \in I^+$. Définissons un homomorphisme $\varphi_i : I \longrightarrow \mathcal{O}$ tel que $\varphi_i(x) = xq_i$; d'après le lemme 1.3, I est un $\mathcal{O}$-module à gauche projectif. On peut trouver un élément $s \in \mathcal{O}$ inversible dans Q tel que $sq_i \in \mathcal{O}$ et $s = \sum_{i=1}^{n} sq_i a_i$ appartient à I et est non diviseur de zéro de Q. Réciproquement, si I est un $\mathcal{O}$-module à gauche projectif contenant un élément non diviseur de zéro s de Q, d'après le lemme 1.3, il existe une famille J d'indices, des $\varphi_j \in \mathrm{Hom}(I,\mathcal{O})$, $\forall\, j \in J$, des $a_j \in I$, $\forall\, j \in J$, tels que $s = \sum_{j\in J} \varphi_j(s)a_j$, les $\varphi_j(s)$ étant nuls sauf un nombre fini. Le même raisonnement qu'au lemme 1.3 prouve que $\varphi_j(s) = sq_j$, $\forall\, j \in J$, $q_j \in Q$. On a donc $s = \sum_{j\in J} sq_j a_j$ donc $1 = \sum_{j\in J} q_j a_j$ et I est inversible à gauche. ∎

§ 2. ORDRES D'ASANO.

DEFINITION. - *On appelle* ordre d'Asano *un ordre $\mathcal{O}$ dans un anneau de quotients* Q *tel que les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe (pour la multiplication des $\mathcal{O}$-idéaux).*

THEOREME 2.1. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre dans un anneau de quotients* Q. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano de Q.

(b) $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de Q *et tout $\mathcal{O}$-idéal entier est un idéal à gauche projectif de $\mathcal{O}$.*

(c) Pour tout $\mathcal{O}$-idéal entier I *il existe un $\mathcal{O}$-idéal I^* tel que $II^* = I^*I = \mathcal{O}$.*

(d) Les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe abélien pour la multiplication des $\mathcal{O}$-idéaux.

DEMONSTRATION. - *(a) ⇒ (b)* : Si $\mathcal{O}'$ est un ordre de Q équivalent à $\mathcal{O}$ et contenant $\mathcal{O}$, alors d'après la proposition I.2.3 il existe un ordre $\mathcal{O}''$ de Q et des éléments a,b de $\mathcal{O}$ inversibles dans Q tels que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'' \subseteq \mathcal{O}'$, $a\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}''$ et $\mathcal{O}''b \subseteq \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}''b\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal entier il existe, par hypothèse, un $\mathcal{O}$-idéal B tel que $\mathcal{O}''b\mathcal{O}B = \mathcal{O}$ (en effet si I est un $\mathcal{O}$-idéal on a $\mathcal{O}I = I\mathcal{O} = I$ ce qui implique que $\mathcal{O}$ est l'élément unité du groupe des $\mathcal{O}$-idéaux). Il vient $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}''\mathcal{O} = \mathcal{O}''\ \mathcal{O}''b\mathcal{O}B = \mathcal{O}''b\mathcal{O}B = \mathcal{O}$.

On a donc $a\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et comme $\mathcal{O}a\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$-idéal entier il existe un $\mathcal{O}$-idéal A tel que $A\mathcal{O}a\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ ce qui implique qu'on a $\mathcal{O}' = \mathcal{O}\mathcal{O}' = A\mathcal{O}a\mathcal{O}'\mathcal{O}' = A\mathcal{O}a\mathcal{O}' = \mathcal{O}$. Ainsi $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de Q. Si I est un $\mathcal{O}$-idéal on a $\mathcal{O}_\ell(I) = \mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}$ d'après la proposition I.3.1, et par définition de I^{-1} (voir § I.2) on a $II^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et $I^{-1}I \subseteq \mathcal{O}$. Par hypothèse il existe un $\mathcal{O}$-idéal J tel que $IJ = JI = \mathcal{O}$; la définition de I^{-1} implique qu'on a alors $J \subseteq I^{-1}$. Donc $II^{-1} = I^{-1}I = \mathcal{O}$. D'après la proposition 1.6 on en déduit que I est un $\mathcal{O}$-module à gauche (et à droite) projectif de type fini.

(b) ⇒ (c) : Tout $\mathcal{O}$-idéal entier étant un idéal à gauche projectif de $\mathcal{O}$ est, d'après la proposition 1.6, un idéal à gauche de type fini. Donc l'ensemble T_o' des $\mathcal{O}$-idéaux entiers vérifie la condition noethérienne. Si M est un élément maximal de T_o' on a, d'après la proposition 1.6, $M^{-1}M = \mathcal{O}$ et $M^{-1} \neq \mathcal{O}$ (car $M^{-1} = \mathcal{O}$ implique $M = \mathcal{O}M = M^{-1}M = \mathcal{O}$ ce qui n'est pas). Soit I un $\mathcal{O}$-idéal entier (différent de $\mathcal{O}$). Il existe un élément maximal M_1 de T_o' tel que $I \subseteq M_1$. Il vient $I \subseteq IM_1^{-1} \subseteq \mathcal{O}$, et on a $I \neq IM_1^{-1}$ (car $I = IM_1^{-1}$ implique $\mathcal{O} = I^{-1}I = I^{-1}IM_1^{-1} = \mathcal{O}M_1^{-1} = M_1^{-1}$ ce qui n'est pas). Comme IM_1^{-1} est un $\mathcal{O}$-idéal entier, si IM_1^{-1} est distinct de $\mathcal{O}$, il existe un élément maximal M_2 de T_o' tel que $IM_1^{-1} \subseteq M_2$ d'où l'on tire $IM_1^{-1} \subseteq IM_1^{-1}M_2^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et $IM_1^{-1} \neq IM_1^{-1}M_2^{-1}$. On déduit de cela que comme T_o' vérifie la condition noethérienne il existe $M_1, M_2, \ldots, M_n$ éléments maximaux de T_o' tels que $IM_1^{-1}M_2^{-1} \ldots . M_n^{-1} = \mathcal{O}$. On obtient alors $I = M_n \ldots M_2M_1$ et si on pose $I^* = M_1^{-1}M_2^{-1} \ldots M_n^{-1}$ on a $II^* = I^*I = \mathcal{O}$.

(c) ⇒ (a) : Soit I un $\mathcal{O}$-idéal. Posons $J = \{x \in \mathcal{O} \mid xI \subseteq \mathcal{O}\}$. Comme il existe un élément inversible q de Q tel que $qI \subseteq \mathcal{O}$ et comme on peut écrire $q = b^{-1}a$, avec a,b éléments de $\mathcal{O}$ inversibles dans Q, il vient $aI \subseteq b\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $a \in J$. Donc J est un $\mathcal{O}$-idéal entier, et JI est aussi un $\mathcal{O}$-idéal entier. On en déduit que $I = \mathcal{O}I = (J^*J)I = J^*(JI)$, et comme $J^*(JI)(JI)^*J = (JI)^*JJ^*(JI) = \mathcal{O}$, on obtient l'existence d'un $\mathcal{O}$-idéal I^* tel que $II^* = I^*I = \mathcal{O}$. Donc les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe.

(a) ⇒ (d) : Pour tout $\mathcal{O}$-idéal I on a vu dans *(a) ⇒ (b)* qu'on a $II^{-1} = I^{-1}I = \mathcal{O}$ et ceci implique qu'on a $I = (I^{-1})^{-1}$, c'est-à-dire que I est un c-idéal. Donc l'ensemble T_o des $\mathcal{O}$-idéaux est égal à son groupe d'Artin G_o (car la relation d'équivalence

d'Artin de "quasi-égalité" coïncide avec la relation d'égalité). D'après la proposition II.1.4 (ou la proposition II.2.6), T_0 est un groupe abélien.

(d) $\Rightarrow$ *(a)* est trivial. ■

COROLLAIRE 2.2. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un ordre d'Asano dans un anneau de quotients* Q *et* T'_0 *l'ensemble des* $\mathcal{O}$*-idéaux entiers. Alors :*

(i) *Pour tout* $\mathcal{O}$*-idéal* I *on a* $II^{-1} = I^{-1}I = \mathcal{O}$, *et* I *est un* c*-idéal.*

(ii) *Chaque* $\mathcal{O}$*-idéal est un* $\mathcal{O}$*-module à gauche et à droite projectif de type fini.*

(iii) T'_0 *vérifie la condition noethérienne.*

(iv) *Tout élément premier de* T'_0 *est maximal.*

(v) *Tout élément de* T'_0, *distinct de* $\mathcal{O}$, *est un produit d'éléments premiers de* T'_0.

(vi) *L'ensemble des* $\mathcal{O}$*-idéaux entiers contenant un* $\mathcal{O}$*-idéal entier fixé vérifie la condition de chaîne descendante.*

DEMONSTRATION. - *(i), (ii), (iii)* et *(v)* : propriétés obtenues dans la démonstration du théorème 2.1.

(iv) et *(v)* : l'ensemble T_0 des $\mathcal{O}$-idéaux est égal à son groupe d'Artin G_0 et il suffit donc d'appliquer les propositions II.1.6 et II.1.7.

(vi) : soit $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots \supseteq I$ une chaîne descendante de $\mathcal{O}$-idéaux entiers contenant un $\mathcal{O}$-idéal entier fixé I. On en déduit la chaîne ascendante de $\mathcal{O}$-idéaux entiers $I_1^{-1}I \subseteq I_2^{-1}I \subseteq \dots \subseteq I_n^{-1}I \subseteq \dots \subseteq I^{-1}I = \mathcal{O}$. D'après *(iii)*, il existe un entier n tel que, pour tout entier $p \geqslant n$, on a $I_n^{-1}I = I_p^{-1}I$ ce qui entraîne $I_n^{-1} = I_p^{-1}$ et donc $I_n = I_p$ d'après *(i)*. ■

DEFINITION. - *Un* anneau A *est dit* héréditaire à gauche *si tout idéal à gauche de* A *est projectif. L'*anneau A *est dit* héréditaire *s'il est héréditaire à gauche et à droite.*

DEFINITION. - *Soit* J *le radical de Jacobson d'un anneau* A. *On dira que* A *est un* anneau local *si* A/J *est un corps ; on dira que* A *est un* anneau quasi-local *si* J *est l'unique idéal maximal de* A *; on dira que* A *est un* anneau semi-local *si* A *est un anneau quasi-local et si* A/J *est artinien. (Notons que cette terminologie diffère de celle utilisée par certains auteurs).*

LEMME 2.3. - *Si un anneau héréditaire* R *possède un idéal* P *premier ne contenant pas d'élément idempotent non nul alors* R *est un anneau premier.*

DEMONSTRATION. - Soit I un idéal bilatère non nul tel que $S = \ell(I) = \{x \in R | xI = 0\}$ est non nul. Considérons $x \in S$ et $x \neq 0$. Alors on a $I \subseteq r(x) = \{y \in R | xy = 0\}$ et $r(x) = eR$ pour un certain idempotent e de R (en effet xR est isomorphe à $R/_{r(x)}$, comme R-modules à droite, ce qui implique que $R/_{r(x)}$ est projectif et, comme on a la suite exacte $0 \longrightarrow r(x) \longrightarrow R \longrightarrow R/_{r(x)} \longrightarrow 0$, on en déduit que r(x) est facteur direct de R. Donc $R = r(x) \oplus A$ et on peut écrire $1 = e + e'$, avec $e \in r(x)$ et $e' \in A$, ce qui implique que e est un idempotent et qu'on a $r(x) = eR$). On a alors $1 - e \in S$ et, comme $1 - e$ est un idempotent non nul, on en déduit $S \not\subseteq P$. Si on considère $r(S) = \{y \in R | Sy = 0\}$ on a $I \subseteq r(S)$. Soit $x' \in r(S)$ et $x' \neq 0$. On a alors $S \subseteq \ell(x') = \{y \in R | yx' = 0\}$ et $\ell(x') = Re_1$ pour un certain idempotent e_1 de R (par une démonstration analogue, à gauche, à celle faite pour $r(x) = eR$). On a alors $1 - e_1 \in r(S)$ et, comme $1 - e_1$ est un idempotent non nul, on en déduit $r(S) \not\subseteq P$. Ainsi on a $S \not\subseteq P$ et $r(S) \not\subseteq P$, et comme on a $Sr(S) = 0 \subseteq P$ il y a contradiction avec le fait que P est un idéal premier. Donc R est un anneau premier. ∎

PROPOSITION 2.4. - *Un anneau héréditaire, noethérien et quasi-local* $\mathcal{O}$ *est un ordre d'Asano dans un anneau de quotients simple artinien, et les* $\mathcal{O}$*-idéaux forment un groupe cyclique.*

DEMONSTRATION. - Si $\mathcal{O}$ est un anneau simple il est premier, et si $\mathcal{O}$ n'est pas un anneau simple alors son radical de Jacobson est un idéal premier qui ne contient pas d'idempotent non nul ce qui implique, d'après le lemme 2.3, que $\mathcal{O}$ est un anneau premier. C'est alors une conséquence du théorème de Goldie (voir le corollaire I.1.2) que $\mathcal{O}$ est un ordre dans un anneau de quotients simple artinien Q. Si $\mathcal{O}$ est un anneau simple alors $\mathcal{O}$ est le seul $\mathcal{O}$-idéal bilatère : en effet si I est un $\mathcal{O}$-idéal alors $I \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ ce qui entraîne $I \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}$, c'est-à-dire $\mathcal{O} \subseteq I$, et, par suite, $\{x \in Q | Ix \subseteq \mathcal{O}\}$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ ce qui implique $\{x \in Q | Ix \subseteq \mathcal{O}\} = \mathcal{O}$ d'où l'on déduit $I \subseteq \mathcal{O}$ ce qui donne $I = \mathcal{O}$; dans ce cas le résultat est démontré. Supposons que $\mathcal{O}$ ne soit pas un anneau simple. Le radical de Jacobson J de $\mathcal{O}$ n'est pas nul et, comme $\mathcal{O}$ est un anneau premier, J est alors un idéal à gauche (et à droite) essentiel ; comme de plus $\mathcal{O}$ est noethérien J contient, d'après le théorème de Goldie (théorème I.1.1), un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$, et, comme en outre $\mathcal{O}$ est héréditaire, J est un idéal à gauche et à droite projectif. J est ainsi, d'après la proposition 1.8, inversible à gauche et à droite ; si on pose $J^+ = \{q \in Q | Jq \subseteq \mathcal{O}\}$ on a donc $1 \in J^+J$ (car J inversible à gauche) ce qui entraîne $J \subseteq JJ^+J \subseteq JJ^+\mathcal{O} = JJ^+ \subseteq \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est quasi-local on a $J = JJ^+$ ou $JJ^+ = \mathcal{O}$. Si l'on avait $J = JJ^+$ on obtiendrait $J^2 \subseteq J \subseteq JJ^+J = J^2$ c'est-à-dire $J = J^2$: ceci est impossible d'après le lemme de Nakayama (voir [105] page 179). On a donc $JJ^+ = \mathcal{O}$. Comme J est un $\mathcal{O}$-idéal il vient $J^+ \subseteq J^{-1}$ et on obtient $J = \mathcal{O}J = JJ^+J \subseteq JJ^{-1}J \subseteq J$ ce qui donne $JJ^{-1}J = J$. On en déduit $JJ^{-1} = JJ^{-1}\mathcal{O} = JJ^{-1}JJ^+ = JJ^+ = \mathcal{O}$. Comme J est inversible à droite un raisonnement analogue nous donne $J^{-1}J = \mathcal{O}$. Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$. Si I n'est pas une puissance de J on déduit de $I \subseteq J$ et $I \neq J$ qu'on a $IJ^{-1} \subseteq J$ et $IJ^{-1} \neq J$ (en effet on a $IJ^{-1} \subseteq JJ^{-1} = \mathcal{O}$ et $IJ^{-1} \neq \mathcal{O}$ ce qui implique $IJ^{-1} \subseteq J$ et $IJ^{-1} \neq J$ car $I \neq J^2$). Par récurrence on démontre que $I(J^{-1})^k \subseteq J$ et $I(J^{-1})^k \neq J$. On a alors une chaîne, $IJ^{-1} \subseteq I(J^{-1})^2 \subseteq \ldots \subseteq I(J^{-1})^k \subseteq \ldots$, croissante d'idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ et, comme $\mathcal{O}$ est noethérien, elle est stationnaire. Ainsi pour un certain entier k on a $I(J^{-1})^k = I(J^{-1})^{k+1}$ ce qui implique $I = IJ^{-1}$ et ce qui donne $I = IJ$; d'après le lemme de Nakayama on obtient $I = 0$: contradiction . Donc tout idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$ est une puissance de J. Il en résulte que les ordres à gauche et à droite de tout $\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ sont égaux à $\mathcal{O}$ et ainsi, d'après la proposition I.3.1, l'ordre $\mathcal{O}$ est maximal. Si A est un $\mathcal{O}$-idéal alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cap \mathcal{O} = J^n$ ce qui implique $J^n \subseteq A$; on en déduit $A^{-1}J^n \subseteq A^{-1}A \subseteq \mathcal{O}$ et donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{-1}J^n = J^p$. Il vient $AJ^p = AA^{-1}J^n \subseteq \mathcal{O}J^n = J^n$ et ainsi il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $AJ^p = J^{n'}$ ce qui donne $A = J^{n'-p}$. En posant $A^* = J^{p-n'}$ on a donc $AA^* = A^*A = \mathcal{O}$ (et on obtient $A^* = A^{-1}$ ce qui entraîne $n' = n$). Donc $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano et les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe cyclique. ■

LEMME 2.5. - *Un anneau héréditaire, noethérien, quasi-local et non simple $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions.*

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 2.4 (et sa démonstration) $\mathcal{O}$ est un anneau premier et c'est un ordre d'Asano de son anneau de fractions Q (qui est un anneau de quotients simple artinien). Soit I un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$. D'après le théorème de Goldie (théorème I.1.1) I contient un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$ et par suite est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche. Comme $\mathcal{O}$ est héréditaire I est un idéal à gauche projectif et comme $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de Q (d'après le théorème 2.1) on déduit de la proposition 1.6 qu'on a $I^{-1}I = \mathcal{O}_r(I)$; en particulier $1 \in I^{-1}I$. D'après la proposition I.2.7, I^{-1} est un $\mathcal{O}$-idéal à droite et on a $(I^{-1})^{-1} = \{x \in Q | xI^{-1} \subseteq \mathcal{O}\}$. On a donc $I \subseteq (I^{-1})^{-1}$, et de $(I^{-1})^{-1}I^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ on déduit $(I^{-1})^{-1}I^{-1}I \subseteq I$ ce qui, avec $1 \in I^{-1}I$, implique $(I^{-1})^{-1} \subseteq I$. Ainsi on a $I = (I^{-1})^{-1}$. De $1 \in I^{-1}I$, de $I = (I^{-1})^{-1}$ et de la proposition I.2.6 on déduit $\mathcal{O}_\ell(I^{-1}) \subseteq \mathcal{O}_\ell(I^{-1})I^{-1}I \subseteq I^{-1}I = I^{-1}(I^{-1})^{-1} \subseteq \mathcal{O}_\ell(I^{-1})$, c'est-à-dire $I^{-1}(I^{-1})^{-1} = \mathcal{O}_\ell(I^{-1})$. Par la proposition 1.6 on obtient que I^{-1} est un $\mathcal{O}$-module à droite projectif de type fini. Il en résulte, puisque $\mathcal{O}$ est noethérien, que I^{-1} est un $\mathcal{O}$-module noethérien à droite. Alors si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ est une chaîne descendante d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant I, ces idéaux à gauche I_j sont essentiels dans $\mathcal{O}$ et donc ce sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche ; on obtient la chaîne croissante $I_1^{-1} \subseteq I_2^{-1} \subseteq \dots \subseteq I_n^{-1} \subseteq \dots$ de $\mathcal{O}$-idéaux à droite contenus dans I^{-1}, donc une chaîne croissante de sous-$\mathcal{O}$-modules du $\mathcal{O}$-module à droite noethérien I^{-1}, ce qui implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant n$, on a $I_n^{-1} = I_p^{-1}$ ce qui entraîne $I_n = (I_n^{-1})^{-1} = (I_p^{-1})^{-1} = I_p$. Donc toute chaîne descendante d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant un idéal à gauche essentiel I de $\mathcal{O}$ est stationnaire. Si J désigne le radical de Jacobson de $\mathcal{O}$ on a la suite descendante d'idéaux à gauche $I + J \supseteq I + J^2 \supseteq \dots \supseteq I + J^n \supseteq \dots$ de $\mathcal{O}$, et ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I + J^n = I + J^{n+1}$; si on pose $M = I + J^n/I$, on a donc $JM = M$, avec M $\mathcal{O}$-module de type fini, et ainsi d'après le lemme de Nakayama on obtient $M = 0$ c'est-à-dire $J^n \subseteq I$. Donc tout idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$ contient un idéal bilatère de la forme J^n, et J^n est non nul car $\mathcal{O}$ est un anneau quasi-local non simple. Par suite tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier I contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère : en effet, puisque I contient un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$ c'est un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$ d'après le théorème de Goldie et ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $J^n \subseteq I$; on a vu dans la démonstration de la proposition 2.4 que J est un $\mathcal{O}$-idéal ce qui implique que J^n est aussi un $\mathcal{O}$-idéal. Donc $\mathcal{O}$ est un ordre régulier d'après la proposition I.4.1. ∎

Notons que dans la démonstration précédente on a établi que toute chaîne descendante d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$ était stationnaire sans utiliser toutes les hypothèses faites sur $\mathcal{O}$ (voir aussi par exemple le théorème 2.2 de [31]).

LEMME 2.6. (SCHANUEL). - *Si on a les suites exactes de* R-*modules à gauche* $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ *et* $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow 0$ *où* P *et* P_1 *sont des* R-*modules projectifs, alors* $K \oplus P_1$ *est isomorphe à* $K_1 \oplus P$.

DEMONSTRATION. - Puisque P est projectif il existe un homomorphisme g de P dans P_1 tel que $f_1 \circ g = f$. Considérons le sous-module L de $P \oplus P_1$ formé des couples (p,p_1) tels que $f(p) = f_1(p_1)$. Appliquons $P \oplus K_1$ dans L par $(p,k_1) \longmapsto (p,g(p) + k_1)$. Il est aisé de vérifier que cette application de $P \oplus K_1$ dans L est un isomorphisme de R-modules. Puisque P_1 est projectif on démontre de même que $P_1 \oplus K$ est isomorphe à L. Donc $P \oplus K_1$ est isomorphe à $P_1 \oplus K$. ∎

LEMME 2.7. - *Si* $\mathcal{O}$ *est un anneau héréditaire, noethérien, quasi-local, non simple, ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions, et si* J *désigne le radical de Jacobson de* $\mathcal{O}$*, alors* $\mathcal{O}/J^k$ *est un anneau dont tous les idéaux à gauche (resp. à droite) sont principaux.*

DEMONSTRATION. - L'hypothèse "$\mathcal{O}$ ordre d'Asano régulier" est entraînée, d'après le lemme 2.5, par les autres hypothèses. Le radical de Jacobson de l'anneau $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/J^k$ est $\bar{J} = J/J^k$. Un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$ étant un idéal à gauche essentiel dans $\mathcal{O}$, l'anneau $\bar{\mathcal{O}}$ vérifie la condition de chaîne descendante d'après la démonstration du lemme 2.5. L'anneau $\bar{\mathcal{O}}/\bar{J} \simeq \mathcal{O}/J$ est simple artinien et par suite $\bar{\mathcal{O}}$ est un anneau primaire (voir [65] page 71). Si I est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$ contenu dans J alors on a $J^{-1}I \subseteq J^{-1}J = \mathcal{O}$ et $JJ^{-1}I = \mathcal{O}I = I$; il existe donc un idéal à gauche I' de $\mathcal{O}$ tel que JI' = I. Si de plus I contient J^k on a aussi $J(I' + J^k) = I$, et donc on peut supposer que I' contient J^k. En passant dans $\bar{\mathcal{O}}$ on obtient alors $\bar{I} = \bar{J}\bar{I}'$. De même pour un idéal à droite $\bar{I}_1$ de $\bar{\mathcal{O}}$ il existe un idéal à droite $\bar{I}_1'$ de $\bar{\mathcal{O}}$ tel que $\bar{I}_1 = \bar{I}_1'\bar{J}$. Il résulte alors des théorèmes 23 page 128 et 41 page 77 de [65] que $\bar{\mathcal{O}}$ est un anneau dont tous les idéaux à gauche (et à droite) sont principaux. ■

THEOREME 2.8. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, semi-local et non simple. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Le radical de Jacobson J *de $\mathcal{O}$ est inversible à gauche et à droite.*

(b) $\mathcal{O}$ est un anneau héréditaire.

(c) $\mathcal{O}$ est un anneau à idéaux à gauche (et à droite) principaux.

Si ces propriétés sont vérifiées alors $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions.

DEMONSTRATION. - Puisque $\mathcal{O}$ est un anneau premier noethérien c'est un ordre dans un anneau de quotients simple artinien Q (conséquence du théorème de Goldie : corollaire I.1.2).

(a) ⇒ *(b)* : Soit M un idéal à gauche maximal de $\mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}/J$ est un anneau simple artinien il existe un idéal à gauche N de $\mathcal{O}$ tel que $M \cap N = J$ et $M + N = \mathcal{O}$. Le morphisme $\varphi : M \oplus N \longrightarrow \mathcal{O}$, défini par $\varphi(m,n) = m - n$, est surjectif et on a la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules $0 \longrightarrow J \xrightarrow{\psi} M \oplus N \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O} \longrightarrow 0$, où ψ est le morphisme de J dans $M \oplus N$ défini par $\psi(x) = (x,x)$. On en déduit que $J \oplus \mathcal{O}$ est isomorphe à $M \oplus N$. Puisque J est inversible à gauche c'est, d'après la proposition 1.8, un idéal à gauche projectif de $\mathcal{O}$ et ainsi $J \oplus \mathcal{O} \simeq M \oplus N$ est projectif ce qui implique que M est un idéal à gauche projectif. Supposons que $\mathcal{O}$ n'est pas héréditaire. Puisque tout idéal à gauche non essentiel de $\mathcal{O}$ est un facteur direct d'un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$, il existera un idéal à gauche essentiel K de $\mathcal{O}$ maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche essentiels de $\mathcal{O}$ qui ne sont pas projectifs. D'après le théorème

de Goldie (théorème I.1.1), K contient un élément c non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$. Si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ est une chaîne descendante d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant strictement K alors, en posant $I_j^+ = \{q \in Q \mid I_j q \subseteq \mathcal{O}\}$, on obtient la suite croissante $\mathcal{O} \subseteq I_1^+ \subseteq I_2^+ \subseteq \dots \subseteq I_n^+ \subseteq \dots \subseteq c^{-1}\mathcal{O}$ de sous-$\mathcal{O}$-modules du $\mathcal{O}$-module à droite noethérien $c^{-1}\mathcal{O}$; il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant n$, $I_n^+ = I_p^+$. Comme les idéaux à gauche I_j de $\mathcal{O}$ contiennent strictement K ce sont des idéaux à gauche projectifs de $\mathcal{O}$ qui contiennent c et, d'après la proposition 1.8, on a $1 \in I_j^+ I_j$; si on pose $(I_j^+)^+ = \{q \in Q \mid q I_j^+ \subseteq \mathcal{O}\}$ on a $I_j \subseteq (I_j^+)^+$, et de $(I_j^+)^+ I_j^+ \subseteq \mathcal{O}$ on déduit $(I_j^+)^+ I_j^+ I_j \subseteq \mathcal{O} I_j \subseteq I_j$ ce qui, avec $1 \in I_j^+ I_j$, implique $(I_j^+)^+ \subseteq I_j$ d'où il vient $I_j = (I_j^+)^+$. Donc de $I_n^+ = I_p^+$, pour tout $p \geqslant n$, on déduit $I_n = I_p$. Ainsi nous pouvons considérer que I_n/K est un $\mathcal{O}$-module à gauche simple et par suite il existe un idéal à gauche maximal M de $\mathcal{O}$ tel que I_n/K est isomorphe à $\mathcal{O}/M$. On déduit alors du lemme 2.6 que $I_n \oplus M$ est isomorphe à $\mathcal{O} \oplus K$. Comme M et I_n sont des idéaux à gauche projectifs le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O} \oplus K \simeq I_n \oplus M$ est projectif ce qui entraîne que K est un idéal à gauche projectif de $\mathcal{O}$: contradiction. Donc l'anneau $\mathcal{O}$ est héréditaire.

(b) ⇒ (c) : D'aprés le lemme 2.5 et sa démonstration, $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions et si I est un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $J^n \subseteq I$. On a alors $J^{n+1} \subseteq JI \subseteq I$ et, d'après le lemme 2.7, on peut écrire $I = \mathcal{O}x_1 + J^{n+1} = \mathcal{O}x_1 + JI$. On en déduit, d'après le lemme de Nakayama (voir [105]), que $I = \mathcal{O}x_1$. Comme tout idéal à gauche de $\mathcal{O}$ est un facteur direct d'un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}$ qui est principal c'est un idéal à gauche principal. De même à droite.

(c) ⇒ (a) : Puisque $\mathcal{O}$ est un anneau premier, noethérien, non simple, son radical de Jacobson J, qui est non nul, est alors un idéal à gauche (et à droite) essentiel dans $\mathcal{O}$ qui contient un élément c non diviseur de zéro (d'après le théorème de Goldie (théorème I.1.1)). Comme les idéaux à gauche (et à droite) de $\mathcal{O}$ sont principaux, J s'écrit $J = \mathcal{O}a = b\mathcal{O}$ avec a,b éléments non diviseurs de zéro (car, d'après le lemme 3.8 de [56], on a dans $\mathcal{O}$: $\{x \in \mathcal{O} \mid xy = 0 \Rightarrow y = 0\} = \{x \in \mathcal{O} \mid yx = 0 \Rightarrow y = 0\}$). Ainsi J est un $\mathcal{O}$-module à gauche (et à droite) projectif. *(a)* s'obtient alors par la proposition 1.8. ■

PROPOSITION 2.9. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau semi-local, non simple, ordre d'Asano régulier d'un anneau artinien simple* S. *Alors le radical de Jacobson* J *de $\mathcal{O}$ s'écrit* $J = \mathcal{O}a = a\mathcal{O}$ *avec* a *élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$.*

DEMONSTRATION. - Le radical de Jacobson J de $\mathcal{O}$ est son unique idéal premier non nul. Considérons l'anneau $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/J^2$ et montrons que $\bar{\mathcal{O}}$ est un anneau artinien. D'après le corollaire 2.2, J est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini et donc J/J^2 est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini. Puisque les structures de $\mathcal{O}/J$-module à gauche et de $\mathcal{O}$-module à gauche de J/J^2 coïncident on en déduit que J/J^2 est un $\mathcal{O}/J$-module à gauche de type fini. Comme $\mathcal{O}/J$ est un anneau artinien il résulte de la proposition 12 page 71 de [17] que J/J^2 est un $\mathcal{O}/J$-module à gauche artinien, et donc J/J^2 est un $\mathcal{O}$-module à gauche artinien (d'après la coïncidence des structures). On a la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules à gauche $0 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}/J \longrightarrow 0$ et donc, d'après la proposition 2 page 22 de [17], on en déduit que $\bar{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{O}$-module à gauche artinien. De même $\bar{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{O}$-module à droite artinien. Il en résulte alors que $\bar{\mathcal{O}}$ est un anneau artinien. Si I est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$ contenu dans J il vient $I' = J^{-1}I \subseteq J^{-1}J = \mathcal{O}$ et $JI' = I$. Si de plus I contient J^2 on a aussi $J(I' + J^2) = I$, et donc on peut supposer que I' contient J^2. Donc en passant dans $\bar{\mathcal{O}}$ on obtient alors $\bar{I} = \bar{J}\bar{I}'$ pour tout idéal à gauche $\bar{I}$ de $\bar{\mathcal{O}}$ contenu dans $\bar{J} = J/J^2$. Il résulte alors du théorème 23 page 128 de [65] qu'on a $\bar{J} = \bar{\mathcal{O}}\,\bar{a}$. D'où $J = \mathcal{O}a + J^2$ et J étant un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini, le lemme de Nakayama ([105] page 179) implique qu'on a $J = \mathcal{O}a$. L'élément a est non diviseur de zéro à gauche dans S puisque J contient un élément inversible de S (d'après le théorème 1.1) donc aussi non diviseur de zéro à droite dans S puisque S est un anneau artinien simple ([56] lemme 3.8). D'après la proposition I.3.5, il vient $J = \mathcal{O}a = a\mathcal{O}$. ∎

§ 3. TOUT ORDRE D'ASANO REGULIER, PREMIER ET NOETHERIEN EST HEREDITAIRE.

Dans tout ce paragraphe R désigne un anneau premier, noethérien, ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions.

LEMME 3.1. - *Pour tout idéal premier non nul* P *de* R, *l'anneau* R/P *est simple artinien.*

DEMONSTRATION. - Puisque R est premier, tout idéal bilatère non nul de R est un idéal à gauche (et à droite) essentiel de R et donc, R étant noethérien, il résulte du théorème de Goldie (théorème I.1.1) que c'est un R-idéal bilatère. Soit $\bar{c}$, avec $c \in R$, un élément non diviseur de zéro de R/P. Si $xc = 0$ avec $x \in R$ alors on a $xc \in P$ ce qui implique $x \in P$ et il vient $P^{-1}x \subseteq R$; on obtient $P^{-1}xc = 0$ ce qui entraîne $P^{-1}x \subseteq P$ et ainsi $x \in P^2$ ce qui par induction donne alors $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$. Si on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = Y \neq 0$ alors, d'après le corollaire 2.2, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y = P^n = P^{n+1} = \ldots$ ce qui implique P = R : contradiction. Donc x = 0 et ainsi c est un élément non diviseur de zéro dans R. Alors Rc est un R-idéal à gauche et il contient un R-idéal bilatère B que l'on peut prendre maximal pour cette propriété. Si $B \subseteq P$ alors, avec $B \subseteq Rc$, on obtient $B \subseteq Pc$ ce qui entraîne $P^{-1}B \subseteq Rc$ et la maximalité de B implique $B = P^{-1}B$ d'où l'on déduit $P^{-1} = R = P$: ce qui est impossible. Donc on a $B \not\subseteq P$ ce qui entraîne B + P = R puisque, d'après le corollaire 2.2, l'élément premier P de T'_0 est maximal ; il vient $R = B + P \subseteq Rc + P$ ce qui donne Rc + P = R et donc $\bar{c}$ est inversible dans R/P. Tout élément non diviseur de zéro de R/P étant inversible dans R/P, cet anneau R/P coïncide avec son anneau de fractions qui est simple artinien d'après le corollaire de Goldie. ■

LEMME 3.2. - *Pour tout idéal à gauche (resp. à droite) essentiel* I *de* R, *le* R-*module à gauche (resp. à droite)* R/I *est artinien.*

DEMONSTRATION. - Il résulte du théorème de Goldie que I est un R-idéal à gauche, et donc il contient un R-idéal bilatère B. D'après le corollaire 2.2 on peut écrire $B = P_1^{n_1}.\ldots.P_r^{n_r}$, où les P_i sont des idéaux premiers non nuls de R. Comme P_i^k/P_i^{k+1} est un module à gauche de type fini sur l'anneau R/P_i (structure canonique) et comme R/P_i est un anneau artinien d'après le lemme 3.1, le R/P_i-module à gauche P_i^k/P_i^{k+1} est artinien d'après la proposition 12 page 71 de [17] ; puisque dans ce cas les structures de R/P_i-module à gauche et de R-module à gauche coïncident, on en déduit que P_i^k/P_i^{k+1} est un R-module à gauche artinien. On a la suite exacte $0 \longrightarrow P_i^k/P_i^{k+1} \longrightarrow R/P_i^{k+1} \longrightarrow R/P_i^k \longrightarrow 0$ et donc, d'après la proposition 2 page 22 de [17], si le R-module à gauche R/P_i^k est artinien alors le R-module à gauche R/P_i^{k+1} est artinien. Puisque R/P_i est un anneau artinien à gauche c'est un R-module à gauche artinien (coïncidence des structures) et ainsi on déduit de ce qui précède que $R/P_i^{n_i}$ est un R-module à gauche artinien. D'après le corollaire 2.2 et la proposition II.1.9 on a $P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} = P_1^{n_1} \cap \dots \cap P_r^{n_r}$ et donc il existe un monomorphisme de R-modules à gauche de R/B dans $\prod_{i=1}^{r} R/P_i^{n_i}$. En conséquence R/B est un R-module à gauche artinien. Ceci implique que R/I est un R-module à gauche artinien. ∎

THEOREME 3.3. - *Tout anneau premier noethérien* R *ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions est un anneau héréditaire.*

DEMONSTRATION. - Soit M un idéal à gauche maximal de R. Si K est un idéal à gauche de R maximal tel que $M \cap K = 0$ alors $M \oplus K$ est un idéal à gauche essentiel de R. Si $K \neq 0$ alors $M \oplus K = R$ et ainsi M est un idéal à gauche projectif de R. Si K = 0 alors puisque M est essentiel dans R il résulte du théorème de Goldie que M est un R-idéal à gauche et ainsi M contient un R-idéal bilatère $B = T_1 \dots T_n$, et T_i idéal maximal de R, i = 1,...,n. Si $T_n \not\subseteq M$ on a $T_n + M = R$ et $T_1 \dots T_{n-1} = T_1 \dots T_{n-1}(T_n + M) \subseteq M$ et par itération successive M contient un idéal maximal qui est B. D'après le corollaire 2.2, B est un idéal à gauche (et à droite) projectif et il résulte de la suite exacte $0 \longrightarrow B \longrightarrow R \longrightarrow R/B \longrightarrow 0$ que la dimension projective ([105] p. 282 par exemple) du R-module à gauche R/B est inférieure ou égale à 1. D'après le lemme 3.1 l'anneau R/B est simple artinien donc M/B est un facteur direct de R/B et on a $R/B \simeq R/M \oplus M/B$. Par suite la dimension projective du R-module à gauche R/M est inférieure ou égale à 1 et ainsi si $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow R/M \longrightarrow 0$ est une résolution projective on a $P_0 \oplus M \simeq R \oplus P_1$, d'après la suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow R/M \longrightarrow 0$ et le lemme 2.6. Donc M est un idéal à gauche projectif de R.

Soit I un idéal à gauche essentiel de R. Puisque, d'après le lemme 3.2, le R-module à gauche R/I est artinien il existe une chaîne $I = I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq \dots \subseteq I_1 \subseteq I_0 = R$ d'idéaux à gauche de R tels que I_k/I_{k+1} est un R-module simple (pour tout k = 0,...,n). Il existe alors, pour tout k = 0,...,n, un idéal à gauche maximal M_k de R tel que $I_k/I_{k+1} \simeq R/M_k$. Si I_k est un idéal à gauche projectif de R alors comme on a les suites exactes $0 \to I_{k+1} \to I_k \to I_k/I_{k+1} \to 0$

et $0 \to M_k \to R \to R/M_k \to 0$ on déduit du lemme 2.6 qu'on a $M_k \oplus I_k \simeq I_{k+1} \oplus R$ et comme $M_k \oplus I_k$ est projectif on obtient que I_{k+1} est un idéal à gauche projectif de R. Comme I_1 est un idéal à gauche maximal de R il est projectif et d'après ce qui précède on en déduit par induction que I est un idéal à gauche projectif.

Tout idéal à gauche de R étant facteur direct d'un idéal à gauche essentiel de R est alors projectif. Donc R est un anneau héréditaire à gauche. De même à droite. ■

D'après les théorèmes 3.3 et 2.8, un anneau noethérien, semi-local, non simple, ordre d'Asano régulier d'un anneau simple artinien est un anneau dont tous les idéaux à gauche (et à droite) sont principaux. Notons que le même résultat est vrai si l'on enlève l'hypothèse que l'anneau est noethérien : voir [4].

Nous terminerons ce paragraphe par le résultat suivant qui nous sera utile plus tard :

PROPOSITION 3.4. - *Soit* R *un anneau premier noethérien, ordre d'Asano régulier de son anneau de fractions simple artinien* S. *Si* A *est un idéal bilatère propre non nul de* R, *alors l'anneau* R/A *est à idéaux à gauche (et à droite) principaux.*

DEMONSTRATION. - A est un R-idéal entier et donc, d'après le corollaire 2.2 et la proposition II.1.9, on peut écrire $A = \prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i} = \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{n_i}$, où $P_1,\ldots,P_r$ sont des éléments premiers distincts de T_0' et $n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}$. Posons $A_i = AP_i^{-n_i} = P_1^{n_1} \ldots P_{i-1}^{n_{i-1}} P_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots P_r^{n_r}$. On a alors $A = A_i \cap P_i^{n_i}$, $R = A_i + P_i^{n_i}$ et, pour tout $j \neq i$, $A_j \subseteq P_i^{n_i}$. On en déduit que le monomorphisme canonique de R-modules à gauche et à droite de R/A dans $\bigoplus_{i=1}^{r} R/P_i^{n_i}$ est un isomorphisme, et c'est un isomorphisme de R/A-modules à gauche et à droite. Comme chaque $R/P_i^{n_i}$ est isomorphe, comme R/A-module à gauche et à droite, à l'idéal bilatère A_i/A de R/A, il suffit alors pour obtenir le résultat de démontrer, d'après le lemme page 76 de [65], que chaque $R/P_i^{n_i}$ est un anneau à idéaux à gauche (et à droite) principaux. Le radical de Jacobson de $R/P_i^{n_i}$ étant une intersection d'idéaux premiers (car intersection de tous les annulateurs des modules simples ; cf. [105] page 179) est $P_i/P_i^{n_i}$, car $P_i/P_i^{n_i}$ est le seul idéal premier de $R/P_i^{n_i}$. Avec les lemmes 3.1 et 3.2, et avec le théorème 31 page 71 de [65], on en déduit alors que $R/P_i^{n_i}$ est un anneau primaire. Un raisonnement analogue à celui du lemme 2.7 prouve alors que $R/P_i^{n_i}$ est un anneau à idéaux à gauche (et à droite) principaux. Le résultat est alors établi. ■

§ 4. EXEMPLES D'ORDRES D'ASANO.

Si R est un domaine d'intégrité (anneau commutatif sans diviseurs de zéro) noethérien, intégralement clos, dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, c'est-à-dire si R est un *domaine de Dedekind* alors R est un ordre d'Asano (c'est un ordre maximal de son corps de fractions d'après le paragraphe I.5, et c'est un ordre d'Asano par exemple d'après le théorème 12 page 275 de [109, Vol. I]).

Nous verrons plus tard que le localisé $\mathcal{O}_p$ d'un ordre maximal, premier noethérien $\mathcal{O}$ par rapport à un c-idéal premier P de $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano, semi-local, noethérien, héréditaire (donc ordre régulier d'après le théorème 2.8).

Donnons d'autres exemples :

PROPOSITION 4.1. - *Si* A' *est un anneau entier sur un sous-anneau* A *de son centre et si* P *est un idéal premier de* A, *alors il existe un idéal bilatère premier* P' *de* A' *tel que* $P' \cap A = P$.

DEMONSTRATION. - Identique à la deuxième démonstration page 258 du théorème 3 page 257 de [109, Vol. I]. ■

LEMME 4.2. - *Soient* A' *un anneau entier sur un sous-anneau* A *de son centre, et* P, Q *deux idéaux premiers de* A *tels que* $P \subseteq Q$. *Si* P' *est un idéal bilatère premier de* A' *tel que* $P' \cap A = P$, *alors il existe un idéal bilatère premier* Q' *de* A' *contenant* P' *et tel que* $Q' \cap A = Q$.

DEMONSTRATION. - L'ensemble des idéaux bilatères $\mathfrak{a}'$ de A' tels que $P' \subseteq \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}' \cap A \subseteq Q$ étant non vide et inductif possède, d'après le théorème de Zorn, un élément maximal Q'. On démontre comme pour la proposition 4.1 que Q' est un idéal bilatère premier de A' tel que $Q' \cap A = Q$ (et avec par hypothèse $P' \subseteq Q'$). ■

PROPOSITION 4.3. - *Soient* A' *un anneau entier sur un sous-anneau* A *de son centre et* P', Q' *deux idéaux bilatères premiers distincts de* A' *tels que* $P' \subset Q'$. *Si* A'/P' *est un anneau de Goldie (par exemple si* A' *est noethérien), alors* $P' \cap A \neq Q' \cap A$.

DEMONSTRATION. - En passant à l'anneau A'/P' on peut supposer que P' = 0 et que l'anneau A' est premier ; comme de plus A'/P' est entier sur l'anneau $A/P' \cap A$ qui est un sous-anneau de son centre, on passe aussi à cet anneau $A/P' \cap A$ et on suppose que A est premier. Si $\mathfrak{a}'$ est un idéal bilatère non nul de A' alors $\mathfrak{a}'$ est un idéal à gauche et à droite essentiel de A' (car A' est premier) et puisque A' est un anneau de Goldie premier, il résulte du théorème de Goldie (théorème I.1.1) que $\mathfrak{a}'$ contient un élément x non diviseur de zéro de A'. Il existe une relation de dépendance intégrale $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ de x sur A avec $a_0 \neq 0$ (on prend n minimal). On obtient $a_0 \in \mathfrak{a}' \cap A$ et ainsi $\mathfrak{a}' \cap A \neq 0$. D'où le résultat. ■

THEOREME 4.4. - *Soient* R *un domaine de Dedekind de corps de fractions* K *et* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie. Alors tout* R-*ordre maximal* Λ *de* Σ *est un anneau premier, noethérien, ordre d'Asano régulier de* Σ.

DEMONSTRATION. - Λ est un ordre maximal régulier de Σ d'après le théorème I.7.5. Comme R est noethérien, il résulte du corollaire I.7.4 que Λ est un R-module noethérien ce qui implique que Λ est un anneau noethérien. Λ est aussi un anneau premier entier sur son centre R d'après les résultats du paragraphe I.7. Si P est un idéal bilatère premier non nul de Λ alors $P \cap R$ est un idéal premier de R qui est non nul d'après la proposition 4.3 ; puisque R est un domaine de Dedekind, $P \cap R$ est un idéal maximal de R et on déduit de la proposition 4.3 que P est un idéal bilatère maximal de Λ. Il résulte du corollaire 1.7 et du théorème 2.1 que Λ est un ordre d'Asano de Σ. ■

LEMME 4.5. - *Tout anneau* $\mathcal{O}$ *sans diviseurs de zéro, à idéaux à gauche, et à droite, principaux est un ordre d'Asano de son corps de fractions.*

DEMONSTRATION. - C'est une conséquence du théorème de Goldie qu'un anneau noethérien sans diviseurs de zéro possède un corps de fractions (voir § I.1, ou [53] page

422). Il est immédiat de vérifier que l'ordre à gauche d'un $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier $\mathcal{O}a$ est $\mathcal{O}$, et de même à droite. Donc $\mathcal{O}$ est un ordre maximal d'après la proposition I.3.1. Comme de plus tout idéal bilatère de $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-module à gauche libre donc projectif, $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano d'après le théorème 2.1. ■

THEOREME 4.6. - *Soient* K'_0 *le corps construit par Hilbert* [62] *et* K' *un corps de Köthe (voir* § I.8*). Si* X *est une inconnue commutant avec tous les éléments de* K'_0 *et de* K'*, alors* $K'_0[X]$ *est un ordre d'Asano non régulier, et* $K'[X]$ *est un ordre d'Asano régulier qui n'est pas de type fini sur son centre.*

DEMONSTRATION. - $K'_0[X]$ et $K'[X]$ sont des anneaux sans diviseurs de zéro, à idéaux à gauche (et à droite) principaux. Le résultat s'obtient alors par le lemme 4.5 et les propositions I.8.4 et I.8.6. ■

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

La notion d'ordre d'Asano est due à J.C. ROBSON dans [100] d'où est tiré l'essentiel du paragraphe 1 ainsi que le théorème 2.1 et le corollaire 2.2. Le théorème 2.8 provient de C.R. HAJARNAVIS and T.H. LENAGAN [59]. Les autres propriétés du paragraphe 2 sont extraites de mémoires de G. MICHLER [85], de D. EISENBUD and J.C. ROBSON [44], et de A.W. CHATTERS and S.M. GINN [32]. Le paragraphe 3 est tiré de T.H. LENAGAN [69] mais le théorème 3.3 se trouve pour la première fois dans G. MICHLER [85]. Enfin les propositions 4.1 et 4.3 sont dues à W.D. BLAIR [12].

CHAPITRE IV.

LOCALISATION DANS LES ORDRES MAXIMAUX.

§ 1. SUR LA THEORIE DE LA LOCALISATION.

Ce paragraphe contient des rappels sur la théorie de la localisation. Pour plus de détails sur cette théorie en général le lecteur pourra se reporter à [105], [54], [53], [57]. Pour la commodité du lecteur, les principaux résultats et les résultats plus récents seront énoncés avec des références précises.

Dans tout ce paragraphe R désigne un anneau.

DEFINITION. [53]. - *On appelle* ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche *de* R, *tout ensemble non vide* $\mathcal{F}$ *d'idéaux à gauche de* R *qui vérifie les conditions suivantes :*

(T_1) *Si* $\mathfrak{a}'$ *est un idéal à gauche de* R *contenant un élément* $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ *alors* $\mathfrak{a}' \in \mathcal{F}$.

(T_2) *Si* $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ *et si* $\mathfrak{a}' \in \mathcal{F}$ *alors* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \in \mathcal{F}$.

(T_3) *Si* $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ *et si* $x \in R$ *alors* $\mathfrak{a}^{\bullet} \cdot x \in \mathcal{F}$.

(I) *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal à gauche de* R *tel qu'il existe un élément* $\mathfrak{b} \in \mathcal{F}$ *tel que, pour tout* $b \in \mathfrak{b}$, *on ait* $\mathfrak{a}^{\bullet} \cdot b \in \mathcal{F}$, *alors* $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$.

En particulier, il résulte de ces conditions, qu'un produit fini d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de R. Si M est un R-module à gauche, on note $\mathcal{F}(M) = \{x \in M \mid \exists\, \mathfrak{a} \in \mathcal{F} \quad \mathfrak{a}\, x = 0\}$; $\mathcal{F}(M)$ est un sous-module de M. Alors *le localisé de* M *selon* $\mathcal{F}$, noté $M_{\mathcal{F}}$, est l'enveloppe $\mathcal{F}$-injective du module $M/\mathscr{F}(M)$, c'est-à-dire $M_{\mathscr{F}} = \{x \in E(M/\mathscr{F}(M)) \mid \exists\ \mathfrak{a} \in \mathscr{F}\ \mathfrak{a}x \subseteq M/\mathscr{F}(M)\}$ où $E(M/\mathscr{F}(M))$ désigne l'enveloppe injective de $M/\mathscr{F}(M)$. En particulier $\mathscr{F}(R)$ est un idéal bilatère de R et $R_{\mathscr{F}}$ est un anneau contenant $R/\mathscr{F}(R)$ comme sous-anneau ; de plus $M_{\mathscr{F}}$ est un $R_{\mathscr{F}}$-module à gauche. Si M et M' sont deux R-modules à gauche et si $f : M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de R-modules alors il existe un homomorphisme $f_{\mathscr{F}}$ de $M_{\mathscr{F}}$ dans $M'_{\mathscr{F}}$ qui "prolonge" f et $f_{\mathscr{F}}$ est même un homomorphisme de $R_{\mathscr{F}}$-modules. De la sorte on définit un foncteur $\cdot_{\mathscr{F}}$ covariant de la catégorie des R-modules à gauche dans elle-même, et ce foncteur est exact à gauche. (Voir [57], [105], [54]).

PROPOSITION 1.1. - *Si* R *est un anneau premier noethérien et si* $\mathscr{F}$ *est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de* R *tel que* $0 \notin \mathscr{F}$, *alors* $\mathscr{F}(R) = 0$ *et* $R_{\mathscr{F}}$ *est un sous-anneau (contenant* R *comme sous-anneau) de l'anneau classique de fractions* S *de* R.

DEMONSTRATION. - Si $\mathscr{F}(R) \neq 0$ alors, d'après le théorème de Goldie (théorème I.1.1), l'idéal bilatère $\mathscr{F}(R)$ contient un élément c non diviseur de zéro. Alors il existe $\mathfrak{a} \in \mathscr{F}$ tel que $\mathfrak{a}c = 0$ ce qui entraîne $\mathfrak{a} = 0$. D'où $0 \in \mathscr{F}$: contradiction. Donc $\mathscr{F}(R) = 0$. Comme d'autre part S est l'enveloppe injective de R considéré comme R-module à gauche (et aussi à droite) (voir [53] pages 418 et 419), on a le résultat.

■

Certains ensembles topologisants et idempotents donnent des propriétés particulièrement intéressantes :

PROPOSITION 1.2. - *Soit* $\mathscr{F}$ *un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche d'un anneau* R. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathscr{F}$ *on a* $R_{\mathscr{F}}\, i(\mathfrak{a}) = R_{\mathscr{F}}$, *où* $i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + \mathscr{F}(R)/\mathscr{F}(R)$.

(b) Pour tout R*-module à gauche* M, $M_{\mathscr{F}}$ *est isomorphe à* $R_{\mathscr{F}} \otimes_R M$.

(c) Le foncteur $\cdot_{\mathscr{F}}$ *est exact à droite et commute aux sommes directes.*

Lorsque les propriétés de la proposition 1.2 sont réalisées, on dit que $\mathscr{F}$ *vérifie la condition* (T) ou encore, suivant [105], on dit que $\mathscr{F}$ *est parfait.* Par exemple $\mathscr{F}$ est parfait si tout élément de $\mathscr{F}$ contient un idéal à gauche projectif de type fini appartenant à $\mathcal{F}$. Le résultat suivant nous sera utile :

PROPOSITION 1.3. - *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble topologisant, idempotent et parfait d'idéaux à gauche d'un anneau* R *tel que* $\mathcal{F}(R) = 0$. *Alors, pour tout idéal à gauche* I *de* $R_{\mathcal{F}}$, *on a* $I = R_{\mathcal{F}}(I \cap R)$. *En particulier, si* R *est noethérien à gauche, alors* $R_{\mathcal{F}}$ *est un anneau noethérien à gauche.*

Pour les démonstrations des deux résultats qui précèdent et pour plus de détails le lecteur peut se reporter au § 17 de [54], ou à [105] (ou éventuellement à [57]).

Aux idéaux bilatères premiers qui jouent, en général, un rôle important, il est possible d'associer plusieurs localisations (dont, en général, les propriétés diffèrent). Comme cela nous sera utile, donnons uniquement les précisions qui nous seront nécessaires par la suite :

Soit P un idéal bilatère premier de l'anneau R. On pose $\mathcal{C}(P) = \{c \in R \mid cx \in P \Rightarrow x \in P\}$; $\mathcal{C}(P)$ est une partie multiplicative de R. On désignera par $\mathcal{F}^P$ l'ensemble des idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ de R tels que pour tout $a \in R$ il existe $c \in \mathcal{C}(P)$ tel que $ca \in \mathfrak{a}$ (c'est-à-dire $\mathfrak{a} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \forall\, a \in R \quad \mathcal{C}(P) \cap (\mathfrak{a} \cdot\!\cdot a) \neq \phi$) ; $\mathcal{F}^P$ est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de R. Si R vérifie la condition de Ore à gauche selon $\mathcal{C}(P)$, alors $\mathcal{F}^P$ est l'ensemble des idéaux à gauche de R coupant $\mathcal{C}(P)$; si de plus $\mathcal{C}(P)$ est formé d'éléments non diviseurs de zéro, alors le localisé $R_{\mathcal{F}^P}$ de R selon $\mathcal{F}^P$ n'est autre que l'anneau de fractions à gauche de R selon $\mathcal{C}(P)$ que l'on note $R_{\mathcal{C}(P)}$. (Voir [53] pages 414 et 415).

De même à droite : on posera $\mathcal{C}_r(P) = \{c \in R \mid xc \in P \Rightarrow x \in P\}$, et on désignera par ${}^P\mathcal{F}$ l'ensemble topologisant et idempotent des idéaux à droite $\mathfrak{a}$ de R tels que pour tout $a \in R$ il existe $c \in \mathcal{C}_r(P)$ tel que $ac \in \mathfrak{a}$. Si R est un anneau noethérien on a $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}_r(P)$, (voir [55]).

En ce qui concerne la condition de Ore selon $\mathcal{C}(P)$ on a plusieurs résultats. Donnons d'abord une définition :

DEFINITION. - [55]. *Soit* P *un idéal bilatère premier d'un anneau noethérien* R. *On définit* $P^{(n)}$, *la* puissance symbolique n-*ième de* P, *par récurrence sur* n, *à partir* *de* $P^{(1)} = P$, *de la manière suivante :* $P^{(n)}$ *est le plus grand idéal bilatère de* R *tel qu'il existe deux idéaux bilatères* I *et* J *de* R *tels que* $I \not\subseteq P$, $J \not\subseteq P$, *et* $I\, P^{(n)} J \subseteq PP^{(n-1)}$.

Notons que $P^{(n)}$ est un idéal à gauche (resp. à droite) P-primaire (c'est-à-dire $AX \subseteq P^{(n)}$, avec A idéal bilatère de R non contenu dans P et X idéal à gauche de R, implique $X \subseteq P^{(n)}$). On a aussi $P^{(n)} \subseteq P^{(m)}$ pour $n \geqslant m \geqslant 1$.

Il vient alors :

THEOREME 1.4. - [55]. *Soient* R *un anneau noethérien et* P *un idéal premier de* R *tel que* $\bigcap\limits_n P^{(n)} = 0$. *Alors* $\mathscr{C}(P)$ *est formé d'éléments non diviseurs de zéro. Si de plus* R *vérifie la condition* (**) *suivante :*

(**) *Pour tout idéal à gauche* $\mathfrak{a}$ *de* R *il existe un entier naturel* m *tel que*

$$\mathfrak{a} \cap P^{(m)} \subseteq \{x \in R \mid \exists\ I \in \mathscr{F}^P \quad Ix \subseteq P\mathfrak{a}\}.$$

alors R *vérifie la condition de Ore à gauche selon* $\mathscr{C}(P)$.

DEMONSTRATION. - Voir [55] pages 98, 99 et 102. ∎

THEOREME 1.5. - [61]. *Soit* R *un anneau noethérien à gauche. Si* P *est un idéal premier de* R *tel que* $\mathscr{F}^P(R) = 0$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Tout élément de $\mathscr{C}(P)$ *est inversible dans* $R_{\mathscr{F}P}$.

(b) R *vérifie la condition de Ore à gauche selon* $\mathscr{C}(P)$.

(c) $\mathscr{F}^P$ *vérifie la condition* (T) *et* $R_{\mathscr{F}P}\, P\, R_{\mathscr{F}P} \neq R_{\mathscr{F}P}$.

(d) $PR_{\mathscr{F}P}$ *est le radical de Jacobson de* $R_{\mathscr{F}P}$ *et l'anneau* $R_{\mathscr{F}P}/PR_{\mathscr{F}P}$ *est simple artinien.*

Le résultat plus récent suivant nous sera également utile :

THEOREME 1.6. - [10]. *Soit* P *un idéal premier d'un anneau* R *tel que* R/P *soit un anneau de Goldie à gauche. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $P_{\mathscr{F}P}$ *est le radical de Jacobson de* $R_{\mathscr{F}P}$ *et l'anneau* $R_{\mathscr{F}P} / P_{\mathscr{F}P}$ *est simple artinien.*

(b) $P_{\mathscr{F}P}$ *est un idéal bilatère de* $R_{\mathscr{F}P}$ *et* $\mathscr{F}^P$ *vérifie la condition* (T).

(c) R *vérifie la condition de Ore à gauche selon* $\mathscr{C}(P)$ *et pour tout* $c \in \mathscr{C}(P)$ *il existe* $r \in R$ *tel que* $rc \in \mathscr{C}(P)$ *et tel que pour tout* $a \in R$ *vérifiant* $arc = 0$ *il existe* $c' \in \mathscr{C}(P)$ *vérifiant* $c'ar = 0$.

Nous dirons qu'une famille non vide $\mathscr{F}'$ d'idéaux bilatères de R vérifie la *condition* (M) si, quels que soient $N, N' \in \mathscr{F}'$ il existe $N'' \in \mathscr{F}'$ tel que $N'' \subseteq NN'$. Si $\mathscr{F}'$ est ainsi, alors l'ensemble $\mathscr{F}$ des idéaux à gauche (resp. à droite) de R contenant un idéal bilatère appartenant à $\mathscr{F}'$ est un ensemble topologisant (c'est-à-dire vérifie les conditions (T_1), (T_2) et (T_3)) ; on appelle alors *famille bilatère d'idéaux à gauche* (resp. à droite) *de base* $\mathscr{F}'$, l'ensemble topologisant et idempotent engendré par $\mathscr{F}$ (voir [57]), et le foncteur localisation se note alors $\cdot_{\mathscr{F}'}$ (resp. ${}_{\mathscr{F}'}\cdot$). Notons que si R est un anneau noethérien alors l'ensemble topologisant $\mathscr{F}$ est idempotent et est alors la famille bilatère de base $\mathscr{F}'$.

Par exemple si P est un idéal premier d'un anneau noethérien R, alors la famille $\mathscr{F}'_P$ des idéaux bilatères de R non contenu dans P est une famille non vide d'idéaux bilatères qui vérifie la condition (M) et la famille bilatère d'idéaux à gauche $\mathscr{F}_P$ (resp. d'idéaux à droite ${}_P\mathscr{F}$) de base $\mathscr{F}'_P$ est en général distincte de l'ensemble topologisant et idempotent $\mathscr{F}^P$ (resp. ${}^P\mathscr{F}$) précédemment défini. En fait on a $\mathscr{F}_P \subseteq \mathscr{F}^P$. Pour simplifier l'anneau $R_{\mathscr{F}'_P}$ (resp. ${}_{\mathscr{F}'_P}R$) se notera R_P (resp. ${}_PR$).

Par exemple aussi, plus généralement, si $\mathscr{P}$ est une famille non vide d'idéaux premiers d'un anneau noethérien R, alors la famille $\mathscr{F}'_{\mathscr{P}}$, des idéaux bilatères de R non contenus dans P pour tout $P \in \mathscr{P}$, est une famille d'idéaux bilatères qui vérifie la condition (M), ce qui permettra de considérer la famille bilatère d'idéaux à gauche $\mathscr{F}_{\mathscr{P}}$ (resp. d'idéaux à droite ${}_{\mathscr{P}}\mathscr{F}$) de base $\mathscr{F}'_{\mathscr{P}}$.

PROPOSITION 1.7. - *Soit* R *un anneau premier, noethérien, ordre régulier de son anneau classique de fractions* S. *Si* $\mathscr{F}$ *est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de* R, *alors la famille* $\mathscr{F}'$ *des idéaux bilatères de* R *qui appartiennent à* $\mathscr{F}$ *vérifie la condition* (M) *et on a* $R_{\mathscr{F}} = R_{\mathscr{F}'}$. *En particulier si* P *est un idéal premier de* R *on a* $R_{\mathscr{F}P} = R_{\mathscr{F}'_P} = R_{\mathscr{F}_P}$.

DEMONSTRATION. - $\mathcal{F}'$ vérifie la condition (M) car $\mathcal{F}$ la vérifie. Pour montrer que $R_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}'}$ on peut supposer que $0 \notin \mathcal{F}$ (et donc $0 \notin \mathcal{F}'$), et ainsi utiliser la proposition 1.1. Il est évident qu'on a $R_{\mathcal{F}'} \subseteq R_{\mathcal{F}}$. Réciproquement, si $x \in R_{\mathcal{F}}$ alors $A = R + RxR$ est un R-idéal bilatère d'après la proposition I.4.1, et il existe $\lambda \in R$ tel que λ est inversible dans S et $\lambda A \subseteq R$. Alors λA est un idéal à droite de type fini de R et on peut écrire $\lambda A = \sum_{i=1}^{n} a_i R$ ce qui implique $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{-1} a_i R$. Puisque $\lambda^{-1} a_i \in R_{\mathcal{F}}$ il existe $I_i \in \mathcal{F}$ tel que $I_i \lambda^{-1} a_i \subseteq R$. Si on pose $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, on a $I \in \mathcal{F}$ et $I\lambda^{-1} a_i \subseteq R$ pour tout $i = 1,\dots,n$. On obtient $IA \subseteq R$ et en particulier il vient $RIRx \subseteq R$. Comme $I \in \mathcal{F}$ on a $RIR \in \mathcal{F}$ et donc $RIR \in \mathcal{F}'$. Ainsi $x \in R_{\mathcal{F}'}$. En conséquence $R_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}'}$. En particulier si P est un idéal premier de R appliquons ce qui précède en faisant $\mathcal{F} = \mathcal{F}^P$ et montrons que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_P$: on a toujours $\mathcal{F}'_P \subseteq \mathcal{F}'$ car $\mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}^P$; tout idéal bilatère $N \in \mathcal{F}^P$ contient un élément c de $\mathcal{C}(P)$ et par suite $N \in \mathcal{F}'_P$ ce qui nous donne $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'_P$. D'où le résultat. ■

P. Gabriel [53] a introduit la *condition* (H) suivante pour un anneau :

(H) Si I est un idéal à gauche de R et si P est l'annulateur de R/I, il existe un nombre fini d'éléments $x_1,\dots,x_n$ de R/I tels qu'on ait $P = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}(x_i)$.

Par exemple si R est un anneau tel que son centre Z(R) soit un anneau noethérien et tel que R soit un Z(R)-module de type fini, alors R vérifie la condition (H) (voir [53] page 426).

PROPOSITION 1.8. - *Soit* R *un anneau noethérien qui vérifie la condition* (H). *Si* $\mathcal{F}$ *est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de* R, *alors pour tout* $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$ *il existe des idéaux premiers* $P_1,\dots,P_n$ *de* R *qui appartiennent à* $\mathcal{F}$ *tels que* $\prod_{i=1}^{n} P_i \subseteq \mathfrak{A}$. *De plus pour tout idéal premier* P *de* R *on a* $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}^P$.

DEMONSTRATION. - La première partie de la proposition n'est autre qu'une partie du corollaire 1 page 425 de [53]. Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}^P$ alors il existe des idéaux premiers $P_1,\dots,P_n$ de R tels que, pour tout i, $P_i \in \mathcal{F}^P$ et $\prod_{i=1}^{n} P_i \subseteq \mathfrak{A}$; on a donc $P_i \nsubseteq P$, pour tout i, et ainsi $\prod_{i=1}^{n} P_i \nsubseteq P$ ce qui entraîne $\prod_{i=1}^{n} P_i \in \mathcal{F}'_P$ et par conséquent

$\mathfrak{A} \in \mathcal{F}_P$. Comme d'autre part on a toujours $\mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}^P$ on obtient $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}^P$. ∎

§ 2. LOCALISES BILATERES D'UN ORDRE MAXIMAL, PREMIER, NOETHERIEN, NON NECESSAIREMENT REGULIER.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau classique de fractions S.

Conformément aux notations du chapitre II, A^* désignera le c-idéal plus grand élément de la classe d'Artin $\tilde{\bar{A}}$ d'un $\mathcal{O}$-idéal A.

PROPOSITION 2.1. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{O}$ tel que* $0 \notin \mathcal{F}$ *(resp.* $0 \notin \mathcal{G}$*). Si* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = {}_{\mathcal{G}}\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, *alors* $\mathcal{O}'$ *est un ordre maximal de* S.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 1.1 on a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}' \subseteq S$ et ainsi, d'après la proposition I.2.1, $\mathcal{O}'$ est un ordre de S. Soit A un $\mathcal{O}'$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{O}'$ et considérons $\lambda \in \mathcal{O}_\ell(A)$. Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, $\lambda(A \cap \mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini, et, comme on a $\lambda(A \cap \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}'$, il existe $I \in \mathcal{F}$ tel que $I\lambda(A \cap \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$. On a donc $I\lambda(A \cap \mathcal{O}) \subseteq A \cap \mathcal{O}$ et, comme $A \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, il résulte de la proposition I.3.1 qu'on à $I\lambda \subseteq \mathcal{O}$. D'où $\lambda \in \mathcal{O}'$. Donc $\mathcal{O}_\ell(A) = \mathcal{O}'$. De même $\mathcal{O}_r(A) = \mathcal{O}'$ en utilisant $\mathcal{G}$. La proposition I.3.1 nous donne alors le résultat. ∎

PROPOSITION 2.2. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si $\mathcal{F}'$ est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de $\mathcal{O}$ qui vérifie la condition* (M), *alors on a* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = {}_{\mathcal{F}'}\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un ordre maximal de* S. *En particulier pour tout idéal premier* P *de $\mathcal{O}$ on a* $\mathcal{O}_P = {}_P\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{O}_P$ *est un ordre maximal de* S.

DEMONSTRATION. - Avec la proposition 1.1 et la définition d'une famille bilatère il est immédiat qu'on a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \{x \in S | \exists\ N \in \mathcal{F}' \quad Nx \subseteq \mathcal{O}\}$ et

${}_{\mathscr{F}'}\mathcal{O} = \{x \in S \mid \exists\, N \in \mathscr{F}' \quad xN \subseteq \mathcal{O}\}$. Avec la proposition II.2.4 on obtient alors $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'} = {}_{\mathscr{F}'}\mathcal{O}$, et $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$ est un ordre maximal de S par application de la proposition 2.1. ■

LEMME 2.3. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Il vient :*

(i) Si $\mathscr{F}'$ est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de $\mathcal{O}$ qui vérifie la condition (M) *et si* A *est un* c- *$\mathcal{O}$-idéal, alors on a $A_{\mathscr{F}'} = {}_{\mathscr{F}'}A$ et $A_{\mathscr{F}'}$ est un* c- *$\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-idéal.*

(ii) Si P *est un* c- *$\mathcal{O}$-idéal entier premier et si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal, alors on a $A_P = {}_PA$ et A_P est un* c- *$\mathcal{O}_P$-idéal.*

DEMONSTRATION. - *(i)* : On a $A_{\mathscr{F}'} = \{x \in S \mid \exists\, N \in \mathscr{F}' \quad Nx \subseteq A\}$ et donc, par application de la proposition II.2.4, on obtient $A_{\mathscr{F}'} = \bigcup_{N \in \mathscr{F}'} N^{-1}.A = \bigcup_{N \in \mathscr{F}'} A.N^{-1} = {}_{\mathscr{F}'}A$.
En conséquence $A_{\mathscr{F}'} = {}_{\mathscr{F}'}A$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-module à gauche et à droite, et il est immédiat de vérifier que c'est un $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-idéal bilatère tel que $A^{-1} \subseteq (A_{\mathscr{F}'})^{-1}$ (car on a $A^{-1}A_{\mathscr{F}'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$ avec $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$ ordre maximal de S). Il vient
$A^{-1}(A_{\mathscr{F}'})^* \subseteq (A_{\mathscr{F}'})^{-1}(A_{\mathscr{F}'})^* \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$, où $(A_{\mathscr{F}'})^*$ désigne le c- $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-idéal $[(A_{\mathscr{F}'})^{-1}]^{-1}$;
de plus, pour tout $x \in (A_{\mathscr{F}'})^*$, $A^{-1}x$ est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini (car il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $A^{-1}\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et, comme $\mathcal{O}$ est noethérien, on peut écrire $A^{-1}\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}u_i$, c'est-à-dire $A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}u_i\lambda^{-1}$, ce qui entraîne $A^{-1}x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}u_i\lambda^{-1}x$)
et donc il existe $N \in \mathscr{F}'$ tel que $NA^{-1}x \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $x \in A.N^{-1}$ avec le corollaire II.2.5, et par conséquent $x \in A_{\mathscr{F}'}$. Ainsi $A_{\mathscr{F}'}$ est un c- $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-idéal.

(ii) : Si $x \in (A^*)_P$, il existe N idéal bilatère tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq A^*$. Par suite on a $AA^{-1}Nx \subseteq AA^{-1}A^* \subseteq A$. Comme P est un c- $\mathcal{O}$-idéal, il est maximal dans sa classe d'Artin, et on a $AA^{-1} \not\subseteq P$ (car $AA^{-1} \sim \mathcal{O}$). Donc $AA^{-1}N$ est un idéal bilatère de $\mathcal{O}$ non contenu dans P et ainsi on a $x \in A_P$. D'où $(A^*)_P = A_P$. De même ${}_P(A^*) = {}_PA$.
La propriété *(i)* nous donne alors le résultat. ■

PROPOSITION 2.4. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si $\mathscr{F}'$ est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls* *de $\mathcal{O}$ qui vérifie la condition* (M), *alors le groupe* $G_{\mathcal{F}'}$ *des* c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéaux est homomorphe au groupe* G *des* c-$\mathcal{O}$*-idéaux.*

DEMONSTRATION. - Que A soit un c-$\mathcal{O}$-idéal ou un c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal, on notera toujours par A^* le c-idéal quasi-égal à A. D'après le lemme 2.3, l'application $A \longmapsto A_{\mathcal{F}'}$ de G dans $G_{\mathcal{F}'}$ est bien définie. Montrons que c'est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que, quels que soient $A,B \in G$, on a $(A \cdot B)_{\mathcal{F}'} = A_{\mathcal{F}'} \cdot B_{\mathcal{F}'}$ (où $\cdot$ désigne le produit des c-$\mathcal{O}$-idéaux et des c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéaux) : si $x \in A_{\mathcal{F}'}$ et $y \in B_{\mathcal{F}'}$, il existe $N,N' \in \mathcal{F}'$ tels que $Nx \subseteq A$ et $yN' \subseteq B$. Il vient $NxyN' \subseteq AB \subseteq (AB)^*$ ce qui implique $xy \in [(AB)^*]_{\mathcal{F}'}$. Donc $A_{\mathcal{F}'} B_{\mathcal{F}'} \subseteq [(AB)^*]_{\mathcal{F}'}$ et, comme $[(AB)^*]_{\mathcal{F}'}$ est un c-idéal, on obtient $(A_{\mathcal{F}'} B_{\mathcal{F}'})^* \subseteq (A \cdot B)_{\mathcal{F}'}$. Réciproquement si $x \in [(AB)^*]_{\mathcal{F}'}$ il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $Nx \subseteq (AB)^*$, et il vient $NxB^{-1} \subseteq (AB)^*B^{-1} \subseteq (AB)^* \cdot B^{-1} = A$ ce qui entraîne $xB^{-1} \subseteq A_{\mathcal{F}'}$. On a $B(B_{\mathcal{F}'})^{-1} \subseteq B_{\mathcal{F}'}(B_{\mathcal{F}'})^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, et comme pour tout $y \in (B_{\mathcal{F}'})^{-1}$ le $\mathcal{O}$-module à gauche By est de type fini (car $\mathcal{O}$ est noethérien) il existe $M \in \mathcal{F}'$ tel que $ByM \subseteq \mathcal{O}$ c'est-à-dire $yM \subseteq B^{-1}$. On obtient $xyM \subseteq A_{\mathcal{F}'}$ et donc $xy \in A_{\mathcal{F}'}$. Par conséquent $x(B_{\mathcal{F}'})^{-1} \subseteq A_{\mathcal{F}'}$ et par la proposition II.2.4 on obtient $x \in A_{\mathcal{F}'} \cdot B_{\mathcal{F}'}$. Donc $(A \cdot B)_{\mathcal{F}'} \subseteq A_{\mathcal{F}'} \cdot B_{\mathcal{F}'}$. D'où l'égalité $(A \cdot B)_{\mathcal{F}'} = A_{\mathcal{F}'} \cdot B_{\mathcal{F}'}$. Montrons maintenant que l'application $A \longmapsto A_{\mathcal{F}'}$ de G dans $G_{\mathcal{F}'}$ est surjective : si A' est un c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal entier alors, pour tout $x \in A'$, il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $Nx \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $Nx \subseteq A' \cap \mathcal{O} \subseteq (A' \cap \mathcal{O})^*$ et ainsi il vient $x \in [(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'}$. Réciproquement si $x \in [(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'}$, il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $Nx \subseteq (A' \cap \mathcal{O})^*$ ce qui donne $Nx(A' \cap \mathcal{O})^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Si $y \in A'^{-1}$ on a $yA' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et, comme $\mathcal{O}$ est noethérien, $y(A' \cap \mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini ce qui implique qu'il existe $N' \in \mathcal{F}'$ tel que $N'y(A' \cap \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$, c'est-à-dire $N'y \subseteq (A' \cap \mathcal{O})^{-1}$; comme on a $[(A' \cap \mathcal{O})^{-1}]_{\mathcal{F}'} = {}_{\mathcal{F}'}[(A' \cap \mathcal{O})^{-1}]$, il existe $N'' \in \mathcal{F}'$ tel que $yN'' \subseteq (A' \cap \mathcal{O})^{-1}$. On obtient $NxyN'' \subseteq \mathcal{O}$ et ainsi $xy \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. On a donc $[(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'} A'^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ ce qui implique $[(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'} \cdot A'^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et donc $[(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'} \subseteq A'$. En conséquence pour tout c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal entier A' on a $A' = [(A' \cap \mathcal{O})^*]_{\mathcal{F}'}$, avec $A' \cap \mathcal{O}$ $\mathcal{O}$-idéal entier (et donc $(A' \cap \mathcal{O})^*$ c-$\mathcal{O}$-idéal entier). Si maintenant A' est un c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal quelconque, il existe $\lambda \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\lambda A' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, et on obtient $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}'})^* \cdot A' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Donc il existe deux c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéaux entiers B' et C' tels que

$A' = B' \cdot C'^{-1}$ et, avec ce qui précède, on obtient $A' = B_{\mathcal{F}'} \cdot [C_{\mathcal{F}'}]^{-1}$, où $B = (B' \cap \mathcal{O})^*$ et $C = (C' \cap \mathcal{O})^*$. On a donc $A' = [B \cdot C^{-1}]_{\mathcal{F}'}$ ce qui termine la démonstration. ■

COROLLAIRE 2.5. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un* c- $\mathcal{O}$*-idéal entier premier, alors le groupe* G_P *des* c- $\mathcal{O}_P$*-idéaux est isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

DEMONSTRATION. - L'ensemble des c- $\mathcal{O}_P$-idéaux entiers vérifie la condition noethérienne puisque $\mathcal{O}$ est noethérien. D'après le lemme 2.3, P_P est un c- $\mathcal{O}_P$-idéal entier (et $P_P \neq \mathcal{O}_P$). Si Q est un c- $\mathcal{O}_P$-idéal entier premier, on a $Q = [(Q \cap \mathcal{O})^*]_P$, d'après la démonstration de la proposition 2.4, avec $(Q \cap \mathcal{O})^*$ c- $\mathcal{O}$-idéal entier et il est immédiat de vérifier que $(Q \cap \mathcal{O})^*$ est un idéal premier de $\mathcal{O}$. Comme on a $Q \neq \mathcal{O}_P$, on a nécessairement $(Q \cap \mathcal{O})^* \subseteq P$ et, d'après la minimalité de P (proposition II.2.2), on obtient $(Q \cap \mathcal{O})^* = P$ ce qui donne $Q = P_P$. Le résultat s'obtient alors par la proposition II.1.7 et le corollaire II.1.8. ■

0 étant un idéal premier de l'anneau premier noethérien $\mathcal{O}$, la famille $\mathcal{F}'_0$ des idéaux bilatères non nuls de $\mathcal{O}$ vérifie la condition (M). Cette famille va jouer un rôle important dans la suite de ce paragraphe. Nous désignerons par $\mathcal{F}_0$ (resp. par $\mathcal{G}_0$) la famille bilatère d'idéaux à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{O}$ de base $\mathcal{F}'_0$.

PROPOSITION 2.6. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* $\mathcal{F}'$ *est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de $\mathcal{O}$ qui vérifie la condition* (M), *et si* x *est un élément non nul de* S, *alors* $x \in \mathcal{O}_0$ $(= \mathcal{O}_{\mathcal{F}'_0})$ *si et seulement si* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\, x\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéal bilatère. En particulier on a :* $S = \mathcal{O}_0$ *si et seulement si $\mathcal{O}$ est un ordre régulier, si et seulement si* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un ordre régulier.*

DEMONSTRATION. - On peut écrire $x = \alpha\beta^{-1}$ avec α, β éléments non nuls de $\mathcal{O}$ et β inversible dans S. Il vient $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\, \alpha\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\, x\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. De plus, comme S est son anneau classique de fractions, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un anneau de Goldie premier et donc son idéal bilatère non nul $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\, \alpha\, \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ contient un élément inversible dans S. Ainsi

$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ contient un élément inversible dans S. Si, maintenant $x \in \mathcal{O}_0$, il existe $N \in \mathcal{F}'_0$ tel que $Nx \subseteq \mathcal{O}$ et, d'après la proposition II.2.4, on a $N^* x \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $(N^*)_{\mathcal{F}'} x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Comme $(N^*)_{\mathcal{F}'}$ est un c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal (par le lemme 2.3) contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, il existe $\lambda \in u(S) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ tel que $\lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ d'où l'on déduit $x \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, par la démonstration de *(d) ⇒ (a)* de la proposition I.3.1, puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un ordre maximal. Ainsi $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal. Réciproquement s'il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $\lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, on peut supposer que $\lambda \in \mathcal{O}$ et ainsi on obtient $\lambda \mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. On a donc $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et, comme $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}x$ est un $\mathcal{O}$-module à gauche de type fini, il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $N\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$. Par suite $x \in \mathcal{O}_0$. D'après ce qui précède et d'après la proposition I.4.1, la suite est alors immédiate.

■

COROLLAIRE 2.7. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si $\mathcal{F}$ est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à gauche non nuls de $\mathcal{O}$, alors la famille $\mathcal{F}'$ des idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ qui appartiennent à $\mathcal{F}$ vérifie la condition* (M) *et on a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. En particulier, si de plus $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de* S, *l'ordre maximal $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ de* S *est régulier.*

DEMONSTRATION. - $\mathcal{F}'$ vérifie la condition (M) car $\mathcal{F}$ la vérifie. Il est clair que $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{O}_0$. Si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{O}_0$ on a $\mathcal{O}x\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$; comme $x \in \mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}x\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère (d'après la proposition 2.6) et donc est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini car $\mathcal{O}$ est noethérien. Ainsi il existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathfrak{A}\mathcal{O}x\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$ et comme on a $\mathfrak{A}\mathcal{O} \in \mathcal{F}'$ il vient $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. La première partie du résultat est démontrée. Le reste est conséquence des propositions 2.2 et 2.6. ■

COROLLAIRE 2.8. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un idéal premier de $\mathcal{O}$, alors on a $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_{\mathcal{F}^P} = \mathcal{O}_P$.*

DEMONSTRATION. - L'ensemble $\mathcal{F}'$ des idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ qui appartiennent à $\mathcal{F}^P$ est l'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ qui coupent $\mathcal{C}(P)$. Comme tout idéal bilatère non contenu dans P coupe $\mathcal{C}(P)$ on a $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_P$, et le corollaire 2.7 nous donne le résultat. ■

LEMME 2.9. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* $\mathcal{F}'$ *est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de* $\mathcal{O}$ *qui vérifie la condition* (M) *et si* $\mathcal{F}$ *est la famille bilatère d'idéaux à gauche de* $\mathcal{O}$ *de base* $\mathcal{F}'$*, alors on a* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_0$ *si et seulement si* $G_{\mathcal{F}'} = \{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\}$*, si et seulement si* $P \in \mathcal{F}$ *pour tous les* c-$\mathcal{O}$-*idéaux entiers premiers* P. *En particulier* $\mathcal{O}_0$ *est un ordre maximal dont le groupe des* c-*idéaux est trivial.*

DEMONSTRATION. - $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_0 \Rightarrow G_{\mathcal{F}'} = \{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\}$: si A' est un c-$\mathcal{O}_0$-idéal contenu dans $\mathcal{O}_0$ il existe, d'après la proposition 2.4, un c-$\mathcal{O}$-idéal entier A tel que $A' = A_0$ ce qui, avec la proposition II.2.4, nous donne $A' = \bigcup_{N \in \mathcal{F}'_0} (N^{-1}.A)$. D'où $\mathcal{O} = A^{-1}.A \subseteq A'$ et donc $A' = \mathcal{O}_0$. Comme un c-$\mathcal{O}_0$-idéal quelconque A' s'écrit $A' = B'.C'^{-1}$, avec B' et C' c-$\mathcal{O}_0$-idéaux entiers (voir la fin de la démonstration de la proposition 2.4), on obtient $G_{\mathcal{F}'} = \{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\}$.

$G_{\mathcal{F}'} = \{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\} \Rightarrow P \in \mathcal{F}$ pour tous les c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers P : $P_{\mathcal{F}'}$ est un c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal d'après le lemme 2.3, et donc on a $P_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ ce qui implique $P \in \mathcal{F}$.

$P \in \mathcal{F}$ pour tous les c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers $P \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_0$: si $x \in \mathcal{O}_0$ il existe $N \in \mathcal{F}'_0$ tel que $Nx \subseteq \mathcal{O}$ et donc $N^*x \subseteq \mathcal{O}$ par la proposition II.2.4. Avec les propositions II.1.7, II.2.2 et II.2.6, on a $N^* = P_1.P_2. \ldots . P_n$, où les P_i sont des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, ce qui donne $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq N^*$, et par suite $N^* \in \mathcal{F}$ ce qui implique $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Comme on a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_0$ on obtient $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_0$. ∎

PROPOSITION 2.10. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* $\mathcal{F}'$ *est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de* $\mathcal{O}$ *qui vérifie la condition* (M) *et si* $\mathcal{F}$ *est la famille bilatère d'idéaux à gauche de* $\mathcal{O}$ *de base* $\mathcal{F}'$*, alors si* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \neq \mathcal{O}_0$ *on a* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}'} \mathcal{O}_P$ *où* $\mathcal{P}'$ *est l'ensemble des* c-$\mathcal{O}$-*idéaux entiers premiers qui n'appartiennent pas à* $\mathcal{F}$.

DEMONSTRATION. - D'après le lemme 2.9 on a $\mathcal{P}' \neq \phi$. Si $P \in \mathcal{P}'$ on a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_P$ (car si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $Nx \subseteq \mathcal{O}$ et comme on a $N \not\subseteq P$ (sinon $P \in \mathcal{F}$ ce qui n'est pas) il vient $x \in \mathcal{O}_P$). Réciproquement si $x \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}'} \mathcal{O}_P$ il vient : pour tout $P \in \mathcal{P}'$ il existe A(P) idéal bilatère non contenu dans P tel que

$A(P)x \subseteq \mathcal{O}$. D'où $(\sum_{P\in\mathcal{P}'} A(P))x \subseteq \mathcal{O}$. Posons $A = (\sum_{P\in\mathcal{P}'} A(P))^*$. La proposition II.2.4 donne $Ax \subseteq \mathcal{O}$. Si $A = \mathcal{O}$ alors $x \in \mathcal{O}$ et donc $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Si $A \neq \mathcal{O}$, les propositions II.1.7, II.2.2 et II.2.6 donnent $A = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$ où les P_i sont des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, et on a donc $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq A$. Si $A \notin \mathcal{F}$ il existe un indice i tel que $P_i \notin \mathcal{F}$ ce qui entraîne $P_i \in \mathcal{P}'$ et donc $A(P_i) \subseteq A \subseteq P_i$: contradiction. Donc $A \in \mathcal{F}$, ce qui implique $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. D'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 2.11. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions S. Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers. Alors on a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$ si et seulement si $\mathcal{P} = \phi$. Si $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_0$, alors on a*

$$\mathcal{O} = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_0 \cap \left(\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}P}\right).$$

DEMONSTRATION. - Si on considère $\mathcal{F}' = \{\mathcal{O}\}$ alors $\mathcal{F}'$ est une famille qui vérifie la condition (M) et on a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Le résultat se déduit alors immédiatement du lemme 2.9, de la proposition 2.10 et du corollaire 2.8. ∎

Dans toute la suite de ce paragraphe, on dédignera par $\mathcal{P}$ l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, et on supposera $\mathcal{P} \neq \phi$ c'est-à-dire $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_0$ (d'après le corollaire 2.11). Le but de ce qui suit est d'étudier l'anneau $\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}P}$.

PROPOSITION 2.12. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions S. Si P est un c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier, alors, pour tout $n \geqslant 1$, la puissance symbolique n-ième $P^{(n)}$ de P est le plus grand idéal de la classe de P^n dans l'équivalence d'Artin (dans T_0 ; cf. § II.2).*

DEMONSTRATION. - On a $(P^{(n)})^*(P^{(n)})^{-1} P^{(n)} \subseteq P^{(n)}$. Comme P n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$ on a $(P^{(n)})^{-1}P^{(n)} \not\subseteq P$, et comme $P^{(n)}$ est un idéal à droite P-primaire (voir § 1) on obtient alors $(P^{(n)})^* \subseteq P^{(n)}$. Donc $P^{(n)} = (P^{(n)})^*$. Montrons par récurrence sur n que l'on a $P^{(n)} = (P^n)^*$: pour n = 1 c'est vérifié ; par l'hypothèse de récurrence on a $P^{(n-1)} = (P^{n-1})^*$ ce qui entraîne $P^{n-1} \subseteq P^{(n-1)}$ et donc $P^n \subseteq PP^{(n-1)}$ ce qui, par définition de $P^{(n)}$, nous donne $P^n \subseteq P^{(n)}$, d'où il résulte $(P^n)^* \subseteq P^{(n)}$. De plus il existe deux idéaux bilatères I et J de $\mathcal{O}$ tels que $I \not\subseteq P$, $J \not\subseteq P$ et $IP^{(n)}J \subseteq PP^{(n-1)}$;

d'où, dans le groupe des c-idéaux : $I^*.J^*.P^{(n)} \subseteq P.P^{(n-1)}$, c'est-à-dire $I^*.J^*.P^{(n)}.(P^{(n-1)})^{-1} \subseteq P$, et ceci entraîne $P^{(n)}.(P^{(n-1)})^{-1} \subseteq P$. Alors on peut écrire $(P^n)^* \subseteq P^{(n)} \subseteq P.P^{(n-1)} = P.(P^{n-1})^* = (P^n)^*$ et ainsi on a $(P^n)^* = P^{(n)}$. ■

PROPOSITION 2.13. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un* c-*$\mathcal{O}$-idéal entier premier et si* I *est un idéal à gauche de $\mathcal{O}$, alors il existe un entier* $n \geqslant 1$ *et un idéal bilatère* N *de $\mathcal{O}$ non contenu dans* P *tels que* $N(I \cap P^{(n)}) \subseteq PI$.

DEMONSTRATION. - Comme, pour $k \geqslant 1$, on a $(P^{(k)})^{-1}(P^{(k)} \cap I) \subseteq \mathcal{O}$, et comme $\mathcal{O}$ est noethérien, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\sum_{k\geqslant 1} (P^{(k)})^{-1}(P^{(k)} \cap I) = \sum_{k=1}^{n} (P^{(k)})^{-1}(P^{(k)} \cap I).$$ Comme on a

$$P^{(n+1)}(P^{(n+1)})^{-1}(I \cap P^{(n+1)}) \subseteq \sum_{k=1}^{n} P^{(n+1)}(P^{(k)})^{-1}(P^{(k)} \cap I),$$ et comme, d'après la proposition 2.12, on a $P^{(n)} \subseteq P^{(k)}$ pour $k \leqslant n$ ce qui implique $P^{(n+1)}(P^{(k)})^{-1} \subseteq P^{(n+1)}.(P^{(n)})^{-1} = P$, on obtient $P^{(n+1)}(P^{(n+1)})^{-1}(I \cap P^{(n+1)}) \subseteq PI$ avec $N = P^{(n+1)}(P^{(n+1)})^{-1}$ idéal bilatère de $\mathcal{O}$ non contenu dans P (car P n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$). ■

COROLLAIRE 2.14. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un* c-*$\mathcal{O}$-idéal entier premier on a* $\bigcap_{n\geqslant 1} P^{(n)} = 0$. *Les éléments de* $\mathscr{C}(P)$ *sont non diviseurs de zéro dans $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore à gauche et à droite selon* $\mathscr{C}(P)$.

DEMONSTRATION. - Si $\bigcap_n P^{(n)} \neq 0$ alors, d'après le théorème de Goldie, il existe un élément régulier λ tel que $\lambda \in \bigcap_n P^{(n)}$. D'après la proposition 2.13 il existe un entier $n \geqslant 1$ et un idéal bilatère A de $\mathcal{O}$ non contenu dans P tels que $A(\mathcal{O}\lambda \cap P^{(n)}) \subseteq P\lambda$. On en déduit $A\lambda \subseteq P\lambda$ et ainsi $A \subseteq P$: contradiction. Donc $\bigcap_n P^{(n)} = 0$. D'après le théorème 1.4 les éléments de $\mathscr{C}(P)$ sont non diviseurs de zéro. D'après la proposition 2.13, la condition (**) figurant dans le théorème 1.4 est vérifiée ce qui implique que $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore à gauche selon $\mathscr{C}(P)$; il en est de même à droite, ce qui donne le résultat. ■

THEOREME 2.15. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un* c-$\mathcal{O}$*-idéal entier premier, alors* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}P} = {}_{\mathcal{F}P}\mathcal{O}$ *est l'anneau de fractions de* $\mathcal{O}$ *selon* $\mathcal{C}(P)$ *(noté* $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$*). De plus* $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ *est un anneau à idéaux à gauche (et à droite) principaux, et c'est un ordre d'Asano régulier de* S.

DEMONSTRATION. - D'après le corollaire 2.14, les paragraphes 1 et I.1, on obtient que $\mathcal{O}_{\mathcal{F}P}$ est l'anneau de fractions de $\mathcal{O}$ selon $\mathcal{C}(P)$ et, de même pour ${}_{\mathcal{F}P}\mathcal{O}$, ce qui implique $\mathcal{O}_{\mathcal{F}P} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)} = {}_{\mathcal{F}P}\mathcal{O}$. D'après la proposition 2.1, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est un ordre maximal de S. D'après la proposition 1.1, le théorème 1.5 et la proposition 1.3, on obtient que $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est un anneau noethérien, semi-local d'idéal maximum $M = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}\, P\, \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}\, P = P\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$, et non simple. En outre $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est un anneau premier car c'est un ordre de l'anneau artinien simple S (d'après le corollaire I.1.2). Montrons que M est inversible à gauche et à droite : comme P est un c-idéal entier premier, PP^{-1} est un idéal bilatère de $\mathcal{O}$ non contenu dans P, et donc PP^{-1} contient un élément de $\mathcal{C}(P)$ ce qui donne $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}\, PP^{-1} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$, c'est-à-dire que $MP^{-1} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$; en conséquence M est inversible à droite, et il en est de même à gauche. D'après le théorème III.2.8 on déduit que $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est un anneau héréditaire, à idéaux à gauche (et à droite) principaux, et que c'est un ordre d'Asano régulier de S. ∎

LEMME 2.16. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Si* c *est un élément non diviseur de zéro de* $\mathcal{O}$, *alors* $c^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ *pour presque tous les* c-$\mathcal{O}$*-idéaux entiers premiers* P *(c'est-à-dire* c *appartient à tous les* $\mathcal{C}(P)$ *sauf à un nombre fini).*

DEMONSTRATION. - Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\sum_{P\in\mathcal{P}} (P^{-1}c \cap \mathcal{O}) = \sum_{i=1}^{n} (P_i^{-1}c \cap \mathcal{O})$. Donc, pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a

$$P^{-1}c \cap \mathcal{O} \subseteq \left(\sum_{i=1}^{n} P_i^{-1}c\right) \cap P^{-1}c = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} P_i^{-1}\right) \cap P^{-1}\right]c \subseteq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^{-1} \cap P^{-1}\right]c.$$

A partir de maintenant supposons $P \neq P_i$ pour tout $i = 1,\dots,n$. P étant un idéal premier non nul minimal d'après la proposition II.2.2, on a $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \not\subseteq P$ et ainsi $\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)^{-1} \subseteq \mathcal{O}_P$.

On démontre de même que si Q est un c-idéal entier premier distinct de P on a $P^{-1} \subseteq \mathcal{O}_Q$. Il vient $P^{-1}c \cap \mathcal{O} \subseteq (\bigcap_{Q \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_Q)c$ et, d'après le corollaire 2.11, on a alors $P^{-1}c \cap \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}c$. Soit $x \in \mathcal{O}$ tel que $xc \in P$. On obtient $P^{-1}xc \subseteq P^{-1}P \cap P^{-1}c \subseteq \mathcal{O}c$ ce qui entraîne $P^{-1}x \subseteq \mathcal{O}$, et donc $x \in P$. Ainsi $c \in \mathcal{C}(P)$, pour $P \neq P_i$ avec $i = 1,\dots,n$, ce qui, d'après le théorème 2.15, donne $c^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$. ■

PROPOSITION 2.17. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Alors* $\mathcal{O}_r = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ *est un ordre maximal régulier de* S.

DEMONSTRATION. - Posons $\mathcal{F} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{F}^P$ et $\mathcal{G} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} {}^P\mathcal{F}$; ce sont des ensembles topologisants et idempotents. Compte tenu du théorème 2.15 il est immédiat qu'on a $\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{\mathcal{F}} = {}_{\mathcal{G}}\mathcal{O}$. D'après la proposition 2.1, $\mathcal{O}_r$ est un ordre maximal de S. Si I est un idéal à gauche essentiel de $\mathcal{O}_r$ il existe $\lambda \in u(S) \cap I$ et, comme on peut écrire $\lambda = \alpha^{-1}c$ avec $\alpha, c \in \mathcal{O}$, on obtient $c \in u(S) \cap \mathcal{O} \cap I$. D'après le lemme 2.16 on a $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}c = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ sauf un nombre fini $P_1,\dots,P_n$. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P_i)}$ est un ordre régulier de S d'après le théorème 2.15, l'idéal à gauche essentiel $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P_i)}c$ contient un idéal bilatère non nul $A(P_i)$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P_i)}$. Il vient

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A(P_i) \cap \mathcal{O}_r) \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P_i)}c) \cap (\bigcap_{\substack{P \neq P_i \\ i=1,\dots,n}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}) \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P_i)}c) \cap (\bigcap_{\substack{P \neq P_i \\ i=1,\dots,n}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}c)$$

$= \mathcal{O}_r c \subseteq I$. Comme $\mathcal{O}_r$ est un anneau premier (d'après le corollaire I.1.2), l'idéal $\bigcap_{i=1}^{n} A(P_i) \cap \mathcal{O}_r$ n'est pas nul car chaque $A(P_i) \cap \mathcal{O}_r$ est non nul (du fait qu'il existe $ab^{-1} \in A(P_i)$ avec $a,b \in u(S) \cap \mathcal{O}$, on a $a \in A(P_i) \cap \mathcal{O}$). Donc $\mathcal{O}_r$ est un ordre régulier de S. ■

COROLLAIRE 2.18. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S. *Alors $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de* S *si et seulement si* $\mathcal{O} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$.

DEMONSTRATION. - Résulte de la proposition 2.6, du corollaire 2.11, et de la proposition 2.17. ■

THEOREME 2.19. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier noethérien dont l'ensemble $\mathcal{P}$ des idéaux premiers non nuls minimaux est non vide. Alors $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de* *son anneau classique de fractions* S *si et seulement si :*

(i) *pour tout* $P \in \mathscr{P}$, $\mathcal{O}$ *vérifie la condition de Ore à gauche et à droite selon* $\mathscr{C}(P)$, *et* $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ *est un anneau héréditaire.*

(ii) $\mathcal{O} = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$.

DEMONSTRATION. - Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de S alors, d'après la proposition II.2.2, les idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}$ sont les c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers. Le corollaire 2.14, le théorème 2.15 et le théorème III.3.3 nous donnent *(i)*, et le corollaire 2.18 donne *(ii)*.

Réciproquement, comme $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ et comme $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore à gauche et à droite selon $\mathscr{C}(P)$, le théorème 1.5 et la proposition 1.3 donnent que $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ est un anneau noethérien, semi-local dont l'idéal maximum est son radical de Jacobson $M = P\,\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)} = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}\,P = P_{\mathscr{C}(P)}$. D'après le théorème 4.6 de [55] on a $P^{(n)} = M^n \cap \mathcal{O}$ et, d'après la proposition 1.3, on a $P^{(n)}\,\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)} = M^n = P^n\,\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)} = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}\,P^n$. Posons $[P^{(n)}]^+ = \{\lambda \in S \mid \lambda P^{(n)} \subseteq \mathcal{O}\}$ et montrons que $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}[P^{(n)}]^+ = [M^n]^{-1}$: de $\lambda P^{(n)} \subseteq \mathcal{O}$ on déduit $\lambda M^n = \lambda P^{(n)}\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)} \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$, c'est-à-dire $\lambda \in [M^n]^{-1}$; réciproquement de $xM^n \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ on déduit $xP^{(n)} \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ et, comme $P^{(n)}$ est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini et comme $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore à gauche selon $\mathscr{C}(P)$, il existe $c \in \mathscr{C}(P)$ tel que $cxP^{(n)} \subseteq \mathcal{O}$, c'est-à-dire $cx \in [P^{(n)}]^+$ ce qui implique $x \in \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}[P^{(n)}]^+$. D'où l'égalité $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}[P^{(n)}]^+ = [M^n]^{-1}$. D'après la proposition III.2.4 et le corollaire III.2.2, $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ est un ordre d'Asano de S, les $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$-idéaux forment un groupe cyclique, et M son radical de Jacobson est un c-$\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$-idéal entier premier. D'après le corollaire 2.14 on a alors $\bigcap_n M^n = 0$ ce qui donne $\bigcap_n P^{(n)} = 0$. Montrons maintenant que $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S : si I est un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$ considérons $\lambda \in \mathcal{O}_r(I)$; comme $I \neq 0$ il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $I \subseteq P^{(n_0)}$ et $I \nsubseteq P^{(n_0+1)}$, ce qui implique $[P^{(n_0)}]^+ I\lambda \subseteq [P^{(n_0)}]^+ I \subseteq [P^{(n_0)}]^+ P^{(n_0)} \subseteq \mathcal{O}$. L'idéal bilatère $[P^{(n_0)}]^+ I$ n'est pas contenu dans P sinon on aurait $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}[P^{(n_0)}]^+ I \subseteq P_{\mathscr{C}(P)}$, c'est-à-dire $[M^{n_0}]^{-1} I \subseteq M$, ce qui entraîne $I \subseteq M^{n_0+1}$ et par suite $I \subseteq M^{n_0+1} \cap \mathcal{O} = P^{(n_0+1)}$: contradiction. Alors $[P^{(n_0)}]^+ I$ coupe $\mathscr{C}(P)$. On a donc

$\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}[P^{(n_o)}]^+ I\lambda = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ et ainsi $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$. En conséquence $\lambda \in \mathcal{O} = \cap\, \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ et ainsi $\mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}$; de même $\mathcal{O}_\ell(I) = \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S d'après la proposition I.3.1. Tout idéal premier non nul minimal P de $\mathcal{O}$ est un c-$\mathcal{O}$-idéal : sinon P serait quasi-égal à $\mathcal{O}$ (d'après la proposition II.2.2) c'est-à-dire $P^+ = P^{-1} = \mathcal{O}$ ce qui entraîne $M^{-1} = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}P^+ = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ et donc $M = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ ce qui est impossible. Donc $\mathscr{P}$ est l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers. L'hypothèse *(ii)* et la proposition 2.17 impliquent alors que l'ordre maximal $\mathcal{O}$ est régulier. ■

PROPOSITION 2.20. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau de fractions* S. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$ alors on a* $\mathscr{F}^P = \mathscr{F}_P$ *et* ${}^P\mathscr{F} = {}_P\mathscr{F}$.

DEMONSTRATION. - P est un c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier d'après la proposition II.2.2. D'après la proposition 1.7 et le théorème 2.15 on a $\mathcal{O}_{\mathscr{F}_P} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}^P} = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$. Donc si $\mathfrak{A} \in \mathscr{F}^P$ on a $\mathcal{O}_{\mathscr{F}^P}\mathfrak{A} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}^P}$ d'après le corollaire 2.14, le théorème 1.5 et la proposition 1.2. D'où $\mathcal{O}_{\mathscr{F}_P}\mathfrak{A} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}_P}$ ce qui implique $\mathfrak{A} \in \mathscr{F}_P$ (car on peut écrire $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ avec $x_i \in \mathcal{O}_{\mathscr{F}_P}$ et $a_i \in \mathfrak{A}$; alors il existe $s \in \mathcal{O}$ et $s \notin P$ tel que $s\mathcal{O}x_i \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $\mathcal{O}s\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{A}$). Donc $\mathscr{F}^P \subseteq \mathscr{F}_P$ et comme on a toujours $\mathscr{F}_P \subseteq \mathscr{F}^P$ on obtient $\mathscr{F}_P = \mathscr{F}^P$. De même à droite ${}^P\mathscr{F} = {}_P\mathscr{F}$. ■

REMARQUE. - Soit R un anneau admettant un anneau classique de fractions S. Pour tout idéal premier P de R, Atterton définit dans [6] un anneau $R_P = \{x \in S \mid \exists\, s \in R,\ s \notin P$ tel que $sRx \subseteq R$ et $xRs \subseteq R\}$ et un idéal bilatère premier $P_P = \{x \in S \mid \exists\, s \in R,\ s \notin P$ tel que $sRxRs \subseteq P\}$ de R_P tel que $P_P \cap R = P$. Si R est un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau classique de fractions S, alors l'anneau R_P de Atterton coïncide avec l'anneau $R_{\mathscr{F}_P} = \{x \in S \mid \exists\, N \in \mathscr{F}_P\ \ Nx \subseteq R\}$ (c'est immédiat à vérifier en utilisant la proposition II.2.4).

$\mathcal{O}$ désignant toujours un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau classique de fractions S, nous allons maintenant examiner le problème suivant : si

P est un idéal premier quelconque de $\mathcal{O}$, le localisé $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathcal{F}_P}$ est-il un anneau de fractions de $\mathcal{O}$ selon un certain sous-demi-groupe multiplicatif M de $\mathcal{O}$?

Notons M_0 l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro de $\mathcal{O}$, et supposons que $\mathcal{O}_P$ (= ${}_P\mathcal{O}$ d'après la proposition 2.2) soit un anneau de fractions à gauche de $\mathcal{O}$ selon M : alors tous les éléments de M sont inversibles dans $\mathcal{O}_P$ et pour tout $x \in \mathcal{O}_P$ il existe $\alpha \in M$ tel que $\alpha x \in \mathcal{O}$; donc $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions à gauche de $\mathcal{O}$ selon le sous-demi-groupe M' des éléments de $\mathcal{O}$ inversibles dans $\mathcal{O}_P$ et on a ainsi : $M' = \{x \in \mathcal{O} \mid x^{-1} \in \mathcal{O}_P\} = \{x \in M_0 \mid \exists\ s \in \mathcal{O}\ ,\ s \notin P \text{ tel que } s\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}x\}$. Comme on a $\mathcal{O}_P = {}_P\mathcal{O}$ on a aussi $M' = \{x \in M_0 \mid \exists\ s \in \mathcal{O}\ ,\ s \notin P \text{ tel que } \mathcal{O}s \subseteq x\mathcal{O}\}$. Dans la suite nous noterons $M' = \mathscr{C}'(P)$. Il est facile de vérifier qu'on a $\mathscr{C}'(P) \subseteq \mathscr{C}(P)$.

PROPOSITION 2.21. - *Soient* $\mathcal{O}$ *un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S *et* P *un idéal premier quelconque de* $\mathcal{O}$. *Alors* $\mathcal{O}_P$ *est un anneau de fractions à gauche de* $\mathcal{O}$ *selon* $\mathscr{C}'(P)$ *si et seulement si on a* $\mathscr{C}'(P) \cap Q \neq \phi$ *pour tout* c- $\mathcal{O}$*-idéal entier premier* Q *non contenu dans* P.

DEMONSTRATION. - Si $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions à gauche de $\mathcal{O}$ selon $\mathscr{C}'(P)$, et si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) désigne l'ensemble des idéaux à gauche (resp. bilatères) de $\mathcal{O}$ coupant $\mathscr{C}'(P)$ on a, d'après la proposition XI.6.4 page 238 de [105] (ou d'après [53] page 415) et d'après les corollaires 2.7 et 2.8 : $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Soit Q un c- $\mathcal{O}$-idéal entier premier non contenu dans P tel que $\mathscr{C}'(P) \cap Q = \phi$. D'après le lemme 2.3, $Q_{\mathcal{F}'} = {}_{\mathcal{F}'}Q$ est un c- $\mathcal{O}_P$-idéal et, comme on a $\mathscr{C}'(P) \cap Q = \phi$, il vient $Q_{\mathcal{F}'} \cap \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid \exists N \in \mathcal{F}'\quad Nx \subseteq Q\} = Q$ ce qui donne $Q_{\mathcal{F}'} \neq \mathcal{O}_P$. D'après la démonstration de la proposition 2.4 on a $Q_{\mathcal{F}'} = [(Q_{\mathcal{F}'} \cap \mathcal{O})^*]_P = Q_P = \mathcal{O}_P$ (car $Q \nsubseteq P$) : contradiction. Donc si $Q \nsubseteq P$ on a $\mathscr{C}'(P) \cap Q \neq \phi$. Réciproquement on a vu que tous les éléments de $\mathscr{C}'(P)$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_P$. Si $x \in \mathcal{O}_P$ il existe $N \in \mathcal{F}'_P$ tel que $Nx \subseteq \mathcal{O}$ d'où l'on déduit $N^*x \subseteq \mathcal{O}$ par la proposition II.2.4. Si $N^* = \mathcal{O}$ on a $x \in \mathcal{O}$. Si $N^* \neq \mathcal{O}$ on peut écrire $N^* = P_1 . P_2 . \ldots . P_n$, où les P_i sont des c- $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, d'après les propositions II.1.7, II.2.2 et II.2.6. On a donc $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq N^* \subseteq P_i$ pour tout i = 1,...,n ce qui prouve que l'on a $P_i \nsubseteq P$ pour tout

$i = 1,\dots,n$. Soit alors, en utilisant l'hypothèse, un élément $c_i \in \mathscr{C}'(P) \cap P_i$ (pour tout i) et posons $c = c_1 \dots c_n$. Donc $c \in \mathscr{C}'(P)$ et on obtient $cx \in \mathcal{O}$. Ainsi $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions à gauche de $\mathcal{O}$ selon $\mathscr{C}'(P)$. ■

REMARQUE. - Compte tenu du fait que $\mathcal{O}_P = {}_P\mathcal{O}$ et que $\mathscr{C}'(P) = \{x \in M_0 | \exists\, s \in \mathcal{O}, s \notin P$ tel que $s\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}x\} = \{x \in M_0 | \exists\, s \in \mathcal{O}, s \notin P$ tel que $\mathcal{O}s \subseteq x\mathcal{O}\}$, il est facile de montrer qu'on a aussi $\mathscr{C}'(P) \cap Q \neq \phi$, pour tout c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier Q non contenu dans P, si et seulement si $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions à droite de $\mathcal{O}$ selon $\mathscr{C}'(P)$. On a ainsi :

PROPOSITION 2.22. - *Soient $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S *et* P *un idéal premier de $\mathcal{O}$. Alors $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions de $\mathcal{O}$ (selon $\mathscr{C}'(P)$) si et seulement si on a $\mathscr{C}'(P) \cap Q \neq \phi$ pour tout* c-*$\mathcal{O}$-idéal entier premier* Q *non contenu dans* P.

C'est un problème ouvert de savoir si effectivement $\mathcal{O}_P$ est un anneau de fractions de $\mathcal{O}$ (c'est-à-dire si " $\mathscr{C}'(P) \cap Q \neq \phi$ pour tout c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier Q non contenu dans P " est vérifié).

§ 3. LOCALISES BILATERES D'UN ORDRE MAXIMAL REGULIER (CAS NON NOETHERIEN).

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier d'un anneau S tel que G_0', l'ensemble des c-idéaux contenus dans $\mathcal{O}$, vérifie la condition noethérienne. Nous utiliserons les notations et les résultats du chapitre II et en particulier de la fin du paragraphe II.2.

Soit $\mathscr{F}'$ une famille non vide de $\mathcal{O}$-idéaux entiers vérifiant la condition (M) (i.e. si $N,N' \in \mathscr{F}'$ il existe $N'' \in \mathscr{F}'$ tel que $N'' \subseteq NN'$). Par exemple, si P est un $\mathcal{O}$-idéal entier premier, la famille $\mathscr{F}'_P$ des $\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P vérifie la condition (M) (par exemple si $\mathcal{O}$ est un anneau de Goldie premier cette famille $\mathscr{F}'_P$ coïncide avec celle définie au paragraphe 1 et utilisée au paragraphe 2). Dans la suite nous noterons $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'} = \{x \in S | \exists\, N \in \mathscr{F}' \ \ Nx \subseteq \mathcal{O}\}$ et, d'après la proposition II.2.4, on a $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'} = \{x \in S | \exists\, N \in \mathscr{F}' \ \ xN \subseteq \mathcal{O}\} = {}_{\mathscr{F}'}\mathcal{O}$ et

$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = \bigcup_{N \in \mathcal{F}'} N^{-1}$; il est immédiat que $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un sous-anneau de S contenant $\mathcal{O}$ et donc, d'après la proposition I.2.1, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un ordre de S. Si A est un c-$\mathcal{O}$-idéal nous noterons aussi $A_{\mathcal{F}'} = \{x \in S \mid \exists\, N \in \mathcal{F}' \quad Nx \subseteq A\}$ et, d'après la proposition II.2.4, on a $A_{\mathcal{F}'} = \{x \in S \mid \exists\, N \in \mathcal{F}' \quad xN \subseteq A\} = {}_{\mathcal{F}'}A$ et $A_{\mathcal{F}'} = \bigcup_{N \in \mathcal{F}'} (N^{-1}.A) = \bigcup_{N \in \mathcal{F}'} (A.N^{-1})$; il est immédiat que $A_{\mathcal{F}'}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S contenant A (et donc contenant un élément inversible de S).

LEMME 3.1. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *et* B *sont des* c-$\mathcal{O}$-*idéaux et si* x *est un élément de* S *tel que* $Ax \subseteq B$ *alors on a* $A_{\mathcal{F}'}x \subseteq B_{\mathcal{F}'}$.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition II.2.4 et le corollaire II.2.5 on déduit de $Ax \subseteq B$ qu'on a $(N^{-1}.A)x \subseteq N^{-1}.B$, pour tout $N \in \mathcal{F}'$, ce qui implique $A_{\mathcal{F}'}x \subseteq B_{\mathcal{F}'}$. ■

PROPOSITION 3.2. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *est un* c-$\mathcal{O}$-*idéal, alors* $A_{\mathcal{F}'}$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-*idéal qui contient* A.

DEMONSTRATION. - On a déjà noté que $A_{\mathcal{F}'}$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche et à droite de S contenant A (et donc contenant un élément de u(S)). Il existe $\lambda, \mu \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tels que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et $\mu A \subseteq \mathcal{O}$, ce qui, avec le lemme 3.1, donne $A_{\mathcal{F}'}\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et $\mu A_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Il reste à montrer que $A_{\mathcal{F}'}$ est sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-module à gauche et à droite de S. Si $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et si $x \in A_{\mathcal{F}'}$ il existe $N, M \in \mathcal{F}'$ tels que $N\alpha \subseteq \mathcal{O}$ et $Mx \subseteq A$ ce qui donne $\alpha \in N^{-1}$ et $x \in M^{-1}.A$; d'où $\alpha x \in N^{-1}(M^{-1}.A)$. D'après la condition (M) il existe $N' \in \mathcal{F}'$ tel que $N' \subseteq NM$. Il vient $N^{-1}(M^{-1}.A) \subseteq N^{-1}.M^{-1}.A = (NM)^{-1}.A \subseteq N'^{-1}.A$. Donc $\alpha x \in N'^{-1}.A$ et ainsi $\alpha x \in A_{\mathcal{F}'}$. De même à droite $x\alpha \in A_{\mathcal{F}'}$. ■

PROPOSITION 3.3. - *Sous les hypothèses précédemment fixées :* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un ordre régulier de* S.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition I.4.1, pour tout $x \in S$ il existe un $\mathcal{O}$-idéal A tel que $x \in A$ ce qui entraîne $x \in A^*$. Posons $B = A^*$; c'est un c-$\mathcal{O}$-idéal.

D'après la proposition 3.2, $B_{\mathscr{F}'}$ est $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$-idéal qui contient x. Donc $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$ est un ordre régulier d'après la proposition I.4.1. ■

La notion de clôture a été définie au paragraphe II.2. Il vient :

LEMME 3.4. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *est un* c-$\mathcal{O}$*-idéal, alors* $\widetilde{A_{\mathscr{F}'}} = A_{\mathscr{F}'}$. *En particulier* $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$.

DEMONSTRATION. - Si $a \in \widetilde{A_{\mathscr{F}'}}$ il existe $a_1,\dots,a_r \in A_{\mathscr{F}'}$ (avec $a_1 \in u(S)$) tels que $a \in (a_1,\dots,a_r)$. Pour tout $i = 1,\dots,r$ il existe $N_i \in \mathscr{F}'$ tel que $a_i \in N_i^{-1}.A$. D'après la condition (M) il existe $N \in \mathscr{F}'$ tel que $N \subseteq \prod_{i=1}^{r} N_i$ et on a alors $a_i \in N^{-1}.A$ pour tout $i = 1,\dots,r$ ce qui entraîne $(a_1,\dots,a_r) \subseteq N^{-1}.A$. D'où $a \in N^{-1}.A$ ce qui donne $a \in A_{\mathscr{F}'}$. Ainsi $\widetilde{A_{\mathscr{F}'}} \subseteq A_{\mathscr{F}'}$, et, avec la proposition II.2.10, on obtient $\widetilde{A_{\mathscr{F}'}} = A_{\mathscr{F}'}$. ■

LEMME 3.5. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *est un* c-$\mathcal{O}$*-idéal, alors on a* $A_{\mathscr{F}'} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A} = \widetilde{A\,\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A\,\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}}$.

DEMONSTRATION. - On a $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'} = \bigcup_{N\in\mathscr{F}'} N^{-1}$. Donc, pour tout $N \in \mathscr{F}'$, il vient $N^{-1}A \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A$ ce qui entraîne $N^{-1}.A \subseteq \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A}$ d'après la remarque II.2.9 et la proposition II.2.10. On en déduit $A_{\mathscr{F}'} = \bigcup_{N\in\mathscr{F}'} N^{-1}.A \subseteq \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A}$; la proposition 3.2 donne $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A \subseteq A_{\mathscr{F}'}$, et la proposition II.2.10 implique $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A} \subseteq \widetilde{A_{\mathscr{F}'}}$. D'après le lemme 3.4 on obtient $A_{\mathscr{F}'} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A}$. De même $A_{\mathscr{F}'} = \widetilde{A\,\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}}$. Avec la proposition II.2.10 et le lemme 3.4 on en déduit $A_{\mathscr{F}'} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}A\,\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}}$. ■

LEMME 3.6. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A' *est un* $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$*-idéal, alors sa clôture* $\widetilde{A}'$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$*-idéal clos.*

DEMONSTRATION. - Si $x \in \widetilde{A}'$ et si $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathscr{F}'}$, il existe $a_1,\dots,a_r \in A'$ et $N \in \mathscr{F}'$ tels que $x \in (a_1,\dots,a_r)$ et $\alpha \in N^{-1}$. Il vient $\alpha x \in N^{-1}(a_1,\dots,a_r)$, et on peut écrire $N^{-1}(a_1,\dots,a_r) \subseteq N^{-1}.(a_1,\dots,a_r) = [N^{-1}(\mathcal{O}a_1\mathcal{O} + \dots + \mathcal{O}a_r\mathcal{O})]^*$. D'après le lemme II.2.8 il existe $c_1,\dots,c_n$ éléments de $N^{-1}(\mathcal{O}a_1\mathcal{O} + \dots + \mathcal{O}a_r\mathcal{O})$ tels que

$[N^{-1}(\mathcal{O}a_1\mathcal{O} + \ldots + \mathcal{O}a_r\mathcal{O})]^* = (c_1,\ldots,c_n)$. On a donc $c_1,\ldots,c_n \in A'$ et $\alpha x \in (c_1,\ldots,c_n)$ ce qui donne $\alpha x \in \widetilde{A}'$. De même $x\alpha \in \widetilde{A}'$. Comme on a $A' \subseteq \widetilde{A}'$, il vient $\widetilde{A}' \cap u(S) \neq \phi$. Il existe $\lambda,\mu \in u(S)$ tels que $A'\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et $\mu A' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$; donc, d'après la remarque II.2.11 et le lemme 3.4, on obtient $\widetilde{A}'\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et $\mu\widetilde{A}' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Comme $\widetilde{\widetilde{A}}' = \widetilde{A}'$, le résultat est démontré. ∎

PROPOSITION 3.7. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A' *est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéal contenu dans* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*, alors* $A = A' \cap \mathcal{O}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal et on a* $\widetilde{A}' = (A^*)_{\mathcal{F}'}$.

DEMONSTRATION. - Il est évident que $A = A' \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal. De $A \subseteq A'$ on déduit, pour tout $N \in \mathcal{F}'$, $N^{-1}A \subseteq A'$ (car $N^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$) et, d'après la remarque II.2.9 et la proposition II.2.10, on obtient $N^{-1}.A^* \subseteq \widetilde{A}'$. Ainsi on a $(A^*)_{\mathcal{F}'} \subseteq \widetilde{A}'$. Si $a \in \widetilde{A}'$ il existe $a_1,\ldots,a_r \in A'$ tels que $a \in (a_1,\ldots,a_r)$; comme $A' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $Na_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i = 1,\ldots,r$. Il vient $Na_i \subseteq \mathcal{O} \cap A' = A$ ce qui donne $Na_i \subseteq A^*$ c'est-à-dire $a_i \in N^{-1}.A^*$ par la proposition II.2.4. D'où $(a_1,\ldots,a_r) \subseteq N^{-1}.A^* \subseteq (A^*)_{\mathcal{F}'}$ et donc $a \in (A^*)_{\mathcal{F}'}$. Ainsi $\widetilde{A}' = (A^*)_{\mathcal{F}'}$. ∎

COROLLAIRE 3.8. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A' *est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéal clos contenu dans* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*, alors il existe un* c-$\mathcal{O}$*-idéal entier* A *tel que* $A' = A_{\mathcal{F}'}$.

THEOREME 3.9. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : les* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéaux clos forment un groupe* $G_{\mathcal{F}'}$ *par rapport au produit* $A'.B' = \widetilde{A'B'}$*, et le groupe* $G_{\mathcal{F}'}$ *est homomorphe au groupe* G *des* c-$\mathcal{O}$*-idéaux.*

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 3.2 et le lemme 3.4, si A et B désignent des c-$\mathcal{O}$-idéaux, alors $A_{\mathcal{F}'}$ et $B_{\mathcal{F}'}$ sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéaux clos et on a $A_{\mathcal{F}'}.B_{\mathcal{F}'} = \widetilde{A_{\mathcal{F}'}B_{\mathcal{F}'}} = \widetilde{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}A}\,\widetilde{B\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}}} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\widetilde{AB}\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} = (A.B)_{\mathcal{F}'}$ en utilisant le lemme 3.5, la proposition II.2.10, le lemme 3.4 et la remarque II.2.9. Donc l'application $A \longmapsto A_{\mathcal{F}'}$ est un homomorphisme de G dans $G_{\mathcal{F}'}$. D'après le corollaire 3.8, tout $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal clos contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est image d'un élément de G. Si B' est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal clos non contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ il existe un c-$\mathcal{O}$-idéal A tel que

$A_{\mathcal{F}'}B' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$: en effet il existe $\lambda \in u(S) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ tel que $\lambda B' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ ce qui entraîne $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\ \lambda\ \mathcal{O}_{\mathcal{F}'})B' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ et, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\ \lambda\ \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ (d'après la proposition 3.3 et la proposition I.4.1), on obtient $\widetilde{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\lambda\mathcal{O}_{\mathcal{F}'})}B' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ (en utilisant la proposition II.2.10) et $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\ \lambda\ \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. Donc il existe un c-$\mathcal{O}$-idéal A contenu dans $\mathcal{O}$ tel que $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\ \lambda\ \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} = A_{\mathcal{F}'}$ d'après le corollaire 3.8, et on a $A_{\mathcal{F}'}B' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. En utilisant le lemme 3.5, la proposition II.2.10 et la proposition 3.7 on obtient $A_{\mathcal{F}'}.B' = B_{\mathcal{F}'}$ où B désigne un c-$\mathcal{O}$-idéal entier. Il vient alors $B' = (A^{-1}.A)_{\mathcal{F}'}.B' = (A^{-1})_{\mathcal{F}'}.A_{\mathcal{F}'}.B' = (A^{-1})_{\mathcal{F}'}.B_{\mathcal{F}'} = (A^{-1}.B)_{\mathcal{F}'}$. Donc tout élément de $G_{\mathcal{F}'}$ est image d'un élément de G. ■

THEOREME 3.10. - *Sous les hypothèses précédemment fixées :* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un ordre maximal régulier de* S.

DEMONSTRATION. - $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ étant un ordre de S, l'ensemble T des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéaux vérifie les propriétés 1 à 5 du paragraphe II.1 (cf. exemple du § II.1). Il vérifie aussi la propriété 6 : si A' est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal tel que $A'^2 \subseteq A'$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq A'$ alors on obtient $\widetilde{A'}.\widetilde{A'} = \widetilde{A'^2} \subseteq \widetilde{A'}$ ce qui implique $\widetilde{A'}^{-1}.\widetilde{A'}.\widetilde{A'} \subseteq \widetilde{A'}^{-1}.\widetilde{A'}$, c'est-à-dire $\widetilde{A'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, et donc $A' \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$; d'où $A' = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. D'après la proposition I.1.3 le treillis T est résidué ; comme, d'après la proposition 3.3, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un ordre régulier de S, la proposition I.4.3 nous donne, pour $A',B' \in T$, les précisions $A'.\cdot B' = \{x \in S | B'x \subseteq A'\}$ et $A'\cdot.B' = \{x \in S | xB' \subseteq A'\}$. Comme T vérifie la propriété 1) du paragraphe II.1 on a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} = A'.\cdot A' = A'\cdot.A'$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal A' : c'est-à-dire l'ordre à droite et l'ordre à gauche de tout $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal A' est $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$; d'après la proposition I.3.1, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ est un ordre maximal de S. ■

COROLLAIRE 3.11. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : le groupe* $G_{\mathcal{F}'}$ *des* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéaux clos n'est autre que le groupe de* c-$\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$*-idéaux.*

DEMONSTRATION. - D'après le théorème 3.9 les $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéaux clos forment un groupe $G_{\mathcal{F}'}$. Compte tenu du théorème 3.10 et de sa démonstration, et de la proposition II.2.10, la proposition II.1.12 nous donne le résultat et pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$-idéal A' on a $\widetilde{A'} = A'^*$. ■

PROPOSITION 3.12. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* A *est un* c-$\mathcal{O}$*-idéal entier, alors on a* $A_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *si et seulement si* A *contient un* $\mathcal{O}$*-idéal* N *appartenant à* $\mathcal{F}'$.

DEMONSTRATION. - Si $A_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ on a $1 \in A_{\mathcal{F}'}$ et donc il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $N = N1 \subseteq A$. Réciproquement s'il existe $N \in \mathcal{F}'$ tel que $N \subseteq A$ on a $1 \in A_{\mathcal{F}'}$ ce qui entraîne $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq A_{\mathcal{F}'}$ d'après la proposition 3.2, et comme on a $A \subseteq \mathcal{O}$ il vient $A_{\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$; d'où $A_{\mathcal{F}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$. ∎

La définition d'un $\mathcal{O}$-anneau a été donnée à la fin du paragraphe II.2, ainsi qu'une caractérisation dans la remarque II.2.12. On a :

PROPOSITION 3.13. - *Sous les hypothèses précédemment fixées :* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ *est un* $\mathcal{O}$*-anneau.*

DEMONSTRATION. - C'est clair car on a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$, et $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ d'après le lemme 3.4. ∎

Si P est un $\mathcal{O}$-idéal entier premier, la famille $\mathcal{F}'_P$ des $\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P vérifie la condition (M). Pour simplifier, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'_P}$ se notera $\mathcal{O}_P$.

LEMME 3.14. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : soit* S' *un* $\mathcal{O}$*-anneau. Si* P *est un* $\mathcal{O}$*-idéal entier premier tel que* $S' \not\subseteq \mathcal{O}_P$*, alors* S' *contient* P^{-1}.

DEMONSTRATION. - Soit $c \in S'$ et $c \notin \mathcal{O}_P$. Comme $\mathcal{O} + \mathcal{O}c\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal on peut considérer (1,c) le c-idéal engendré, et on a alors $\mathcal{O} \subseteq (1,c)$ ce qui donne $(1,c)^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Posons $N = (1,c)^{-1}$. S'il existe $s \in \mathcal{O}$ et $s \notin P$ tel que $s \in N$, alors $N \in \mathcal{F}'_P$ ce qui donne $N^{-1} \subseteq \mathcal{O}_P$, c'est-à-dire $(1,c) \subseteq \mathcal{O}_P$: contradiction car $c \notin \mathcal{O}_P$. On a donc $N \subseteq P$ ce qui implique $P^{-1} \subseteq N^{-1} = (1,c) \subseteq S'$. ∎

THEOREME 3.15. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : si* P *est un* c-$\mathcal{O}$*-idéal entier premier, alors* $\mathcal{O}_P$ *est un* $\mathcal{O}$*-anneau maximal de* S. *De plus tout* $\mathcal{O}$*-anneau distinct de* S *est contenu dans un tel* $\mathcal{O}_P$.

DEMONSTRATION. - $\mathcal{O}_P$ est un $\mathcal{O}$-anneau d'après la proposition 3.13. Soit S' un $\mathcal{O}$-anneau de S distinct de S et tel que $\mathcal{O}_P \subsetneq S'$. Alors $S' \not\subseteq \mathcal{O}_P$ et, d'après le lemme 3.14, on a $P^{-1} \subseteq S'$. Alors il vient $\mathcal{O}_P\, P^{-1} \subseteq S'$ et $(P_{\mathcal{F}'_P})^{-1} = (P^{-1})_{\mathcal{F}'_P} = \widetilde{\mathcal{O}_P\, P^{-1}} \subseteq \widetilde{S'} = S'$ d'après la proposition 3.2, le lemme 3.4, le théorème 3.9, le lemme 3.5 et la proposition II.2.10. Donc S' contient toutes les puissances de $P_{\mathcal{F}'_P}$ (au sens de la loi $\bullet$). Montrons que les seuls c- $\mathcal{O}_P$-idéaux sont les puissances (au sens de la loi $\bullet$) de $P_{\mathcal{F}'_P}$: d'après les corollaires 3.11 et 3.8 et d'après la proposition 3.12 seuls les c- $\mathcal{O}$-idéaux contenus dans P donnent les c- $\mathcal{O}_P$-idéaux contenus strictement dans $\mathcal{O}_P$; d'après les propositions II.1.7, II.2.2 et II.2.6, les c- $\mathcal{O}$-idéaux contenus dans P sont de la forme $P^n \bullet Q_1^{n_1} \bullet \dots \bullet Q_r^{n_r}$, et, avec le théorème 3.9 et la proposition 3.12, on obtient alors $(P^n \bullet Q_1^{n_1} \bullet \dots \bullet Q_r^{n_r})_{\mathcal{F}'_P} = (P_{\mathcal{F}'_P})^n \bullet [(Q_1)_{\mathcal{F}'_P}]^{n_1} \bullet \dots \bullet [(Q_r)_{\mathcal{F}'_P}]^{n_r} = (P_{\mathcal{F}'_P})^n$. Comme on a vu, dans la démonstration du théorème 3.9, que tout c- $\mathcal{O}_P$-idéal non contenu dans $\mathcal{O}_P$ s'écrit $(A^{-1} \bullet B)_{\mathcal{F}'_P}$ avec A,B c- $\mathcal{O}$-idéaux entiers, et comme, d'après ce qui précède, on a $A_{\mathcal{F}'_P} = (P_{\mathcal{F}'_P})^n$ et $B_{\mathcal{F}'_P} = (P_{\mathcal{F}'_P})^{n'}$, il vient $(A^{-1} \bullet B)_{\mathcal{F}'_P} = (A_{\mathcal{F}'_P})^{-1} \bullet B_{\mathcal{F}'_P} = (P_{\mathcal{F}'_P})^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. Donc les c- $\mathcal{O}_P$-idéaux sont les puissances de $P_{\mathcal{F}'_P}$. D'après la proposition 3.3 et la proposition I.4.1, tout élément de S est contenu dans un $\mathcal{O}_P$-idéal et donc dans un c- $\mathcal{O}_P$-idéal ; ainsi d'après ce qui précède tout élément de S est contenu dans S' : contradiction car $S \neq S'$. Donc $\mathcal{O}_P$ est un $\mathcal{O}$-anneau maximal de S. Tout $\mathcal{O}$-anneau S' distinct de S est contenu dans un $\mathcal{O}_P$ car sinon, d'après le lemme 3.14, S' contiendrait tous les P^{-1}, avec P parcourant les c- $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, et donc, d'après le corollaire II.1.8, S' contiendrait tous les $\mathcal{O}$-idéaux ce qui, d'après la proposition I.4.1, donnerait S' = S : une contradiction. ∎

Si $\mathcal{P}$ est une famille non vide de c- $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers, alors la famille $\mathcal{F}'_{\mathcal{P}}$ des $\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P pour tout $P \in \mathcal{P}$ vérifie la condition (M). Pour simplifier l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'_{\mathcal{P}}}$ se notera $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

THEOREME 3.16. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : tout $\mathcal{O}$-anneau* S' *de* S, *distinct de* S, *coïncide avec un $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est une famille non vide de* c- *$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers.*

DEMONSTRATION. - Soit $\mathscr{P}$ la famille non vide (d'après le théorème 3.15) de tous les c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers P tels que $S' \subseteq \mathcal{O}_P$. Il est facile de vérifier qu'on a $\mathcal{O}_{\mathscr{P}} = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} \mathcal{O}_P$. Ainsi il vient $S' \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$. Si $S' \neq \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$, il existe $a \in \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ et $a \notin S'$; comme $\mathcal{O} + \mathcal{O} a \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal (d'après la proposition I.4.1) on peut considérer le c-$\mathcal{O}$-idéal $(1,a) = (\mathcal{O} + \mathcal{O} a \mathcal{O})^*$ et on a $\mathcal{O} \subseteq (1,a) \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ et $(1,a)^{-1} \subsetneq \mathcal{O}$. D'après les propositions II.1.7, II.2.2 et II.2.6, on peut écrire $(1,a)^{-1} = P_1 \cdot \ldots \cdot P_r$ où les P_i sont des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers. De $(1,a) \not\subseteq S'$ et $(1,a) = P_1^{-1} \cdot \ldots \cdot P_r^{-1}$, on déduit qu'il existe i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ tel que $P_i^{-1} \not\subseteq S'$. Comme on a $P_i^{-1} \subseteq (1,a) \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$ et $P_i^{-1} \not\subseteq \mathcal{O}_{P_i}$ (car $P_i^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{P_i}$ implique $\mathcal{O} = P_i . P_i^{-1} \subseteq \widetilde{P_i \mathcal{O}_{P_i}}$ ce qui, avec le lemme 3.5, entraîne $\mathcal{O}_{P_i} = (P_i)_{\mathscr{F}'_{P_i}}$: d'où une contradiction d'après la proposition 3.12) il vient $P_i \notin \mathscr{P}$. D'après le lemme 3.14 on obtient donc $P_i^{-1} \subseteq S'$: contradiction. Donc $S' = \mathcal{O}_{\mathscr{P}}$. ∎

COROLLAIRE 3.17. - *Sous les hypothèses précédemment fixées : les $\mathcal{O}$-anneaux de* S, *distincts de* S, *sont les anneaux* $\bigcap_{P \in \mathscr{P}} \mathcal{O}_P$, *où $\mathscr{P}$ est une famille non vide de* c-$\mathcal{O}$-*idéaux entiers premiers, et ce sont des ordres maximaux réguliers de* S.

DEMONSTRATION. - Résulte du théorème 3.16 et de sa démonstration, de la proposition 3.13 et du théorème 3.10. ∎

§ 4. NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les résultats du paragraphe 2 de ce chapitre sont dus à M. CHAMARIE [23] et [24], sauf les propositions 2.21 et 2.22 dues à G. MAURY [79], certains (notamment le théorème 2.15) retrouvés ultérieurement par COZZENS et SANDOMIERSKI sous l'hypothèse un peu plus générale "$\mathcal{O}$ semi-premier" au lieu de "$\mathcal{O}$ premier" [35]. La localisation dans les ordres d'Asano a d'abord été étudiée par MICHLER [85] et HAJARNAVIS et LENAGAN [59]. La définition des localisations bilatères et leur étude dans un ordre maximal régulier noethérien sans diviseurs de zéro se trouve dans MAURY [77] ; K. ASANO considérait déjà les localisés $\mathcal{O}_{\bar{\mathscr{F}}_P} = \mathcal{O}_P$ pour un c-idéal premier P [3] et [5]. Le paragraphe 3, dû à MAURY, utilise directement une technique de K. ASANO [5].

CHAPITRE V.

NOUVEAUX EXEMPLES D'ORDRES MAXIMAUX : ORDRES MAXIMAUX ET ANNEAUX DE POLYNOMES DE ORE.

§ 1. SUR LES ANNEAUX DE POLYNOMES DE ORE.

Dans tout ce paragraphe R désigne un anneau de Goldie premier et S son anneau classique de fractions artinien simple. Soit σ un automorphisme de l'anneau R et soit δ une σ-dérivation (c'est-à-dire une application de R dans R telle que $\forall s,t \in R$ $\delta(s+t) = \delta(s) + \delta(t)$ et $\delta(st) = \delta(s)t + \sigma(s)\delta(t)$). On peut alors prolonger σ en un automorphisme de S que l'on notera encore σ, et δ en une σ-dérivation de S notée encore δ.

X étant une indéterminée, l'*anneau des polynômes de Ore* $A = R[X,\sigma,\delta]$ est l'ensemble de tous les polynômes $r_0 + r_1 X + \dots + r_n X^n$ avec $r_i \in R$ muni de l'addition habituelle et d'une multiplication déduite par distributivité de $Xr = \sigma(r)X + \delta(r)$ pour tout $r \in R$; muni de ces deux lois, A est alors un anneau non nécessairement commutatif contenant R comme sous-anneau (voir [90] pour des justifications). Si R est un anneau noethérien à gauche (resp. à droite), alors $A = R[X,\sigma,\delta]$ est un anneau noethérien à gauche (resp. à droite) (par une extension de la démonstration de Hilbert de transfert de la propriété noethérienne de R à $R[X]$).

S étant un anneau artinien simple, l'anneau des polynômes de Ore $B = S[X,\sigma,\delta]$ est un anneau premier dont tous les idéaux à gauche (et à droite) sont principaux (voir la proposition 6.2.3 de [21]).

L'anneau B possède ainsi un anneau classique de fractions Q qui est artinien simple. Il est alors immédiat de vérifier que $A = R[X,\sigma,\delta]$ est un ordre de Q et qu'on a $B = SA = AS$.

Si $\delta = 0$, l'anneau A se note $R[X,\sigma]$ et on dit que c'est un *anneau de polynômes tordus*.

Si $\sigma = id_R$, l'anneau A se note $R[X,\delta]$ et on dit que c'est un *anneau de polynômes différentiels* (car δ est une véritable dérivation de R).

Les deux résultats qui suivent, dûs à G. CAUCHON ([21], corollaire 6.2.11, et théorème 6.3.4 avec les lignes qui le précèdent), nous serons utiles :

PROPOSITION 1.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées et si* $\delta = 0$, *alors les idéaux bilatères de* $B = S[X,\sigma]$ *sont de la forme* $B\omega X^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\omega \in Z(B)$ = *centre de* B.

PROPOSITION 1.2. - *Sous les hypothèses précédemment posées et si* $\delta = 0$, *alors pour que l'anneau* $B = S[X,\sigma]$ *soit un ordre régulier de son anneau classique de fractions* Q *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $\bar{\sigma}$ *est d'ordre fini dans* Aut(S)/Int(S), *où* Int(S) *désigne le sous-groupe, formé des automorphismes intérieurs de* S, *du groupe* Aut(S) *des automorphismes de* S, *et* $\bar{\sigma}$ *la classe de* σ *dans* Aut(S)/Int(S).

(ii) Pour tout entier $n > 0$, *l'anneau* $M_n(S)$ *des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* S *est algébrique sur son centre.*

§ 2. ORDRES MAXIMAUX ET ANNEAUX DE POLYNOMES DE ORE.

Dans tout ce paragraphe on garde les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe 1.

LEMME 2.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, et si* $A = R[X,\sigma,\delta]$ *est un ordre maximal de* Q, *alors* R *est l'ordre à gauche (resp. l'ordre à droite) de tout idéal bilatère non nul de* R *stable par* σ *et* δ *(resp. stable par* σ^{-1} *et* δ*).*

DEMONSTRATION. - Soit I un idéal bilatère non nul de R stable par σ et δ. On a $XI \subseteq \sigma(I)X + \delta(I) \subseteq IX + I \subseteq IA$, et par suite IA est un idéal bilatère non nul de A. Si $s \in \mathcal{O}_\ell(I)$ on a $sI \subseteq I$ et donc $sIA \subseteq IA$; comme A est un ordre maximal de Q on obtient $s \in A$ ce qui donne $s \in A \cap S$ c'est-à-dire $s \in R$. D'où $\mathcal{O}_\ell(I) = R$. Méthode analogue à droite. ■

Introduisons la *condition* (*) suivante :

(*) Pour tout idéal bilatère non nul I de R, I est stable par σ si et seulement si I est stable par σ^{-1}.

REMARQUE 2.2. - (i) *Si* R *vérifie la condition noethérienne sur les idéaux bilatères, alors* R *vérifie la condition* (*) : en effet si I est un idéal bilatère non nul de R stable par σ alors la suite $(\sigma^{-n}(I))_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante d'idéaux bilatères de R, et il existe alors $n \geqslant 1$ tel que $\sigma^{-n}(I) = \sigma^{-(n+1)}(I)$ ce qui entraîne $I = \sigma^{-1}(I)$; et de même si I est stable par σ^{-1} alors on a $I = \sigma(I)$.

(ii) *Si, pour un entier* $n > 0$, *on a* $\sigma^n = id_R$, *alors* R *vérifie la condition* (*) : en effet si I est un idéal bilatère non nul de R stable par σ on a $\sigma^n(I) \subseteq \ldots \subseteq \sigma(I) \subseteq I$, et de $\sigma^n(I) = I$ on déduit $I = \sigma(I)$ ce qui entraîne que I est stable par σ^{-1} ; de même si I est stable par σ^{-1} on a $I \subseteq \sigma(I) \subseteq \ldots \subseteq \sigma^n(I)$ et il vient $I = \sigma(I)$.

PROPOSITION 2.3. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* R *vérifie la condition* (*) *et si* R *est l'ordre à gauche et l'ordre à droite de tout idéal bilatère non nul de* R *stable par* σ, *alors* $A = R[X,\sigma,\delta]$ *est un ordre maximal de* Q.

DEMONSTRATION. - Soit I un idéal bilatère non nul de A et soit $f \in Q$ tel que $fI \subseteq I$. Comme $B = S[X,\sigma,\delta]$ est un anneau premier dont les idéaux à gauche sont principaux, il existe g élément non diviseur de zéro dans B tel que $BIB = Bg$ et on obtient $SAIAS = SIS = SAg$; on peut alors écrire $g = \sum_{i=1}^{m} \beta^{-1} r_i \alpha_i t_i$ avec $r_i \in R$, $\alpha_i \in I$ $t_i \in S$ et $\beta \in R \cap u(S)$, ce qui entraîne $\beta g \in IS$ et $B\beta g = Bg$. Il vient alors $fIS \subseteq IS \subseteq SIS = BIB = Bg = B\beta g$ ce qui donne $f\beta g \in B\beta g$, et comme βg est un élément non diviseur de zéro dans B on obtient $f \in B$. Ainsi on peut écrire $f = \sum_{i=o}^{p} s_i X^i$ avec $s_i \in S$. Considérons $C(I) = \{$coefficients dominants des polynômes de I$\} \cup \{0\}$; il est clair que C(I) est un idéal à gauche de R. Pour tout $r \in R$ et pour tout entier n on a $X^n r = \sigma^n(r)X^n + k(X)$ où k(X) est un polynôme de degré strictement inférieur à n, et ainsi si $a \in C(I)$ et $a \neq 0$ il existe $h(X) \in I$ tel que $h(X) = aX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ ce qui implique $h(X)r = aX^n r + a_{n-1}X^{n-1}r + \ldots = a\sigma^n(r)X^n + a'_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ et donc $a\sigma^n(r) \in C(I)$; comme σ est un automorphisme de R on en déduit qu'on a $aR \subseteq C(I)$ et

ainsi $C(I)$ est un idéal à droite de R. De plus on a
$Xh(X) = X(aX^n + \ldots) = \sigma(a)X^{n+1} + a_n''X^n + \ldots$ ce qui donne $\sigma(a) \in C(I)$. Donc $C(I)$ est un idéal bilatère non nul de R stable par σ. En outre de $fI \subseteq I$ on déduit $fh(X) \in I$; de la relation $s_p X^p a X^n = s_p \sigma^p(a) X^{p+n} + k'(X)$, où $k'(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $p+n$, et de $fh(X) \in I$ on déduit alors qu'on a $s_p\sigma^p(a) \in C(I)$. Ainsi on a $s_p\sigma^p(C(I)) \subseteq C(I)$. Puisque R vérifie la condition (∗) on a
$C(I) = \sigma(C(I)) = \ldots = \sigma^p(C(I))$, et on obtient alors $s_pC(I) \subseteq C(I)$. D'où $s_p \in R$ puisque par hypothèse R est l'ordre à gauche de $C(I)$. Par suite on en déduit qu'on a $(\sum_{i=o}^{p-1} s_iX^i)I \subseteq I$. Donc en recommençant le raisonnement précédent on démontre de proche en proche que tous les s_i appartiennent à R. D'où $f \in A$. Ainsi $\mathcal{O}_\ell(I) = A$ et de manière analogue on montre que $\mathcal{O}_r(I) = A$. D'après la proposition I.3.1, A est un ordre maximal de Q. ■

LEMME 2.4. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* R *est un ordre maximal de* S *et si* I *est un idéal bilatère non nul de* R *alors, en posant* $I^* = (I^{-1})^{-1}$, *on a* $\sigma(I^*) = (\sigma(I))^*$; *si de plus* I *est stable par* σ *alors* I^* *est aussi stable par* σ *et, dans ce cas, si la condition noethérienne sur les* c-*idéaux entiers est vérifiée par* R, *on a* $\sigma(I^*) = I^*$.

DEMONSTRATION. - Soit $y \in S$ tel que $yI \subseteq R$. Il vient $\sigma(y)\sigma(I) \subseteq R$ et ainsi $\sigma(y) \in (\sigma(I))^{-1}$. D'où $\sigma(I^{-1}) \subseteq (\sigma(I))^{-1}$. Si $z \in (\sigma(I))^{-1}$ on a $z\sigma(I) \subseteq R$ et, comme il existe $y \in R$ tel que $z = \sigma(y)$, on obtient $\sigma(yI) \subseteq \sigma(R)$. Il vient $yI \subseteq R$ et par suite $y \in I^{-1}$. D'où $(\sigma(I))^{-1} \subseteq \sigma(I^{-1})$. Donc $\sigma(I^{-1}) = (\sigma(I))^{-1}$ ce qui donne $\sigma(I^*) = (\sigma(I))^*$. Si I est stable par σ on a $\sigma(I) \subseteq I$ ce qui implique $(\sigma(I))^* \subseteq I^*$, c'est-à-dire $\sigma(I^*) \subseteq I^*$, et I^* est donc stable par σ ; si de plus la condition noethérienne sur les c-idéaux entiers est vérifiée alors la suite croissante $(\sigma^{-n}(I^*))_{n\geqslant 1}$ de c-idéaux entiers est stationnaire et ainsi il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\sigma^{-(m+1)}(I^*) = \sigma^{-m}(I^*)$ ce qui implique $I^* = \sigma(I^*)$. ■

PROPOSITION 2.5. - *Sous les hypothèses précédemment posées, et si* R *est un ordre maximal de* S *vérifiant la condition noethérienne sur les* c-*idéaux entiers, alors* $A = R[X,\sigma,\delta]$ *est un ordre maximal de* Q *vérifiant la condition noethérienne sur les* c-*idéaux entiers.*

DEMONSTRATION. - Soit I un idéal bilatère non nul de A et soit $f \in Q$ tel que $fI \subseteq I$. Considérons $C(I)$ = {coefficients dominants des polynômes de I} $\cup \{0\}$. De manière identique au début de la démonstration de la proposition 2.3, on obtient alors que $C(I)$ est un idéal bilatère non nul de R stable par σ, et qu'on a $f = \sum_{i=o}^{p} s_i X^i$, avec $s_i \in S$, et $s_p \sigma^p(C(I)) \subseteq C(I)$. Alors, avec la proposition II.2.4, on obtient $s_p [\sigma^p(C(I))]^* \subseteq [C(I)]^*$, et, avec le lemme 2.4, il vient $s_p [C(I)]^* \subseteq [C(I)]^*$. D'où $s_p \in R$. De proche en proche on démontre alors que tous les s_i appartiennent à R ce qui nous donne $f \in A$. Donc $\mathcal{O}_\ell(I) = A$ et de manière analogue on montre que $\mathcal{O}_r(I) = A$. D'après la proposition I.3.1, A est un ordre maximal de Q.

Soit $(I_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante de c-A-idéaux entiers. Alors on a $SI_nS = SAI_nAS = BI_nB$, et la suite $(BI_nB)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante d'idéaux bilatères non nuls de l'anneau noethérien $B = S[X,\sigma,\delta]$; donc il existe un entier $n' \geqslant 1$ tel que, pour tout $m \geqslant n'$, on a $BI_mB = BI_{n'}B$. La suite $([C(I_n)]^*)_{n \geqslant 1}$, où $C(I_n)$ = {coefficients dominants des polynômes de I_n} $\cup \{0\}$, est une suite croissante de c-R-idéaux entiers et donc il existe un entier $n'' \geqslant 1$ tel que, pour tout $m \geqslant n''$, on a $[C(I_m)]^* = [C(I_{n''})]^*$. Posons $m = \sup(n',n'')$. Alors, pour tout $k \geqslant m$, on a $BI_kB = BI_mB$ et $[C(I_k)]^* = [C(I_m)]^*$. Soit $k \geqslant m$, et considérons $f \in Q$ tel que $fI_m \subseteq I_k$; il vient $fI_mS = fI_mB \subseteq I_kB \subseteq BI_kB = BI_mB$ et, comme il existe $g \in B \cap u(Q)$ et $\beta \in R \cap u(S)$ tels que $SI_mS = BI_mB = Bg$ et $\beta g \in I_mS$, on obtient $BI_mB = Bg = B\beta g$ et $f\beta g \in B\beta g$ ce qui entraîne $f \in B$ (car $\beta g \in B \cap u(Q)$). Ainsi on peut écrire $f = \sum_{i=o}^{p} s_i X^i$ avec $s_i \in S$. Si $a \in C(I_m)$ et $a \neq 0$, il existe $h(X) \in I_m$ tel que $h(X) = aX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ et il vient $fh(X) = s_p X^p a X^n + \ldots = s_p\, \sigma^p(a) X^{p+n} + h'(X)$, où $h'(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $p+n$; puisque $fI_m \subseteq I_k$ on obtient $s_p \sigma^p(a) \in C(I_k)$. On a donc $s_p \sigma^p(C(I_m)) \subseteq C(I_k)$. Avec la proposition II.2.4 et le lemme 2.4 on obtient alors $s_p [C(I_m)]^* \subseteq [C(I_k)]^* = [C(I_m)]^*$ ce qui implique $s_p \in R$. De proche en proche on démontre alors que tous les s_i appartiennent à R ce qui nous donne $f \in A$. En conséquence on a $I_k \bullet . I_m \subseteq A$, c'est-à-dire, d'après la proposition II.2.4, $I_m^{-1} . I_k \subseteq A$ ce qui implique $I_k \subseteq I_m$, et par suite $I_k = I_m$. Donc la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est stationnaire. ■

COROLLAIRE 2.6. - *Si* R *est un anneau premier noethérien et si* σ *est un automorphisme de* R, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) L'anneau de polynômes tordus $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal de son anneau classique de fractions* Q.

(b) R *est l'ordre à gauche et l'ordre à droite de tout idéal bilatère non nul stable par* σ.

DEMONSTRATION. - S'obtient par la remarque 2.2, le lemme 2.1 et la proposition 2.3. ■

PROPOSITION 2.7. - *Si* R *est un anneau de Goldie premier et si* δ *est une dérivation de* R, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) L'anneau de polynômes différentiels $A = R[X,\delta]$ *est un ordre maximal de son anneau classique de fractions* Q.

(b) R *est l'ordre à gauche et l'ordre à droite de tout idéal bilatère non nul stable par* δ.

DEMONSTRATION. - *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* : d'après le lemme 2.1.

(b) $\Rightarrow$ *(a)* : si I est un idéal bilatère non nul de A et si on considère $C(I) = \{$coefficients dominants des polynômes de I$\} \cup \{0\}$, alors C(I) est un idéal bilatère non nul de R (voir la démonstration de la proposition 2.3) et C(I) est stable par δ : en effet si $a \in C(I)$ et $a \neq 0$, il existe $h(X) \in I$ tel que $h(X) = aX^m + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_o$ avec $a_i \in R$;
de $Xh(X) - h(X)X = \delta(a)X^n + \delta(a_{n-1})X^{n-1} + \ldots + \delta(a_o)$ et de $Xh(X) - h(X)X \in I$ on déduit $\delta(a) \in C(I)$. Alors si $f \in Q$ vérifie $fI \subseteq I$ on obtient, comme dans la démonstration de la proposition 2.3, que f s'écrit sous la forme $f = \sum_{i=o}^{p} s_i X^i$, avec $s_i \in S$ (où S est l'anneau classique de fractions de R), d'où l'on déduit $s_p C(I) \subseteq C(I)$; alors, avec l'hypothèse, il vient $s_p \in R$ et de proche en proche on obtient que tous les s_i appartiennent à R ce qui nous donne $f \in A$. Donc $\mathcal{O}_\ell(I) = A$ et de même $\mathcal{O}_r(I) = A$. Avec la proposition I.3.1 on obtient *(a)*. ■

COROLLAIRE 2.8. - *Soit* R *un domaine d'intégrité, noethérien, complètement intégralement clos dans son corps de fractions* K *et considérons l'algèbre de Weyl* $A_1(R)$ *(c'est-à-dire* $A_1(R) = R[Y][X,\delta]$ *où* δ *est la dérivation usuelle des polynômes de* $R[Y]$*). Alors* $A_1(R)$ *est un ordre maximal de son anneau classique de fractions* Q*, et si* R *est de caractéristique nulle* $A_1(R)$ *n'est pas un ordre régulier de* Q.

DEMONSTRATION. - $R[Y]$ est un domaine d'intégrité, noethérien, complètement intégralement clos dans son corps de fractions, et donc il résulte de la proposition I.5.1 et de la proposition 2.7 que $A_1(R)$ est un ordre maximal de son anneau classique de fractions Q. Supposons que R soit de caractéristique nulle. Alors R est le centre de $A_1(R)$: en effet si $g \in A_1(R)$ on peut écrire $g = \sum_{i=o}^{n} f_i X^i$ avec $f_i \in R[Y]$, et on a $Xg - gX = \sum_{i=o}^{n} \delta(f_i)X^i$ et $gY - Yg = \sum_{i=1}^{n} i\, f_i X^{i-1}$ ce qui nous donne immédiatement le résultat. De plus pour tout idéal bilatère non nul I de $A_1(R)$ on a $I \cap R \neq \{0\}$ (il suffit de remarquer que si $g \in A_1(R)$ le degré en X de $gY - Yg$ est strictement inférieur à celui de g, et par la suite d'utiliser $Xg - gX$). On en déduit qu'on a alors $[A_1(R)]_o = A_1(K)$, où $[A_1(R)]_o = \{t \in Q |$ il existe N idéal bilatère non nul de $A_1(R)$ tel que $Nt \subseteq A_1(R)\}$ avec les notations du paragraphe IV.2. Si $A_1(R)$ était un ordre régulier de Q alors, d'après la proposition IV.2.6, on aurait $A_1(K) = Q$ et donc $A_1(K)$ serait un anneau artinien simple et sa dimension de Krull serait nulle : contradiction car la dimension de Krull de $A_1(K)$ est égale à 1 (voir par exemple [96] page 150). Donc $A_1(R)$ n'est pas un ordre régulier. ■

R désignant toujours un anneau de Goldie premier, d'anneau classique de fractions S, et σ étant un automorphisme de R, nous dirons qu'un idéal bilatère N de R est *σ-invariant* si $\sigma(N) = N$. La famille $\mathcal{F}'_\sigma$ des idéaux bilatères non nuls σ-invariants de R vérifie la condition (M) (cf. § IV 2). On notera $R_\sigma = \{x \in S | \exists N \in \mathcal{F}'_\sigma$ $Nx \subseteq R\}$; il est immédiat que R_σ est un sous-anneau de S contenant R (comme sous-anneau), stable par σ.

Dans la suite on désignera encore par σ l'automorphisme de $B = S[X,\sigma]$ défini par $\sum_i s_i X^i \longmapsto \sum_i \sigma(s_i)X^i$. On peut remarquer que, comme Q est l'anneau classique de fractions de B et comme X est inversible dans Q, le prolongement de σ à Q est l'automorphisme intérieur de Q défini par $q \longmapsto \sigma(q) = XqX^{-1}$ (en effet si $s \in S$ on a

$\sigma(s) = XsX^{-1}$; d'où dans B : $\sigma(\sum_i s_i X^i) = \sum_i \sigma(s_i)X^i = X(\sum_i s_i X^i)X^{-1}$, et si $q \in Q$ on peut écrire $q = bd^{-1}$ avec $b,d \in B$ ce qui donne

$\sigma(q) = \sigma(b)\sigma(d)^{-1} = XbX^{-1}(XdX^{-1})^{-1} = XqX^{-1}$).

LEMME 2.9. - *Sous les hypothèses précédemment posées, et si* $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal de* Q, *alors on a :*

(i) *Tout* c-A-*idéal bilatère est* σ-*invariant.*

(ii) $A_\sigma = \cup I^{-1}$ *où* I *parcourt l'ensemble des idéaux bilatères non nuls de* A.

(iii) $R_\sigma[X,\sigma] = A_\sigma \cap S[X,\sigma]$.

DEMONSTRATION. - *(i)* : Soit I un c-A-idéal bilatère. Alors AX et $X^{-1}A$ sont des c-A-idéaux tels que $AX = XA = (X^{-1}A)^{-1}$ et $X^{-1}A = AX^{-1} = (AX)^{-1}$, et on a $I = X^{-1}A \bullet I \bullet AX = AX \bullet I \bullet X^{-1}A$ où $\bullet$ désigne le produit commutatif des c-A-idéaux. Par suite on a $I = \sigma(I)$.

(ii) : D'après la proposition II.2.4 et d'après *(i)* on a $A_\sigma = \{y \in Q |$ il existe I idéal bilatère non nul de A tel que $Iy \subseteq A\} = \cup I^{-1}$ où I parcourt l'ensemble des idéaux bilatères non nuls de A.

(iii) : Si $f \in R_\sigma[X,\sigma]$ on a $f = \sum_{i=0}^{n} s_i X^i$ où $s_i \in R_\sigma$. Comme la famille $\mathscr{F}'_\sigma$ des idéaux bilatères non nuls σ-invariants de R vérifie la condition (M), il existe $N \in \mathscr{F}'_\sigma$ tel que, pour tout $i = 0,\dots,n$, $Ns_i \subseteq R$. Il vient $(AN)f \subseteq A$ et, comme AN est un idéal bilatère non nul de A (car $N(\sum_i r_i X^i) \subseteq \sum_i NX^i \subseteq \sum_i X^i N \subseteq AN$ puisque N est σ-invariant), on obtient $f \in (AN)^{-1}$ ce qui entraîne $f \in A_\sigma$ d'après *(ii)*. Donc on a $R_\sigma[X,\sigma] \subseteq A_\sigma \cap S[X,\sigma]$. Réciproquement si $f \in A_\sigma \cap S[X,\sigma]$ il existe un c-A-idéal bilatère entier I tel que $fI \subseteq A$. Si on considère $C(I) = \{$coefficients dominants des polynômes de I$\} \cup \{0\}$, alors C(I) est un idéal bilatère non nul de R (voir démonstration de la proposition 2.3) qui est σ-invariant car I est σ-invariant d'après *(i)*. On peut écrire $f = \sum_{i=0}^{p} s_i X^i$, et de $fI \subseteq A$ on déduit alors $s_p\sigma^p(C(I)) \subseteq R$, c'est-à-dire $s_p C(I) \subseteq R$; comme $C(I) \in \mathscr{F}'_\sigma$ on a, d'après le lemme 2.1, $R = \mathcal{O}_r(C(I)) = \mathcal{O}_\ell(C(I))$, et par suite on obtient $C(I)s_p \subseteq R$ ce qui donne $s_p \in R_\sigma$. On en déduit $f - s_p X^p \in A_\sigma \cap S[X,\sigma]$ et de proche en proche on obtient que tous les s_i appartiennent à R_σ. D'où $f \in R_\sigma[X,\sigma]$. Et ainsi $R_\sigma[X,\sigma] = A_\sigma \cap S[X,\sigma]$. ■

LEMME 2.10. - *Sous les hypothèses précédemment posées, et si* $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal de* Q *alors si* I *est un* R*-idéal bilatère* σ*-invariant, on a* $(AI)^{-1} = AI^{-1} = I^{-1}A$ *et* $(AI)^* = AI^* = I^*A$ *(où* $I^* = (I^{-1})^{-1}$*). En particulier l'ensemble des* R*-idéaux bilatères* σ*-invariants* I *tels que* $I = I^*$ *muni du produit* $I.J = (IJ)^*$ *est isomorphe à un sous-groupe abélien du groupe des* c-A*-idéaux bilatères.*

DEMONSTRATION. - Si I est un R-idéal bilatère σ-invariant alors I^{-1} est un R-idéal bilatère (d'après le lemme 2.1 et la proposition I.2.7) σ-invariant (en effet de $IxI \subseteq I$ on déduit $\sigma(I)\sigma(x)\sigma(I) \subseteq \sigma(I)$ c'est-à-dire $I\sigma(x)I \subseteq I$; d'où $\sigma(I^{-1}) \subseteq I^{-1}$ et de même avec σ^{-1} on obtient $\sigma^{-1}(I^{-1}) \subseteq I^{-1}$ c'est-à-dire $I^{-1} \subseteq \sigma(I^{-1})$). Comme I est σ-invariant, AI est un idéal bilatère non nul de A et est donc un A-idéal bilatère. Il est alors immédiat qu'on a $I^{-1} \subseteq (AI)^{-1}$ et donc $AI^{-1} \subseteq (AI)^{-1}$. Réciproquement si $f \in (AI)^{-1}$ on a $AIf \subseteq \mathcal{O}_\ell(AI) = A$ et il vient $Sf = SIf \subseteq SAIf \subseteq SA = B = S[X,\sigma]$. Alors on peut écrire $f = \sum_{i=0}^{p} s_i X^i$ avec $s_i \in S$ et comme $If \subseteq A$ on a, pour tout $i = 0,\dots,p$, $Is_i \subseteq R$ c'est-à-dire $s_i \in I^{-1}$ en utilisant le lemme 2.1. Par suite $f \in I^{-1}A$. Donc $(AI)^{-1} \subseteq I^{-1}A$. Comme $I^{-1}A = AI^{-1}$ on obtient $(AI)^{-1} = AI^{-1} = I^{-1}A$ et on en déduit $(AI)^* = AI^* = I^*A$.

L'application qui a un R-idéal bilatère σ-invariant I tel que $I = I^*$ fait correspondre le c-A-idéal AI est alors bien définie, et il est immédiat de vérifier qu'elle est injective et que c'est un morphisme de groupes. ■

PROPOSITION 2.11. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* R *est de plus un anneau noethérien et si* $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal de* Q*, alors* A *est un ordre régulier de* Q *si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $S = R_\sigma$.

(ii) Pour tout entier $n > 0$*, l'anneau* $M_n(S)$ *des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* S *est algébrique sur son centre.*

(iii) $\bar{\sigma}$ *est d'ordre fini dans* $\mathrm{Aut}(S)/\mathrm{Int}(S)$*, où* $\mathrm{Int}(S)$ *désigne le sous-groupe, formé des automorphismes intérieurs de* S*, du groupe* $\mathrm{Aut}(S)$ *des automorphismes de* S*, et* $\bar{\sigma}$ *la classe de* σ *dans* $\mathrm{Aut}(S)/\mathrm{Int}(S)$.

DEMONSTRATION. - Si I est un idéal bilatère non nul σ-invariant de R alors AI est un idéal bilatère non nul de A. Donc, comme la famille non vide $\mathcal{F}'_\sigma$ des idéaux bilatères non nuls σ-invariants de R vérifie la condition (M), la famille $\mathcal{F}' = \{AI \mid I \in \mathcal{F}'_\sigma\}$ est une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls de A qui vérifie la condition (M). De plus comme A est un anneau premier noethérien ordre maximal de son anneau classique de fractions Q nous pourrons utiliser les résultats du paragraphe IV.2. Pour cela remarquons qu'on a $R_\sigma[X,\sigma] = A_{\mathcal{F}'}$: l'inclusion $R_\sigma[X,\sigma] \subseteq A_{\mathcal{F}'}$ est claire ; si $f \in A_{\mathcal{F}'}$ il existe $I \in \mathcal{F}'_\sigma$ tel que $AIf \subseteq A$ d'où l'on déduit $f \in A_\sigma$, et $f \in S[X,\sigma]$ car $I \cap u(S) \neq \phi$, ce qui implique alors, d'après le lemme 2.9, qu'on a $f \in R_\sigma[X,\sigma]$.

C.N. : Si A est un ordre régulier de Q alors, d'après *(f)* de la proposition I.4.1, pour tout $q \in Q$, il existe un idéal bilatère non nul N de A tel que $Nq \subseteq A$ et donc on a $N^*q \subseteq A$ d'après la proposition II.2.4 ; N^* est donc σ-invariant d'après le lemme 2.9 et ainsi on obtient $q \in A_\sigma$. Donc on a $Q = A_\sigma$ et, d'après le lemme 2.9, on en déduit $R_\sigma[X,\sigma] = S[X,\sigma]$ ce qui implique $R_\sigma = S$. D'après la proposition IV.2.6, $A_{\mathcal{F}'}$ est un ordre régulier de Q et, comme $A_{\mathcal{F}'} = S[X,\sigma]$, la proposition 1.2 nous donne les conditions *(ii)* et *(iii)*.

C.S. : D'après la proposition 1.2 l'anneau $S[X,\sigma]$ est un ordre régulier de Q, et, comme $S[X,\sigma] = R_\sigma[X,\sigma] = A_{\mathcal{F}'}$, la proposition IV.2.6 implique que A est un ordre régulier de Q. ■

§ 3. APPLICATION A LA RECHERCHE D'EXEMPLES D'ORDRES MAXIMAUX.

Soit K un corps commutatif. L'anneau $R = K[X_n]_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes sur K à une infinité dénombrable d'indéterminées est un anneau de Krull commutatif (voir [18] page 9, ou [109, vol. II] page 83). Considérons l'automorphisme σ de R défini par $\sigma(X_i) = -X_i$, et l'anneau des polynômes tordus $A = R[X,\sigma]$.

Alors A est un anneau sans diviseurs de zéro, et comme R est un anneau de Krull les hypothèses de la proposition 2.5 sont vérifiées ce qui montre que A est un ordre maximal de son corps de fractions Q vérifiant la condition noethérienne sur les c-idéaux entiers.

A n'est pas un anneau noethérien à gauche : en effet l'idéal à gauche $I = AX_1 + \dots + AX_n + \dots$ de A n'est pas de type fini car s'il l'était, il existerait $f_1,\dots,f_p \in I$ tel que $I = \sum_{i=1}^{p} Af_i$ et donc pour tout $k = 1,2,\dots$ il existerait $g_{1k},\dots,g_{pk} \in A$ tels que $X_k = \sum_{i=1}^{p} g_{ik}f_i$ ce qui donne, en égalant les termes constants vis à vis de X, $X_k = \sum_{i=1}^{p} g'_{ik}f'_i$ avec $g'_{ik} \in R$ et $f'_i \in R$; mais alors l'idéal $RX_1 + \dots + RX_n + \dots$ de R serait de type fini et la suite $RX_1 \subseteq RX_1 + RX_2 \subseteq \dots$ d'idéaux de R serait stationnaire ce qui est absurde. De même A n'est pas un anneau noethérien à droite.

Désignons par Z(A) le centre de l'anneau A et montrons que A n'est pas un Z(A)-module de type fini. Il est aisé de vérifier qu'on a $Z(A) = \{ \sum_{i=o}^{n} a_{2i}X^{2i}$, où les éléments a_{2i} de R sont des polynômes ne possédant que des monômes de degré total pair$\}$. Si A était un Z(A)-module de type fini il existerait $f_1,\dots,f_s \in A$ tels que, pour tout $i = 1,2,\dots,$ il existerait $g_{1i},\dots,g_{si} \in Z(A)$ tels que $X_i = \sum_{j=1}^{s} g_{ji}f_j$ ce qui donne, en égalant les termes constants vis à vis de X, $X_i = \sum_{j=1}^{s} g'_{ji}f'_j$ avec $f'_j \in R$ et $g'_{ji} \in R'$ où R' désigne l'anneau des polynômes de R qui n'ont que des monômes de degré total pair. Les éléments $f'_1,\dots,f'_s$ de R sont des polynômes qui ne font intervenir qu'un nombre fini d'indéterminées X_i : soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i > n$, l'indéterminée X_i n'intervienne pas dans $f'_1,\dots,f'_s$. Pour $i > n$, le coefficient de X_i au second membre de $X_i = \sum_{j=1}^{s} g'_{ji}f'_j$ est $g''_{1i}f'_1 + \dots + g''_{si}f'_s$, où $g''_{1i},\dots,g''_{si}$ sont des polynômes de R formés de monômes de degré total impair (donc au moins de degré 1), et on a donc $g''_{1i}f'_1 + \dots + g''_{si}f'_s = 1$ ce qui est absurde car le terme constant de $g''_{1i}f'_1 + \dots + g''_{si}f'_s$ est nul. Donc A n'est pas un Z(A)-module de type fini.

Montrons que A est un ordre régulier de son corps de fractions Q. Pour tout entier p, posons $R_p = K[X_n]_{n \leqslant p}$, et désignons toujours par σ la restriction de σ à R_p. D'après la proposition I.8.1 et le corollaire 2.6 l'anneau $R_p[X,\sigma]$ est un ordre maximal noethérien de son corps de fractions. Le centre Z' de $R_p[X,\sigma]$ est $Z' = \{ \sum_{i=o}^{n} a_{2i}X^{2i}$, où les éléments a_{2i} de R_p sont des polynômes ne possédant que des monômes de degré total pair$\}$. Il est facile de vérifier que $R_p[X,\sigma]$ est un Z'-module de type fini (engendré par $1,X_o,\dots,X_p,X,X_oX,\dots,X_pX$). D'après la proposition I.7.6,

$R_p[X,\sigma]$ est un Z'-ordre maximal. Alors si f est un élément non nul de A il existe un entier p tel que $f \in R_p[X,\sigma]$ et , f étant inversible dans le corps de fractions de $R_p[X,\sigma]$, on obtient, comme dans la démonstration de la proposition I.7.1, que $Z' \cap Af \neq 0$ ce qui implique $Z(A) \cap Af \neq 0$; donc *(g)* de la proposition I.4.1 étant vérifié A est un ordre régulier de Q.

Ainsi A *est un anneau sans diviseurs de zéro, non noethérien* (ni à gauche, ni à droite), *ordre maximal régulier de son corps de fractions, vérifiant la condition noethérienne sur les* c-*idéaux entiers et qui n'est pas de type fini sur son centre.* Cet exemple prouve que l'étude du paragraphe IV.3 n'était pas inutile. Nous verrons au chapitre VIII que A est un Z(A)-ordre maximal de Fossum.

Evidemment on pourrait multiplier les exemples d'ordres maximaux, réguliers ou non, se présentant sous la forme $R[X,\sigma,\delta]$. D'ailleurs nous en verrons un autre exemple au chapitre VIII.

§ 4. COMPLEMENTS.

CHAMARIE a donné dans [27] d'autres propriétés des anneaux de polynômes de Ore et en particulier celles qui suivent ici que nous donnerons sans démonstration, à titre indicatif, et que nous n'utiliserons pas dans la suite. On garde ici les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe 1.

PROPOSITION 4.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si l'anneau* R *est noethérien et si* $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal de* Q, *alors le groupe* G(A) *des* c-A-*idéaux bilatères est isomorphe à* $G_\sigma(R) \oplus G(B)$ *où* $G_\sigma(R)$ *est le groupe des* R-*idéaux bilatères* σ-*invariants* I *tels que* $I = I^*$, *et* G(B) *est le groupe des* B-*idéaux bilatères (car* $B = S[X,\sigma]$ *est un anneau principal).*

D'après la proposition I.3.5 si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal dans un anneau artinien simple S et si I est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère de la forme $I = \mathcal{O}a$ (a étant alors nécessairement un élément inversible dans S) alors on a $I = a\mathcal{O}$. Les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères principaux forment un sous-groupe, noté $P(\mathcal{O})$, du groupe abélien $G(\mathcal{O})$ des c-$\mathcal{O}$-idéaux. Le groupe quotient $C(\mathcal{O}) = G(\mathcal{O})/P(\mathcal{O})$ est appelé le *groupe des classes de l'ordre maximal* $\mathcal{O}$.

Si maintenant R est un ordre maximal de son anneau classique de fractions artinien simple S et si $A = R[X,\sigma]$ est un ordre maximal de son anneau classique de fractions Q alors, d'après le lemme 2.10, l'ensemble des c-R-idéaux σ-invariants est un groupe $G_\sigma(R)$ isomorphe à un sous-groupe de G(A) ; les c-R-idéaux σ-invariants principaux (à gauche, ou ce qui est équivalent à droite) forment un sous-groupe $P_\sigma(R)$ de $G_\sigma(R)$ et on peut définir le groupe quotient $C_\sigma(R) = G_\sigma(R)/P_\sigma(R)$. Alors il vient :

PROPOSITION 4.2. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* R *est un ordre maximal de son anneau classique de fractions artinien simple* S, *et si* $A = R[X,\sigma]$ *est un ordre maximal noethérien de* Q *alors les groupes* $C_\sigma(R)$ *et* C(A) *son isomorphes. En particulier si* R *est un anneau simple noethérien et si* $X_1,\dots,X_n$ *sont des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de* R, *alors, en considérant* $A = R[X_1,\dots,X_n]$, *les* c-A-*idéaux bilatères sont tous principaux et engendrés par un élément appartenant au centre de* A.

Si R est un ordre maximal de S et si I est un R-idéal inversible, c'est-à-dire s'il existe un R-idéal J tel que IJ = JI = R, alors on a $J = I^{-1}$ et $I = I^*$; pour deux R-idéaux inversibles I et I' on a $I.I' = II'$. Alors les R-idéaux inversibles forment un sous-groupe, noté I(R), du groupe des c-R-idéaux G(R) et on peut considérer le groupe quotient H(R) = G(R)/I(R).

PROPOSITION 4.3. - *Sous les hypothèses de la proposition* 4.2, *désignons par* I(A) *le sous-groupe, formé par les* A-*idéaux inversibles, du groupe* G(A) *des* c-A-*idéaux, et par* $I_\sigma(R)$ *le sous-groupe, formé des* R-*idéaux inversibles* σ-*invariants, du groupe* $G_\sigma(R)$ *des* c-R-*idéaux* σ-*invariants. Posons* H(A) = G(A)/I(A) *et* $H_\sigma(R) = G_\sigma(R)/I_\sigma(R)$. *Alors les groupes* H(A) *et* $H_\sigma(R)$ *sont isomorphes.*

Les ordres maximaux $\mathcal{O}$ (dans un anneau classique de fractions artinien simple S) tels que $H(\mathcal{O})$ soit réduit à un élément, c'est-à-dire tels que tous les c-$\mathcal{O}$-idéaux soient inversibles ont été introduits par COZZENS et SANDOMIERSKY [36] qui les dénomment des R-I-ordres maximaux. Nous avons vu au chapitre III que les ordres d'Asano en sont des exemples. Comme application de la proposition 4.3 on a :

COROLLAIRE 4.4. - *Soit* R *un ordre d'Asano noethérien et soient* $X_1,\ldots,X_n$ *des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de* R, *alors* $R[X_1,\ldots X_n]$ *est un* R-I-*ordre maximal.*

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Tout ce chapitre est tiré de CHAMARIE [27] et [26] sauf le lemme 2.4 et la proposition 2.5 et l'exemple du paragraphe 3 qui sont dus à MAURY [82].

CHAPITRE VI.

APPLICATION DE LA THEORIE DE LESIEUR ET CROISOT AUX ORDRES MAXIMAUX.

§ 1. SUR LA THEORIE DE LESIEUR ET CROISOT.

La théorie des $(\mathscr{T})$-algèbres a été exposée par LESIEUR et CROISOT [70]. Dans ce paragraphe nous rappelons les définitions et les résultats de cette théorie qui seront utiles dans la suite. Pour les démonstrations et pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à [70] et [71].

Soit $(\mathscr{T})$ un ensemble dont nous noterons les éléments par des majuscules rondes $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, ... On suppose que $(\mathscr{T})$ est muni d'une loi de composition interne $(\mathscr{A},\mathscr{B}) \longmapsto \mathscr{A}\mathscr{B}$ et d'une relation d'ordre $\leqslant$, qui vérifie les axiomes A suivants :

A_1. $(\mathscr{T})$ est un monoïde : $(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})$.

A_2. $(\mathscr{T})$ est un treillis ($\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \sup(\mathscr{A},\mathscr{B})$ et $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \inf(\mathscr{A},\mathscr{B})$) qui possède un élément universel $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire $\mathscr{A} \leqslant \mathscr{E}$ pour tout $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$).

A_3. Quels que soient $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C} \in (\mathscr{T})$ on a $\mathscr{A}(\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) = \mathscr{A}\mathscr{B} \cup \mathscr{A}\mathscr{C}$ et $(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{A} \cup \mathscr{C}\mathscr{A}$.

A_4. Quels que soient $\mathscr{A},\mathscr{B} \in (\mathscr{T})$ on a $\mathscr{A}\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

Soit (L) un ensemble dont nous noterons les éléments par des majuscules droites A, B, ... On suppose que (L) est muni d'une relation d'ordre qui vérifie l'axiome B suivant :

B. (L) est un treillis ($A \cup B = \sup(A,B)$ et $A \cap B = \inf(A,B)$) qui possède un élément universel U (c'est-à-dire $A \leqslant U$ pour tout $A \in (L)$).

On suppose que (L) est muni d'une loi de composition externe ayant $(\mathscr{T})$ pour domaine d'opérateurs, $(\mathscr{A},X) \longmapsto \mathscr{A}X$, qui vérifie les axiomes C suivants :

C_1. $\mathscr{A}(X \cup Y) = \mathscr{A}X \cup \mathscr{A}Y$ quels que soient $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ et $X,Y \in (L)$.

C_2. $(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})X = \mathscr{A}X \cup \mathscr{B}X$ quels que soient $\mathscr{A},\mathscr{B} \in (\mathscr{T})$ et $X \in (L)$.

C_3. $(\mathscr{A}\mathscr{B})X = \mathscr{A}(\mathscr{B}X)$ quels que soient $\mathscr{A},\mathscr{B} \in (\mathscr{T})$ et $X \in (L)$.

C_4. $\mathscr{E}X \leqslant X$ quel que soit $X \in (L)$.

C_5. Pour tout $X \in (L)$ et tout $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$, il existe au moins un élément $Y \in (L)$ tel que $\mathscr{A}Y \leqslant X$, et l'ensemble des $Y \in (L)$ ayant cette propriété possède un plus grand élément noté $X \cdot{\cdot} \mathscr{A}$ et appelé *résiduel à droite* de X par $\mathscr{A}$.

C_6. Pour tout couple X,Y d'éléments de (L), il existe au moins un élément $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ tel que $\mathscr{A}Y \leqslant X$, et l'ensemble des $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ ayant cette propriété possède un plus grand élément noté $X^{\bullet}.Y$ et appelé *résiduel à gauche* de X par Y.

Enfin on suppose vérifié l'axiome D suivant :

D. L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément $X \in (L)$ vérifient la condition noethérienne.

EXEMPLES. - 1) Ce qui précède est vérifié si l'on considère $\mathcal{O}$ un anneau noethérien à gauche, $(\mathscr{T})$ l'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ et (L) l'ensemble des idéaux à gauche de $\mathcal{O}$.

2) Ce qui précède est aussi vérifié si l'on considère $\mathcal{O}$ un anneau noethérien à gauche, ordre régulier d'un anneau S, et si l'on prend pour $(\mathscr{T})$ l'ensemble T'_0 des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères contenus dans $\mathcal{O}$ et pour (L) l'ensemble L'_0 des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche contenus dans $\mathcal{O}$. (Il est immédiat que les axiomes A,B,C,D sont vérifiés en utilisant les propriétés des paragraphes I.2 et I.4).

Remarquons que dans les exemples qui précèdent les treillis $(\mathscr{T})$ et (L) sont modulaires. Mais revenons à la théorie :

Un *élément* $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ est dit *premier* si la relation $\mathscr{B}\mathscr{C} \leqslant \mathscr{A}$, avec $\mathscr{B},\mathscr{C} \in (\mathscr{T})$, implique $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}$ ou $\mathscr{C} \leqslant \mathscr{A}$.

Un *résiduel à gauche* de $X \in (L)$ sera dit *propre* s'il est de la forme $X^{\bullet}{\cdot}Y$ avec $Y \not\leqslant X$.

L'axiome D assure l'existence de résiduels à gauche propres maximaux de $X \in (L)$ (il s'agit de maximalité en tant que résiduels à gauche propres de X).

PROPOSITION 1.1. - *Pour tout* $X \in (L)$, *tout résiduel à gauche propre de* X *maximal (en tant que résiduel à gauche propre de* X*) est premier.* ([70] , prop. 2.1).

PROPOSITION 1.2. - *Pour tout* $X \in (L)$ *on peut trouver un nombre fini d'éléments premiers* $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n$ *de* $(\mathscr{T})$ *tels que, pour tout* $i = 1,\ldots,n$, $X^{\bullet}.U \leqslant \mathscr{P}_i$ *et* $\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}_i \leqslant X^{\bullet}.U$. ([70] , prop. 2.4).

Un *élément* $X \in (L)$, distinct de U, sera dit *primal* s'il n'admet qu'un seul résiduel à gauche propre maximal. ([70] , théorème 4.1).

PROPOSITION 1.3. - *Tout élément* $X \in (L)$ *est primal ou admet une décomposition en intersection d'un nombre fini* n *d'éléments primaux dont les résiduels à gauche propres maxima sont incomparables deux à deux et parfaitement déterminés, ainsi que* n, *par la donnée de* X. ([70] , théorèmes 4.2 et 4.4).

Un *élément* $X \in (L)$, distinct de U, sera dit *primaire (à droite)* si les relations $\mathscr{A}Y \leqslant X$ et $Y \nleqslant X$, avec $Y \in (L)$ et $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$, impliquent l'existence d'un entier positif k tel que $\mathscr{A}^k \leqslant X^{\bullet}.U$. ([70] , définition, § 5).

PROPOSITION 1.4. - *Pour tout* $X \in (L)$, *les éléments* $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ *tels qu'il existe un entier positif* m *vérifiant* $\mathscr{A}^m \leqslant X^{\bullet}.U$ *ont un plus grand élément* $\mathscr{R}$ *appelé radical (primaire) de* X *; cet élément* $\mathscr{R}$ *est l'intersection des éléments premiers de* $(\mathscr{T})$ *qui sont minimaux pour la propriété de contenir* $X^{\bullet}.U$. ([70] , théorème 3.1).

PROPOSITION 1.5. - *Pour qu'un élément* $Q \in (L)$, *distinct de* U, *soit primaire il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier* $\mathscr{P}$ *qui soit élément premier minimum contenant* $Q^{\bullet}.U$ *;* $\mathscr{P}$ *est alors le radical de* Q. ([70] , théorème 5.1).

Si $Q \neq U$ est primaire de radical premier $\mathscr{P}$, on dit que Q est $\mathscr{P}$-primaire.

Un *élément* $Q \in (L)$ sera dit *secondaire (à droite)* si les relations $\mathscr{A}X \leqslant Q$ et $X \nleqslant Q$, avec $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ et $X \in (L)$, impliquent l'existence d'entiers positifs $k_0, k_1, \dots, k_n$ et d'éléments $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_n$ de $(\mathscr{T})$ tels que $\mathscr{A}^{k_0} \mathscr{L}_1 \mathscr{A}^{k_1} \mathscr{L}_2 \mathscr{A}^{k_2} \dots \mathscr{L}_n \mathscr{A}^{k_n} U \leqslant Q$ et $Q.\cdot \mathscr{L}_i = Q$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

PROPOSITION 1.6. - *Pour qu'un élément* $Q \in (L)$, *distinct de* U, *soit secondaire il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier* $\mathscr{P}$ *qui soit un élément premier minimal contenant* $Q^{\cdot}.U$. ([70], théorème 6.1).

Si $Q \neq U$ est secondaire de résiduel à gauche propre premier $\mathscr{P}$, on dit que Q est $\mathscr{P}$-secondaire.

Pour un élément $Q \in (L)$ introduisons la *condition* (P) suivante :

(P). $Q < Q.\cdot\mathscr{A}$ et $(Q.\cdot\mathscr{A}) \cap X \leqslant Q$ impliquent $X \leqslant Q$.

PROPOSITION 1.7. - *Tout élément secondaire de* (L) *vérifie la condition* (P). ([70], démonstration de la propriété 7.4).

Un élément $\mathscr{A} \in (\mathscr{T})$ sera dit (L)-*principal* si $X' \leqslant \mathscr{A}B$, avec $X', B \in (L)$, implique l'existence de $X \in (L)$ tel que $X \leqslant B$ et $X' = \mathscr{A}X$.

PROPOSITION 1.8. - *Si tout élément de* $(\mathscr{T})$ *est union d'éléments* (L)-*principaux, alors tout élément de* (L) *vérifiant la condition* (P) *(en particulier tout élément secondaire) est primaire*. ([70], démonstration de la proposition 7.1).

Plus directement en ce qui concerne la décomposition tertiaire dans un anneau noethérien à gauche il vient :

PROPOSITION 1.9. - *Si* A *est un idéal à gauche d'un anneau noethérien à gauche* $\mathcal{O}$, *alors l'ensemble* $\mathscr{R}(A) = \{a \in \mathcal{O} \mid \forall\, b \notin A\ \exists\, x \in \mathcal{O}b \quad x \notin A$ *et* $a\mathcal{O}x \subseteq A\}$ *est un idéal bilatère de* $\mathcal{O}$. ([71], théorème 1.1).

L'idéal bilatère $\mathscr{R}(A)$ de $\mathcal{O}$ défini dans la proposition 1.9 précédente est appelé *radical tertiaire* de l'idéal à gauche A de $\mathcal{O}$.

Si $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien à gauche et si M est un $\mathcal{O}$-module à gauche non nul, rappelons (cf. [105]) qu'un *idéal* bilatère *premier* $\mathcal{P}$ de $\mathcal{O}$ est dit *associé* à M s'il existe un sous-module non nul N de M tel que $\mathcal{P}$ soit l'annulateur de tous les sous-modules non nuls de N ; de plus Ass(M) désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à M. Il est alors facile de démontrer :

PROPOSITION 1.10. - *Si* A *est un idéal à gauche d'un anneau noethérien à gauche* $\mathcal{O}$, *alors on a* $\mathcal{R}(A) = \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/A)} \mathcal{P}$, *où* $\mathcal{R}(A)$ *désigne le radical tertiaire de* A, *et donc* $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/A) = A^{\bullet} \cdot \mathcal{O} \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Un *idéal à gauche* A d'un anneau noethérien à gauche $\mathcal{O}$ est dit *tertiaire* si les relations $a\mathcal{O}b \subseteq A$ et $b \notin A$ impliquent $a \in \mathcal{R}(A)$.

PROPOSITION 1.11. - *Pour qu'un idéal à gauche* A *d'un anneau noethérien à gauche* $\mathcal{O}$ *soit tertiaire il faut et il suffit que l'ensemble* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/A)$ *des idéaux premiers associés à* $\mathcal{O}/A$ *soit réduit à un seul élément.*

Donc le radical tertiaire d'un idéal à gauche tertiaire A est un idéal bilatère premier $\mathcal{P}$ ([71], théorème 2.3). On dit alors que A est $\mathcal{P}$-tertiaire.

PROPOSITION 1.12. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau noethérien à gauche. Alors tout idéal à gauche* A *de* $\mathcal{O}$, *distinct de* $\mathcal{O}$, *possède une décomposition de la forme* $A = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$, *où les* T_i *sont des idéaux à gauche* $\mathcal{P}_i$*-tertiaires, telle que aucun des idéaux* T_i *n'est superflu dans l'intersection et telle que les idéaux premiers* $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ *de* $\mathcal{O}$ *sont tous distincts ; de plus les idéaux premiers* $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ *de* $\mathcal{O}$ *sont bien déterminés, ainsi que* n, *par la donnée de* A, *et plus précisément on a* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/A) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\}$. (voir [71], théorème 3.3).

La décomposition de A intervenant dans la proposition 1.12 précédente est appelée une *décomposition tertiaire réduite* de A dans $\mathcal{O}$.

Pour terminer ce paragraphe remarquons que si $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien à gauche, alors un idéal à gauche $\mathcal{P}$-primaire (au sens de l'exemple 1)) est un idéal à gauche $\mathcal{P}$-tertiaire.

§ 2. LE THEOREME DE L'IDEAL A GAUCHE PRINCIPAL DANS LES ORDRES MAXIMAUX REGULIERS NOETHERIENS A GAUCHE.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ désigne un anneau noethérien à gauche, ordre maximal régulier d'un anneau S.

Si nous reprenons les notations et les résultats du début du paragraphe II.2 il est clair que les ensembles $(\mathcal{T}) = G'_0$ et $(L) = (\bar{L}'_0)$ vérifient les axiomes A,B,C,D de la théorie de LESIEUR et CROISOT, et nous allons donc appliquer les résultats du paragraphe 1.

LEMME 2.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, tout élément de* G'_0 *est* $(\bar{L}'_0)$*-principal.*

DEMONSTRATION. - Considérons $\bar{\bar{A}}$ un élément de G'_0 et soient $\bar{X}',\bar{B} \in (\bar{L}'_0)$ tels que $\bar{X}' \leqslant \bar{\bar{A}}.\bar{B}$. Si on pose $\bar{X} = \overline{\overline{A^{-1}}}.\bar{X}'$, on vérifie alors sans peine qu'on a $\bar{X} \leqslant \bar{B}$ (d'où $\bar{X} \in (\bar{L}'_0)$) et $\bar{X}' = \bar{\bar{A}}.\bar{X}$. ∎

THEOREME 2.2. - *Sous les hypothèses précédemment posées, tout élément de* $(\bar{L}'_0)$ *est intersection d'un nombre fini* n *d'éléments primaires de* $(\bar{L}'_0)$ *dont les radicaux sont distincts. Le nombre* n *et ces radicaux sont bien déterminés par l'élément considéré.*

DEMONSTRATION. - Soit $\bar{X} \in (\bar{L}'_0)$. D'après la proposition 1.3 on peut écrire $\bar{X} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{X}_i$ où les $\bar{X}_i$ sont des éléments primaux de $(\bar{L}'_0)$ dont les résiduels à gauche propres maxima $\bar{\bar{P}}_i$ sont incomparables deux à deux et parfaitement déterminés, ainsi que n, par $\bar{X}$. Comme $\bar{\bar{P}}_i$ est le seul résiduel à gauche propre maximal de $\bar{X}_i$ il est premier d'après la proposition 1.1, et il contient $\bar{X}_i \cdot . \bar{\mathcal{O}}$; il résulte alors de la proposition II.1.6 que $\bar{\bar{P}}_i$ est un élément premier minimal de G'_0 contenant $\bar{X}_i \cdot . \bar{\mathcal{O}}$. Alors $\bar{\bar{P}}_i$ est, toujours d'après la proposition II.1.6, le seul résiduel à gauche propre premier de $\bar{X}_i$ qui soit un élément premier minimal contenant $\bar{X}_i \cdot . \bar{\mathcal{O}}$, et ainsi, d'après la proposition 1.6, $\bar{X}_i$ est un élément secondaire de $(\bar{L}'_0)$. On déduit alors du lemme 2.1 et de la proposition 1.8 que $\bar{X}_i$ est un élément primaire de $(\bar{L}'_0)$, et il résulte de la proposition 1.5 que $\bar{\bar{P}}_i$ est le radical de $\bar{X}_i$. D'où le résultat. ∎

D'après l'exemple 2) du paragraphe 1 on peut aussi appliquer la théorie de LESIEUR et CROISOT aux treillis T'_0 et L'_0 (et donc on peut parler de $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier primaire, de son radical,...). Il vient :

THEOREME 2.3. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* $\bar{X}$ *est un élément primaire de* $(\bar{L}'_0)$*, distinct de* $\bar{\mathcal{O}}$*, alors* X^**, le plus grand élément de la classe* $\bar{X}$*, est un élément primaire de* L'_0 *distinct de* $\mathcal{O}$ *; de plus si* $\bar{\bar{P}}$ *est le radical de* $\bar{X}$ *alors* P^**, le plus grand élément de la classe* $\bar{\bar{P}}$*, est le radical de* X^* *et est distinct de* $\mathcal{O}$*.*

DEMONSTRATION. - Il résulte des propriétés exposées dans le paragraphe II.2, et de la proposition 1.5 qu'on a $X^* \in L'_0$, $X^* \neq \mathcal{O}$, $P^* \in T'_0$ et $P^* \neq \mathcal{O}$. Si on considère $A \in T'_0$ et $Y \in L'_0$ tels que $AY \subseteq X^*$ et $Y \not\subseteq X^*$ on obtient $\bar{\bar{A}}.\bar{Y} \leqslant \bar{X}$ et $\bar{Y} \not\leqslant \bar{X}$, avec $\bar{\bar{A}} \in G'_0$ et $\bar{Y} \in (\bar{L}'_0)$, ce qui implique l'existence d'un entier positif k tel que $\bar{\bar{A}}^k \leqslant \bar{X} \cdot\!\!\cdot \bar{\mathcal{O}}$ d'où l'on déduit $A^k \subseteq X^*$; donc X^* est un élément primaire de L'_0. Il existe un entier positif m tel que $\bar{\bar{P}}^m \leqslant \bar{X} \cdot\!\!\cdot \bar{\mathcal{O}}$ d'où l'on déduit $(P^*)^m \subseteq X^*$; de plus si $A \in T'_0$ vérifie $A^k \subseteq X^*$ pour un certain entier positif k, on obtient $\bar{\bar{A}}^k \leqslant \bar{X} \cdot\!\!\cdot \bar{\mathcal{O}}$ ce qui entraîne $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{P}}$ d'où l'on déduit $A \subseteq P^*$. Donc P^* est le radical de X^*. ■

THEOREME 2.4. (Théorème de l'idéal à gauche principal). - *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau noethérien à gauche, ordre maximal régulier d'un anneau* S. *Si* a *est un élément de* $\mathcal{O}$ *non inversible dans* $\mathcal{O}$ *mais inversible dans* S*, alors le* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche* $\mathcal{O}$a *se décompose en intersection finie de* $\mathcal{O}$*-idéaux à gauche entiers primaires dont les radicaux sont distincts ; ces radicaux sont bien déterminés et ce sont des* $\mathcal{O}$*-idéaux entiers premiers minimaux (dits associés à* $\mathcal{O}$a*).*

DEMONSTRATION. - Il est clair que $\mathcal{O}$a est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche et que c'est le plus grand élément dans sa classe $\overline{\mathcal{O}a}$ (car $(\mathcal{O}a)^* = (a^{-1}\mathcal{O})^{-1} = \mathcal{O}a$). D'après le théorème 2.2 on peut écrire $\overline{\mathcal{O}a} = \bar{\bigcap}_{i=1}^{n} \bar{X}_i$ où les $\bar{X}_i$ sont des éléments $\bar{\bar{P}}_i$-primaires de $(\bar{L}'_0)$ et où les radicaux $\bar{\bar{P}}_1,\ldots,\bar{\bar{P}}_n$ sont distincts et bien déterminés par $\mathcal{O}$a. Par définition de l'intersection $\bar{\cap}$ dans $(\bar{L}'_0)$ le plus grand élément de la classe $\bar{\bigcap}_{i=1}^{n} \bar{X}_i$ est $\bigcap_{i=1}^{n} X_i^*$, avec X_i^* plus grand élément de la classe $\bar{X}_i$. Il vient alors $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^*$ et d'après le théorème 2.3 les X_i^* sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers primaires dont les radicaux $P_1^*,\dots,P_n^*$ sont distincts et bien déterminés par $\mathcal{O}$a (car P_i^* est le plus grand élément de la classe $\bar{\bar{P}}_i$). D'après la proposition II.2.2, $P_1^*,\dots,P_n^*$ sont des $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers minimaux. ∎

REMARQUE 2.5. - Si $\mathcal{O}$ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions S, alors un $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier primaire Q est un idéal à gauche primaire de $\mathcal{O}$: en effet tout idéal bilatère non nul A de $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal entier et si on a $AX \subseteq Q$, avec X idéal à gauche de $\mathcal{O}$ tel que $X \nsubseteq Q$, alors il vient $A(X+Q) \subseteq Q$,avec $X+Q \nsubseteq Q$ et $X+Q$ $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier, ce qui implique l'existence d'un entier positif m tel que $A^m \subseteq Q$; ainsi Q est un idéal à gauche primaire de $\mathcal{O}$.

REMARQUE 2.6. - Si $\mathcal{O}'$ est un ordre maximal régulier d'un anneau S tel que la condition noethérienne sur l'ensemble des $\mathcal{O}'$-idéaux à gauche entiers I tels que $I = I^*$ soit vérifiée, alors les treillis G_0' et $(\bar{L}_0')$ vérifient la condition noethérienne (et donc les axiomes A,B,C,D de la théorie de LESIEUR et CROISOT). Si Q est un $\mathcal{O}'$-idéal à gauche entier, distinct de $\mathcal{O}'$, nous dirons que Q est P-primaire avec P élément premier de T_0' s'il existe un entier positif m tel que $P^m \subseteq Q$ et si les relations $AX \subseteq Q$ et $X \nsubseteq Q$, avec $A \in T_0'$ et $X \in L_0'$, impliquent $A \subseteq P$. Lorsque $\mathcal{O}'$ est un anneau noethérien à gauche, cette définition de primaire coïncide avec celle qui résulte de l'exemple 2) du paragraphe 1 (cf. propriété 5.7 de [70]). Alors les théorèmes 2.3 et 2.4 peuvent s'énoncer dans ce nouveau contexte en remplaçant $\mathcal{O}$ par $\mathcal{O}'$.

§ 3. APPLICATION : CARACTERISATION DES ANNEAUX PREMIERS, NOETHERIENS, ORDRES MAXIMAUX REGULIERS DE LEUR ANNEAU CLASSIQUE DE FRACTIONS.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ est un anneau premier, noethérien, d'anneau classique de fractions S.

Conformément aux notations du chapitre IV si M est un sous-ensemble de $\mathcal{O}$ et si P est un idéal premier de $\mathcal{O}$ nous noterons

$M_P = \{x \in S \mid \exists\, s \in \mathcal{O}\,,\ s \notin P$ tel que $s\mathcal{O}x \subseteq M\}$ et

${}_PM = \{x \in S \mid \exists\, s \in \mathcal{O}\,,\ s \notin P$ tel que $x\mathcal{O}s \subseteq M\}$; ces ensembles M_P et ${}_PM$ pouvant être vides.

LEMME 3.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, considérons* P *et* P' *deux idéaux premiers de* $\mathcal{O}$ *et* Q *un idéal à gauche* P'*-primaire. Alors si* P' *est contenu dans* P *on a* $Q_P \cap \mathcal{O} = Q$, *et si* P' *n'est pas contenu dans* P *on a* $Q_P = \mathcal{O}_P$.

DEMONSTRATION. - Il existe un entier positif m tel que $P'^m \subseteq Q$. Si $P' \nsubseteq P$, il existe $s \in P'^m$ tel que $s \notin P$ ce qui implique $s\mathcal{O}1 \subseteq P'^m \subseteq Q$ et donc $1 \in Q_P$; comme Q_P est un idéal à gauche de l'anneau $\mathcal{O}_P$ on en déduit $Q_P = \mathcal{O}_P$. Si $P' \subseteq P$, considérons $x \in Q_P \cap \mathcal{O}$; alors il existe $s \in \mathcal{O}$ et $s \notin P$ tel que $s\mathcal{O}x \subseteq Q$ ce qui donne $\mathcal{O}s\mathcal{O}\mathcal{O}x \subseteq Q$ avec $\mathcal{O}s\mathcal{O} \nsubseteq P'$ d'où l'on déduit $x \in Q$ puisque Q est P'-primaire. Donc si $P' \subseteq P$ on a $Q_P \cap \mathcal{O} = Q$. ■

THEOREME 3.2. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau premier, noethérien, d'anneau classique de fractions* S *dont l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux est supposé non vide. Alors* $\mathcal{O}$ *est un ordre maximal régulier de* S *si et seulement si :*

(i) Pour tout élément non diviseur de zéro a *de* $\mathcal{O}$, *non inversible dans* $\mathcal{O}$, *l'idéal à gauche* $\mathcal{O}a$ *de* $\mathcal{O}$ *se décompose en intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche primaires (au sens de l'exemple* 1*) du paragraphe* 1*) de* $\mathcal{O}$ *dont les radicaux sont des idéaux premiers non nuls minimaux de* $\mathcal{O}$.

(ii) Pour tout idéal premier non nul minimal P *de* $\mathcal{O}$, *l'anneau* $\mathcal{O}$ *vérifie la condition de Ore à gauche et à droite selon* $\mathscr{C}(P)$ *et l'anneau* $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ *est un anneau héréditaire.*

DEMONSTRATION. - Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de S on obtient *(i)* par le théorème 2.4 et la remarque 2.5, et on obtient *(ii)* par la proposition IV.1.7, la proposition II.2.2 et les théorèmes IV.2.15 et IV.2.19. Réciproquement posons $\mathcal{O}' = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} \mathcal{O}_P$ où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble non vide des idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}$ et montrons que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$: on a bien sûr $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$; si $x \in \mathcal{O}'$ on peut écrire $x = ba^{-1}$ avec $b \in \mathcal{O}$ et $a \in u(S) \cap \mathcal{O}$. Si $a \in u(\mathcal{O})$ alors $x \in \mathcal{O}$. Si $a \notin u(\mathcal{O})$ alors l'idéal à gauche $\mathcal{O}a$ s'écrit $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ où les Q_i sont des idéaux à gauche P_i-primaires de $\mathcal{O}$ avec $P_i \in \mathcal{P}$. Pour tout $i = 1,\dots,n$ on a alors $(\mathcal{O}a)_{P_i} \subseteq (Q_i)_{P_i}$ ce qui donne $(\mathcal{O}a)_{P_i} \cap \mathcal{O} \subseteq (Q_i)_{P_i} \cap \mathcal{O}$ c'est-à-dire $(\mathcal{O}a)_{P_i} \cap \mathcal{O} \subseteq Q_i$ d'après le lemme 3.1 ; comme x appartient à $\mathcal{O}_{P_i}$ et $x = ba^{-1}$ on obtient $b \in (\mathcal{O}a)_{P_i}$ (car on a $\mathcal{O}_{P_i} a \subseteq (\mathcal{O}a)_{P_i}$). Ainsi il vient $b \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ c'est-à-dire $b \in \mathcal{O}a$ ce qui implique que $x = ba^{-1}$ appartient à $\mathcal{O}$. On a donc $\mathcal{O} = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_P = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$. Il résulte alors du théorème IV.2.19 que $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de S. ∎

REMARQUES 3.3. - 1) Les anneaux premiers, noethériens, ordres maximaux réguliers de leur anneau de fractions S qui ne possèdent pas d'idéaux premiers non nuls minimaux sont les anneaux simples dont tous les éléments non diviseurs de zéro sont inversibles.

2) Le théorème 3.2 se réduit dans le cas commutatif à la caractérisation de KRULL-NAGATA des domaines d'intégrité noethériens intégralement clos [88].

Dans le cas commutatif, on connaît une autre caractérisation des domaines d'intégrité noethériens intégralement clos (cf. [86]). Dans le cas non commutatif on peut démontrer :

PROPOSITION 3.4. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions. Pour tout élément non diviseur de zéro* a *de* $\mathcal{O}$, *non inversible dans* $\mathcal{O}$, *et pour tout idéal premier* P *associé à* $\mathcal{O}a$ *(au sens du théorème* 2.4*), il n'y a pas d'idéaux* P*-primaires entre* P *et la puissance symbolique* 2-ième $P^{(2)}$ *de* P.

DEMONSTRATION. - Soient n un entier positif et I un idéal bilatère P-primaire de $\mathcal{O}$ contenant P^n. On a $P^n \subseteq I \subseteq P$, et I étant un $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier non quasi-égal à $\mathcal{O}$ (car, d'après la proposition II.2.2, P n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$) on déduit de la proposition II.1.7 que la classe d'Artin $\bar{\bar{I}}$ de I est de la forme $\bar{\bar{P}}^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Comme le c-idéal I^* est quasi-égal à I il existe, d'après la propriété (7) du paragraphe II.1, deux $\mathcal{O}$-idéaux bilatères entiers J et J', quasi-égaux à $\mathcal{O}$, tels que $IJ' = JI^*$ ce qui donne $JI^* \subseteq I$; comme P n'est pas quasi-égal à $\mathcal{O}$ on a

$J \not\subseteq P$, et on obtient alors $I^* \subseteq I$ puisque I est P-primaire. Donc on a $I = I^*$ et I est donc le plus grand élément de sa classe $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{P}}^k$; comme P est un c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier (d'après la proposition II.2.2), il résulte alors de la proposition IV.2.12 qu'on a $I = P^{(k)}$. On a donc montré que les idéaux bilatères P-primaires de $\mathcal{O}$ contenant P^n sont $P, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$; ceci donne le résultat. ■

REMARQUE 3.5. - Sous les hypothèses de la proposition 3.4 on a $\bigcap_{n \geqslant 1} P^{(n)} = 0$ d'après le corollaire IV.2.14. Si $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro dont tous les idéaux à gauche et à droite sont bilatères alors les conditions "il n'y a pas d'idéaux bilatères P-primaires entre P et $P^{(2)}$", et "$\bigcap_{n \geqslant 1} P^{(n)} = 0$" (avec P défini comme dans la proposition 3.4) sont nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{O}$ soit un ordre maximal de son corps de fractions (cf. [77]).

§ 4. LE THEOREME DE L'IDEAL A GAUCHE PRINCIPAL DANS LES ORDRES MAXIMAUX PREMIERS NOETHERIENS NON NECESSAIREMENT REGULIERS.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ désigne un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau classique de fractions S.

Nous allons donner un énoncé du théorème de l'idéal à gauche principal pour $\mathcal{O}$ qui ici n'est pas nécessairement régulier. Pour ce faire on pourrait encore utiliser la théorie des $(\mathcal{T})$-algèbres comme cela est fait en [78] dans le cas d'un anneau sans diviseurs de zéro. Ici nous préférons suivre l'exposé de CHAMARIE [23].

PROPOSITION 4.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soient* P *un* c-*idéal entier premier et* I *un idéal à gauche* P-*tertiaire contenant un idéal bilatère non nul de* $\mathcal{O}$. *Alors* I *est un idéal à gauche* P-*primaire de* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Soit A l'idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$ contenu dans I. D'après le théorème IV.2.15 et sa démonstration et d'après la proposition III.2.4, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}P} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est un ordre d'Asano régulier de S dont les $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$-idéaux forment un groupe cyclique et en particulier tout idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)}$ est une puissance de $M = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(P)} P$. L'idéal A de $\mathcal{O}$ contient un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$ (inversible dans S) et ainsi l'idéal à gauche $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}A$ de $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$ contient un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n \subseteq M^n \subseteq \mathcal{O}_{\mathscr{C}(P)}A$. Comme $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien, P^n est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini, et ainsi il existe $c \in \mathscr{C}(P)$ tel que $cP^n \subseteq A \subseteq I$. Comme I est P-tertiaire on obtient $P^n \subseteq I$. Donc I est un idéal à gauche P-primaire. ∎

Comme dans le chapitre IV, désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers.

PROPOSITION 4.2. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soit* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche contenu dans* $\mathcal{O}$ *et soit* $I^* = (I^{-1})^{-1}$. *Il vient :*

(i) *Si* $I = I^*$ *alors on a* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/I) \subseteq \mathscr{P} \cup \{0\}$.

(ii) *Si* $\mathcal{O}_r(I)$ *est un ordre maximal de* S *et si* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/I) \subseteq \mathscr{P} \cup \{0\}$ *alors on a* $I = I^*$.

DEMONSTRATION. - *(i)* : Soit $P \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/I)$ et supposons $P \neq \{0\}$. Ainsi il existe un idéal à gauche J de $\mathcal{O}$ tel que $I \subseteq J$, $I \neq J$ et $PJ \subseteq I$. Si $P^{-1} = \mathcal{O}$ on a alors $P^{-1}PJI^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $JI^{-1} \subseteq (P^{-1}P)^{-1} = \mathcal{O}$ (car, d'après la propriété (2) du paragraphe II.1, $P^{-1}P$ est quasi-égal à $\mathcal{O}$) d'où l'on tire $J \subseteq I^* = I$: contradiction. Donc $P^{-1} \neq \mathcal{O}$, et ainsi d'après la proposition II.2.2 on obtient $P \in \mathscr{P}$.

(ii) : D'après la proposition 1.12 considérons $I = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$ une décomposition tertiaire réduite de I dans $\mathcal{O}$. Notons P_i le radical tertiaire de T_i ; on a $P_i \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/I)$. Montrons qu'on a $II^{-1}I^* \subseteq I$: d'après la proposition I.2.7, I^{-1} est un $\mathcal{O}_r(I)$-idéal à gauche, et, d'après la proposition I.2.6, $\mathcal{O}_\ell(I^{-1})$ est un ordre équivalent à $\mathcal{O}_r(I)$ et qui le contient ; donc $\mathcal{O}_r(I)$ étant un ordre maximal de S on obtient $\mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}_\ell(I^{-1})$, et comme on a toujours $\mathcal{O}_r(I^*) \subseteq \mathcal{O}_\ell(I^{-1})$ il vient $\mathcal{O}_r(I^*) \subseteq \mathcal{O}_r(I)$ ce qui entraîne $II^{-1}I^* \subseteq I$ puisqu'on a $I^*I^{-1}I^* \subseteq I^*$. Ainsi on a, pour tout $i = 1,\ldots,n$, $II^{-1}I^* \subseteq T_i$. Comme II^{-1} est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ et quasi-égal à $\mathcal{O}$ (car $(II^{-1})^{-1} = \mathcal{O}_r(I^{-1}) = \mathcal{O}$) on a $II^{-1} \not\subseteq P_i$ car $P_i \in \mathscr{P} \cup \{0\}$. Par suite T_i étant P_i-tertiaire on obtient $I^* \subseteq T_i$. D'où $I^* \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} T_i = I$ et donc $I = I^*$. ∎

THEOREME 4.3. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal de son anneau de fractions* S, *et soit* I *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche contenu dans* $\mathcal{O}$, *distinct de* $\mathcal{O}$, *contenant un idéal bilatère non nul* A *de* $\mathcal{O}$ *et tel que* $I = I^*$. *Alors* I *possède une décomposition de la forme* $I = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, *où les* X_i *sont des idéaux* P_i*-primaires de* $\mathcal{O}$ *et où* $P_1,\ldots,P_n$ *sont des* c*-idéaux entiers premiers distincts.*

DEMONSTRATION. - D'après la proposition 1.12 considérons $I = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ une décomposition tertiaire réduite de I dans $\mathcal{O}$ et notons P_i le radical tertiaire de X_i qui vérifie $P_i \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/I)$. Comme on a alors $A \subseteq P_i$, on déduit de la proposition 4.2 que P_i est un c-idéal entier premier, et ainsi, d'après la proposition 4.1, X_i est un idéal à gauche P_i-primaire de $\mathcal{O}$. D'où le résultat. ■

REMARQUE 4.4. - Dans le théorème 4.3 on peut prendre, en particulier, $I = \mathcal{O}a$, avec a élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$, non inversible dans $\mathcal{O}$, lorsque $\mathcal{O}a$ contient un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}$. C'est alors le théorème de l'idéal à gauche principal dans les ordres maximaux premiers noethériens.

COROLLAIRE 4.5. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* A *est un* c*-idéal contenu dans* $\mathcal{O}$ *s'écrivant* $A = P_1^{n_1}.P_2^{n_2}.\ldots.P_k^{n_k}$ *dans le groupe des* c*-idéaux avec* $P_1,P_2,\ldots,P_k$ c*-idéaux entiers premiers distincts, alors* $A = \bigcap_{i=1}^{k} P_i^{(n_i)}$ *est l'unique décomposition primaire réduite de* A *utilisant des idéaux bilatères de* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition II.2.6, la proposition II.2.2 et la proposition II.1.9 on obtient $\bar{\bar{A}} = \prod_{i=1}^{k} \bar{\bar{P}}_i^{n_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \bar{\bar{P}}_i^{n_i}$ dans le groupe d'Artin G_0. D'après les résultats du paragraphe II.1 et d'après la proposition IV.2.12 on en déduit qu'on a $A = \bigcap_{i=1}^{k} P_i^{(n_i)}$. Il est clair que c'est une décomposition primaire réduite et donc une décomposition tertiaire réduite (cf. proposition 1.12) de A dans $\mathcal{O}$ où les radicaux $P_1,P_2,\ldots,P_k$ sont distincts et bien déterminés. Toute autre décomposition réduite de A en idéaux bilatères primaires de $\mathcal{O}$ s'écrit $A = \bigcap_{i=1}^{k} Q_i$ avec Q_i idéal P_i-primaire. Comme l'on a $P_i^{q_i} \subseteq Q_i \subseteq P_i$ pour un certain entier positif q_i, la classe d'Artin $\bar{\bar{Q}}_i$ est de la forme $\bar{\bar{Q}}_i = \bar{\bar{P}}_i^{m_i}$. D'après la proposition II.1.9 et les résultats du paragraphe II.1 on obtient alors $\bar{\bar{A}} = \bigcap_{i=1}^{k} \bar{\bar{P}}_i^{m_i} = \prod_{i=1}^{k} \bar{\bar{P}}_i^{m_i}$. Il résulte alors de la proposition II.1.7 qu'on a $m_i = n_i$ pour $i = 1,\ldots,k$. La proposition IV.2.12 et *(ii)* de la proposition 4.2 impliquent qu'on a alors $Q_i = P_i^{(n_i)}$ pour tout $i = 1,\ldots,k$. ■

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les résultats des paragraphes 2 et 3 sont dus à MAURY [76] ([77] pour la proposition 3.4). Le théorème de l'idéal à gauche principal dans les ordres maximaux réguliers noethériens à gauche $\mathcal{O}$ dans un anneau S a été retrouvé par d'autres méthodes par RILEY [98] pour les R-ordres maximaux, par CHAMARIE [23] lorsque S est un anneau artinien simple et $\mathcal{O}$ noethérien. Mais c'est à CHAMARIE [23] que l'on doit les résultats du paragraphe 4, notamment le théorème de l'idéal à gauche principal pour les ordres maximaux non réguliers, noethériens, premiers, de leur anneau de fractions, théorème énoncé ensuite par COZZENS et SANDOMIERSKY [35] en remplaçant premier par semi-premier (voir aussi [78] dans le cas où il n'y a pas de diviseurs de zéro).

Notons que MAURY ([76] propriété II,5 page 90) indiquait que le treillis $(\bar{L}_0')$ du paragraphe 2 est modulaire, mais sa démonstration est fausse, cette erreur n'affectant pas les autres résultats de [76], comme il a été remarqué à la fin de l'article [78].

CHAPITRE VII.

GROUPOIDE DE BRANDT, APPLICATIONS.

§ 1. GROUPOIDE DE BRANDT.

Soit $\mathcal{O}_0$ un ordre maximal fixé d'un anneau S. Considérons la famille $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ de tous les ordres maximaux de S équivalents à $\mathcal{O}_0$.

Pour $i,j \in I$ nous désignerons par A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , ... des $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéaux. D'après la proposition I.3.1 on a $\mathcal{O}_\ell(A_{ij}) = \mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_r(A_{ij}) = \mathcal{O}_j$ ce qui, d'après la proposition I.2.7, entraîne que $(A_{ij})^{-1}$ est un $\mathcal{O}_j$- $\mathcal{O}_i$-idéal. On a alors les propriétés suivantes :

- $A_{ij} = B_{k\ell}$ entraîne $i = k$ et $j = \ell$ (car $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_\ell(A_{ij}) = \mathcal{O}_\ell(B_{k\ell}) = \mathcal{O}_k$, ...).
- $A_{ij} \subseteq B_{ik}$ entraîne $(B_{ik})^{-1} \subseteq (A_{ij})^{-1}$, et $A_{ij} \subseteq B_{kj}$ entraîne $(B_{kj})^{-1} \subseteq (A_{ij})^{-1}$.
- $\left[[(A_{ij})^{-1}]^{-1}\right]^{-1} = (A_{ij})^{-1}$.
- $[A_{ij}(A_{ij})^{-1}]^{-1} = \mathcal{O}_i$ et $[(A_{ij})^{-1}A_{ij}]^{-1} = \mathcal{O}_j$.

Pour $i,j \in I$, si A_{ij} est un $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéal on pose $(A_{ij})^* = [(A_{ij})^{-1}]^{-1}$. Alors $(A_{ij})^*$ est un $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéal et les $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéaux de cette forme seront appelés des c- $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéaux. Plus simplement on appellera *c-idéal* tout c- $\mathcal{O}_i$- $\mathcal{O}_j$-idéal avec $i,j \in I$. On a en particulier les propriétés suivantes :

- $A_{ij} \subseteq (A_{ij})^*$.
- $A_{ij} \subseteq B_{ik}$ entraîne $(A_{ij})^* \subseteq (B_{ik})^*$, et $A_{ij} \subseteq B_{kj}$ entraîne $(A_{ij})^* \subseteq (B_{kj})^*$.
- $((A_{ij})^*)^* = (A_{ij})^*$.
- $(A_{ij}B_{jk})^* = [(A_{ij})^*B_{jk}]^* = [A_{ij}(B_{jk})^*]^* = [(A_{ij})^*(B_{jk})^*]^*$.

Désignons par G l'ensemble de tous les c-idéaux. Si A_{ij} et B_{jk} sont deux c-idéaux, on définit le produit des c-idéaux par $A_{ij}.B_{jk} = (A_{ij}B_{jk})^*$. Dans G muni du produit des c-idéaux on a alors les propriétés suivantes :

(1) $A_{ij}.(B_{jk}.C_{k\ell}) = (A_{ij}.B_{jk}).C_{k\ell}$.

(2) $A_{ij}.(A_{ij})^{-1} = \mathcal{O}_i$ et $(A_{ij})^{-1}.A_{ij} = \mathcal{O}_j$.

(3) On a $\mathcal{O}_i.A_{ij} = A_{ij} = A_{ij}.\mathcal{O}_j$, et si E_{ii} et E_{jj} sont des éléments de G vérifiant $E_{ii}.A_{ij} = A_{ij} = A_{ij}.E_{jj}$ alors on a $E_{ii} = \mathcal{O}_i$ et $E_{jj} = \mathcal{O}_j$.

(4) $A_{ij} \subseteq B_{ik}$ entraîne $C_{\ell i}.A_{ij} \subseteq C_{\ell i}.B_{ik}$, et $A_{ij} \subseteq B_{kj}$ entraîne $A_{ij}.C_{j\ell} \subseteq B_{kj}.C_{j\ell}$.

(5) Pour $i,j \in I$ il existe un c-$\mathcal{O}_i$-$\mathcal{O}_j$-idéal : en effet $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ sont des ordres maximaux équivalents et il existe $\alpha,\beta \in u(S) \cap \mathcal{O}_i$ et $\alpha',\beta' \in u(S) \cap \mathcal{O}_j$ tels que $\alpha\mathcal{O}_j\beta \subseteq \mathcal{O}_i$ et $\beta'\mathcal{O}_i\alpha' \subseteq \mathcal{O}_j$; alors $\mathcal{O}_i\alpha\alpha'\mathcal{O}_j$ est un $\mathcal{O}_i$-$\mathcal{O}_j$-idéal (car $\mathcal{O}_i\alpha\alpha'\mathcal{O}_j\beta \subseteq \mathcal{O}_i\alpha\mathcal{O}_j\beta \subseteq \mathcal{O}_i$; $\beta'\mathcal{O}_i\alpha\alpha'\mathcal{O}_j \subseteq \beta'\mathcal{O}_i\alpha'\mathcal{O}_j \subseteq \mathcal{O}_j$ et $\alpha\alpha' \in u(S) \cap (\mathcal{O}_i\alpha\alpha'\mathcal{O}_j)$) et donc $(\mathcal{O}_i\alpha\alpha'\mathcal{O}_j)^*$ est un c-$\mathcal{O}_i$-$\mathcal{O}_j$-idéal.

REMARQUE. - Si de plus $\mathcal{O}_0$ est un ordre régulier de S alors, d'après la proposition I.4.2, les ordres $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$, qui sont équivalents à $\mathcal{O}_0$, sont aussi réguliers, et dans ce cas $(\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i)^{-1}$ est un c-$\mathcal{O}_i$-$\mathcal{O}_j$-idéal (en effet il existe alors $\lambda,\mu,\lambda',\mu' \in u(S)$ tels que $\lambda\mathcal{O}_j \subseteq \mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_j\mu \subseteq \mathcal{O}_i$, $\lambda'\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_j$ et $\mathcal{O}_i\mu' \subseteq \mathcal{O}_j$ d'après la proposition I.4.1, et, comme $\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i$ contient 1, cela implique que $\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i$ est un $\mathcal{O}_j$-$\mathcal{O}_i$-idéal et donc $(\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i)^{-1}$ est un c-$\mathcal{O}_i$-$\mathcal{O}_j$-idéal puisque $[(\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i)^{-1}]^* = (\mathcal{O}_j\mathcal{O}_i)^{-1}$).

Ainsi, d'après toutes lespropriétés qui précèdent, l'ensemble G muni du produit des c-idéaux (qui est une opération non partout définie dans G) est un groupoïde appelé *groupoïde de Brandt*.

PROPOSITION 1.1. - *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ordres maximaux équivalents d'un anneau* S, *et soit* C *un* c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$*-idéal. Alors l'application* $f : A \longmapsto C^{-1}.A.C$, *du groupe des* c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$*-idéaux dans le groupe des* c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$*-idéaux, est un isomorphisme de groupes, et les applications* f *et* f^{-1} *sont croissantes (c'est-à-dire conservent l'inclusion).*

DEMONSTRATION. - Si A est un c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal il est clair que $C^{-1}.A.C$ est un c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéal et on a $A = C.(C^{-1}.A.C).C^{-1}$; de même si A' est un c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéal alors $C.A'.C^{-1}$ est un c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal et on a $A' = C^{-1}.(C.A'.C^{-1}).C$. Donc f est une bijection. Si B est un autre c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal, il vient
$f(A.B) = C^{-1}.A.B.C = C^{-1}.A.C.C^{-1}B.C = f(A).f(B)$, et donc f est un isomorphisme de groupes ; de plus la relation $A \subseteq B$ équivaut à la relation $C^{-1}.A.C \subseteq C^{-1}.B.C$, ce qui montre que f et f^{-1} sont des applications croissantes (et donc des isomorphismes de treillis). ∎

Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal d'un anneau S et si P est un c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier, on posera $\mathcal{O}_P = \{x \in S \mid \exists\, N\ ,\ N\ \mathcal{O}\text{-idéal entier tel que } N \not\subseteq P \text{ et } Nx \subseteq \mathcal{O}\}$; il est immédiat que $\mathcal{O}_P$ est un sous-anneau de S contenant $\mathcal{O}$, et donc, d'après la proposition I.2.1, $\mathcal{O}_P$ est un ordre de S (remarquons que si $\mathcal{O}$ est, de plus, un anneau premier noethérien alors cette définition de $\mathcal{O}_P$ coïncide avec celle du chapitre IV). De plus, d'après la proposition II.2.4, on a $\mathcal{O}_P = \bigcup_N N^{-1}$ où N parcourt l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P. Il vient :

PROPOSITION 1.2. - *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ordres maximaux équivalents d'un anneau* S, *et soit* C *un* c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-*idéal. Si* P *est un* c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-*idéal entier premier alors* $P' = C^{-1}.P.C$ *est un* c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-*idéal entier premier et les ordres* $\mathcal{O}_P$ *et* $\mathcal{O}'_{P'}$ *de* S *sont équivalents.*

DEMONSTRATION. - Il résulte de la proposition 1.1 que P' est un c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéal entier ; si A', B' sont deux $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéaux entiers tels que $A'B' \subseteq P'$, il vient $(CA'C^{-1})^*.(CB'C^{-1})^* = C.(A'B')^*.C^{-1} \subseteq C.P'.C^{-1} = P$ et, comme $(CA'C^{-1})^*$ et $(CB'C^{-1})^*$ sont deux $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéaux entiers, on obtient par exemple puisque P est premier $(CA'C^{-1})^* \subseteq P$ ce qui entraîne $(A')^* = C^{-1}.(CA'C^{-1})^*.C \subseteq P'$ d'où l'on déduit $A' \subseteq P'$. Donc P' est un c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéal entier premier. Il résulte aussi de la proposition 1.1 que l'application $N \longmapsto C^{-1}.N.C$ est une bijection de l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P sur l'ensemble des c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéaux entiers non contenus dans P'. Ainsi on a $\mathcal{O}_P = \bigcup_N N^{-1}$ et $\mathcal{O}'_{P'} = \bigcup_N (C^{-1}.N.C)^{-1} = \bigcup_N (C^{-1}.N^{-1}.C)$, avec N parcourant l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéaux entiers non contenus dans P. Considérons

$\alpha \in u(S) \cap C$ et $\beta \in u(S) \cap C^{-1}$ (puisque $C \cap u(S) \neq \phi$ et $C^{-1} \cap u(S) \neq \phi$). Alors $\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$- $\mathcal{O}'$-idéal contenu dans C et $\mathcal{O}'\beta\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$-idéal contenu dans C^{-1}, et on a $\alpha C^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et $C\beta \subseteq \mathcal{O}$. Pour tout c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal N non contenu dans P, on a alors $(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}')(C^{-1}N^{-1}C)(\mathcal{O}'\beta\mathcal{O}) \subseteq N^{-1}$ ce qui entraîne $(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}')^{*}.(C^{-1}.N^{-1}.C).(\mathcal{O}'\beta\mathcal{O})^{*} \subseteq N^{-1}$ et par suite $\alpha(C^{-1}.N^{-1}.C)\beta \subseteq N^{-1}$; on a aussi $\beta N^{-1}\alpha \subseteq C^{-1}N^{-1}C \subseteq C^{-1}.N^{-1}.C$. En conséquence on a $\alpha\, \mathcal{O}'_{P'}\beta \subseteq \mathcal{O}_P$ et $\beta\, \mathcal{O}_P\alpha \subseteq \mathcal{O}'_{P'}$. ■

LEMME 1.3. - *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ordres maximaux réguliers équivalents d'un anneau* S. *Si on pose* $J = \{x \in S \mid \mathcal{O}'x \subseteq \mathcal{O}\}$, *alors* J *est un* c- $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$*-idéal contenu dans* $\mathcal{O}$ *et dans* $\mathcal{O}'$, *et on a* $J = \{x \in S \mid x\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'\}$ *et* $J = (\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1}$.

DEMONSTRATION. - On a vu dans une remarque précédente que $\mathcal{O}\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal et que $(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1}$ est alors un c- $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$-idéal. On a $(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1} = \{x \in S \mid \mathcal{O}\mathcal{O}'x \subseteq \mathcal{O}\}$, et, comme par définition de J on a $\mathcal{O}'J \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $\mathcal{O}\mathcal{O}'J \subseteq \mathcal{O}$, on obtient $J \subseteq (\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1}$; on a aussi $\mathcal{O}\mathcal{O}'(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ qui implique $\mathcal{O}'(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et par suite la définition de J donne $(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1} \subseteq J$. Donc $J = (\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1}$, et donc on a aussi $J = \{x \in S \mid x\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'\}$ car $(\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1} = \{x \in S \mid x\mathcal{O}\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'\}$. Comme en outre on a $1 \in \mathcal{O}$ et $1 \in \mathcal{O}'$ on obtient $J \subseteq \mathcal{O}$ et $J \subseteq \mathcal{O}'$. ■

PROPOSITION 1.4. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, semi-local, non simple, ordre d'Asano régulier de son anneau classique de fractions* S. *Si $\mathcal{O}'$ est un ordre maximal de* S *équivalent à $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont isomorphes par un automorphisme intérieur de* S.

DEMONSTRATION. - $\mathcal{O}'$ est un ordre régulier d'après la proposition I.4.2. D'après le lemme 1.3 considérons le c- $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$-idéal
$J = \{x \in S \mid \mathcal{O}'x \subseteq \mathcal{O}\} = \{x \in S \mid x\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'\} = (\mathcal{O}\mathcal{O}')^{-1}$ qui est contenu dans $\mathcal{O}$ et dans $\mathcal{O}'$. Alors $J^{-1}J$ est $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ et quasi-égal à $\mathcal{O}$ (car $(J^{-1}J)^{*} = J^{-1}.J = \mathcal{O}$). D'après le corollaire III.2.2 et la proposition II.1.10 la quasi-égalité coïncide avec l'égalité, et on a donc $J^{-1}J = \mathcal{O}$. D'après le théorème III.2.8, $\mathcal{O}$ est un anneau à idéaux à droite principaux et donc il existe $s \in \mathcal{O}$ tel que $J = s\mathcal{O}$; de plus s est un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{O}$ (il est non diviseur

de zéro d'un côté car J est un $\mathcal{O}$-idéal à droite et il est alors non diviseur de zéro de l'autre côté d'après le lemme 3.8 de [56]). On a alors $J^{-1} = \mathcal{O}s^{-1}$, et il vient $\mathcal{O}s^{-1}\mathcal{O}'s\mathcal{O} = J^{-1}\mathcal{O}'J = J^{-1}J = \mathcal{O}$ ce qui donne $s^{-1}\mathcal{O}'s \subseteq \mathcal{O}$. On obtient alors $\mathcal{O}' \subseteq s\mathcal{O}s^{-1}$, et comme, d'après le corollaire I.2.2, le sous-anneau $s\mathcal{O}s^{-1}$ de S est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}$ et donc équivalent à $\mathcal{O}'$, il résulte de la maximalité de $\mathcal{O}'$ qu'on a $\mathcal{O}' = s\mathcal{O}s^{-1}$. Ceci démontre le résultat. ■

Si $\mathcal{O}$ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions S et si P est un c-$\mathcal{O}$-idéal entier premier (c'est-à-dire ici un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$) alors on sait, d'après la proposition IV.2.20 et d'après le théorème IV.2.15 et sa démonstration, que l'anneau localisé $\mathcal{O}_P$ est un anneau premier, noethérien, semi-local, non simple, ordre d'Asano régulier de S. D'où :

COROLLAIRE 1.5. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de son anneau classique de fractions* S, *et soit $\mathcal{O}'$ un ordre maximal régulier de* S *équivalent à $\mathcal{O}$. Considérons le* c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-*idéal* $J = \{x \in S \mid \mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}'\}$. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$, alors* $P' = J^{-1}.P.J$ *est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}'$, et les anneaux $\mathcal{O}_P$ et $\mathcal{O}'_{P'}$ sont isomorphes par un automorphisme intérieur de* S.

DEMONSTRATION. - J est un c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal d'après le lemme 1.3. D'après la proposition II.2.2, P est un c-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal entier premier et, d'après la proposition 1.2, P' est un c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéal entier premier (donc un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}'$ par la proposition II.2.2), et les ordres $\mathcal{O}_P$ et $\mathcal{O}'_{P'}$ de S sont équivalents. On a vu précédemment que $\mathcal{O}_P$ est un anneau premier, noethérien, semi-local, non simple, ordre d'Asano régulier de S ; de plus, comme $\mathcal{O}'$ est un ordre maximal régulier de S équivalent à $\mathcal{O}$ qui est noethérien, il résulte de la proposition 1.1 que l'ensemble des c-$\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}'$-idéaux entiers vérifie la condition noethérienne, et donc, d'après le théorème IV.3.10, $\mathcal{O}'_{P'}$ est un ordre maximal régulier de S. Le résultat s'obtient alors par la proposition 1.4. ■

PROPOSITION 1.6. - *Soit $\mathcal{O}_0$ un ordre maximal d'un anneau artinien simple* S. *Alors tous les ordres maximaux de* S *équivalents à $\mathcal{O}_0$ ont le même centre* R.

DEMONSTRATION. - Soit $\mathcal{O}_i$ un ordre maximal de S équivalent à $\mathcal{O}_0$. Désignons par R_0, R_i, K les centres respectifs de $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_i$, S. Comme $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_i$ sont des ordres de S on a $R_0 = K \cap \mathcal{O}_0$ et $R_i = K \cap \mathcal{O}_i$. Soit α un élément non nul de R_0. Puisque S est un anneau artinien simple il résulte du théorème de Goldie que $\mathcal{O}_0\alpha = \alpha\,\mathcal{O}_0$ est un $\mathcal{O}_0$- $\mathcal{O}_0$-idéal et que $\alpha \in u(S)$; de plus on a $[(\mathcal{O}_0\alpha)^{-1}]^{-1} = (\alpha^{-1}\mathcal{O}_0)^{-1} = \mathcal{O}_0\alpha$ et donc $\mathcal{O}_0\alpha$ est un c- $\mathcal{O}_0$- $\mathcal{O}_0$-idéal. Si C désigne un c- $\mathcal{O}_0$- $\mathcal{O}_i$-idéal (dont l'existence a été prouvée au début du paragraphe) il vient en utilisant le produit des c-idéaux : $C^{-1}.\,\mathcal{O}_0\alpha\,\mathcal{O}_0.C = (C^{-1}\,\mathcal{O}_0\alpha\,\mathcal{O}_0 C)^* = (\alpha C^{-1}C)^* = (\mathcal{O}_i\alpha\,\mathcal{O}_i C^{-1}C)^* = (\mathcal{O}_i\alpha\,\mathcal{O}_i)^* = \mathcal{O}_i\alpha$ et on obtient $\mathcal{O}_i\alpha = C^{-1}.\,\mathcal{O}_0\alpha\,\mathcal{O}_0.C \subseteq C^{-1}.\,\mathcal{O}_0.C = \mathcal{O}_i$ ce qui nous donne $\alpha \in \mathcal{O}_i$. D'où $\alpha \in R_i$ et ainsi $R_0 \subseteq R_i$; de même $R_i \subseteq R_0$. On a donc $R_0 = R_i$. ■

REMARQUE 1.7. - *Soient $\mathcal{O}_0$ un ordre maximal régulier d'un anneau artinien simple* S. *Si le centre* R *de $\mathcal{O}_0$ est un anneau noethérien, et si $\mathcal{O}_0$ est un* R*-module de type fini, alors tous les ordres maximaux de* S *équivalents à $\mathcal{O}_0$ sont noethériens en tant qu'anneaux,* R*-modules de type fini, et ordres réguliers de* S (en effet ce sont des ordres réguliers de S d'après la proposition I.4.2 ; si $\mathcal{O}_i$ est un ordre maximal de S équivalent à $\mathcal{O}_0$ il existe $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}_0$ tel que $\mathcal{O}_i\alpha \subseteq \mathcal{O}_0$, d'après la proposition I.4.1, et on a alors $\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_0\alpha^{-1}$ ce qui implique, puisque $\mathcal{O}_0\alpha^{-1}$ est un R-module de type fini avec R anneau noethérien, que $\mathcal{O}_i$ est un R-module de type fini et est alors lui-même un anneau noethérien). *En particulier si $\mathcal{O}_0$ est un* R*-ordre maximal d'une* K*-algèbre centrale simple* S *de dimension finie sur* K*, où* R *est un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos de corps de fractions* K*, alors tout ordre maximal de* S *équivalent à $\mathcal{O}_0$ est un anneau noethérien de centre* R*, de type fini sur* R*, et est donc un* R*-ordre maximal de* S (cela résulte de ce qui précède et de la proposition I.7.6).

§ 2. ORDRES MAXIMAUX EQUIVALENTS A UN ORDRE D'ASANO REGULIER NOETHERIEN.

Dans tout ce paragraphe S désigne un anneau artinien simple.

Le but de ce paragraphe est de démontrer que si $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de S, alors tout ordre maximal de S équivalent à $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de S ; de plus pour tout $\mathcal{O}$-idéal d'un côté I on a $I = I^*(=(I^{-1})^{-1})$.

LEMME 2.1. - *Soient* $A_1,\dots,A_n$, $B_1,\dots,B_n$ *des idéaux à gauche d'un anneau* R. *Si, pour tout* $i = 1,\dots,n$, *on a* $A_i + B_i = R$ *alors on a* $(A_1A_2\dots A_n) + (B_1 + B_2 + \dots + B_n) = R$.

DEMONSTRATION. - Pour tout $i = 1,\dots,n$ il existe $a_i \in A_i$ et $b_i \in B_i$ tels que $a_i + b_i = 1$. On obtient $a_1a_2\dots a_n = (1 - b_1)(1 - b_2)\dots(1 - b_n) = 1 - b'$ avec $b' \in \sum_{i=1}^{n} B_i$ ce qui donne $A_1A_2\dots A_n + B_1 + B_2 + \dots + B_n = R$. ■

LEMME 2.2. - *Soit* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *une famille d'ordres d'Asano réguliers, semi-locaux et non simples de l'anneau artinien simple* S *(en supposant* $\mathcal{O}_i \neq \mathcal{O}_j$ *pour* $i \neq j$*). Pour tout* $i \in I$ *désignons par* P_i *le radical de Jacobson de* $\mathcal{O}_i$. *Si l'on a les propriétés :*

(P_1) $\mathcal{O} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ *est un ordre de* S.

(P_2) *Pour tout* $\lambda \in u(S)$ *on a* $\mathcal{O}_i \lambda \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ *sauf peut-être pour un nombre fini d'indices* $i \in I$.

(P_3) *Pour tout* $i,j \in I$ *et* $i \neq j$, *il existe* $a \in \mathcal{O}$ *tel que* $a \in P_i$ *et* $1 - a \in P_j$.

Alors les propriétés suivantes sont aussi vérifiées :

(P_4) *Pour tout* $i \in I$, $p_i = P_i \cap \mathcal{O}$ *est un* $\mathcal{O}$*-idéal.*

(P_5) *Pour tout* $\mathcal{O}$*-idéal d'un côté* A, *on a* $\mathcal{O}_i A \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ *sauf peut-être pour un nombre fini d'indices* $i \in I$.

(P_6) *Pour tout* $\alpha \in S$ *on a* $\alpha \in \mathcal{O}_i$ *sauf peut-être pour un nombre fini d'indices* $i \in I$.

(P_7) *Pour* $i_0, i_1,\dots,i_m \in I$ *et pour tout entier naturel* n, *il existe* $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$ *tel que* $1 - \alpha \in P_{i_0}^n$ *et* $\alpha \in P_{i_j}^n$ *pour* $j = 1,\dots,m$.

(P_8) *Pour* $a_1,\dots,a_m \in S$, *pour* $i_1,\dots,i_m \in I$ *et pout tout entier naturel* n, *il existe* $a \in S$ *tel que* $a - a_j \in P^n_{i_j}$ *pour* $j = 1,\dots,m$, *et* $a \in \mathcal{O}_i$ *pour* $i \in I - \{i_1,\dots,i_m\}$.

DEMONSTRATION. - (P_4) : D'après la proposition III.2.9 le radical de Jacobson P_i contient un élément x de $u(S)$. On peut écrire $x = ab^{-1}$ avec $a,b \in u(S) \cap \mathcal{O}$ et on obtient $a \in p_i$. Alors p_i est un $\mathcal{O}$-idéal.

(P_5) : Pour tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche A il existe $\alpha,\beta \in u(S)$ tels que $\mathcal{O}\alpha \subseteq A \subseteq \mathcal{O}\beta$. D'où $\mathcal{O}_i\,\alpha\,\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_i\,A\,\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_i\,\beta\,\mathcal{O}_i$, et il suffit alors d'utiliser (P_2).

(P_6) : Pour tout $\alpha \in S$ on peut écrire $\alpha = b^{-1}a$ avec $a \in \mathcal{O}$ et $b \in u(S) \cap \mathcal{O}$. Il vient $\mathcal{O}_i\,\alpha\,\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i\,\mathcal{O}b^{-1}a\,\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_i(\mathcal{O}b^{-1})\,\mathcal{O}_i$, et, comme $\mathcal{O}b^{-1}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, on a $\alpha \in \mathcal{O}_i$ sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i \in I$ d'après (P_5). D'où le résultat.

(P_7) : D'après (P_3), pour tout $j = 1,\dots,m$ il existe $a_j \in \mathcal{O}$ tel que $a_j \in P_{i_j}$ et $1 - a_j \in P_{i_o}$. Pour tout $j = 1,\dots,m$, posons $b_j = 1 - a_j$ et $c_j = a_j^n(1 + b_j + \dots + b_j^{n-1})^n = (1 - b_j^n)^n$. On a alors $c_j \in \mathcal{O}$ et $c_j \in P^n_{i_j}$; de plus, comme $b_j \in P_{i_o}$, on déduit de $c_j = (1 - b_j^n)^n$ qu'on a $1 - c_j \in P^n_{i_o}$. Posons $c = c_1c_2 \dots c_m$. On a donc $c \in P^n_{i_j}$ pour tout $j = 1,\dots,m$. Comme, pour tout $j = 1,\dots,m$, on a $1 - c_j \in P^n_{i_o}$ on obtient $1 - c \in P^n_{i_o}$; de plus comme P_{i_o} est le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_{i_o}$ on en déduit que c est inversible dans $\mathcal{O}_{i_o}$, et donc $c \in u(S) \cap \mathcal{O}$.

(P_8) : Si $a_1 = \dots = a_r = 0$, il suffit de prendre $a = 0$. Si les éléments $a_1,\dots,a_n$ sont non nuls et si $a_{r+1} = \dots = a_m = 0$ on a, d'après (P_6), pour tout $j = 1,\dots,r$, $a_j \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ sauf peut-être pour $i = i_1,\dots,i_m,i_{m+1},\dots,i_s$. Puisque $\mathcal{O}_{i_k}$ est un ordre régulier de S, il résulte de la proposition I.4.1 que $\mathcal{O}_{i_k} + \mathcal{O}_{i_k}\,a_j\,\mathcal{O}_{i_k}$ est un $\mathcal{O}_{i_k}$-idéal bilatère et donc il existe un entier naturel ρ_{jk} tel que $\mathcal{O}_{i_k} + \mathcal{O}_{i_k}\,a_j\,\mathcal{O}_{i_k} = P_{i_k}^{-\rho_{jk}}$ (cela pour tout $j = 1,\dots,r$ et pour tout $k = 1,\dots,s$). Considérons un entier naturel n' tel que $n' > \operatorname{Sup}_{j,k}(n + \rho_{jk})$. D'après (P_7) et pour tout $j = 1,\dots,r$ il existe $c_j \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $1 - c_j \in P^{n'}_{i_j}$ et $c_j \in P^{n'}_{i_k}$ pour $k = 1,\dots,j-1, j+1,\dots,s$. On a alors, pour tout $j = 1,\dots,r$, $a_j - a_jc_j \in P^n_{i_j}$ et $a_jc_j \in P^n_{i_k}$ pour $k = 1,\dots,j-1, j+1,\dots,s$; de plus on a $a_jc_j \in \mathcal{O}_i$ pour tout

$i \in I - \{i_1,\ldots,i_s\}$. Ainsi si on pose $a = \sum_{j=1}^{r} a_j c_j$ on obtient $a - a_j \in P_{i_j}^n$ pour $j = 1,\ldots,m$ et $a \in \mathcal{O}_i$ pour $i \in I - \{i_1,\ldots,i_m\}$. ■

THEOREME 2.3. - *Soit* $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ *une famille d'ordres d'Asano réguliers, semi-locaux et non simples de l'anneau artinien simple* S *vérifiant les propriétés* (P_1), (P_2) *et* (P_3) *du lemme* 2.2. *Alors* $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ *est un ordre d'Asano régulier de* S *tel que* $\mathcal{O}/p$ *est un anneau artinien simple pour tout idéal premier non nul* p *de* $\mathcal{O}$, *et tel que* $\mathcal{O}_{p_i} = \mathcal{O}_i$ *pour tout* $i \in I$.

DEMONSTRATION. - Utilisons les notations et les propriétés (P_4), (P_5), (P_6), (P_7) et (P_8) du lemme 2.2. Tout d'abord $p_i = P_i \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal pour tout $i \in I$ d'après (P_4), et de plus, d'après (P_8), pour tout $a \in \mathcal{O}_i$ il existe $c \in S$ tel que $c \in \mathcal{O}_j$ pour tout $j \in I - \{i\}$ et $c - a \in P_i$, ce qui implique $c \in \mathcal{O}$; on en déduit que les anneaux $\mathcal{O}_i/P_i$ et $\mathcal{O}/p_i$ sont isomorphes. Donc pour tout $i \in I$ l'anneau $\mathcal{O}/p_i$ est artinien simple. De plus on a $P_i = \mathcal{O}_i\, p_i = p_i\, \mathcal{O}_i$, et pour tout $j \in I - \{i\}$ on a $p_j\, \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i\, p_j = \mathcal{O}_i$: en effet d'après la proposition III.2.9 il existe $x \in u(S)$ tel que $P_i = \mathcal{O}_i x = x\,\mathcal{O}_i$, et, d'après (P_6), on a $x \in \mathcal{O}_j$ pour tout $j \in I$ sauf peut-être pour $j = i_1,\ldots,i_n$ et dans ce dernier cas il existe, d'après la proposition I.4.1, un entier naturel $\rho > o$ tel que $x \in P_{i_k}^{-\rho}$ pour tout $k = 1,\ldots,n$; d'après (P_7) il existe $\alpha \in u(S) \cap \mathcal{O}$ tel que $\alpha \in P_{i_k}^{\rho}$ pour $k = 1,\ldots,n$ et $1 - \alpha \in P_i^{\rho}$ (ce qui implique que α est inversible dans $\mathcal{O}_i$ puisque P_i est le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_i$). En posant $y = \alpha x$ on obtient $y \in \mathcal{O} \cap P_i$, c'est-à-dire $y \in p_i$, et on a $P_i = \mathcal{O}_i x = \mathcal{O}_i \alpha x = \mathcal{O}_i y$ ce qui donne $P_i = \mathcal{O}_i p_i$; et de même on a $P_i = p_i\, \mathcal{O}_i$. D'autre part pour tout $j \in I - \{i\}$ il existe $a \in \mathcal{O}$ tel que $a \in P_j$ et $1 - a \in P_i$ d'après (P_3) ; on a donc $a \in p_j$, et a est inversible dans $\mathcal{O}_i$ (car $1 - a$ appartient au radical de Jacobson de $\mathcal{O}_i$) ce qui nous donne $p_j\, \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i p_j = \mathcal{O}_i$.

Montrons que $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de S : si $x \in S$ on a, d'après (P_6), $x \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ sauf peut-être pour $i = i_1,\ldots,i_m$ et dans ce dernier cas il existe, d'après la proposition I.4.1, un entier naturel $\rho > o$ tel que $x \in P_{i_j}^{-\rho}$ pour tout $j = 1,\ldots,m$. Comme $p_{i_1}^{\rho} \ldots p_{i_m}^{\rho}$ est un $\mathcal{O}$-idéal (d'après la proposition I.2.4) considérons $\lambda \in u(S) \cap p_{i_1}^{\rho} \ldots p_{i_m}^{\rho}$; il vient $\lambda\, \mathcal{O} x \subseteq P_{i_j}^{\rho}\, x \subseteq \mathcal{O}_{i_j}$ pour tout $j = 1,\ldots,m$

ce qui nous donne $\lambda \mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$, et de même on obtient $x \mathcal{O} \lambda \subseteq \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$. Ainsi on a $\lambda \mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}$ et $x \mathcal{O} \lambda \subseteq \mathcal{O}$ ce qui prouve que $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de S d'après la proposition I.4.1.

Si A est un $\mathcal{O}$-idéal tel que $\mathcal{O}_i A \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$, alors on a $A = \mathcal{O}$: en effet tout d'abord il est clair qu'on a $A \subseteq \mathcal{O}$; d'autre part pour tout $i \in I$ il existe $a_i \in A$ tel que $a_i \notin P_i$, et comme $\mathcal{O}_i/P_i$ est un anneau artinien simple il existe $b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n \in \mathcal{O}$ tels qu'on ait $1 - \alpha_i \in P_i$ en posant $\alpha_i = b_1 a_i c_1 + \ldots + b_n a_i c_n$: en effet si $\bar{a}_i$ est la classe de a_i dans $\mathcal{O}_i/P_i$, on déduit, de $\mathcal{O}_i/P_i\ \bar{a}_i\ \mathcal{O}_i/P_i = \mathcal{O}_i/P_i$, $1 = \sum_{j=1}^{m} b_j a_i c_i + u$ où $u \in P_i$ et les b_i et c_i peuvent être pris dans $\mathcal{O}$ d'après le début de la démonstration. On a $\alpha_i \in A$, et, comme $1 - \alpha_i$ appartient au radical de Jacobson de $\mathcal{O}_i$, l'élément α_i est inversible dans $\mathcal{O}_i$. D'après (P_2) on a $\alpha_i^{-1} \in \mathcal{O}_j$ pour tout $j \in I$ sauf peut-être pour $j = i_1,\ldots,i_m$; pour $k = 1,\ldots,m$ il existe un entier naturel ρ_k tel que $\mathcal{O}_{i_k}\ \alpha_i^{-1}\ \mathcal{O}_{i_k} = P_{i_k}^{-\rho_k}$ (car $\mathcal{O}_{i_k}$ est un ordre régulier de S). Posons $B_i = p_{i_1}^{\rho_1} \ldots p_{i_m}^{\rho_m}$ et $C_i = \alpha_i^{-1} B_i$. Il vient $\mathcal{O}_j C_i\ \mathcal{O}_j \subseteq \mathcal{O}_j$ pour tout $j \in I$, et donc on a $C_i \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $B_i \subseteq \alpha_i \mathcal{O} \subseteq A$. Comme on a vu que $\alpha_i^{-1} \in \mathcal{O}_i$ on a donc $i \notin \{i_1,\ldots,i_m\}$ et ainsi on a $p_i \neq p_{i_k}$ pour tout $k = 1,\ldots,m$; comme les anneaux $\mathcal{O}/p_j$ sont artiniens simples on a donc $p_i + p_{i_k} = \mathcal{O}$ pour tout $k = 1,\ldots,m$. D'après le lemme 2.1 on a donc $p_i + B_i = \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$. Alors en particulier pour $k = 1,\ldots,m$ on a $p_{i_k} + B_{i_k} = \mathcal{O}$; on déduit alors du lemme 2.1 qu'on a $(p_{i_1}^{\rho_1} \ldots p_{i_m}^{\rho_m}) + (B_{i_1} + \ldots + B_{i_m}) = \mathcal{O}$, c'est-à-dire $B_i + B_{i_1} + \ldots + B_{i_m} = \mathcal{O}$. Comme pour tout $j \in I$ on a $B_j \subseteq A$, on obtient $\mathcal{O} \subseteq A$. D'où $A = \mathcal{O}$.

Soit A un $\mathcal{O}$-idéal bilatère. Il existe un $\mathcal{O}$-idéal bilatère B tel que $\mathcal{O} \subseteq AB$ (par exemple $B = \mathcal{O}\alpha^{-1}\mathcal{O}$ avec $\alpha \in A \cap u(S)$). D'après (P_5) on a $\mathcal{O}_i AB\ \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ sauf peut-être pour $i = i_1,\ldots,i_m$, et dans ce dernier cas il existe un entier naturel ρ_k tel que $\mathcal{O}_{i_k} AB\ \mathcal{O}_{i_k} = P_{i_k}^{-\rho_k}$ (pour $k = 1,\ldots,m$). Alors on obtient $\mathcal{O}_i\ AB\ p_{i_1}^{\rho_1} \ldots p_{i_m}^{\rho_m}\ \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$, et d'après ce qui précède on en déduit qu'on a $AB\ p_{i_1}^{\rho_1} \ldots p_{i_m}^{\rho_m} = \mathcal{O}$. Donc, d'après le théorème III.2.1, $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano et les $\mathcal{O}$-idéaux forment un groupe abélien.

Montrons que tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère A est un produit de $\mathcal{O}$-idéaux p_i : on a $\mathcal{O}_i A \mathcal{O}_i = P_i^{e_i}$ avec $e_i = 0$ sauf peut-être pour $i = i_1,\ldots,i_m$ d'après (P_5) et, en posant $B = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j}^{-e_{i_j}}$, il vient $\mathcal{O}_i AB \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$ ce qui nous donne alors $AB = \mathcal{O}$ et donc $A = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j}^{e_{i_j}}$. Donc en particulier les idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}$ sont les p_i avec $i \in I$.

Montrons enfin que $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{p_i}$: si $x \in \mathcal{O}_i$ alors $\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal d'après la proposition I.4.1 et donc $N = (\mathcal{O} + \mathcal{O}x\mathcal{O})^{-1}$ est un $\mathcal{O}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$ et non contenu dans p_i (car sinon $N \subseteq p_i$ entraîne $P_i^{-1} \subseteq \mathcal{O}_i N^{-1} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i + \mathcal{O}_i x \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ ce qui n'est pas), et on a $Nx \subseteq NN^{-1} = \mathcal{O}$ ce qui prouve que $x \in \mathcal{O}_{p_i}$; réciproquement si $x \in \mathcal{O}_{p_i}$ il existe un $\mathcal{O}$-idéal N tel que $N \subseteq \mathcal{O}$, $N \not\subseteq p_i$ et $Nx \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $\mathcal{O}_i N = \mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_i x = \mathcal{O}_i Nx \subseteq \mathcal{O}_i \mathcal{O} = \mathcal{O}_i$, d'où l'on tire $x \in \mathcal{O}_i$. ■

REMARQUE 2.4. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier noethérien d'un anneau artinien simple* S. *Considérons $\mathcal{P}$ la famille des idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}$. Alors la famille $(\mathcal{O}_P)_{P \in \mathcal{P}}$ est une famille d'ordres d'Asano réguliers, noethériens, semi-locaux et non simples de l'anneau* S *vérifiant les propriétés* (P_1), (P_2), (P_3) *du lemme* 2.2. En effet $\mathcal{O}_P$, pour $P \in \mathcal{P}$, est un ordre d'Asano régulier noethérien semi-local et non simple de S d'après la proposition II.2.2, le corollaire III.2.2, le théorème III.2.1, la proposition IV.2.20, le théorème IV.2.15 et sa démonstration ; on a (P_1) d'après le théorème IV.2.19, et (P_2) d'après le lemme IV.2.16. On obtient (P_3) à partir du corollaire III.2.2 car pour $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ et $P_1 \neq P_2$ on a alors $P_1 + P_2 = \mathcal{O}$.

PROPOSITION 2.5. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}$ et utilisons les notions du chapitre* IV. *Si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, alors, pour tout* $P \in \mathcal{P}$, A_P *est un $\mathcal{O}_P$-idéal à gauche de la forme* $A_P = \mathcal{O}_P a_P$ *où* a_P *est un élément de* u(S) *égal à* 1 *sauf pour un nombre fini de* $P \in \mathcal{P}$. *De plus on a* $\mathcal{O}_r(A) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} a_P^{-1} \mathcal{O}_P a_P$.

DEMONSTRATION. - Comme $A_P = \{x \in S \mid$ il existe N idéal bilatère de $\mathcal{O}$ tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq A\}$ il est immédiat que A_P est un $\mathcal{O}_P$-idéal à gauche. D'après le théorème

III.2.1, le corollaire III.2.2 et la proposition II.2.2, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers. D'après la proposition IV.2.6, le corollaire IV.2.8 et le théorème IV.2.15, l'anneau $\mathcal{O}_P$ est à idéaux à gauche principaux. Puisque A est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche il existe $\lambda \in u(S)$ tel que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $A_P\lambda \subseteq \mathcal{O}_P$ pour tout $P \in \mathscr{P}$, et comme $A_P\lambda$ est un idéal à gauche de $\mathcal{O}_P$ il existe $\mu_P \in \mathcal{O}_P$ tel que $A_P\lambda = \mathcal{O}_P\,\mu_P$; de plus on a $\mu_P \in u(S)$: car A_P contenant un élément de u(S), l'élément μ_P de S est non diviseur de zéro d'un côté, et il est alors non diviseur de zéro de l'autre côté d'après le lemme 3.8 de [56] puisque S est un anneau artinien simple. Si on a $A\lambda = \mathcal{O}$ on obtient $A = \mathcal{O}\lambda^{-1}$ et pour tout $P \in \mathscr{P}$ on a $A_P = \mathcal{O}_P\,\lambda^{-1}$; comme il résulte du lemme IV.2.16 qu'on a $\lambda,\lambda^{-1} \in \mathcal{O}_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in \mathscr{P}$ il vient $A_P = \mathcal{O}_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in \mathscr{P}$ pour lesquels on a donc $A_P = \mathcal{O}_P\,\lambda^{-1}$ avec $\lambda^{-1} \in u(S)$. Si on a $A\lambda \neq \mathcal{O}$, alors, comme $\mathcal{O}$ est un ordre régulier, il existe un $\mathcal{O}$-idéal bilatère B distinct de $\mathcal{O}$ tel que $B \subseteq A\lambda$; d'après le corollaire III.2.2 on peut écrire $B = P_1 \ldots P_n$ avec $P_1,\ldots,P_n \in \mathscr{P}$ et on a $B \not\subseteq P$ pour tout $P \in \mathscr{P} - \{P_1,\ldots,P_n\}$. De $B \subseteq A\lambda$ on déduit $B\lambda^{-1} \subseteq A$, et pour tout $P \in \mathscr{P} - \{P_1,\ldots,P_n\}$ on obtient $\lambda^{-1} \in A_P$; il vient alors $\mathcal{O}_P = A_P\lambda = \mathcal{O}_P\,\mu_P$ pour tout $P \in \mathscr{P} - \{P_1,\ldots,P_n\}$ et donc $A_P = \mathcal{O}_P\,\lambda^{-1}$. D'autre part pour $P \in \{P_1,\ldots,P_n\}$ on a vu qu'on a $A_P = \mathcal{O}_P(\mu_P\,\lambda^{-1})$ avec $\mu_P\,\lambda^{-1} \in u(S)$. D'après le lemme IV.2.16 on a $\lambda,\lambda^{-1} \in \mathcal{O}_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in \mathscr{P}$. En conséquence on a $A_P = \mathcal{O}_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in \mathscr{P}$ pour lesquels on a donc $A_P = \mathcal{O}_P\,a_P$ avec $a_P \in u(S)$. Montrons maintenant qu'on a $\mathcal{O}_r(A) = \bigcap_{P\in\mathscr{P}} a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$: si $x \in \mathcal{O}_r(A)$ on a $Ax \subseteq A$ ce qui implique $A_Px \subseteq A_P$ pour tout $P \in \mathscr{P}$ et donc $x \in A_P^{-1}\,A_P$, c'est-à-dire $x \in a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$ pour tout $P \in \mathscr{P}$; réciproquement si $x \in a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$ pour tout $P \in \mathscr{P}$, on a $a_Px \in A_P$ ce qui implique $A_P\,x \subseteq A_P$ d'où l'on déduit $Ax \subseteq A_P$, et par suite $Ax \subseteq \bigcap_{P\in\mathscr{P}} A_P$, c'est-à-dire $Ax \subseteq A$ puisqu'on a facilement $A = \bigcap_{P\in\mathscr{P}} A_P$, et donc $x \in \mathcal{O}_r(A)$. ■

COROLLAIRE 2.6. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier, noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}$. Alors tout ordre maximal $\mathcal{O}'$ de* S *équivalent à $\mathcal{O}$ est de la forme* $\mathcal{O}' = \bigcap_{P\in\mathscr{P}} a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$, *où* $(a_P)_{P\in\mathscr{P}}$ *est une famille d'éléments de* u(S) *qui sont tous égaux à* 1 *sauf un nombre fini.*

DEMONSTRATION. - On a vu dans une remarque au début du paragraphe 1 que $\mathcal{O}\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$- $\mathcal{O}'$-idéal, et comme on a $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_r(\mathcal{O}\mathcal{O}')$ le résultat se déduit de la proposition 2.5. ■

THEOREME 2.7. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre d'Asano régulier noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Désignons par* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des idéaux premiers non nuls de* $\mathcal{O}$ *et utilisons les notions du chapitre* IV. *Si* $(a_P)_{P\in\mathcal{P}}$ *est une famille d'éléments de* u(S) *qui sont tous égaux à* 1 *sauf un nombre fini, alors* $\mathcal{O}' = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$ *est un ordre d'Asano régulier de* S *équivalent à* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Pour tout $P\in\mathcal{P}$ posons $\mathcal{O}'_P = a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P$. D'après le corollaire I.2.2, le sous-anneau $\mathcal{O}'_P$ de S est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}_P$, et d'ailleurs isomorphe à $\mathcal{O}_P$. Il résulte alors de la remarque 2.4 que la famille $(\mathcal{O}'_P)_{P\in\mathcal{P}}$ est une famille d'ordres d'Asano réguliers, noethériens, semi-locaux et non simples de S. Montrons qu'elle vérifie les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) du lemme 2.2 comme la famille $(\mathcal{O}_P)_{P\in\mathcal{P}}$: $\mathcal{O}'$ est un sous-anneau de S, et il existe $\lambda,\mu \in u(S)\cap\mathcal{O}$ tels que, pour tout $P\in\mathcal{P}$, on a $\lambda a_P^{-1}\in\mathcal{O}$ et $a_P\,\mu\in\mathcal{O}$; ainsi on obtient, pour tout $P\in\mathcal{P}$, $\lambda\,\mathcal{O}'\,\mu \subseteq \lambda\, a_P^{-1}\,\mathcal{O}_P\,a_P\,\mu \subseteq \mathcal{O}_P$, c'est-à-dire $\lambda\,\mathcal{O}'\,\mu\subseteq\mathcal{O}$ puisqu'on a $\mathcal{O} = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}}\mathcal{O}_P$ (d'après le théorème IV.2.19), et d'un autre côté on a
$\mu\,\mathcal{O}\lambda \subseteq a_P^{-1}\,\mathcal{O}\,a_P \subseteq \mathcal{O}'_P$ pour tout $P\in\mathcal{P}$, c'est-à-dire $\mu\,\mathcal{O}\lambda\subseteq\mathcal{O}'$. D'après le corollaire I.2.2, $\mathcal{O}'$ est un ordre de S équivalent à $\mathcal{O}$; la propriété (P_1) est donc vérifiée. La propriété (P_2) est aussi vérifiée car elle se déduit immédiatement de celle vérifiée par la famille $(\mathcal{O}_P)_{P\in\mathcal{P}}$. Vérifions (P_3) : soient $P_o,P_1\in\mathcal{P}$ tels que $P_o\neq P_1$, et considérons $P_2,\dots,P_m\in\mathcal{P}$ tels que $a_P = 1$ pour tout $P\in\mathcal{P}-\{P_o,P_1,P_2,\dots,P_m\}$. On a vu dans la démonstration du théorème IV.2.15 que le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_{P_i}$ est $M_i = \mathcal{O}_{P_i}\,P_i = P_i\,\mathcal{O}_{P_i}$, et le radical de Jacobson de $\mathcal{O}'_{P_i}$ est donc $M'_i = a_{P_i}^{-1}\,M_i\,a_{P_i}$. Pour $i = 0,\dots,m$ il existe $\alpha_i,\alpha'_i\in\mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{O}_{P_i}\,a_{P_i}\,\mathcal{O}_{P_i} = M_i^{-\alpha_i}$ et $\mathcal{O}_{P_i}\,a_{P_i}^{-1}\,\mathcal{O}_{P_i} = M_i^{-\alpha'_i}$; comme $1 = a_{P_i}\,a_{P_i}^{-1}$ appartient à $M_i^{-(\alpha_i+\alpha'_i)}$ on a donc $\alpha_i+\alpha'_i \geqslant 0$. Posons $\alpha = \mathrm{Sup}_i(\alpha_i+\alpha'_i)$. Pour tout $i = 0,\dots,m$, on a donc $a_{P_i}\,M_i^{\alpha+1}\,a_{P_i}^{-1}\subseteq M_i$ ce qui implique $M_i^{\alpha+1}\subseteq M'_i$. Comme, d'après la remarque 2.4 et le lemme 2.2, la famille $(\mathcal{O}_P)_{P\in\mathcal{P}}$ vérifie la propriété (P_7), il existe $a\in\mathcal{O}$ tel que

$1 - a \in M_0^{\alpha+1}$ et $a \in M_i^{\alpha+1}$ pour $i = 1,\ldots,m$. On a donc $1 - a \in M'_0$ et $a \in M'_1$; de plus, comme $a \in \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_P$ (d'après le théorème IV.2.19) et comme $a \in M'_i$ pour $i = 2,\ldots,m$, on a en fait $a \in \mathcal{O}'$, et la propriété (P_3) est ainsi vérifiée. $\mathcal{O}'$ est donc un ordre d'Asano régulier de S d'après le théorème 2.3, et on a vu qu'il est équivalent à $\mathcal{O}$. ■

COROLLAIRE 2.8. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Alors tout ordre maximal de* S *équivalent à $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de* S.

DEMONSTRATION. - C'est immédiat d'après le corollaire 2.6 et le théorème 2.7. ■

COROLLAIRE 2.9. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, alors l'ordre à droite* $\mathcal{O}_r(A)$ *de* A *est un ordre d'Asano régulier de* S *(et donc un ordre maximal de* S*).*

DEMONSTRATION. - C'est immédiat d'après la proposition 2.5 et le théorème 2.7 (et le théorème III.2.1). ■

PROPOSITION 2.10. - *Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Asano régulier noethérien de l'anneau artinien simple* S. *Si* A *est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$ (et différent de $\mathcal{O}$), alors* A *possède une décomposition primaire dans $\mathcal{O}$ dont les radicaux sont non nuls, et on a* $A = A^*$ *(avec* $A^* = (A^{-1})^{-1}$*).*

DEMONSTRATION. - D'après la proposition VI.1.12 considérons une décomposition tertiaire réduite de A dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un ordre régulier A contient un idéal bilatère non nul B de $\mathcal{O}$. Donc les radicaux de la décomposition tertiaire de A sont des idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}$ car ils contiennent B, et par conséquent ce sont des c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers ; de plus d'après la proposition VI.4.1 cette décomposition tertiaire est une décomposition primaire. D'après le corollaire 2.9 et la proposition VI.4.2 on a $A = A^*$. ■

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

On trouvera dans [5] et [65] une théorie du groupoïde de BRANDT et une application à une décomposition d'un Λ-idéal à gauche dont l'ordre à droite et l'ordre à gauche sont des ordres maximaux (un tel Λ-idéal à gauche est dit "normal") que nous n'avons pas reproduite ici. La proposition 1.4 se trouve dans G. MICHLER [85], le corollaire 1.5, la proposition 1.6 (avec l'oubli de l'hypothèse "S artinien simple") se trouvent dans G. MAURY [83]. Le paragraphe 2 est tiré de ASANO [4] qui énonçait d'ailleurs les résultats 2.4 à 2.9 sous l'hypothèse un peu plus générale que $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano régulier de l'anneau artinien simple S (donc $\mathcal{O}$ non nécessairement noethérien), tel que $\mathcal{O}/p$ est artinien simple pour tout idéal premier non nul P de $\mathcal{O}$.

CHAPITRE VIII.

LOCALISATION DANS LES R-ORDRES MAXIMAUX : ORDRES MAXIMAUX ET ANNEAUX A IDENTITE POLYNOMIALE.

§ 1. LOCALISATION DANS LES R-ORDRES MAXIMAUX CLASSIQUES.

PROPOSITION 1.1. ("Going down theorem"). - *Soit* R *un domaine d'intégrité intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* A *une* R*-algèbre contenant* R *comme sous-anneau et ayant même élément unité* 1 *que* R. *Supposons que* A *soit localement finie (c'est-à-dire que la plus petite sous-algèbre de* A *contenant* R *et un nombre fini d'éléments quelconques* $x_1,\dots,x_n$ *de* A, *notée* $R\{x_1,\dots,x_n\}$, *soit un* R*-module de type fini), supposons que* A *soit sans* R*-torsion, et supposons que* A/P *soit un anneau de Goldie pour tout idéal premier* P *de* A. *Alors si* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont des idéaux premiers de* R *tels que* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ *et si* Q *est un idéal premier de* A *tel que* $Q \cap R = \mathfrak{q}$, *il existe un idéal premier* P *de* A *tel que* $P \subseteq Q$ *et* $P \cap R = \mathfrak{p}$.

DEMONSTRATION. - Elle s'inspire de celle du cas commutatif (cf. théorème 6 page 262 de [109, Vol. I]). Désignons par $\mathscr{C}(Q)$ la partie multiplicative des éléments non diviseurs de zéro modulo l'idéal Q, et considérons la partie multiplicative S formée des éléments de la forme ra avec $r \in R - \mathfrak{p}$ et $a \in \mathscr{C}(Q)$. On a $A\mathfrak{p} \cap S = \phi$: en effet sinon il existe $x \in A\,\mathfrak{p} \cap S$, et on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ avec $x_i \in A$ et $p_i \in \mathfrak{p}$ pour $i = 1,\dots,n$; il vient $xR\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \mathfrak{p}\, R\{x_1,\dots,x_n\}$, et puisque $R\{x_1,\dots,x_n\}$ est un R-module de type fini et un module fidèle sur $R[x]$, on déduit du lemme 1 page 10 de [19] que x est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A, dont tous les coefficients autres que le coefficient dominant appartiennent à $\mathfrak{p}$. Comme R est intégralement clos, et A sans R-torsion le polynôme minimal de x sur K a tous ses coefficients dans R (théorème 5 page 260 de [109, Vol. I]) et il est alors facile de voir que ce polynôme minimal s'écrit $f(X) = X^{\ell} + r_1X^{\ell-1} + \ldots + r_{\ell}$ avec $r_1,\ldots,r_{\ell} \in \mathfrak{p}$. En outre comme $x \in S$ on peut écrire $x = ra$ avec $r \in R - \mathfrak{p}$ et $a \in \mathscr{C}(Q)$; le polynôme minimal $g(X)$ de a sur K a aussi tous ses coefficients dans R, et puisque A est sans R-torsion les polynômes $f(X)$ et $g(X)$ ont le même degré ce qui permet d'écrire $g(X) = X^{\ell} + s_1X^{\ell-1} + \ldots + s_{\ell}$ avec $s_1,\ldots,s_{\ell} \in R$. On obtient alors $0 = r^{\ell}g(a) = x^{\ell} + s_1rx^{\ell-1} + \ldots + s_{\ell}r^{\ell}$ ce qui nous donne $r_i = s_ir^i$ pour $i = 1,\ldots,\ell$; comme on a $r_1,\ldots,r_{\ell} \in \mathfrak{p}$ et $r \in R - \mathfrak{p}$ on en déduit qu'on a $s_1,\ldots,s_{\ell} \in \mathfrak{p}$. Par suite on obtient $a^{\ell} \in A\mathfrak{p}$ ce qui entraîne $a^{\ell} \in Q$: contradiction avec $a \in \mathscr{C}(Q)$. En conséquence on a $A\mathfrak{p} \cap S = \phi$. Alors l'ensemble des idéaux I de A tels que $A\mathfrak{p} \subseteq I$ et $I \cap S = \phi$ qui est inductif pour l'inclusion est non vide, et il possède, d'après le théorème de Zorn, un élément maximal P. Il est immédiat de vérifier que P est un idéal premier de A tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$, et on a $P \subseteq Q$ car A/Q est un anneau de Goldie (en effet de $P \not\subseteq Q$ on déduit du théorème de Goldie que P contient un élément de $\mathscr{C}(Q)$ et donc de S ce qui est contradictoire). ■

Rappelons sans démonstration le théorème fondamental suivant sur les R-ordres maximaux classiques (pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à [95]) :

THEOREME 1.2. - *Soit* R *un anneau de valuation discrète de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Alors tout* R-*ordre maximal* Λ *de* Σ *ne possède qu'un seul idéal premier non nul.*

COROLLAIRE 1.3. - *Soit* R *un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de* Λ, *alors* $\mathfrak{p} = P \cap R$ *est un idéal premier non nul minimal de* R ; *réciproquement si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier non nul minimal de* R, *alors il existe un seul idéal premier non nul minimal* P *de* Λ *tel que* $P \cap R = \mathfrak{p}$ *(et* P *sera dit sur* $\mathfrak{p}$*) et c'est le seul idéal premier sur* $\mathfrak{p}$.

DEMONSTRATION. - Il résulte du corollaire I.7.4 que Λ est un anneau noethérien. Ainsi, avec le théorème I.7.5, Λ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de Σ. Si P est un idéal premier non nul minimal de Λ alors $\mathfrak{p} = P \cap R$ est un idéal premier de R qui est non nul d'après la proposition III.4.3 (car Λ est entier sur son centre R) ; si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de R tel que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ alors, d'après la proposition 1.1, il existe un idéal premier Q de Λ tel que $Q \subseteq P$ et $Q \cap R = \mathfrak{q}$, et par suite avec la minimalité de P on obtient Q = 0 ou Q = P ce qui implique $\mathfrak{q} = 0$ ou $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul minimal de R alors, d'après la proposition III.4.1, il existe un idéal premier non nul P de Λ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$; il résulte alors de la proposition III.4.3 que P est un idéal premier non nul minimal de Λ. La famille non vide $\mathcal{F}'$ des idéaux bilatères non nuls N de Λ tels que $N \cap (R - \mathfrak{p}) \neq \phi$ vérifie la condition (M) et il est immédiat de vérifier qu'on a $\Lambda_{\mathcal{F}'} = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ où $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est le localisé de Λ selon la partie multiplicative $R - \mathfrak{p}$ de R. Alors $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de centre $R_{\mathfrak{p}}$, c'est un $R_{\mathfrak{p}}$-module de type fini et, comme $R_{\mathfrak{p}}$ est noethérien, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien ; d'après la proposition IV.2.2, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal de Σ et donc, d'après la proposition I.7.6, c'est un $R_{\mathfrak{p}}$-ordre maximal de Σ. Il est facile de voir que $P_{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier non nul de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ tel que $P_{\mathfrak{p}} = PR_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}P$ et $P_{\mathfrak{p}} \cap \Lambda = P$; de plus des idéaux premiers distincts de Λ sur $\mathfrak{p}$ donnent des idéaux premiers non nuls distincts de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ (car $P_{\mathfrak{p}} \cap \Lambda = P$). Mais $R_{\mathfrak{p}}$ étant un anneau de valuation discrète il résulte du théorème 1.2 que $P_{\mathfrak{p}}$ est le seul idéal premier non nul de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ et donc que P est le seul idéal premier non nul de Λ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$. ∎

THEOREME 1.4. - *Soit* R *un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier quelconque de* Λ *alors* $\mathfrak{p} = P \cap R$ *est un idéal premier de* R *et on a* $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$, *où* $\Lambda_P = \{x \in \Sigma |$ *il existe* N *idéal bilatère de* Λ *tel que* $N \not\subseteq P$ *et* $Nx \subseteq \Lambda\}$ *et où* $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ *est le localisé de* Λ *selon la partie multiplicative* $R - \mathfrak{p}$ *de* R.

DEMONSTRATION. - Il est clair que $\mathfrak{p} = P \cap R$ est un idéal premier de R. Posons $S = R - \mathfrak{p}$. Il résulte du corollaire I.7.4 et du théorème I.7.5 que Λ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de Σ ; l'anneau Λ_P est celui défini au chapitre IV et d'après la proposition IV.2.6 et le corollaire IV.2.8 on a

$\Lambda_P = \Lambda_{\mathscr{F}P}$. Il est immédiat qu'on a $\Lambda_{\mathfrak{p}} \subseteq \Lambda_P$. Réciproquement si $x \in \Lambda_P$ il existe N idéal bilatère de Λ tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq \Lambda$; comme N est un Λ-idéal on a, d'après la proposition II.2.4, $N^*x \subseteq \Lambda$ et $N^* \not\subseteq P$ (avec $N^* = (N^{-1})^{-1}$). Si $N^* = \Lambda$ il vient $x \in \Lambda$ et donc $x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$; si $N^* \neq \Lambda$ alors, d'après les propositions II.2.6, II.1.7 et II.2.2, on peut écrire $N^* = P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r}$ avec $P_1,\dots,P_r$ idéaux premiers non nuls minimaux de Λ et $n_1,\dots,n_r$ des entiers positifs. Comme pour tout $i = 1,\dots,r$ on a $N^* \subseteq P_i$, on obtient $P_i \not\subseteq P$ pour tout $i = 1,\dots,r$. Mais si Q est un idéal premier non nul minimal de Λ tel que $Q \not\subseteq P$ alors on a $Q \cap S \neq \phi$: en effet si $Q \cap S = \phi$ on a $Q \cap R \subseteq P \cap R$ et d'après la proposition 1.1 il existe un idéal premier Q' de Λ tel que $Q' \subseteq P$ et $Q' \cap R = Q \cap R$; d'après le corollaire 1.3 on a $Q' = Q$ et par suite $Q \subseteq P$: contradiction. Donc pour tout $i = 1,\dots,r$ il existe $s_i \in S$ tel que $s_i \in P_i$. Si on pose $s = s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r}$ on a $s \in S$ et $s \in P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r}$ d'où l'on déduit $s \in N^*$. Il vient $sx \in \Lambda$ et par suite $x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $\Lambda_P \subseteq \Lambda_{\mathfrak{p}}$ et donc $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. ∎

Sous les hypothèses du théorème 1.4 nous allons étudier les idéaux premiers de Λ_P et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Λ_P soit l'anneau de fractions de Λ selon la partie multiplicative $\mathscr{C}(P)$.

LEMME 1.5. - *Soit* A *un anneau premier noethérien entier sur son centre* R, *et soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* R. *Alors il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux bilatères premiers* P *de* A *tels que* $P \cap R = \mathfrak{p}$ *et l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de l'anneau localisé* $A_{\mathfrak{p}}$.

DEMONSTRATION. - Posons $S = R - \mathfrak{p}$. Remarquons tout d'abord que l'ensemble $\mathscr{F}_S$ des idéaux à gauche de A qui rencontrent S est un ensemble topologisant, idempotent et parfait (c'est-à-dire vérifiant la condition (T)) tel que $\mathscr{F}_S A = 0$ d'après la proposition IV.1.1, et tel que $A_{\mathscr{F}_S} = A_{\mathfrak{p}}$. La proposition IV.1.3 sera en particulier trés utile dans la suite. De plus si I est un idéal bilatère de A alors il est immédiat de vérifier que $A_{\mathfrak{p}} I$ est un idéal bilatère de $A_{\mathfrak{p}}$ tel que $A_{\mathfrak{p}} I = IA_{\mathfrak{p}}$.

Si M est un idéal bilatère maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ alors $P = M \cap A$ est un idéal bilatère premier de A tel que $M = A_{\mathfrak{p}} P = PA_{\mathfrak{p}}$, $P \cap S = \phi$ et P est maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A qui ne rencontrent pas S. Réciproquement si P est un élément maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A qui ne rencontrent pas S alors $M = A_{\mathfrak{p}} P = PA_{\mathfrak{p}}$ est un idéal bilatère maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ tel que $M \cap A = P$.

Si P est un idéal bilatère de A maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A qui ne rencontrent pas S alors on a $P \cap R = \mathfrak{p}$: en effet $P \cap R$ est un idéal premier de R tel que $P \cap R \subseteq \mathfrak{p}$; d'après le lemme III.4.2 il existe un idéal bilatère premier P' de A tel que $P \subseteq P'$ et $P' \cap R = \mathfrak{p}$ ce qui implique qu'on a $P' \cap S = \phi$, et d'après la maximalité de P on obtient $P' = P$ ce qui donne $P \cap R = \mathfrak{p}$). Réciproquement si P est un idéal bilatère premier de A tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$, alors P est maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A qui ne rencontrent pas S : en effet on a $P \cap S = \phi$ et on peut alors considérer P' un élément maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères de A qui ne rencontrent pas S tel que $P' \supseteq P$ (d'après le théorème de Zorn) ; P' est un idéal bilatère premier de A tel que $P' \cap R = P \cap R = \mathfrak{p}$ et donc d'après la proposition III.4.3 on a $P' = P$ ce qui nous donne la maximalité de P.

La correspondance biunivoque se déduit alors immédiatement de tout ce qui précède. ■

LEMME 1.6. - *Soit* R *un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre de* Σ. *Si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* R, *alors l'ensemble des idéaux bilatères premiers* P *de* Λ *tels que* $P \cap R = \mathfrak{p}$ *est non vide et est un ensemble fini.*

DEMONSTRATION. - Λ est un anneau premier, noethérien, ordre régulier de Σ d'après le corollaire I.7.4, la proposition I.7.1 et le corollaire I.1.2. L'ensemble des idéaux bilatères premiers P de Λ tels que $P \cap R = \mathfrak{p}$ est non vide d'après la proposition III.4.1. Si $\mathfrak{p}$ est nul il n'y a qu'un seul idéal premier de Λ sur $\mathfrak{p}$ (c'est l'idéal nul) d'après la proposition III.4.3. Si $\mathfrak{p}$ est non nul alors $\Lambda\mathfrak{p}$ étant un idéal bilatère non nul de Λ est un Λ-idéal, et, d'après la proposition VI.1.2, il existe un nombre fini d'idéaux bilatères premiers $P_1,\ldots,P_n$ de Λ tels que $P_1P_2 \ldots P_n \subseteq \Lambda\mathfrak{p} \subseteq P_i$ pour tout $i = 1,\ldots,n$. Alors si P est un idéal bilatère premier de Λ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$ il vient $P_1P_2 \ldots P_n \subseteq \Lambda\mathfrak{p} \subseteq P$, et par suite il existe un i tel que $P_i \subseteq P$;

on obtient $\mathfrak{p} \subseteq (\Lambda\mathfrak{p}) \cap R \subseteq P_i \cap R \subseteq P \cap R = \mathfrak{p}$ ce qui nous donne $P_i \cap R = P \cap R = \mathfrak{p}$ avec $P_i \subseteq P$, et la proposition III.4.3 implique qu'on a $P_i = P$. Donc les idéaux bilatères premiers de Λ sur $\mathfrak{p}$ sont en nombre fini (car contenu dans l'ensemble $\{P_1,\ldots,P_n\}$). ■

THEOREME 1.7. - *Soit* R *un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ, *et* P *un idéal bilatère premier de* Λ. *Posons* $\mathfrak{p} = P \cap R$. *Alors les idéaux maximaux de* $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ *sont* $\Lambda_P P_1,\ldots,\Lambda_P P_n$ *où* $P_1,\ldots,P_n$ *sont les idéaux bilatères premiers de* Λ *sur* $\mathfrak{p}$. *De plus pour que* Λ_P *soit l'anneau de fractions de* Λ *selon* $\mathscr{C}(P)$ *il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un seul idéal bilatère premier de* Λ *sur* $\mathfrak{p}$.

DEMONSTRATION. - Il résulte du corollaire I.7.4 et du théorème I.7.5 que Λ est un anneau premier, noethérien, ordre maximal régulier de Σ. La première partie s'obtient alors par le lemme 1.6 et par le lemme 1.5 et sa démonstration car d'après le théorème 1.4 on a $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Comme Λ est un anneau noethérien qui vérifie la condition (H) (cf. § IV.1) on a $\mathscr{F}_P = \mathscr{F}^P$ d'après la proposition IV.1.8 et par suite $\Lambda_P = \Lambda_{\mathscr{F}^P}$. D'autre part, si on pose $S = R - \mathfrak{p}$, on a vu dans la démonstration du lemme 1.5 que l'ensemble $\mathscr{F}_S$ des idéaux à gauche de A qui rencontrent S est un ensemble topologisant et idempotent vérifiant la condition (T) tel que $\Lambda_{\mathscr{F}_S} = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. De plus on a $\mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_P$ (car pour $\mathfrak{a} \in \mathscr{F}_S$ il existe $s \in S$ tel que $s \in \mathfrak{a}$ et comme Λs est un idéal bilatère de Λ non contenu dans P et contenu dans $\mathfrak{a}$ il vient $\mathfrak{a} \in \mathscr{F}_P$).

Si Λ_P est l'anneau de fractions de Λ selon $\mathscr{C}(P)$ alors Λ vérifie la condition de Ore selon $\mathscr{C}(P)$ et il résulte du théorème IV.1.5 que Λ_P n'a qu'un seul idéal bilatère maximal ce qui implique par le lemme 1.5 qu'il n'y a qu'un seul idéal bilatère premier de Λ sur $\mathfrak{p}$. Réciproquement s'il n'y a qu'un seul idéal bilatère premier de Λ sur $\mathfrak{p}$ c'est P, et par suite, d'après le lemme III.4.2, pour tout idéal premier Q de Λ tel que $Q \cap R \subseteq \mathfrak{p}$ (ce qui équivaut à $Q \cap S = \phi$) on a $Q \subseteq P$. Ainsi tout idéal premier de Λ qui appartient à $\mathscr{F}_P$ appartient aussi à $\mathscr{F}_S$, et la proposition IV.1.8 implique alors qu'on a $\mathscr{F}_P \subseteq \mathscr{F}_S$. Donc on a $\mathscr{F}^P = \mathscr{F}_P = \mathscr{F}_S$ et comme $\Lambda_P P$ est l'idéal bilatère maximal de Λ_P d'après le lemme 1.5 on déduit du théorème IV.1.5 que Λ vérifie la condition de Ore selon $\mathscr{C}(P)$ et que Λ_P est l'anneau de fractions de Λ selon $\mathscr{C}(P)$. ∎

COROLLAIRE 1.8. - *Soit* R *un domaine d'intégrité neothérien intégralement clos dans son corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de* Λ, *alors* Λ *vérifie la condition de Ore selon* $\mathscr{C}(P)$.

DÉMONSTRATION. - C'est clair d'après le corollaire 1.3 et le théorème 1.7. ∎

Remarquons que l'on retrouve par une autre méthode dans le cas particulier des R-ordres maximaux des résultats du chapitre IV (voir le corollaire IV.2.14 et le théorème IV.2.15, compte tenu de la proposition II.2.2).

Par la suite nous étendrons certains de ces résultats aux R-ordres maximaux de Fossum.

§ 2. ANNEAUX A IDENTITE POLYNOMIALE.

Ce paragraphe contient des rappels sur la théorie des anneaux à identité polynômiale. Pour plus de détails sur cette théorie en général le lecteur pourra se reporter à [92]. Pour la commodité du lecteur, les principaux résultats et les résultats plus récents seront énoncés avec des références précises.

Soit A un anneau de centre Z. On dit que A est un *anneau à identité polynômiale* ou que A est un P-I-*anneau* s'il existe un entier n et un polynôme non nul P de l'algèbre libre $Z\{X_1,\dots,X_n\}$ sur Z en les variables non commutatives $X_1,\dots,X_n$ tels que si l'on remplace dans P les X_i par des éléments quelconques de A on obtienne 0 ; on dit aussi que A vérifie P. Le degré de l'identité polynômiale est le degré du polynôme P. On dit que A vérifie une *identité polynômiale multilinéaire* si P est multilinéaire. Si on pose $[X_1,\dots,X_n] = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$, où S_n est le groupe symétrique de degré n et ε_σ la signature de la permutation σ, on dit que A vérifie *l'identité standard* de degré n si A vérifie l'identité $[X_1,\dots,X_n]$.

Evidemment tout anneau commutatif vérifie l'identité $X_1X_2 - X_2X_1$ et est par suite un P-I-anneau.

PROPOSITION 2.1. (KAPLANSKY). ([92] page 17). - *Soient* R *un anneau commutatif et* A *une* R-*algèbre. Si* A *est un* R-*module de type fini engendré par* n *éléments, alors* A *vérifie l'identité standard de degré* n+1.

THEOREME 2.2. (Théorème de POSNER). ([92] pages 48 et 175 ; ou [96] page 161). - *Soit* A *un anneau premier de centre* Z *qui vérifie une identité polynômiale de degré* d, *et soit* K *le corps de fractions de* Z. *Alors le localisé* Q *de* A *selon la partie multiplicative de* Z *formée des éléments non nuls de* Z *(c'est-à-dire* $Q \simeq A \otimes_Z K$*) est un anneau simple de centre* K *et de dimension finie sur* K *inférieure ou égale à* $[\frac{d}{2}]^2$ *(où* $[\frac{d}{2}]$ *désigne la partie entière de* $\frac{d}{2}$ *) ; de plus* Q *est l'anneau classique de fractions de* A.

THEOREME 2.3. (SIRSOV). ([92] page 152 ; ou [103] page 248). - *Soit* A *un anneau premier de centre* Z *qui vérifie une identité polynômiale multilinéaire de degré* m. *Soient* $x_1,\dots,x_n \in A$ *et considérons* $T = Z\{x_1,\dots,x_n\}$ *le sous-anneau de* A *engendré par* Z *et par les éléments* $x_1,\dots,x_n$. *Si tous les monômes en* $x_1,\dots,x_n$ *de degré inférieur ou égal à* $(\frac{m}{2})^2$ *sont entiers sur* Z, *alors* T *est un* Z-*module de type fini.*

Soit A un anneau premier de centre Z qui vérifie une identité polynômiale, et soit K le corps de fractions de Z. D'après le théorème 2.2, A possède un anneau classique de fractions Q et Q est une K-algèbre centrale simple de dimension finie sur K. Ainsi on peut parler du polynôme caractéristique d'un élément de Q (cf. § I.6). On a alors :

THEOREME 2.4. (SHELTER). ([103] page 252). - *Si* A *est un anneau premier à identité polynômiale de centre* Z *et si* K *désigne le corps de fractions de* Z, *alors les coefficients du polynôme caractéristique d'un élément quelconque de* A *sont dans* $\widetilde{Z} = \{x \in K \mid$ *il existe* $\alpha \in Z$, $\alpha \neq 0$, *tel que* $\alpha x^n \in Z$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}\}$ *la clôture intégrale complète de* Z.

COROLLAIRE 2.5. - *Si* A *est un anneau premier à identité polynômiale dont le centre* Z *est complètement intégralement clos dans son corps de fractions* K, *alors* A *est entier sur* Z.

DEMONSTRATION. - C'est clair d'après le théorème 2.4 puisque $\widetilde{Z} = Z$. ■

THEOREME 2.6. (CAUCHON). ([21] théorème 6.4.1). - *Soit* S *un anneau artinien simple, et soient* σ *un automorphisme de* S *et* δ *une* σ*-dérivation de* S. *Désignons par* K *le centre de* S. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'anneau des polynômes de Ore* $B = S[X,\sigma,\delta]$ *est un* P-I-*anneau.*

(b) S *est de rang fini sur* $k = \{s \in K | \sigma(s) = s$ *et* $\delta(s) = 0\}$.

(c) *Les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) S *est de rang fini sur son centre* K.

(ii) $\bar{\sigma}$ *est d'ordre fini dans* Aut(S)/Int(S), *où* Int(S) *désigne le sous-groupe, formé des automorphismes intérieurs de* S, *du groupe* Aut(S) *des automorphismes de* S, *et* $\bar{\sigma}$ *la classe de* σ *dans* Aut(S)/Int(S).

(iii) δ *est algébrique sur* S.

THEOREME 2.7. (Théorème de KAPLANSKY). ([92] page 37 ; ou [96] page 155). - *Si* A *est une algèbre primitive (c'est-à-dire telle que l'idéal nul est annulateur d'un* A-*module simple) qui vérifie une identité polynômiale de degré* d, *alors* A *est une algèbre centrale simple dont la dimension sur son centre est inférieure ou égale à* $[\frac{d}{2}]^2$ *(où* $[\frac{d}{2}]$ *désigne la partie entière de* $\frac{d}{2}$*), et* A *vérifie une identité standard de degré inférieur ou égal à* d.

COROLLAIRE 2.8. - *Soit* A *un anneau premier à identité polynômiale. Alors le radical de Jacobson* J *de* A *est l'intersection des idéaux bilatères maximaux de* A.

DEMONSTRATION. - J est l'intersection des annulateurs des A-modules simples ([105] page 179). Si P est l'annulateur d'un A-module simple alors A/P est une algèbre primitive ; comme il résulte du théorème 2.2 et de la proposition 2.1 que A vérifie une identité standard alors A/P vérifie aussi une identité polynômiale standard et ainsi on déduit du théorème 2.7 que A/P est simple ce qui entraîne que P est un idéal bilatère maximal de A. Comme d'autre part tout idéal bilatère maximal est annulateur d'un A-module simple on a le résultat. ■

THEOREME 2.9. - *Soient* R *un domaine de Dedekind de corps de fractions* K *n'admettant qu'un nombre fini d'idéaux premiers non nuls, et* Σ *une* K*-algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Alors tout* R*-ordre maximal* Λ *de* Σ *est un anneau à idéaux à gauche, et à droite, principaux.*

DEMONSTRATION. - Λ est un anneau premier, noethérien, ordre d'Asano régulier de Σ d'après le théorème III.4.4 ; de plus Λ est un P-I-anneau puisque Σ en est un d'après la proposition 2.1. D'après le corollaire 1.3, les idéaux premiers non nuls minimaux de R correspondent biunivoquement aux idéaux premiers non nuls minimaux de Λ qui sont, d'après le corollaire III.2.2, les idéaux bilatères maximaux de Λ. D'après le corollaire 2.8, le radical de Jacobson J de Λ est l'intersection des idéaux bilatères maximaux de Λ qui sont en nombre fini ; J est aussi égal au produit de ces idéaux bilatères maximaux d'après la proposition II.1.9. Si X est un idéal à gauche essentiel de Λ alors, comme Λ est un ordre régulier de Σ et d'après la proposition II.1.7, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $J^n \subseteq X$. D'où $J^{n+1} \subseteq JX$. Puisque Λ/J^{n+1} est un anneau à idéaux à gauche principaux d'après la proposition III.3.4, il existe $x \in X$ tel que $X = \Lambda x + J^{n+1}$. Il vient $X \subseteq \Lambda x + JX \subseteq X$ ce qui nous donne $X = \Lambda x + JX$. On déduit alors du lemme de Nakayama ([105] page 179) qu'on a $X = \Lambda x$. Par suite tout idéal à gauche de Λ est principal (car facteur direct d'un idéal à gauche essentiel de Λ). De même à droite. ■

§ 3. ORDRES MAXIMAUX ET R-ORDRES MAXIMAUX.

Si R est un domaine d'intégrité complètement intégralement clos dans son corps de fractions K et si Σ est une K-algèbre centrale simple de dimension finie sur K, alors les R-ordres maximaux de Σ sont des ordres maximaux de Σ. Dans ce paragraphe nous allons nous préoccuper de la réciproque car de tels ordres maximaux de Σ sont des anneaux premiers à identité polynomiale de centre R. (Une réciproque partielle avait été vue dans la proposition I.7.6).

LEMME 3.1. - *Soit* A *un anneau premier possédant un anneau classique de fractions* Q. *Si* A *est un ordre maximal de* Q *alors on a :*

(i) Le centre R *de* A *est un domaine d'intégrité complètement intégralement clos dans son corps de fractions* K.

(ii) Si de plus A *vérifie la condition noethérienne sur les* c*-idéaux entiers, alors* R *est un anneau de Krull.*

DEMONSTRATION. - *(i)* : Si x est un élément du corps de fractions K de R tel qu'il existe un élément non nul r de R tel que $rR[x] \subseteq R$, alors on obtient $rA[x] \subseteq A$; on déduit alors du corollaire I.2.2 que A[x] est un ordre de Q équivalent à A. Par suite il vient $A[x] = A$ et donc $x \in K \cap A$; comme $K \cap A = R$, on a $x \in R$. Ainsi R est complètement intégralement clos dans K.

(ii) : Soit I un c-idéal entier de R. Alors il est clair que $(AI)^* = [(AI)^{-1}]^{-1}$ est un c-idéal bilatère entier de A car AI est un A-idéal bilatère entier. On a $((AI)^* \cap R)I^{-1} \subseteq ((AI)^*(AI)^{-1}) \cap K \subseteq A \cap K = R$. Par suite il vient $(AI)^* \cap R = I$. Par conséquent il est immédiat que R vérifie la condition noethérienne sur les c-idéaux entiers. Donc R est un anneau de Krull (cf. [18] page 7). ■

D'après le théorème de Posner (Théorème 2.2) un anneau premier à identité polynômiale possède un anneau classique de fractions qui est une algèbre centrale simple de dimension finie. Il vient :

THEOREME 3.2. - *Soit* A *un anneau premier à identité polynômiale de centre* R. *Considérons* K *le corps de fractions de* R *et* Σ *l'anneau classique de fractions de* A. *Alors* A *est un ordre maximal de* Σ *si et seulement si* R *est complètement intégralement clos dans* K *et si* A *est un* R*-ordre maximal de* Σ.

DEMONSTRATION. - Si A est un ordre maximal de Σ alors R est complètement intégralement clos dans K d'après le lemme 3.1, et A est entier sur R d'après le corollaire 2.5. En outre on a $\Sigma = KA$ d'après le théorème 2.2. Donc A est un R-ordre de Σ. Si Λ est un R-ordre de Σ tel que $A \subseteq \Lambda$ alors A et Λ sont des ordres équivalents de Σ

d'après le corollaire I.7.3, et comme A est un ordre maximal de Σ on obtient $A = \Lambda$. Donc A est un R-ordre maximal de Σ. Réciproquement si R est complètement intégralement clos dans K et si A est un R-ordre maximal de Σ alors A est un ordre maximal de Σ d'après le théorème I.7.5. ■

PROPOSITION 3.3. - *Soit* A *un anneau premier à identité polynômiale de centre* R. *Considérons* K *le corps de fractions de* R *et* Σ *l'anneau classique de fractions de* A. *Posons* $\widetilde{R} = \{x \in K \mid \exists\, \alpha \in R,\ \alpha \neq 0$ *et* $\alpha x^n \in R$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}\}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) A *est contenu dans un ordre maximal de* Σ *qui lui est équivalent.*

(b) $\widetilde{R}$ *est un ordre de* K *équivalent à* R.

DEMONSTRATION. *(a)* ⇒ *(b)* : Soit A' un ordre maximal de Σ équivalent à A et contenant A. Comme A' est un anneau premier à identité polynômiale (car, d'après le théorème 2.2 et la proposition 2.1, Σ vérifie une identité polynômiale standard), on déduit du théorème 3.2 que le centre Z(A') de A' est complètement intégralement clos dans K (on a $R \subseteq Z(A') \subseteq K$) et que A' est un Z(A')-ordre maximal de Σ. Comme d'après le théorème 2.2 on a $\Sigma = KA$ et comme il existe $\lambda, \mu \in u(\Sigma)$ tels que $\lambda A'\mu \subseteq A$, il existe un élément non nul $r \in R$ tel que $rA' \subseteq A$. Il vient $rZ(A') \subseteq R$ et par suite on a $Z(A') = \widetilde{R}$. Donc $\widetilde{R}$ est un ordre de K équivalent à R.

(b) ⇒ *(a)* : Il existe un élément non nul $r \in R$ tel que $r\widetilde{R} \subseteq R$. Alors $\widetilde{R}$ est complètement intégralement clos dans K. Posons $A' = \widetilde{R}A$; c'est un sous-anneau de Σ. Le centre Z(A') de A' est $\widetilde{R}$: si $x \in Z(A')$ alors on a $rx^n \in A$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc $rx^n \in R$ ce qui implique $x \in \widetilde{R}$; en outre on a $\widetilde{R} \subseteq Z(A')$. Comme on a $rA' \subseteq A$ il résulte du corollaire I.2.2 que A' est un ordre de Σ équivalent à A. Comme A' est un anneau premier à identité polynômiale (car, d'après le théorème 2.2 et la proposition 2.1, Σ vérifie une identité polynômiale standard) dont le centre $\widetilde{R}$ est complètement intégralement clos, le corollaire 2.5 implique que A' est entier sur $\widetilde{R}$. Donc A' est un $\widetilde{R}$-ordre de Σ (car on a $\Sigma = KA'$). Par suite A' est contenu dans un $\widetilde{R}$-ordre maximal B de Σ (voir § I.7). Ainsi B est un ordre maximal de Σ (d'après le théorème I.7.5) équivalent à A' (d'après le corollaire I.7.3) et donc équivalent à A, et tel que $A \subseteq A' \subseteq B$. ■

COROLLAIRE 3.4. - *Soit* A *un anneau premier à identité polynômiale dont le centre* R *est complètement intégralement clos dans son corps de fractions* K. *Considérons* Σ *l'anneau classique de fractions de* A. *Alors* A *est contenu dans un ordre maximal de centre* R *qui lui est équivalent.*

DEMONSTRATION. - C'est clair d'après la proposition 3.3 et sa démonstration puisque R étant complètement intégralement clos on a $R = \tilde{R}$. ■

Nous allons donner maintenant un exemple de R-ordre maximal qui n'est ni noethérien, ni de type fini sur son centre. Pour ce faire reprenons l'exemple étudié au § V. 3 :

L'anneau $R = K[X_n]_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes sur un corps commutatif K à une infinité dénombrable d'indéterminées est un domaine de Krull. En considérant l'automorphisme σ de R défini par $\sigma(X_i) = -X_i$, on avait étudié l'anneau des polynômes tordus $A = R[X,\sigma]$. Cet anneau A était un anneau sans diviseurs de zéro, non noethérien (ni à gauche, ni à droite), ordre maximal régulier de son corps de fractions Q, vérifiant la condition noethérienne sur les c-idéaux entiers et n'était pas de type fini sur son centre Z(A). Nous allons montrer que A est un Z(A)-ordre maximal de Fossum :

Désignons par S le corps de fractions de R, et considérons l'anneau des polynômes tordus $B = S[X,\sigma]$ (où σ est l'automorphisme de S prolongeant l'automorphisme σ de R précédemment défini). Il est aisé de vérifier que le centre Z(B) de B est $Z(B) = \{ \sum_{i=o}^{n} s_{2i} X^{2i}$, où les éléments s_{2i} de S sont des fractions dont tous les monômes au numérateur et au dénominateur sont de degré total pair$\}$. Soit L le corps de fractions de Z(B). Montrons que S est de rang fini sur $k = \{s \in S | \sigma(s) = s\}$: en effet, puisqu'on a $X_i = \frac{X_i}{X_o} X_o$ avec $\frac{X_i}{X_o} \in k$, tous les X_i appartiennent à $k[X_o]$; d'autre part, puisque X_o est racine de l'équation $Y^2 - X_o^2 = 0$ en Y avec $X_o^2 \in k$, $k[X_o]$ est un corps extension de degré 2 de k, contenant k et les X_i $(i \in \mathbb{N})$, et donc contenant S ; d'où $k[X_o] = S$. Alors, d'après le théorème 2.6, B est un anneau à identité polynômiale, d'ailleurs sans diviseurs de zéro, dont le corps de fractions est Q le corps de fractions de A. D'après le théorème de Posner (théorème 2.2), Q est donc une L-algèbre centrale simple de dimension finie sur L et, d'après la proposition 2.1, Q vérifie une identité polynômiale standard ; par suite A vérifie une identité polynômiale. Donc, d'après le théorème 3.2, A est un Z(A)-ordre maximal de Q ; d'autre part, d'après le lemme 3.1, Z(A) est un anneau de Krull. Par suite A est un Z(A)-ordre maximal de Fossum.

Pour terminer ce paragraphe notons également l'existence d'un R-ordre maximal de Fossum qui est noethérien et dont le centre R n'est pas noethérien :

Dans [114], il est construit un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos Z et un automorphisme σ de Z tel que σ^2 = id. et tel que l'anneau $Z^{\sigma} = \{z \in Z \mid \sigma(z) = z\}$ n'est pas noethérien. Considérons l'anneau des polynômes tordus $A = Z[X,\sigma]$. Cet anneau A est un ordre maximal (d'après la remarque V.2.2 et la proposition V.2.3) noethérien sans diviseurs de zéro de corps de fractions Q. Le centre R de A est $Z^{\sigma}[X^2]$ et n'est pas un anneau noethérien ; ce centre R de A est un anneau de Krull d'après le lemme 3.1. De plus A est un anneau à identité polynômiale : en effet si S désigne le corps de fractions de Z et σ l'automorphisme de S prolongeant l'automorphisme σ de Z alors, les conditions de la propriété *(c)* du théorème 2.6 étant trivialement vérifiées, l'anneau $S[X,\sigma]$ est à identité polynômiale ; comme en outre $S[X,\sigma]$ est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro de corps de fractions Q on déduit du théorème de Posner (théorème 2.2) que Q est une algèbre centale simple de dimension finie et la proposition 2.1 implique que Q vérifie une identité polynômiale standard ; par conséquent A vérifie aussi une identité polynômiale standard. Donc, d'après le théorème 3.2, A est un R-ordre maximal de Fossum de Q.

§ 4. LOCALISATION DANS LES R-ORDRES MAXIMAUX DE FOSSUM.

THEOREME 4.1. - *Soit* R *un domaine d'intégrité complètement intégralement clos dans son corps de fractions* K. *Si* A *est un anneau premier à identité polynômiale de centre* R *(en particulier si* A *est un* R*-ordre dans une* K*-algèbre centrale simple* Σ *de dimension finie sur* K*), alors si* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont des idéaux premiers de* R *tels que* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ *et si* Q *est un idéal premier de* A *tel que* $Q \cap R = \mathfrak{q}$*, il existe un idéal premier* P *de* A *tel que* $P \subseteq Q$ *et* $P \cap R = \mathfrak{p}$ *(c'est-à-dire : le "going down theorem" (proposition* 1.1*) est vérifié par le couple* (A,R)*).*

DEMONSTRATION. - Σ l'anneau classique de fractions de A est, d'après le théorème 2.2, une K-algèbre centrale simple de dimension finie sur K telle que $\Sigma = KA$; de plus A est entier sur R d'après le corollaire 2.5. Le théorème 2.3 implique alors que A est une R-algèbre localement finie. D'autre part il est clair que A est sans R-torsion. Enfin, si P est un idéal premier de A, l'anneau A/P est un anneau de Goldie : cela résulte du corollaire 1.2 car A/P est un anneau premier à identité polynômiale (Σ vérifiant, d'après la proposition 2.1, une identité polynômiale standard, A/P la vérifie aussi) qui possède, d'après le théorème 2.2, un anneau classique de fractions qui est simple artinien. En conséquence la proposition 1.1 nous donne le résultat. ■

THEOREME 4.2. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de* Λ, *alors* $\mathfrak{p} = P \cap R$ *est un idéal premier non nul minimal de* R *; réciproquement si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier non nul minimal de* R, *alors* $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ *est un* $R_{\mathfrak{p}}$*-ordre maximal classique et il n'y a dans* Λ *qu'un seul idéal premier* P *tel que* $P \cap R = \mathfrak{p}$ *et* P *est d'ailleurs un idéal premier non nul minimal de* Λ.

DEMONSTRATION. - Si P est un idéal premier non nul minimal de Λ alors $\mathfrak{p} = P \cap R$ est un idéal premier de R qui est non nul d'après la proposition III.4.3 (car Λ est entier sur son centre R) et il est minimal car si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de R tel que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ alors, d'après le théorème 4.1, il existe un idéal premier Q de Λ tel que $Q \subseteq P$ et $Q \cap R = \mathfrak{q}$, et par suite de la minimalité de P on obtient $Q = 0$ ou $Q = P$ ce qui implique $\mathfrak{q} = 0$ ou $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Réciproquement soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul minimal de R. Alors $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, et il est immédiat que le centre de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est $R_{\mathfrak{p}}$ et que $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est entier sur $R_{\mathfrak{p}}$ (puisque Λ est entier sur R) ; donc $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un $R_{\mathfrak{p}}$-ordre classique et est noethérien d'après le corollaire I.7.4. Soit J un idéal bilatère non nul de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. Si l'on pose $I = \Lambda \cap J$ on obtient
$J = \Lambda_{\mathfrak{p}} I = I\Lambda_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$. Considérons $x \in \Sigma$ tel que $xJ \subseteq J$ (c'est-à-dire $x \in \mathcal{O}_{\ell}(J)$). Puisque R est un anneau de Krull et puisque $\Sigma = K\Lambda$, il existe seulement un nombre

fini d'idéaux premiers non nuls minimaux $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ de R tels que $x \notin \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Pour $i = 1,\ldots,n$, puisque $\Lambda_{\mathfrak{q}_i}$ est un anneau noethérien on peut écrire $I\Lambda_{\mathfrak{q}_i} = \sum_{j=1}^{m_i} u_{ji}\Lambda_{\mathfrak{q}_i}$ avec $u_{ji} \in I$; posons alors $X_i = \sum_{j=1}^{m_i} u_{ji}\Lambda$. De $xu_{ji} \in I_{\mathfrak{p}}$ on déduit qu'il existe $s_i \in R - \mathfrak{p}$ tel que $s_i x X_i \subseteq I$. Il vient $s_i xI \subseteq s_i xI\Lambda_{\mathfrak{q}_i} = s_i xX_i\Lambda_{\mathfrak{q}_i} \subseteq I\Lambda_{\mathfrak{q}_i} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Donc il existe $s \in R - \mathfrak{p}$ tel que $sxI \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. En outre si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier non nul minimal de R distinct de $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ on a $x \in \Lambda_{\mathfrak{q}}$ et ainsi $sxI \subseteq \Lambda_{\mathfrak{q}}$. Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R on a alors $sxI \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}} \Lambda_{\mathfrak{q}}$. Posons $\Gamma = \bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}} \Lambda_{\mathfrak{q}}$. On a $\Lambda \subseteq \Gamma$ donc $K\Gamma = \Sigma$; si $y \in \Gamma$ alors pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}$ on a $y \in \Lambda_{\mathfrak{q}}$ et ainsi y est entier sur $R_{\mathfrak{q}}$ ce qui implique que le polynôme minimal de y qui divise un polynôme unitaire à coefficients dans $R_{\mathfrak{q}}$ est à coefficients dans $R_{\mathfrak{q}}$ (cf. [109, Vol. I] théorème 5 page 260), et cela pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}$: donc le polynôme minimal de y est à coefficients dans $\bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}} R_{\mathfrak{q}} = R$ (car R est un anneau de Krull) et ainsi y est entier sur R. Par suite Γ est un R-ordre de Σ tel que $\Lambda \subseteq \Gamma$ et comme Λ est un R-ordre maximal on en déduit $\Lambda = \Gamma$. Donc on a $sxI \subseteq \Lambda$ et comme $sxI \subseteq J$ on obtient $sxI \subseteq I$. Puisque Λ est un ordre maximal de Σ il vient $sx \in \Lambda$ et ainsi $x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Donc $\mathcal{O}_{\ell}(J) = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. De même $\mathcal{O}_r(J) = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Ceci montre que $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal de Σ et, d'après la proposition I.7.6, on obtient que $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un $R_{\mathfrak{p}}$-ordre maximal classique de Σ. D'après le théorème 1.2 il n'y a qu'un seul idéal premier non nul M dans $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ et d'après le corollaire 1.3 il est tel que $M \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Posons $P = M \cap \Lambda$. Alors P est un idéal premier non nul de Λ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$ (en effet $P \cap R = M \cap R = M \cap R_{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$). Soit Q un idéal premier non nul de Λ. Si $Q \cap R = \mathfrak{p}$ alors on a $Q_{\mathfrak{p}} \neq \Lambda_{\mathfrak{p}}$ ce qui implique $Q_{\mathfrak{p}} \subseteq M$ et par suite $Q \subseteq Q_{\mathfrak{p}} \cap \Lambda \subseteq M \cap \Lambda = P$; comme Λ/Q est un anneau de Goldie (voir la démonstration du théorème 4.1) on obtient $Q = P$ par la proposition III.4.3, et donc P est l'unique idéal premier de Λ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$. Si $Q \subsetneq P$ on obtient $Q \cap R = 0$ par la minimalité de $\mathfrak{p}$ (et puisque $Q \cap R = \mathfrak{p}$ implique $Q = P$) : or ceci est impossible d'après la proposition III.4.3 car $Q \neq 0$. Donc P est un idéal premier non nul minimal de Λ. ∎

REMARQUE 4.3. - *Sous les hypothèses du théorème* 4.2. *Si* Λ *est un* R-*ordre maximal de* Σ *et si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier non nul minimal de* R *alors* $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau premier noethérien ordre d'Asano régulier de* Σ *(d'après les théorèmes* 4.2 *et* III.4.4*), et c'est un anneau semi-local non simple (d'après les théorèmes* 4.2 *et* 1.2*, le corollaire* 2.8 *et le lemme* III.3.1*), héréditaire, à idéaux à gauche, et à droite, principaux (d'après le théorème* III.2.1*, la proposition* III.1.8 *et le théorème* III.2.8*)*.

LEMME 4.4. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K*, et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ *et* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier non nul minimal de* R. *Si* I *est un* Λ-*idéal à gauche alors on a* $(I^{-1})_{\mathfrak{p}} = (I_{\mathfrak{p}})^{-1}$.

DEMONSTRATION. - $I_{\mathfrak{p}} = \Lambda_{\mathfrak{p}} I$ est évidemment un $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-idéal à gauche. Si $x \in \Sigma$ est tel que $Ix \subseteq \Lambda$, alors il vient $I_{\mathfrak{p}}\, x\, \Lambda_{\mathfrak{p}} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{p}}$ et on en déduit qu'on a $(I^{-1})_{\mathfrak{p}} \subseteq (I_{\mathfrak{p}})^{-1}$. Réciproquement soit $x \in \Sigma$ tel que $I_{\mathfrak{p}}\, x \subseteq \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Comme R est un domaine de Krull il existe seulement un nombre fini d'idéaux premiers non nuls minimaux $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ de R tels que $x \notin \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Pour $i = 1,\dots,n$ l'anneau $\Lambda_{\mathfrak{q}_i}$ étant noethérien on peut écrire $\Lambda_{\mathfrak{q}_i} I = \sum_{j=1}^{m_i} \Lambda_{\mathfrak{q}_i} u_{ji}$ avec $u_{ji} \in I$. Posons alors $X_i = \sum_{j=1}^{m_i} \Lambda\, u_{ji}$. De $u_{ji} x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$ on déduit qu'il existe $s_i \in R - \mathfrak{p}$ tel que $X_i x s_i \subseteq \Lambda$. Il vient alors $Ixs_i \subseteq \Lambda_{\mathfrak{q}_i} Ixs_i = \Lambda_{\mathfrak{q}_i} X_i x s_i \subseteq \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Donc il existe $s \in R - \mathfrak{p}$ tel que $Ixs \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Si $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R on a alors $Ixs \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathscr{P}} \Lambda_{\mathfrak{q}}$ et, comme de même que dans le théorème 4.2 on a $\bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathscr{P}} \Lambda_{\mathfrak{q}} = \Lambda$, on obtient $Ixs \subseteq \Lambda$ c'est-à-dire $xs \in I^{-1}$. D'où $x \in (I^{-1})_{\mathfrak{p}}$ ce qui donne $(I_{\mathfrak{p}})^{-1} \subseteq (I^{-1})_{\mathfrak{p}}$. Donc $(I^{-1})_{\mathfrak{p}} = (I_{\mathfrak{p}})^{-1}$. ■

LEMME 4.5. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K*, et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ*, et désignons par* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de* R. *Si* I *est un* Λ-*idéal à gauche alors on a* $I^* = (I^{-1})^{-1} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} I_{\mathfrak{p}}$.

DEMONSTRATION. - On a vu dans la démonstration du théorème 4.2 qu'on a $\Lambda = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Alors il vient $\{x \in \Sigma | xI^{-1} \subseteq \Lambda\} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \{x \in \Sigma | x(I^{-1})_{\mathfrak{p}} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{p}}\}$, c'est-à-dire $I^* = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} [(I^{-1})_{\mathfrak{p}}]^{-1} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} [(I_{\mathfrak{p}})^{-1}]^{-1}$ avec le lemme 4.4. Comme il résulte de la remarque 4.3 qu'on a $[(I_{\mathfrak{p}})^{-1}]^{-1} = I_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}\in\mathcal{P}$, on obtient alors $I^* = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} I_{\mathfrak{p}}$. ■

LEMME 4.6. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Alors* Λ *vérifie la condition noethérienne sur les* Λ-*idéaux à gauche (et à droite) entiers* I *tels que* $I = I^*$ *(où* $I^* = (I^{-1})^{-1}$).

DEMONSTRATION. - Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R. Soit $(I_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante de Λ-idéaux à gauche entiers tels que $I_k = I_k^*$ pour tout $k \geqslant 1$. Une démonstration identique à celle de la proposition I.7.1 montre que $I_1 \cap R$ est un idéal à gauche non nul de R. Considérons a un élément non nul de $I_1 \cap R$. Puisque R est un domaine de Krull il existe $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n \in\mathcal{P}$ tels que $a \in \mathfrak{p}_i$ pour $i = 1,\ldots,n$ et $a \notin \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P} - \{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$. Alors pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P} - \{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$ on a $(I_k)_{\mathfrak{p}} = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ pour tout $k \geqslant 1$. D'autre part pour tout $i = 1,\ldots,n$ la suite $((I_k)_{\mathfrak{p}_i})_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante de $\Lambda_{\mathfrak{p}_i}$-idéaux à gauche entiers. Comme les $\Lambda_{\mathfrak{p}_i}$ sont des anneaux noethériens (cf. remarque 4.3), il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $(I_k)_{\mathfrak{p}_i} = (I_m)_{\mathfrak{p}_i}$ pour tout $k \geqslant m$ et pour tout $i = 1,\ldots,n$. Avec le lemme 4.5 on en déduit qu'on a alors $I_k = I_m$ pour tout $k \geqslant m$. ■

THEOREME 4.7. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier quelconque de* Λ *alors* $\mathfrak{p} = P \cap R$ *est un idéal premier de* R *et on a* $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$, *où* $\Lambda_P = \{x \in \Sigma |$ *il existe* N Λ-*idéal bilatère entier tel que* $N \not\subseteq P$ *et* $Nx \subseteq \Lambda\}$ *et où* $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ *est le localisé de* Λ *selon la partie multiplicative* $R - \mathfrak{p}$ *de* R.

DEMONSTRATION. - Il est clair que $\mathfrak{p} = P \cap R$ est un idéal premier de R et qu'on a $\Lambda_{\mathfrak{p}} \subseteq \Lambda_P$. Si $x \in \Lambda_P$ il existe N Λ-idéal bilatère entier tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq \Lambda$;

d'après la proposition II.2.4 on a $N^*x \subseteq \Lambda$ et $N^* \not\subseteq P$. Si $N^* = \Lambda$ on a $x \in \Lambda$ et donc $x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$; si $N^* \neq \Lambda$ alors, d'après les propositions II.2.6, II.1.7 et II.2.2, on peut écrire $N^* = P_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot P_r^{n_r}$ avec $P_1,\ldots,P_r$ idéaux premiers non nuls minimaux de Λ et $n_1,\ldots,n_r$ des entiers positifs. Pour tout $i = 1,\ldots,r$, comme on a $N^* \subseteq P_i$, on obtient $P_i \not\subseteq P$ ce qui implique, d'après les théorèmes 4.1 et 4.2, qu'on a $P_i \cap R \not\subseteq P \cap R$. Ainsi pour tout $i = 1,\ldots,r$ il existe $s_i \in P_i \cap R$ tel que $s_i \notin P \cap R$. Si on pose $s = s_1^{n_1} \ldots s_r^{n_r}$, on obtient $s \in R - \mathfrak{p}$ et $s \in P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r}$ d'où l'on déduit $s \in N^*$. Il vient $sx \in \Lambda$ et par suite $x \in \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $\Lambda_P \subseteq \Lambda_{\mathfrak{p}}$ et donc $\Lambda_P = \Lambda_{\mathfrak{p}}$. ■

THEOREME 4.8. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ, *et* P *un idéal bilatère premier de* Λ. *Alors on a* $\Lambda_P = \Lambda_{\mathscr{F}^P}$ *(où* Λ_P *est l'anneau défini dans le théorème* 4.7 *et où* $\mathscr{F}^P$ *est la famille topologisante et idempotente définie dans le* § IV.1*). De plus pour que* Λ *vérifie la condition de Ore selon* $\mathscr{C}(P)$ *il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un seul idéal bilatère premier de* Λ *sur l'idéal premier* $\mathfrak{p} = P \cap R$ *de* R.

DEMONSTRATION. - Comme Λ est un anneau premier de Goldie d'anneau classique de fractions Σ, une démonstration identique à celle de la proposition IV.1.1 montre qu'on a $\mathscr{F}^P(\Lambda) = 0$ et que $\Lambda_{\mathscr{F}^P}$ est un sous-anneau (contenant Λ comme sous-anneau) de Σ. De plus comme Λ/P est un anneau premier de Goldie (cf. la démonstration du théorème 4.1), tout idéal bilatère de Λ non contenu dans P coupe $\mathscr{C}(P)$ et par suite appartient à $\mathscr{F}^P$; on en déduit qu'on a $\Lambda_P \subseteq \Lambda_{\mathscr{F}^P}$. Soit $x \in \Lambda_{\mathscr{F}^P}$ et $x \neq 0$. Alors il existe seulement un nombre fini d'idéaux premiers non nuls minimaux $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ de R tels que $x \notin \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. Désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R. Donc pour tout $\mathfrak{q} \in \mathscr{P} - \{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n\}$ on a $x \in \Lambda_{\mathfrak{q}}$. On déduit de la remarque 4.3 que, pour tout $i = 1,\ldots,n$, il existe $y_i \in \Sigma$ tel que $\Lambda_{\mathfrak{q}_i} x \Lambda_{\mathfrak{q}_i} = y_i \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$ et on prend y_i tel que $y_i \in \Lambda x \Lambda$. Comme $x \in \Lambda_{\mathscr{F}^P}$ on a donc $y_i \in \Lambda_{\mathscr{F}^P}$ et il existe $I_i \in \mathscr{F}^P$ tel que $I_i y_i \subseteq \Lambda$. Donc il existe $I \in \mathscr{F}^P$ tel que, pour tout $i = 1,\ldots,n$, $Iy_i \subseteq \Lambda$. Il vient $I\Lambda x\Lambda \subseteq Iy_i \Lambda_{\mathfrak{q}_i} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$ pour tout $i = 1,\ldots,n$, et donc $I\Lambda x\Lambda \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_{\mathfrak{q}_i}$. On obtient alors $I\Lambda x \subseteq I\Lambda x\Lambda \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathscr{P}} \Lambda_{\mathfrak{q}} = \Lambda$ (car d'après la démonstration du théorème 4.2 on a

$\bigcap_{\mathcal{Y}\in\mathcal{P}} \Lambda_{\mathcal{Y}} = \Lambda$), et comme $I\Lambda$ est un idéal bilatère non contenu dans P on en déduit qu'on a $x \in \Lambda_P$. Ainsi $\Lambda_{\mathcal{F}^P} \subseteq \Lambda_P$. D'où $\Lambda_P = \Lambda_{\mathcal{F}^P}$. Avec le théorème 4.7 on a donc $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda_P = \Lambda_{\mathcal{F}^P}$.

Si Λ vérifie la condition de Ore selon $\mathscr{C}(P)$ alors $\mathcal{F}^P$ est l'ensemble des idéaux à gauche de Λ coupant $\mathscr{C}(P)$. De $cx = 0$, avec $c \in \mathscr{C}(P)$ et $x \in \Lambda$, on déduit $\Lambda cx = 0$ ce qui implique $x \in \mathcal{F}^P(\Lambda)$ (puisque $\Lambda c \in \mathcal{F}^P$), et par suite $x = 0$; donc $cy = 0$ avec $y \in \Sigma$ implique $y = 0$ (car Λ est un ordre de Σ), et comme Σ est un anneau artinien simple on déduit du lemme 3.8 de [56] que c est un élément non diviseur de zéro de Σ (donc de Λ). D'après le théorème IV.1.6 l'ensemble $\mathcal{F}^P$ vérifie la condition (T) et $P_{\mathcal{F}^P}$ est l'unique idéal bilatère maximal de Λ_P. De plus, comme $\mathcal{F}^P(\Lambda/P) = 0$ on a $P_{\mathcal{F}^P} \cap \Lambda = P$. Alors si Q est un idéal bilatère premier de Λ tel que $Q \cap R = \mathfrak{p} (= P \cap R)$ on obtient $Q_{\mathfrak{p}} \subseteq P_{\mathcal{F}^P}$ car $Q_{\mathfrak{p}}$ est un idéal bilatère de $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda_P$ différent de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$, et il vient $Q \subseteq Q_{\mathfrak{p}} \cap \Lambda \subseteq P_{\mathcal{F}^P} \cap \Lambda = P$; comme Λ/Q est un anneau de Goldie (cf. la démonstration du théorème 4.1) on déduit de la proposition III.4.3 qu'on a alors $Q = P$. Réciproquement s'il n'y a qu'un seul idéal bilatère premier de Λ sur $\mathfrak{p} = P \cap R$ c'est P ; on en déduit que $P_{\mathfrak{p}}$ est un idéal bilatère maximal de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ et en utilisant le lemme III.4.2 on en déduit que $P_{\mathfrak{p}}$ est l'unique idéal bilatère maximal de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. Comme $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un ordre de Σ et comme Σ vérifie une identité polynômiale standard (d'après la proposition 2.1), $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est un anneau premier à identité polynômiale et d'après le corollaire 2.8 l'idéal $P_{\mathfrak{p}}$ est le radical de Jacobson de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. Si $s \in R - \mathfrak{p}$ alors on a $s \in \mathscr{C}(P)$ et $\Lambda s \in \mathcal{F}^P$. Ainsi on a $P_{\mathfrak{p}} \subseteq P_{\mathcal{F}^P}$ et il est facile de vérifier que $P_{\mathcal{F}^P}$ est un idéal bilatère de $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda_{\mathcal{F}^P}$; comme on a $P_{\mathcal{F}^P} \neq \Lambda_{\mathcal{F}^P}$ on déduit de la maximalité de $P_{\mathfrak{p}}$ qu'on a $P_{\mathfrak{p}} = P_{\mathcal{F}^P}$. Puisque $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ vérifie une identité polynômiale standard (comme Σ), $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ est alors un anneau premier à identité polynômiale ; d'après le théorème 2.2, l'anneau classique de fractions de $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ est une K'-algèbre centrale simple Σ' de dimension finie sur K' telle que $K'(\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}) = \Sigma'$, où K' désigne le corps de fractions du centre Z' de $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$. On déduit de cela, du théorème de Goldie et de la démonstration de la proposition I.7.1 que tout idéal à gauche essentiel de $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ coupe Z' suivant un élément non nul, et par suite $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ est un ordre régulier de Σ'. Comme $\Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ est un anneau simple on en déduit qu'on a $\Sigma' = \Lambda_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$ et par conséquent $\Lambda_{\mathcal{F}^P}/P_{\mathcal{F}^P}$ est un anneau artinien simple. Donc le théorème IV.1.6 implique que Λ vérifie la condition de Ore selon $\mathscr{C}(P)$. ■

COROLLAIRE 4.9. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* P *est un idéal premier non nul minimal de* Λ, *alors* Λ *vérifie la condition de Ore selon* $\mathscr{C}(P)$.

DEMONSTRATION. - Résulte des théorèmes 4.2 et 4.8. ■

§ 5. LOCALISES BILATERES D'ANNEAUX PSEUDO-FACTORIELS ET EN PARTICULIER DE R-ORDRES MAXIMAUX DE FOSSUM PSEUDO-FACTORIELS.

DEFINITION. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal d'un anneau artinien simple S. Nous dirons que l'*anneau* $\mathcal{O}$ est *pseudo-factoriel* si le groupe des classes $C(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ (défini au § V.4) est de torsion.

On a le résultat suivant (pour le cas commutatif voir [51] proposition 6.7 page 33) :

THEOREME 5.1. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un ordre maximal régulier d'un anneau artinien simple* S *tel que l'ensemble* G_0' *des* c-$\mathcal{O}$-*idéaux entiers vérifie la condition noethérienne. Considérons le monoïde* $M_0 = \{a \in \mathcal{O} \mid a$ *est un élément non diviseur de zéro de* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{O}a = a\mathcal{O}\}$ *de* $\mathcal{O}$. *Alors pour que* $\mathcal{O}$ *soit un anneau pseudo-factoriel il faut et il suffit que tout localisé bilatère de* $\mathcal{O}$ *(c'est-à-dire localisé de* $\mathcal{O}$ *selon une famille bilatère d'idéaux de* $\mathcal{O}$*) soit un anneau de fractions de* $\mathcal{O}$ *selon un sous-monoïde de* M_0.

DEMONSTRATION. - Remarquons tout d'abord que $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore (à gauche et à droite) selon tout sous-monoïde M' de M_0. Désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble de tous les c-$\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers.

Si $\mathcal{O}$ est un anneau pseudo-factoriel, considérons A un localisé bilatère de $\mathcal{O}$. D'après le lemme IV.3.4 et le corollaire IV.3.17 on peut écrire $A = \bigcap_{P \in \mathscr{P}'} \mathcal{O}_P$ où $\mathscr{P}'$ est une partie de $\mathscr{P}$. Pour tout $P \in \mathscr{P} - \mathscr{P}'$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et il existe

$s_P \in M_o$ tel que $(P^n)^* = \mathcal{O} s_P = s_P \mathcal{O}$. Posons $M' = \{s_{P_1} \dots s_{P_r} | P_1, \dots, P_r \in \mathcal{P} - \mathcal{P}'$ et $r \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$; alors M' est un sous-monoïde de M_o. Comme l'anneau de fractions $\mathcal{O}_{M'}$ est un localisé bilatère de $\mathcal{O}$ on peut écrire $\mathcal{O}_{M'} = \bigcap_{Q \in \mathcal{P}''} \mathcal{O}_Q$, où $\mathcal{P}''$ est la partie de $\mathcal{P}$ formée des éléments Q de $\mathcal{P}$ tels que $\mathcal{O}_{M'} \subseteq \mathcal{O}_Q$, d'après le lemme IV.3.4 et le théorème IV.3.16 (et sa démonstration). Si $Q \in \mathcal{P}''$ on a donc $\mathcal{O}_{M'} \subseteq \mathcal{O}_Q$ et ceci implique qu'on a $Q \cap M' = \phi$ (car on a $Q\mathcal{O}_{M'} \subseteq Q\mathcal{O}_Q \subsetneq \mathcal{O}_Q$) d'où l'on déduit $Q \in \mathcal{P}'$. Ainsi on a $\mathcal{P}'' \subseteq \mathcal{P}'$ et on obtient $A \subseteq \mathcal{O}_{M'}$. D'autre part si $Q \in \mathcal{P}'$ on a $Q \cap M' = \phi$: en effet si $Q \cap M' \neq \phi$ il existe $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{P} - \mathcal{P}'$ tels que $s_{P_1} \dots s_{P_r} \in Q$ ce qui implique qu'on a $P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \subseteq (P_1^{n_1})^* \dots (P_r^{n_r})^* \subseteq Q$ et par suite il existe $i = 1, \dots, r$ tel que $P_i \subseteq Q$ ce qui entraîne $P_i = Q$ (car $P_i, Q \in \mathcal{P}$) et donc $Q \notin \mathcal{P}'$ ce qui est contradictoire. Alors pour tout $Q \in \mathcal{P}'$ on déduit de $Q \cap M' = \phi$ qu'on a $\mathcal{O}_{M'} \subseteq \mathcal{O}_Q$. Par conséquent on a $\mathcal{O}_{M'} \subseteq A$ et ainsi $\mathcal{O}_{M'} = A$.

Réciproquement si tout localisé bilatère de $\mathcal{O}$ est un anneau de fractions de $\mathcal{O}$ selon un sous-monoïde de M_o, considérons un élément P de $\mathcal{P}$. Posons $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{P\}$ et $A = \bigcap_{Q \in \mathcal{P}'} \mathcal{O}_Q$; d'après la démonstration du théorème IV.3.16 on voit que A est un localisé bilatère de $\mathcal{O}$ et donc il existe un sous-monoïde M' de M_o tel que $A = \mathcal{O}_{M'}$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}'$ on a $\mathcal{O}_{M'} \subseteq \mathcal{O}_Q$ et donc il vient $Q \cap M' = \phi$. En conséquence on a $P \cap M' \neq \phi$: car $P \cap M' = \phi$ implique $\mathcal{O}_{M'} \subseteq \mathcal{O}_P$ ce qui entraîne $A = \bigcap_{Q \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_Q$ d'où l'on déduit $A = \mathcal{O}$ (d'après le théorème IV.3.16 et sa démonstration) ; comme pour tout $Q \in \mathcal{P}'$ on a $P^{-1} \subseteq \mathcal{O}_Q$, on a $P^{-1} \subseteq A$ et par suite on aurait $P^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ ce qui implique $P = \mathcal{O}$ une contradiction. Alors si $s \in P \cap M'$ on déduit des propositions II.2.6, II.1.7 et II.2.2 qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{O}s = s\mathcal{O} = (P^n)^*$. Donc le groupe des classes $C(\mathcal{O})$ est de torsion et $\mathcal{O}$ est pseudo-factoriel. ■

COROLLAIRE 5.2. - *Soit* R *un domaine de Krull de corps de fractions* K, *et soit* Σ *une* K-*algèbre centrale simple de dimension finie sur* K. *Considérons* Λ *un* R-*ordre maximal de* Σ. *Si* R *est un anneau pseudo-factoriel, alors* Λ *est un anneau pseudo-factoriel et tout localisé bilatère de* Λ *est un anneau de fractions de* Λ *selon une partie multiplicative de* R. *Réciproquement si tout localisé bilatère de* Λ *est un anneau de fractions de* Λ *selon une partie multiplicative de* R, *alors* R *est un anneau pseudo-factoriel.*

DEMONSTRATION. - D'après le théorème I.7.5 et le lemme 4.6 les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées.

Si R est un anneau pseudo-factoriel et si P est un idéal premier non nul minimal de Λ alors $\mathfrak{p} = P \cap R$ est un idéal premier non nul minimal de R d'après le théorème 4.2, et donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et il existe un élément non nul a de R tels que $Ra = (\mathfrak{p}^n)^*$. Ceci implique $(\Lambda(\mathfrak{p}^n)^*)^* = (\Lambda a)^* = \Lambda a = \Lambda(\mathfrak{p}^n)^*$. Si Q est un idéal premier non nul minimal associé à $\Lambda(\mathfrak{p}^n)^*$ il vient $\mathfrak{p}^n \subseteq \Lambda(\mathfrak{p}^n)^* \cap R \subseteq Q \cap R$ ce qui entraîne $\mathfrak{p} \subseteq Q \cap R$, et donc d'après les théorèmes 4.1 et 4.2 on a $P \subseteq Q$ ce qui implique $P = Q$ par minimalité de Q. Il en résulte qu'on a $\Lambda a = (P^m)^*$ (en utilisant la proposition II.1.7) et cela avec $a \in R$ et $a \neq 0$. Ainsi Λ est un anneau pseudo-factoriel, et il résulte du théorème 5.1 et de sa démonstration que tout localisé bilatère de Λ est un anneau de fractions de Λ selon, (d'après ce qui précède), une partie multiplicative de R.

Réciproquement supposons que tout localisé bilatère de Λ soit un anneau de fractions de Λ selon une partie multiplicative de R. Si $\mathcal{F}$ est une famille bilatère d'idéaux de R, on peut considérer $\mathcal{F}' = \{\Lambda N | N \in \mathcal{F}\}$ et $\mathcal{F}'$ est alors une famille bilatère d'idéaux de Λ. De plus il est clair qu'on a $\Lambda_{\mathcal{F}'} \cap K = R_{\mathcal{F}}$ (et en particulier pour toute partie multiplicative S de R on a $\Lambda_S \cap K = R_S$). Donc par hypothèse il existe une partie multiplicative S de R telle que $\Lambda_{\mathcal{F}'} = \Lambda_S$. On en déduit qu'on a alors $R_{\mathcal{F}} = R_S$. D'après le théorème 5.1 l'anneau R est alors pseudo-factoriel. ∎

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

La proposition 1.1 sous cette forme est due à CHAMARIE M. [25] généralisant une forme un peu moins générale due à MAURY G. [79]. Le reste du paragraphe 1 est tiré de MAURY G. [79]. Le paragraphe 3 est tiré de CHAMARIE M. [25] dans lequel on trouvera d'autres propriétés intéressantes notamment lorsque R est factoriel. Le paragraphe 4 est tiré de MAURY G. [82].

Remarquons pour terminer que la propriété $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P \cap R}$, P idéal premier de l'anneau $\mathcal{O}$ dont on note R le centre, n'est pas réservée aux R-ordres maximaux $\mathcal{O}$.

En [83] MAURY G. donne une classe d'ordres maximaux qui possèdent cette propriété et qui ne sont pas des anneaux à identité polynômiale (un exemple d'un tel ordre maximal est d'ailleurs $K'[X_1,\dots,X_n]$ où K' est un corps de Köthe de dimension infinie sur son centre K (voir ch. I)), et où $X_1,\dots,X_n$ sont des indéterminées commutant entre elles et avec tout élément de K').

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS AUX R-ORDRES (NON NECESSAIREMENT MAXIMAUX).

§ 1. APPLICATIONS AUX R-ORDRES DE FOSSUM.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ désigne un anneau premier noethérien à identité polynômiale dont le centre R est un domaine de Krull de corps de fractions K. On désignera par Σ l'anneau classique de fractions de $\mathcal{O}$: d'après le théorème VIII.2.2, Σ existe et est une K-algèbre centrale simple de dimension finie sur K telle que $\Sigma = K\mathcal{O}$. De plus, d'après le corollaire VIII.2.5, $\mathcal{O}$ est entier sur R et ainsi $\mathcal{O}$ est un R-ordre de Σ. Nous allons obtenir une propriété de $\mathcal{O}$ en utilisant le fait que, d'après le corollaire VIII.3.4, $\mathcal{O}$ est contenu dans un ordre maximal de centre R qui lui est équivalent.

Notons qu'un exemple d'un tel anneau $\mathcal{O}$ a été donné à la fin du paragraphe VIII.3.

LEMME 1.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, l'anneau $\mathcal{O}$ est contenu (comme sous-anneau) dans un* R-*ordre maximal de Fossum $\mathcal{O}'$ de Σ et $\mathcal{O}'$ est un anneau premier, noethérien, à identité polynômiale, ordre maximal régulier de Σ équivalent à $\mathcal{O}$.*

DEMONSTRATION. - $\mathcal{O}$ est contenu dans un ordre maximal $\mathcal{O}'$ de centre R qui lui est équivalent d'après le corollaire VIII.3.4. Comme $\mathcal{O}'$ est un ordre de Σ et comme Σ vérifie une identité polynômiale standard (d'après la proposition VIII.2.1), $\mathcal{O}'$ est un anneau premier à identité polynômiale. Alors $\mathcal{O}'$ est un R-ordre maximal de Σ d'après le théorème VIII.3.2 et donc un ordre régulier d'après le théorème I.7.5. D'autre part, puisque d'après la démonstration du corollaire I.7.3 il existe un élément non nul r de R tel que $r\,\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, l'anneau $\mathcal{O}'$ est un sous-$\mathcal{O}$-module à gauche, et à droite, d'un $\mathcal{O}$-module de type fini, et donc, puisque $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien, on en déduit que $\mathcal{O}'$ est un anneau noethérien. ■

LEMME 1.2. - *Soit* A *un anneau noethérien à gauche de centre* R. *Si* P *est un idéal bilatère premier de* A *et si* T *est un idéal à gauche* P-*tertiaire de* A, *alors pour tout* $p \in P \cap R$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p^n \in T$.

DEMONSTRATION. - Pour tout $k \in \mathbb{N}$ considérons $T_k = \{x \in A \mid p^k x \in T\}$ le résiduel à droite de T par l'idéal bilatère Ap^k. Comme les T_k, pour $k \in \mathbb{N}$, forment une chaîne croissante d'idéaux à gauche de A il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n = T_k$ pour tout $k \geqslant n$. Si l'on avait $p^n \notin T$ alors, comme $p \in P$ et par définition du radical tertiaire P de T, il existerait $x \in A$ tel que $xp^n \notin T$ et $pAxp^n \subseteq T$ ce qui entraînerait $x \in T_{n+1}$ et par suite $x \in T_n$ c'est-à-dire $xp^n \in T$: contradiction. On a donc $p^n \in T$. ■

LEMME 1.3. - *Soit* A' *un anneau premier de centre* Z *et soit* A *un sous-anneau premier de* A' *dont le centre* R *est un domaine intégralement clos contenu dans* Z. *Si* A' *est entier sur* R *alors tout élément de* A *non inversible dans* A *est non inversible dans* A'.

DEMONSTRATION. - Soit K le corps de fractions de R. Si $S = R - \{0\}$, alors les éléments de S sont non diviseurs de zéro dans A et dans A' ; par suite, si on considère les anneaux localisés A_S et A'_S selon S, l'anneau A est plongé dans A_S, l'anneau A' est plongé dans A'_S et on a $K \subseteq A_S \subseteq A'_S$. Soit a un élément de A non inversible dans A. Puisque a est entier sur R on peut alors parler du polynôme minimal de a sur K, et puisque R est intégralement clos dans K ce polynôme minimal a tous ses coefficients dans R ; soit donc $X^n + r_1 X^{n-1} + \ldots + r_n$ le polynôme minimal de a sur K avec $r_1, \ldots, r_n \in R$. Si a est inversible dans A', son inverse a^{-1} est aussi entier sur R et il est immédiat que le polynôme minimal de a^{-1} sur K est $X^n + r_n^{-1} r_{n-1} X^{n-1} + \ldots + r_n^{-1} r_1 X + r_n^{-1}$; puisque R est intégralement clos, ce polynôme minimal a tous ses coefficients dans R et par suite on a $r_n^{-1} \in R$. On déduit de $a^n + r_1 a^{n-1} + \ldots + r_{n-1} a + r_n = 0$ qu'on a alors

$a^{-1} = -r_n^{-1}(a^{n-1} + r_1 a^{n-2} + \dots + r_{n-1})$ ce qui entraîne $a^{-1} \in A$: contradiction.
Donc a est non inversible dans A'. ∎

LEMME 1.4. - *Soient* A *un anneau premier noethérien à gauche de centre* R *et* P *un idéal bilatère premier de* A. *Posons* $\mathfrak{p} = P \cap R$. *Si* T *est un idéal à gauche* P-*tertiaire de* A *alors on a* $T_{\mathfrak{p}} \cap A = T$ *(et* $T_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}$ *).*

DEMONSTRATION. - Posons $S = R - \mathfrak{p}$. Comme les éléments de S sont non diviseurs de zéro dans A, l'anneau A se plonge dans l'anneau localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Si $x \in T_{\mathfrak{p}} \cap A$ il existe $s \in S$ tel que $sx \in T$ ce qui implique $sAx \subseteq T$; comme on a $s \notin P$ et comme T est P-tertiaire on en déduit $x \in T$. Donc $T_{\mathfrak{p}} \cap A \subseteq T$ et comme $T \subseteq T_{\mathfrak{p}} \cap A$ on obtient $T_{\mathfrak{p}} \cap A = T$ (ce qui implique $T_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}$). ∎

THEOREME 1.5. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau premier noethérien à identité polynômiale dont le centre* R *est un domaine de Krull et soit* a *un élément non diviseur de zéro de* $\mathcal{O}$ *qui est non inversible dans* $\mathcal{O}$. *Alors il existe au moins un idéal bilatère premier* P *de* $\mathcal{O}$ *associé au* $\mathcal{O}$-*module à gauche* $\mathcal{O}/\mathcal{O}a$ *(c'est-à-dire* $P \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a)$*) tel que* P *est un idéal premier non nul minimal de* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - D'après la proposition VI.1.12 considérons $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$ une décomposition tertiaire réduite de $\mathcal{O}a$ dans $\mathcal{O}$, où les T_i sont des idéaux à gauche P_i-tertiaires et où on a $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a) = \{P_1,\dots,P_n\}$. Comme a est inversible dans Σ il vient $\mathcal{O}a \cap R \neq 0$ (d'après la démonstration de la proposition I.7.1) ce qui, pour tout $i = 1,\dots,n$, implique $T_i \cap R \neq 0$ et par suite $P_i \cap R \neq 0$ (d'après la proposition VI.1.10). Donc si on pose $\mathfrak{p}_i = P_i \cap R$ pour tout $i = 1,\dots,n$ les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers non nuls de R. Soit $\mathfrak{p}$ un élément minimal dans l'ensemble $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$ et supposons après numérotation convenable qu'on ait $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ pour tout $i = 1,\dots,k$, et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ (ce qui implique $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$) pour tout $i = k+1,\dots,n$. Il est immédiat de vérifier qu'on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} a = \bigcap_{i=1}^{n} (T_i)_{\mathfrak{p}}$; comme il résulte du lemme 1.2 qu'on a $(T_{k+1})_{\mathfrak{p}} = \dots = (T_n)_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ on obtient $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} a = \bigcap_{i=1}^{k} (T_i)_{\mathfrak{p}}$. D'après le lemme 1.4 on a alors $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} a \neq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau premier noethérien à identité polynômiale dont le centre $R_{\mathfrak{p}}$ est un domaine de Krull, c'est un $R_{\mathfrak{p}}$- ordre de Fossum de

Σ, et d'après le lemme 1.1 il est contenu dans un $R_{\mathfrak{p}}$- ordre maximal de Fossum $\mathcal{O}'$ de Σ tel que $\mathcal{O}'$ est un anneau premier noethérien à identité polynômiale ordre maximal régulier de Σ équivalent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. De $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} a \neq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ on déduit $\mathcal{O}'a \neq \mathcal{O}'$ d'après le lemme 1.3. D'après le théorème VI.2.4, considérons P' un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}'$ associé à $\mathcal{O}'a$; alors $P' \cap R_{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier non nul minimal de $R_{\mathfrak{p}}$ d'après le théorème VIII.4.2. Si $x \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ il existe $s \in R - \mathfrak{p}$ tel que $sx \in \mathfrak{p}$ et d'après le lemme 1.2 il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(sx)^m \in T_i$ pour tout $i = 1,\dots,k$; ceci implique qu'on a $x^m \in \bigcap_{i=1}^{k} (T_i)_{\mathfrak{p}}$ c'est-à-dire $x^m \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} a$ ce qui entraîne $x^m \in \mathcal{O}'a$ et par suite $x^m \in P' \cap R_{\mathfrak{p}}$ d'où l'on déduit $x \in P' \cap R_{\mathfrak{p}}$. En conséquence on a $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = P' \cap R_{\mathfrak{p}}$. Il en résulte que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul minimal de R. Comme on a $P_1 \cap R = \mathfrak{p}$ on en déduit, avec la démonstration du théorème VIII.4.1 et avec la proposition III.4.3, que P_1 est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$. ■

Toujours avec les hypothèses fixées au début du paragraphe et d'après le lemme 1.1 désignons dans toute la suite par $\mathcal{O}'$ un R-ordre maximal de Σ contenant $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ anneau premier noethérien à identité polynômiale ordre maximal régulier de Σ équivalent à $\mathcal{O}$. Désignons par $\mathfrak{f}$ le conducteur de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{O}$ (c'est-à-dire le plus grand idéal bilatère de $\mathcal{O}'$ contenu dans $\mathcal{O}$). Alors on a $\mathfrak{f} \cap R \neq 0$ (car, d'après les propositions I.7.1 et I.4.1, il existe $\alpha,\beta \in u(\Sigma) \cap \mathcal{O}$ tels que $\alpha\, \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'\beta \subseteq \mathcal{O}$ ce qui entraîne $\beta\alpha \in \mathfrak{f}$ et d'après la démonstration de la proposition I.7.1 on obtient $\mathfrak{f} \cap R \neq 0$). Si P est un idéal bilatère premier de $\mathcal{O}$ nous noterons $\mathcal{O}_P = \{x \in \Sigma |$ il existe N idéal bilatère de $\mathcal{O}$ tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq \mathcal{O}\}$; il est immédiat que $\mathcal{O}_P$ est un sous-anneau de Σ contenant $\mathcal{O}$ et donc, d'après la proposition I.2.1, $\mathcal{O}_P$ est un ordre de Σ. Il vient :

THEOREME 1.6. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soit* P *un idéal bilatère premier de* $\mathcal{O}$ *et posons* $\mathfrak{p} = P \cap R$. *Si* $\mathfrak{f} \cap R \not\subseteq \mathfrak{p}$ *alors on a* $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *et* $\mathcal{O}_P$ *est un ordre maximal de* Σ.

DEMONSTRATION. - De $\mathfrak{f} \cap R \not\subseteq \mathfrak{p}$ on déduit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ (car on a $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$). On déduit alors du lemme VIII.1.5 qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux bilatères premiers Q de $\mathcal{O}$ tels que $Q \cap R = \mathfrak{p}$

et l'ensemble des idéaux bilatères premiers Q' de $\mathcal{O}'$ tels que $Q' \cap R = \mathfrak{p}$ telle que si Q et Q' se correspondent on a $Q' \cap \mathcal{O} = Q$ (et $M = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} Q' = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} Q$ est un idéal bilatère maximal de $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ tel que $M \cap \mathcal{O}' = Q'$ et $M \cap \mathcal{O} = Q$). Considérons alors P' l'idéal premier de $\mathcal{O}'$ correspondant à P ; on a donc $P' \cap \mathcal{O} = P$ et $P' \cap R = \mathfrak{p}$. D'après le théorème VIII.4.7 on a $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{P'}$ et par suite on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{P'}$. Comme il est clair qu'on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}_P$ on obtient $\mathcal{O}'_{P'} \subseteq \mathcal{O}_P$. Si $x \in \mathcal{O}_P$ il existe N idéal bilatère de $\mathcal{O}$ tel que $N \not\subseteq P$ et $Nx \subseteq \mathcal{O}$ ce qui nous donne $\mathcal{O}'N\mathcal{O}'\mathfrak{f}x \subseteq \mathcal{O}'$; comme de $\mathfrak{f} \cap R \not\subseteq \mathfrak{p}$ et de $N \not\subseteq P$ on déduit $\mathfrak{f} \not\subseteq P'$ et $\mathcal{O}'N\mathcal{O}' \not\subseteq P'$, on a $\mathcal{O}'N\mathcal{O}'\mathfrak{f} \not\subseteq P'$ et par suite on obtient $x \in \mathcal{O}'_{P'}$. En conséquence on a $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{P'}$. D'après la proposition IV.2.2, $\mathcal{O}_P$ est un ordre maximal de Σ. ■

THEOREME 1.7. - *Si $\mathcal{O}$ est un anneau premier noethérien à identité polynômiale dont le centre* R *est un domaine de Krull, alors pour tous les idéaux premiers non nuls minimaux* P *de $\mathcal{O}$ sauf peut-être un nombre fini $\mathcal{O}_P$ est un $R_{\mathfrak{p}}$- ordre maximal classique (avec $\mathfrak{p} = P \cap R$) et $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore selon* $\mathscr{C}(P)$.

DEMONSTRATION. - Comme R est un domaine de Krull il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers non nuls minimaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ de R tels que $\mathfrak{f} \cap R \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout $i = 1,\dots,n$, et pour tout $\mathfrak{q} \in \mathscr{P} - \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ on a $\mathfrak{f} \cap R \not\subseteq \mathfrak{q}$ (en désignant par $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R). Si $\mathfrak{q} \in \mathscr{P}$ alors tout idéal bilatère premier Q de $\mathcal{O}$ tel que $Q \cap R = \mathfrak{q}$ (il en existe d'après la proposition III.4.1) est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$ (d'après la proposition III.4.3 compte tenu de la démonstration du théorème VIII.4.1), et réciproquement si Q est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$ alors $Q \cap R \in \mathscr{P}$ (d'après la proposition III.4.3 et le théorème VIII.4.1). Pour tout $\mathfrak{q} \in \mathscr{P}$, d'après le lemme VIII.1.5 l'ensemble des idéaux premiers Q de $\mathcal{O}$ tels que $Q \cap R = \mathfrak{q}$ correspond biunivoquement à l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ (à Q correspond $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}} Q$ et on a $(\mathcal{O}_{\mathfrak{q}} Q) \cap R_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{q}}$) ; comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ est un $R_{\mathfrak{q}}$- ordre de Σ et comme $R_{\mathfrak{q}}$ est un anneau de valuation discrète il n'y a, d'après le lemme VIII.1.6, qu'un nombre fini d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ sur $\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}}$. Donc il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers non nuls minimaux $P_1, \dots, P_m$ de $\mathcal{O}$ tels que $\mathfrak{f} \cap R \subseteq P_i \cap R$ pour tout $i = 1,\dots,m$. Considérons alors P un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$ tel que $P \notin \{P_1,\ldots,P_m\}$. Posons $\mathfrak{p} = P \cap R$. On a alors $\mathfrak{f} \cap R \not\subseteq \mathfrak{p}$. Il résulte alors du théorème 1.6 et de sa démonstration et du théorème VIII.4.2 que $\mathcal{O}_P$ est un $R_{\mathfrak{p}}$- ordre maximal classique et que P est le seul idéal bilatère premier de $\mathcal{O}$ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$. Comme $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète on déduit du théorème VIII.1.2 et du corollaire VIII.1.8 que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ vérifie la condition de Ore selon $\mathscr{C}(P_{\mathfrak{p}})$. Si $a \in \mathcal{O}$ et si $c \in \mathscr{C}(P)$ il est immédiat qu'on a $c \in \mathscr{C}(P_{\mathfrak{p}})$ et il existe alors $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ et $y \in \mathscr{C}(P_{\mathfrak{p}})$ tels que $xc = ya$; comme il existe $s \in R - \mathfrak{p}$ tel que $sx \in \mathcal{O}$ et $sy \in \mathcal{O}$ on obtient $(sx)c = (sy)a$ et il est immédiat qu'on a $sy \in \mathscr{C}(P)$ puisque $P_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{O} = P$. Donc $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Ore à gauche selon $\mathscr{C}(P)$. De même à droite. ■

LEMME 1.8. - *Sous les hypothèses précédemment posées, si* P' *est un idéal bilatère premier de* $\mathcal{O}'$ *tel que* $\mathfrak{f} \not\subseteq P'$ *alors* $P = P' \cap \mathcal{O}$ *est un idéal bilatère premier de* $\mathcal{O}$, *et si* X' *est un idéal à gauche* P'*-primaire de* $\mathcal{O}'$ *alors* $X = X' \cap \mathcal{O}$ *est un idéal à gauche* P*-primaire de* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Si A et B sont deux idéaux de $\mathcal{O}$ tels que $AB \subseteq P$ il vient $\mathcal{O}'A\mathcal{O}'\mathfrak{f}\mathcal{O}'B\mathcal{O}' \subseteq P'$ et par suite on a $\mathcal{O}'A\mathcal{O}' \subseteq P'$ ou $\mathcal{O}'B\mathcal{O}' \subseteq P'$ ce qui implique $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.

Comme il existe un entier positif n tel que $P'^n \subseteq X'$ on a $P^n \subseteq X$. De $AY \subseteq X$ et $Y \not\subseteq X$, avec A idéal bilatère de $\mathcal{O}$ et Y idéal à gauche de $\mathcal{O}$, on déduit $\mathcal{O}'A\mathcal{O}'\mathfrak{f}\mathcal{O}'Y \subseteq \mathcal{O}'X \subseteq X'$ et $\mathcal{O}'Y \not\subseteq X'$; puisque X' est P'-primaire il vient $\mathcal{O}'A\mathcal{O}'\mathfrak{f} \subseteq P'$ ce qui implique $\mathcal{O}'A\mathcal{O}' \subseteq P'$ et par suite on obtient $A \subseteq P$. Donc X est P-primaire. ■

On a vu que $\mathfrak{f} \cap R \neq 0$. Il existe donc $c \in \mathfrak{f} \cap R$, $c \neq 0$: on a $c\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et on posera $\mathfrak{f}' = \mathcal{O}'c = c\mathcal{O}'$. Il vient :

THEOREME 1.9. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soit* a *un élément non diviseur de zéro de* $\mathcal{O}$ *qui est non inversible dans* $\mathcal{O}$, *et considérons* $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ *une décomposition tertiaire réduite de* $\mathcal{O}a$ *dans* $\mathcal{O}$ *telle que* X_i *est un idéal à gauche* P_i*-tertiaire de* $\mathcal{O}$ *pour tout* $i = 1,\ldots,n$. *Si l'on a* $\mathfrak{f}' \not\subseteq P_i$ *pour tout* $i = 1,\ldots,n$

(avec $\mathfrak{f}' = \mathcal{O}'c$*), alors les* P_i *sont des idéaux premiers non nuls minimaux de* $\mathcal{O}$ *et les* X_i *sont des idéaux à gauche* P_i*-primaires de* $\mathcal{O}$ *.*

DEMONSTRATION. - D'après le lemme 1.3 et le théorème VI.2.4 on peut écrire $\mathcal{O}'a = \bigcap_{i=1}^{m} Y'_i$ où les Y'_i sont des $\mathcal{O}'$-idéaux à gauche entiers P'_i-primaires et où les P'_i sont des idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}'$ distincts deux à deux. On a $\mathfrak{f}'(\mathcal{O}'a \cap \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}a \subseteq X_i$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Si l'on avait $\mathcal{O}'a \cap \mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{O}a$, il existerait $i = 1,\dots,n$ tel que $\mathcal{O}'a \cap \mathcal{O} \not\subseteq X_i$ ce qui impliquerait $\mathfrak{f}' \subseteq P_i$: une contradiction. Ainsi on a $\mathcal{O}'a \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}a$.

A priori certains éléments de l'ensemble $\{P'_1,\dots,P'_m\}$ peuvent être associés à $\mathfrak{f}' = \mathcal{O}'c$ (au sens du théorème VI.2.4), par exemple $P'_{k+1},\dots,P'_m$. Comme il existe $n_{k+1},\dots,n_m \in \mathbb{N}$ tels que $P'^{\,n_{k+1}}_{k+1} \dots P'^{\,n_m}_m \subseteq \bigcap_{i=k+1}^{m} Y'_i$ il existe alors un entier p tel que $\mathfrak{f}'^p \subseteq \bigcap_{i=k+1}^{m} Y'_i$; de plus on déduit du théorème VI.2.4 que pour $i = 1,\dots,k$ on a alors $\mathfrak{f}' \not\subseteq P'_i$ ce qui, d'après le lemme 1.8, implique que $Y'_i \cap \mathcal{O}$ est un idéal à gauche $(P'_i \cap \mathcal{O})$-primaire (compte tenu de la remarque VI.2.5). Si on pose $Y = \bigcap_{i=1}^{k} Y'_i \cap \mathcal{O}$ et $Z = \bigcap_{i=k+1}^{m} Y'_i \cap \mathcal{O}$ il vient $\mathcal{O}a = Y \cap Z$. De $\mathfrak{f}'^p \subseteq Z$ et de $\mathfrak{f}' \not\subseteq P_i$ pour tout $i = 1,\dots,n$ on déduit, d'après la proposition VI.1.10, qu'on a $\{P_1,\dots,P_n\} \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/Z) = \phi$ c'est-à-dire $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a) \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/Z) = \phi$ (d'après la proposition VI.1.12). Comme $Y/Y \cap Z$ est un sous-module de $\mathcal{O}/\mathcal{O}a$ et comme $Y/Y \cap Z$ est isomorphe à un sous-module de $\mathcal{O}/Z$ on a $\mathrm{Ass}(Y/Y \cap Z) \subseteq \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a) \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/Z)$ ce qui implique $\mathrm{Ass}(Y/Y \cap Z) = \phi$ et par suite $Y \cap Z = Y$ (puisque $\mathcal{O}$ est noethérien). On a donc $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{k} Y'_i \cap \mathcal{O}$ où les $Y'_i \cap \mathcal{O}$ sont des idéaux à gauche $(P'_i \cap \mathcal{O})$-primaires de $\mathcal{O}$. Ainsi il vient $\{P_1,\dots,P_n\} \subseteq \{P'_1 \cap \mathcal{O},\dots,P'_k \cap \mathcal{O}\}$ et il résulte du théorème VIII.4.2 et de la proposition III.4.3 (compte tenu de la démonstration du théorème VIII.4.1) que $P_1,\dots,P_n$ sont des idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}$. Pour simplifier supposons qu'on a $P_i = P'_i \cap \mathcal{O}$ et posons $\mathfrak{P}_i = P_i \cap R$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Pour tout $i = 1,\dots,n$ on a alors $\mathfrak{f}' \cap R \not\subseteq \mathfrak{P}_i$ (car sinon on aurait $c \in \mathfrak{P}_i$ ce qui impliquerait $\mathcal{O}'c \subseteq P'_i$ et par suite $\mathfrak{f}' \subseteq P_i$ ce qui n'est pas). D'après le théorème 1.6 et sa démonstration on a donc $\mathcal{O}_{P_i} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_i} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{P}_i} = \mathcal{O}'_{P'_i}$. Si on pose $X'_i = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_i} X_i$ on a alors $X'_i \cap \mathcal{O} = X_i$. D'après la remarque VIII.4.3, X'_i est un idéal à gauche principal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$; comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ n'a qu'un seul idéal premier non nul $(P'_i)_{\mathfrak{p}_i}$ (d'après le théorème VIII.1.2 compte tenu de la démonstration du théorème 1.7) il résulte alors du théorème VI.2.4 et de la remarque VI.2.5 que X'_i est un idéal à gauche $(P'_i)_{\mathfrak{p}_i}$-primaire. Il est alors immédiat de vérifier que X_i est un idéal à gauche P_i-primaire (car $(P'_i)_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathcal{O} = P_i$). ■

§ 2. APPLICATIONS AUX R-ORDRES CLASSIQUES.

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O}$ désigne un anneau premier noethérien à identité polynômiale dont le centre R est un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos de corps de fractions K. On désignera par Σ l'anneau classique de fractions de $\mathcal{O}$: d'après le théorème VIII.2.2, Σ existe et est une K-algèbre centrale simple de dimension finie sur K telle que $\Sigma = K\mathcal{O}$. De plus, d'après le corollaire VIII.2.5, $\mathcal{O}$ est entier sur R et est ainsi un R-ordre de Σ.

Nous allons utiliser la théorie de LESIEUR et CROISOT (cf. § VI.1) en prenant pour $(\mathcal{T})$ le treillis des idéaux non nuls de R et en prenant pour (L) le treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche contenus dans $\mathcal{O}$ car il est immédiat que les axiomes A,B,C,D de la théorie de LESIEUR et CROISOT sont vérifiés. Les treillis $(\mathcal{T})$ et (L) sont modulaires et noethériens. Il vient :

LEMME 2.1. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soient* P *un idéal bilatère premier de* $\mathcal{O}$ *et* X *un* $\mathcal{O}$*-idéal à gauche contenu dans* $\mathcal{O}$ *. Posons* $\mathfrak{p} = P \cap R$. *Si* X *est un idéal à gauche* P*-tertiaire de* $\mathcal{O}$ *alors* X *est* $\mathfrak{p}$*-primaire.*

DEMONSTRATION. - Si on a $rY \subseteq X$ et $Y \not\subseteq X$, avec $r \in R$ et Y $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$, alors il vient $r \in P$ puisque X est P-tertiaire ; donc $r \in \mathfrak{p}$ et par suite d'après le lemme 1.2 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r^n \in X$ c'est-à-dire $r^n \in X\cdot\mathcal{O}$ puisque r^n appartient au centre de $\mathcal{O}$. Il en résulte immédiatement que X est $\mathfrak{p}$-primaire. ■

THEOREME 2.2. - *Sous les hypothèses précédemment posées, soit* a *un élément non diviseur de zéro de* $\mathcal{O}$ *qui est non inversible dans* $\mathcal{O}$ *, et considérons* $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$

une décomposition tertiaire réduite de $\mathcal{O}a$ *dans* $\mathcal{O}$ *telle que* X_i *est un idéal à gauche* P_i*-tertiaire de* $\mathcal{O}$ *pour tout* $i = 1,\dots,n$. *Posons* $\mathfrak{p}_i = P_i \cap R$ *pour tout* $i = 1,\dots,n$. *La décomposition précédente de* $\mathcal{O}a$ *est une décomposition de* $\mathcal{O}a$ *en éléments* $\mathfrak{p}_i$*-primaires de* (L). *Les* $\mathfrak{p}_i$ *avec* $i = 1,\dots,n$ *sont les idéaux premiers de* R *associés à* $\mathcal{O}a$ *(c'est-à-dire les radicaux des composantes primaires de* $\mathcal{O}a$ *dans une décomposition réduite de* $\mathcal{O}a$ *en éléments primaires de* (L)*). Tout élément minimal de l'ensemble* $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$ *est un idéal premier non nul minimal de* R.

DEMONSTRATION. - Les X_i sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche contenus dans $\mathcal{O}$ et donc d'après le lemme 2.1 ce sont des éléments $\mathfrak{p}_i$-primaires de (L). Alors $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ fournit une décomposition réduite de $\mathcal{O}a$ en éléments primaires de (L). Il est clair que les radicaux associés à $\mathcal{O}a$ sont alors $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ (on peut avoir $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$ avec $i \neq j$) et on sait qu'ils sont indépendants de la décomposition réduite de $\mathcal{O}a$ en éléments primaires de (L) d'après le "théorème d'unicité" de telles décompositions énoncé à la fin du paragraphe 5 de [70] page 100. On a vu dans la démonstration du théorème 1.5 qu'un élément minimal de l'ensemble $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$ est un idéal premier non nul minimal de R. ■

DEFINITION. - Nous dirons que $\mathcal{O}$ est un R-*ordre réflexif* de Σ si on a $\mathcal{O} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R.

THEOREME 2.3. - *Sous les hypothèses précédemment posées et si de plus* $\mathcal{O}$ *est un* R-*ordre réflexif de* Σ, *alors, pour tout élément non diviseur de zéro* a *de* $\mathcal{O}$ *non inversible dans* $\mathcal{O}$, *les idéaux premiers associés à* $\mathcal{O}a$ *(c'est-à-dire les éléments de* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a)$*) sont tous des idéaux premiers non nuls minimaux de* $\mathcal{O}$.

DEMONSTRATION. - Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R et désignons par $\mathcal{O}'$ un R-ordre maximal classique de Σ contenant $\mathcal{O}$ tel que défini dans le lemme 1.1. D'après le lemme 1.3 on a $\mathcal{O}'a \neq \mathcal{O}'$ et d'après le théorème VI.2.4 on peut écrire $\mathcal{O}'a = \bigcap_{i=1}^{m} X'_i$ où les X'_i sont des $\mathcal{O}'$-idéaux à gauche entiers P'_i-primaires et où les P'_i sont distincts et sont des idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}'$. Si on pose $\mathfrak{p}'_i = P'_i \cap R$ pour tout $i = 1,\dots,m$, on a $\mathfrak{p}'_i \in \mathcal{P}$

pour tout $i = 1,\dots,m$ d'après le corollaire VIII.1.3. Comme pour tout $i = 1,\dots,m$ il existe un entier positif n_i tel que $\mathfrak{p}_i'^{\,n_i} \subseteq X_i'$ on obtient $(X_i')_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ pour tout $i = 1,\dots,m$ et pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P} - \{\mathfrak{p}_1',\dots,\mathfrak{p}_m'\}$. Donc pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P} - \{\mathfrak{p}_1',\dots,\mathfrak{p}_m'\}$ il vient $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}\, a = (\mathcal{O}'a)_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{i=1}^{m} (X_i')_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$. D'après la démonstration du corollaire I.7.3 il existe un élément non nul c de R tel que $c\,\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et on peut supposer que c est non inversible dans $\mathcal{O}'$ (car sinon on aurait $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ et notre théorème serait vrai d'après le théorème VI.2.4). Alors d'après le théorème VI.2.4 on peut écrire $\mathcal{O}'c = \bigcap_{j=1}^{n} Y_j'$ où les Y_j' sont des $\mathcal{O}'$-idéaux à gauche entiers Q_j'-primaires et où les Q_j' sont distincts et sont des idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}'$. Si on pose $\mathfrak{q}_j' = Q_j' \cap R$ pour tout $j = 1,\dots,n$ on obtient $\{\mathfrak{q}_1',\dots,\mathfrak{q}_n'\} \subseteq \mathcal{P}$ d'après le corollaire VIII.1.3. Alors pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{P} - \{\mathfrak{q}_1',\dots,\mathfrak{q}_n'\}$ on a $(\mathcal{O}'c)_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{q}}$, et comme on a $\mathcal{O}'c \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ on obtient alors $\mathcal{O}'_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$. En conséquence pour tout élément $\mathfrak{p}$ de l'ensemble $\mathcal{P} - \{\mathfrak{p}_1',\dots,\mathfrak{p}_m', \mathfrak{q}_1',\dots,\mathfrak{q}_n'\}$ il vient $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}a = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}\, a = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Considérons alors les éléments $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ de $\mathcal{P}$ tels que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}\, a \neq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ pour tout $i = 1,\dots,r$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r\}$, le seul idéal premier non nul de $R_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, et il résulte du théorème 2.2 que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ qui est $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$-primaire ; on en déduit que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$ qui est $\mathfrak{p}$-primaire (en effet il existe un entier positif ℓ tel que $(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^{\ell} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a$ ce qui nous donne $\mathfrak{p}^{\ell} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}a \cap \mathcal{O}$; de plus si on a $AY \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a \cap \mathcal{O}$ et $Y \not\subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a \cap \mathcal{O}$, avec Y $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$ et A idéal non nul de R, on obtient $R_{\mathfrak{p}}\, A\, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, Y \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, AY \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, Y \not\subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a$ ce qui implique $R_{\mathfrak{p}}\, A \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ d'où l'on déduit $A \subseteq \mathfrak{p}$). Pour tout $i = 1,\dots,r$ posons $X_i = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}\, a \cap \mathcal{O}$; c'est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$ qui est $\mathfrak{p}_i$-primaire. Alors il vient

$$\mathcal{O}a = \Big(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\Big)a = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}\, a \cap \mathcal{O}) = \bigcap_{i=1}^{r} X_i ,$$

et ainsi on a une décomposition de $\mathcal{O}a$ en élément $\mathfrak{p}_i$-primaires de (L) ; de plus cette décomposition primaire est réduite (puisque les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers non nuls minimaux de R qui sont distincts deux à deux et puisque, pour tout $i = 1,\dots,r$, il existe un entier positif ℓ_i tel que $\mathfrak{p}_i^{\ell_i} \subseteq X_i$). Par suite, d'après la proposition VI.1.12 et d'après le théorème 2.2, pour tout $P \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}/\mathcal{O}a)$ il existe $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r\}$ tel que $P \cap R = \mathfrak{p}$, et comme $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul minimal de R on déduit de la proposition III.4.3 (compte tenu de la démonstration du théorème VIII.4.1) que P est un idéal premier non nul minimal de $\mathcal{O}$. ■

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Notons que certains résultats de ce chapitre sont vrais sous des hypothèses un peu plus générales. Les résultats de ce chapitre sont dus à MAURY G. [80] dans le cas des R-ordres classiques et à MAURY G. et CHAMARIE M. [30] dans le cas des R-ordres de Fossum. HUDRY A. a obtenu postérieurement des résultats un peu plus généraux par une toute autre méthode [63]. On trouvera dans CHATTERS - GOLDIE - HAJARNAVIS - LENAGAN [112] et dans JATEGAONKAR [115] d'autres versions du théorème de l'idéal à gauche principal pour un anneau premier noethérien à identité polynômiale (sans condition sur le centre).

CHAPITRE X.

APPLICATIONS AUX ALGEBRES ENVELOPPANTES.

§ 1. SUR LES ANNEAUX FILTRES.

Ce paragraphe contient des rappels sur les anneaux filtrés. Pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à [15].

Soit A un anneau. S'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes du groupe additif sous-jacent de A telle que :

1) Si $n \geqslant m$ on a $A_n \subseteq A_m$ (i.e. la suite est décroissante),

2) Pour $m,n \in \mathbb{Z}$ on a $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$,

3) $1 \in A_o$,

alors on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *filtration (décroissante) compatible avec la structure d'anneau* de A. Si cela est, l'anneau A muni de cette filtration est appelé *anneau filtré.*

On peut remarquer que s'il existe une suite croissante $(A'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes du groupe additif sous-jacent d'un anneau A qui vérifie les propriétés (2) et (3) précédentes, alors en posant $A_n = A'_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration (décroissante) compatible avec la structure d'anneau de A.

Dans toute la suite considérons A un anneau filtré de filtration $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

La *filtration* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite *exhaustive* si on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, et la *filtration* est dite *séparée* si on a $0 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

La filtration permet de définir une topologie sur A en prenant, pour tout élément x de A, les $x + A_n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, pour système fondamental de voisinages de x ;

cette topologie de A est compatible avec la structure de groupe additif de A. Si la filtration de A est exhaustive alors A est un anneau topologique. Si I est un idéal à gauche (resp. à droite) de A alors il est immédiat de voir que l'adhérence de I dans A pour la topologie définie par la filtration est égale à $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (I+A_n)$, et donc I est fermé pour cette topologie si et seulement si $I = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (I+A_n)$. En conséquence la topologie de A est séparée si et seulement si la filtration est séparée.

Pour tout $x \in A$ on désigne par $v(x)$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x \in A_n$. On a donc :

$$\begin{cases} v(x) = n & \Longleftrightarrow \quad x \in A_n \text{ et } x \notin A_{n+1} \\ v(x) = +\infty & \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n \\ v(x) = -\infty & \Longleftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n \end{cases}$$

L'application $v : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ainsi définie s'appelle la *fonction d'ordre de l'anneau filtré* A.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ posons $gr_n(A) = A_n/A_{n+1}$ et désignons par f_n la surjection canonique $A_n \longrightarrow gr_n(A)$. Considérons alors $gr(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} gr_n(A)$. On définit un produit dans gr(A) en posant $[\sum_n f_n(x_n)][\sum_m f_m(y_m)] = \sum_n\sum_m f_{n+m}(x_ny_m)$. Il est immédiat de vérifier que gr(A) se trouve alors muni d'une structure d'anneau et que la graduation $(gr(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est compatible avec cette structure ; les éléments homogènes de degré n de gr(A) sont ceux de $gr_n(A)$. On dit que l'anneau gradué gr(A) est *l'anneau gradué associé à l'anneau filtré* A.

PROPOSITION 1.1. ([15] page 24). - *Soit* A *un anneau filtré dont la filtration* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est exhaustive et séparée, et soit* v *la fonction d'ordre de* A. *Si* gr(A) *l'anneau gradué associé à* A *est sans diviseurs de zéro, alors pour tout couple* a,b *d'éléments de* A *on a* $v(ab) = v(a) + v(b)$, *et en particulier* A *est un anneau sans diviseurs de zéro.*

PROPOSITION 1.2. ([15] page 42). - *Soit* A *un anneau filtré dont la filtration* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est exhaustive et séparée. Si* A *est complet pour la topologie définie par sa filtration* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *, et si* gr(A) *l'anneau gradué associé à* A *est un anneau* *noethérien à gauche, alors* A *est un anneau noethérien à gauche.*

§ 2. UN THEOREME SUR LES ANNEAUX FILTRES.

On garde les mêmes notations qu'au paragraphe 1. Il vient :

THEOREME 2.1. - *Soit* A *un anneau filtré, dont la filtration* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est exhaustive et séparée, tel que tout idéal à droite (resp. à gauche) principal soit fermé pour la topologie définie par la filtration. Si* gr(A) *l'anneau gradué associé à* A *est sans diviseurs de zéro, possède un corps de fractions et est un ordre maximal de ce corps de fractions, alors, si* A *possède un corps de fractions* K, A *est un ordre maximal de* K.

DEMONSTRATION. - Soit I un idéal bilatère non nul de A. Considérons $x \in \mathcal{O}_\ell(I)$. On peut écrire $x = \beta^{-1}\alpha$ avec $\alpha,\beta \in A$, et comme on a $xI \subseteq I$ il vient $\alpha I \subseteq \beta I$. Montrer que x appartient à A revient à montrer qu'on a $\alpha \in \beta A$. Comme la filtration est exhaustive il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in \beta A + A_n$, et donc, puisque βA est fermé pour la topologie définie par la filtration, il nous suffit de montrer qu'on a $\alpha \in \beta A + A_{n+1}$ pour obtenir $\alpha \in \beta A$.

Comme on a $\alpha \in \beta A + A_n$ on peut écrire $\alpha = \beta y + z$ avec $y \in A$ et $z \in A_n$, et on peut supposer $z \neq 0$. De $\alpha I \subseteq \beta I$ on déduit alors $zI \subseteq \beta I$.

Puisque I est un idéal bilatère de A si on pose $I_n = I \cap A_n$ on obtient la filtration exhaustive séparée $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de I induite par celle de A ; on a $gr(I) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} gr_n(I)$, où $gr_n(I) = I_n/I_{n+1} \simeq (I \cap A_n + A_{n+1})/A_{n+1}$, et gr(I) est un idéal bilatère non nul de l'anneau gradué gr(A) (cf. [15]). Si on pose $m = v(z)$ et $p = v(\beta)$ on a alors $f_m(z)\ gr(I) \subseteq f_p(\beta)\ gr(I)$: en effet si i est un élément non nul de I il existe $j \in I$ tel que $zi = \beta j$ (puisque $zI \subseteq \beta I$) et si on pose $q = v(i)$ et $r = v(j)$ on déduit de la proposition 1.1 qu'on a $m + q = p + r$; il vient alors $f_m(z)\ f_q(i) = f_{m+q}(zi) = f_{p+r}(\beta j) = f_p(\beta)\ f_r(j)$ et par suite on a $f_m(z)\ gr(I) \subseteq f_p(\beta)\ gr(I)$. Comme on a $f_p(\beta) \neq 0$ il vient $(f_p(\beta))^{-1}f_m(z)\ gr(I) \subseteq gr(I)$ d'où l'on déduit $(f_p(\beta))^{-1}f_m(z) \in gr(A)$ puisque gr(I) est un idéal bilatère non nul de l'ordre maximal gr(A) ; comme $f_m(z)$ et $f_p(\beta)$ sont des éléments homogènes de gr(A), l'élément $(f_p(\beta))^{-1}f_m(z)$ de gr(A) est un élément homogène de degré $m-p$. Donc il existe $\gamma \in A$ tel que $v(\gamma) = m-p$ et $f_{m-p}(\gamma) = (f_p(\beta))^{-1}f_m(z)$. Il vient $f_m(z) = f_p(\beta)f_{m-p}(\gamma) = f_m(\beta\gamma)$ d'où l'on déduit $z - \beta\gamma \in A_{m+1}$; comme on a $z \in A_n$ et $m = v(z)$, on a $m \geqslant n$ et par suite on obtient $z - \beta\gamma \in A_{n+1}$. En conséquence de $\alpha = \beta y + z$ on déduit $\alpha \in \beta A + A_{n+1}$.

On a donc $\mathcal{O}_\ell(I) = A$ et de même on démontre $\mathcal{O}_r(I) = A$. Ainsi A est un ordre maximal de K d'après la proposition I.3.1. ■

§ 3. APPLICATION AUX ALGEBRES ENVELOPPANTES.

Faisons d'abord quelques rappels sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie (pour plus de détails on pourra se reporter à [20] ou [42]).

Soit $\mathfrak{g}$ une *algèbre de Lie* sur un corps commutatif K, c'est-à-dire un K-espace vectoriel, que nous supposerons ici de dimension finie sur K, muni d'une multiplication (appelée crochet et notée $(x,y) \longmapsto [x,y]$) telle que

(1) $[x,y]$ dépend linéairement de x et de y ;

(2) $[x,x] = 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{g}$;

(3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ quels que soient $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Soit maintenant T l'algèbre tensorielle du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire $T = \bigoplus_{n\geqslant 0} T^n(\mathfrak{g})$, où $T^0(\mathfrak{g}) = K,\dots,T^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes_K \mathfrak{g}\otimes_K \cdots \otimes_K \mathfrak{g}$ (n facteurs), avec comme produit dans T la multiplication tensorielle qui permet de munir T d'une structure de K-algèbre. Si on considère l'idéal bilatère J de T engendré par les tenseurs $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$ où $x,y \in \mathfrak{g}$, alors l'algèbre (associative) quotient T/J s'appelle l'*algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$ et se note $U(\mathfrak{g})$. La restriction à $\mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})$ de l'application canonique de T sur $U(\mathfrak{g})$ s'appelle l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ et ici c'est une injection (cf. [20] page 33 ou [42] page 72).

Si l'on désigne pour $n \geqslant 0$ par U_n l'image canonique de $T^0(\mathfrak{g}) + \dots + T^n(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ on a $U_0 = K$, $U_n \subseteq U_{n+1}$ et $U_mU_n \subseteq U_{m+n}$. Donc en posant $U'_n = \{0\}$ pour $n > 0$ et $U'_n = U_{-n}$ pour $n \leqslant 0$ on obtient une filtration (décroissante) exhaustive et séparée $(U'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ (cf. [20] page 27 ou [42] page 78). La topologie définie par cette filtration est discrète (car pour $n > 0$ on a $U'_n = \{0\}$), et par suite l'anneau filtré $U(\mathfrak{g})$ est complet pour la topologie définie par la filtration et tout idéal d'un côté (en particulier tout idéal d'un côté principal) est fermé pour cette topologie.

De plus, comme on a supposé que $\mathfrak{g}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie sur K, l'anneau gradué $gr(U(\mathfrak{g}))$ associé à $U(\mathfrak{g})$ est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ (cf. [20] page 30 ou [42] page 78) et comme d'autre part $S(\mathfrak{g})$ est isomorphe à un anneau de polynômes $K[X_1,\ldots,X_n]$ sur K (cf. [20] page 27) on en déduit (avec les résultats du paragraphe I.8) que $gr(U(\mathfrak{g}))$ est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro et un ordre maximal de son corps de fractions.

On obtient alors les résultats suivants :

THEOREME 3.1. - *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps commutatif* K *de dimension finie sur* K. *Alors l'algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *est un anneau sans diviseurs de zéro, noethérien, ordre maximal de son corps de fractions.*

DEMONSTRATION. - Compte tenu de ce qui précède, $U(\mathfrak{g})$ est un anneau sans diviseurs de zéro noethérien d'après les propositions 1.1 et 1.2. Donc $U(\mathfrak{g})$ possède un corps de fractions (cf. § I.1). On déduit alors de ce qui précède et du théorème 2.1 que $U(\mathfrak{g})$ est un ordre maximal de son corps de fractions. ■

REMARQUE. - Le résultat précédent reste vrai si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos R telle que $\mathfrak{g}$ soit un R-module libre de type fini.

D'après ce théorème les résultats obtenus sur les ordres maximaux s'appliquent et en particulier on peut appliquer le théorème VI.4.3 (et la remarque VI.4.4).

THEOREME 3.2. - *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps commutatif* K *de dimension finie sur* K. *Si* a *est un élément non nul et non inversible de l'algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *et si l'idéal à gauche* $U(\mathfrak{g})a$ *contient un idéal bilatère non nul de* $U(\mathfrak{g})$, *alors* $U(\mathfrak{g})a$ *possède une décomposition de la forme* $U(\mathfrak{g})a = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ *où les* X_i *sont des idéaux à gauche* P_i*-primaires de* $U(\mathfrak{g})$ *et où les* P_i *sont des idéaux premiers non nuls minimaux de* $U(\mathfrak{g})$ *distincts deux à deux.*

Ce théorème 3.2 apporte une réponse au problème 22 de [42] page 335.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont dus à M. CHAMARIE [26].

CHAPITRE XI.

AUTRES RESULTATS.

Dans ce chapitre nous donnons un certain nombre de résultats sans démonstration sur la théorie des ordres maximaux.

§ 1. LA THEORIE DES ANNEAUX DE KRULL NON NECESSAIREMENT COMMUTATIFS AU SENS DE MARUBAYASHI.

H. MARUBAYASHI a défini dans quatre articles récents [72], [73], [74], [75] des anneaux de Krull non nécessairement commutatifs.

DEFINITION 1.1. - *Soit* R *un anneau de Goldie premier d'anneau de fractions* Q. *Un sous-anneau* R' *de* Q *contenant* R *sera dit une extension essentielle à gauche de* R *s'il existe un ensemble topologisant, idempotent et parfait* $\mathcal{F}$ *d'idéaux à gauche de* R *tel que* $R' = R_{\mathcal{F}}$. *On définit de façon analogue une extension essentielle à droite de* R. *On dira que* R' *est une extension essentielle de* R *si c'est une extension essentielle à droite et à gauche de* R.

DEFINITION 1.2. - *Un anneau de Goldie premier est dit un anneau de Krull (non nécessairement commutatif) s'il existe des familles non vides* $(R_i)_{i \in I}$ *et* $(S_j)_{j \in J}$ *d'extensions essentielles de* R *telles que :*

K_1. $R = (\bigcap_{i \in I} R_i) \cap (\bigcap_{j \in J} S_j)$.

K_2. *Chaque* R_i *est un anneau semi-local (définition* § III.2*) ordre d'Asano noethérien. Chaque* S_j *est un anneau simple noethérien et le cardinal de* J *est fini. Si* $J = \phi$ *nous dirons que* R *est borné.*

K_3. *Pour chaque élément régulier* c *dans* R, *on a* $cR_i \neq R_i$, $(R_i c \neq R_i)$ *pour un nombre fini d'indices* i ;

K_4. *Notons* P'_i *l'idéal maximal de* R_i , *on démontre sans peine que* $P_i = R \cap P'_i$ *est un idéal premier de* R. *Alors pour* $i \neq j$, $i \in I$, $j \in I$, P_i *et* P_j *sont incomparables.*

La condition K'_4 *suivante est alors équivalente à* K_4 :

K'_4. *Pour* $i \in I$, $j \in I$, $i \neq j$ *on a* $P_i R_j = R_j = R_j P_i$.

EXEMPLES. - 1) Un domaine de Krull commutatif est un anneau de Krull au sens précédent (avec $J = \phi$).

2) Soit R un domaine de Krull commutatif de corps de fractions K et soit Q une algèbre centrale simple de dimension finie sur K. Tout R-ordre maximal de Q est un anneau de Krull borné (c'est-à-dire avec $J = \phi$) au sens précédent.

3) Si R est un anneau de Krull au sens précédent il en est de même de $M_n(R)$, anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans R, et si R est borné, $M_n(R)$ est borné.

4) Si R est un anneau de Krull au sens précédent alors l'anneau des polynômes R[X] où X est une variable commutant avec tout élément de R en est aussi un.

THEOREME 1.1. [73]. - *Soit* R *un anneau premier de Goldie, soit* Q *son anneau de fractions, alors* R *est un anneau de Krull borné (au sens de la définition* 1.2*) si et seulement si*

L(1) : R *est un ordre maximal régulier de* Q.

L(2) : R *satisfait à la condition de chaîne ascendante sur les* c*-idéaux à gauche et sur les* c*-idéaux à droite contenus dans* R *(un* R*-idéal à gauche* I *est dit un* c*-idéal à gauche si* $I = I^*$ *avec les notations du chapitre* VI*).*

L(3) : R/P *est un anneau premier de Goldie pour tout idéal premier non nul minimal* P *de* R.

THEOREME 1.2. [73]. - *Soit* R *un anneau premier de Goldie vérifiant les conditions* L(1) *et* L(2) *du théorème précédent. Si* P *est un idéal premier de* R *tel que* R/P *soit un anneau de Goldie premier, alors :*

(1) R *vérifie la condition de Ore selon* $\mathscr{C}(P)$.

(2) $R_{\mathscr{F}}P = R_{\mathscr{F}_P}$ *et l'on note* $R_{\mathscr{F}}P = R_{\mathscr{F}_P} = R_P$.

(3) R_P *est un anneau semi-local noethérien ordre d'Asano régulier de* Q *et c'est un anneau principal des deux côtés.*

REMARQUES. - 1) Le théorème 1.2 est une généralisation du théorème de CHAMARIE (Théorème IV.2.15) qui supposait R noethérien.

2) Les R_i de la définition 1.2 sont, dans le cas où R est un anneau de Krull borné au sens de la définition 1.2, exactement les $R_P = {}_PR$ lorsque P parcourt l'ensemble des idéaux premiers non nuls minimaux de R.

PROPOSITION 1.3. [74]. - *Tout ordre maximal équivalent à un anneau de Krull borné au sens de la définition* 1.2 *est un anneau de Krull borné au sens de la définition* 1.2.

PROPOSITION 1.4. [74]. - *Un anneau de Krull borné au sens de la définition* 1.2 *avec un nombre fini d'idéaux non nuls minimaux est un anneau principal à droite et à gauche.*

PROPOSITION 1.5. [73]. - *Soit* I *un* c-*idéal à gauche entier d'un anneau de Krull borné* R *au sens de la définition* 1.2. *Si* I *est irréductible (c'est-à-dire si* " $I = I_1 \cap I_2$, I_1 , I_2 c-*idéaux à gauche" implique* " $I = I_1$ " *ou* " $I = I_2$ "), I *est* P-*primaire avec* P *idéal premier non nul minimal de* R.

REMARQUE. - De la proposition 1.5 résulte immédiatement, compte tenu de la condition L(2) du théorème 1.1 que tout c-idéal à gauche distinct de R et entier, en particulier l'idéal à gauche Ra, a élément régulier de R et non inversible dans R, est intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche primaires dont les radicaux sont des idéaux premiers non nuls minimaux de R. On retrouve ainsi le résultat indiqué à la remarque VI.2.6 d'une autre façon.

H. MARUBAYASHI n'a pas donné d'exemples d'anneaux de Krull au sens de Marubayashi borné qui ne soit ni noethérien, ni un R-ordre maximal de Fossum. Nous donnons ci-dessous un exemple dû à J.B. DELIFER et G. MAURY [40] :

PROPOSITION 1.6. [40]. - *Soit* K' *un corps de Köthe de rang infini sur son centre* (ch. I. § 4) *et soient* $X_1, X_2, \ldots$, *une infinité dénombrable de variables* X_i *commutant entre elles et avec tout élément de* K'. *L'anneau* $K'[X_1, X_2, \ldots]$ *est un anneau de Krull non commutatif borné au sens de la définition* 1.2 *qui n'est ni noethérien, ni un* R-*ordre maximal de Fossum.*

Notons que I. BECK [13] a étudié les modules injectifs sur les domaines de Krull commutatifs puis que R. FOSSUM a étudié les modules injectifs sur les R-ordres maximaux de FOSSUM [52]. J.B. DELIFER généralisant ces études a étudié les modules injectifs sur les anneaux de Krull bornés au sens de la définition 1.2 [39].

Signalons pour terminer que M. CHAMARIE dans un article à paraître [28] a une notion d'anneau de Krull plus générale que celle de MARUBAYASHI qui coïncide avec celle de MARUBAYASHI dans le cas "borné", un anneau de Krull au sens de CHAMARIE étant toujours un ordre maximal, tandis que l'on ne sait pas si un anneau de Krull non borné au sens de la définition 1.2 est un ordre maximal.

§ 2. ORDRES MAXIMAUX ET ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES.

Rappelons les définitions suivantes :

Soit R un anneau unitaire, un R-module à droite M est dit fidèle si $Mr = 0$, $r \in R$ implique $r = 0$. Il est dit de dimension finie si M est extension essentielle d'une somme finie directe de sous-modules de M. C'est un générateur si et seulement si tout R-module à droite est le quotient d'une somme directe de copies de M. Enfin M est dit "torsionless" si : $\forall f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $\forall m \in M$, $f(m) = 0 \Rightarrow m = 0$. Enfin M est dit R-réflexif si $M = M^{**} = \mathrm{Hom}_R(M^*,R)$. Les résultats principaux de l'article [34] de J. COZZENS sont les suivants :

THEOREME 2.1. [34]. - *Soit* R *un ordre maximal de son anneau de fractions semi-simple* Q. *Soit* M_R *un* R-*module à droite fidèle, de dimension finie et torsionless. Considérons les assertions suivantes :*

1) M_R *est réflexif ;*

2) $k = \mathrm{End}\, M_R$ *est un ordre maximal (de son anneau de fractions) ;*

3) $k = \mathrm{End}_R\, M^*$ *où* $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$;

Alors les assertions 2) *et* 3) *sont équivalentes et l'assertion* 1) *entraîne les deux autres. Si de plus* M_R *est un générateur les trois assertions sont équivalentes.*

THEOREME 2.2. [34]. - *Soit* D *un corps et soit* $Q = M_n(D)$, *anneau des matrices* $n \times n$ *à coefficients dans* D. *Un ordre maximal* R *dans* Q *est isomorphe à l'anneau* $\mathrm{End}_k\, U$ *ou* $k = \mathrm{End}\, U_R$, U_R *désignant un idéal à droite quelconque de* R. *Si* U_R *est un idéal à droite essentiel maximal de* R, *alors* $k = \mathrm{End}\, U_R$ *est un ordre maximal dans* D.

THEOREME 2.3. [34]. - *Soit* R *un anneau noethérien simple sans diviseurs de zéro, alors* R *est de dimension homologique globale inférieure ou égale à* 2, *si et seulement si tout ordre maximal équivalent à* $M_n(R)$ *est simple.*

REMARQUE. - Soient R un anneau semi-premier de Goldie à droite, M un R-module à droite fidèle , torsionless, de dimension finie, Q l'anneau de fractions à droite de R, $k = \mathrm{End}\, M_R$. ZELMANOWITZ [110] a démontré que l'anneau $D = \mathrm{End}(M \otimes_R Q)_Q$, anneau des endomorphismes du Q-module à gauche $(M \otimes_R Q)_Q$, est l'anneau de fractions à droite de k. Cette remarque justifie au théorème 2.1, 2) que $k = \mathrm{End}\, M_R$ admet un anneau de fractions.

§ 3. RI-ORDRES MAXIMAUX.

COZZENS et SANDOMIERSKI [36] définissent les RI-ordres maximaux : un RI-ordre maximal est un anneau R admettant un anneau de fractions artinien simple Q, qui est un ordre maximal de Q, tel que le produit de deux c-idéaux bilatères $A^*.B^*$ soit égal au produit ordinaire A^*B^*.

Les ordres d'Asano dans un anneau artinien simple sont des RI-anneaux (car tout R-idéal est alors un c-idéal et le produit des c-idéaux est le produit ordinaire des R-idéaux). Mais il est démontré dans [36] qu'un anneau R ordre maximal de son anneau de fractions Q est un RI-ordre maximal s'il est de dimension homologique globale inférieure ou égale à 2. RAMRAS [93] avait déjà étudié les C-ordres maximaux classiques de dimension homologique globale inférieure ou égale à 2, C désignant un anneau local régulier.

Notons cependant que la remarque de [36] page 325 selon laquelle tout C-ordre maximal classique, où C désigne un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos, serait un RI-ordre maximal est fausse comme le montre le contre-exemple suivant dû à CHAMARIE : si la remarque était exacte il en résulterait en particulier que tout idéal premier non nul minimal d'un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos est inversible et ceci est faux d'après le contre-exemple suivant :
Soient $\mathbb{C}$ le corps des complexes, $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/I$ où I est l'idéal engendré par $XY - Z^2$, on a $A = \mathbb{C}[x,y,z]$ avec $xy = z^2$ en désignant par x,y,z les classes respectives de X,Y,Z modulo I. L'anneau A est noethérien sans diviseurs de zéro et intégralement clos [76] page 44. Soit $P = (y,z)$ l'idéal de A engendré par y et z : P est premier car A/P est isomorphe à l'anneau $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Y,Z) \simeq \mathbb{C}[X]$ qui est intègre.
P est un idéal premier non nul minimal : en effet on a $P^{-1} \neq A$ car $\lambda = xz^{-1} = zy^{-1}$ appartient à P^{-1} et n'appartient évidemment pas à A. D'autre part on a $P^2 = (y^2,yz,z^2) = y(y,z,x)$. Si P était inversible, P^2 le serait aussi et donc l'idéal maximal (y,z,x) serait inversible donc premier non nul minimal et on aurait $(y,z) = (y,z,x)$ c'est-à-dire $x \in (y,z)$ ce qui n'est pas.

§ 4. COMPLEMENTS SUR LES ORDRES D'ASANO ET DIVERS.

On trouvera une étude des localisés bilatères d'un ordre d'Asano noethérien $\mathcal{O}$ non forcément régulier dans MAURY [78] et dans NAUWELAERTS [89], toute famille bilatère (§ IV.1) de $\mathcal{O}$-idéaux à gauche vérifiant la condition (T) (§ IV.1) puisque tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche de la famille contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère donc un $\mathcal{O}$-module à gauche projectif.

Généralisant le cas commutatif (voir STORRER [106]), HALWANI a essayé de caractériser les ordres d'Asano premiers noethériens réguliers d'anneau de fractions S par leurs extensions dans S (soit $\mathcal{O}$ un ordre dans un anneau de quotients S, on appelle extension de $\mathcal{O}$ dans S un sous-anneau de S contenant $\mathcal{O}$). Une extension de $\mathcal{O}$ est dite maximale si c'est un ordre maximal de S, elle est dite plate si c'est un $\mathcal{O}$-module plat des deux côtés. On peut alors énoncer :

THEOREME 4.1. (HALWANI [60]). - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau premier noethérien ordre régulier de son anneau de fractions* S. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *$\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano de* S *;*

2) *$\mathcal{O}$ est à extensions maximales dans* S *et les idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}$ sont des $\mathcal{O}$-modules projectifs des deux côtés ;*

3) *$\mathcal{O}$ est à extensions plates dans* S *et les idéaux premiers non nuls minimaux de $\mathcal{O}$ sont des $\mathcal{O}$-modules projectifs des deux côtés ;*

4) *$\mathcal{O}$ est à extensions plates dans* S, *$\mathcal{O}$ n'a pas d'idéal bilatère idempotent propre, et pour tout idéal bilatère maximal* M *de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_M} = \mathcal{O}_M$ a un unique idéal bilatère maximal.*

Robson [101] a établi le théorème suivant :

THEOREME 4.2. (ROBSON [101]). - *Soit* R *un ordre d'Asano premier noethérien de son anneau de fractions et supposons que* R *soit de dimension de Krull finie* m. *Alors tout idéal à droite peut être engendré par* $m+1$ *éléments.*

On trouvera dans AHMAD [1] une tentative pour caractériser les anneaux de groupe qui sont des ordres maximaux et dans REHM [113] un exemple (exemple 5.4) d'un ordre maximal régulier vérifiant la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux bilatères entiers mais qui ne vérifie pas la condition de chaîne ascendante sur les c-idéaux d'un côté entiers (et qui par suite n'est pas un anneau de Krull borné au sens de la définition 1.2 du paragraphe 1).

QUELQUES PROBLEMES OUVERTS.

1 - Donner un exemple d'anneau de Goldie premier, ordre maximal de son anneau de fractions S qui soit noethérien d'un côté et non de l'autre.

2 - Un ordre maximal dans un anneau artinien S équivalent à un ordre maximal noethérien à gauche de S est-il noethérien à gauche ?

3 - Soit A un anneau premier noethérien d'anneau de fractions S. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A se plonge dans un ordre maximal de S qui lui soit équivalent.

4 - Mêmes hypothèses sur A et S qu'au problème 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A se plonge dans un ordre maximal de S ayant même centre que lui.

5 - Mêmes hypothèses sur A et S qu'au problème 3. Soit P un idéal premier de A, l'anneau $A_P = A_{\mathscr{F}_P}$ est-il toujours un anneau de fractions de A selon un sous-demi-groupe $\mathscr{C}'(P)$ de $\mathscr{C}(P)$?

6 - Mêmes hypothèses sur A et S qu'au problème 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante 1) pour que les localisés bilatères $A_{\mathscr{F}}$ soient tous noethériens ; 2) pour que toutes les familles bilatères d'idéaux à gauche de A soient parfaites ; 3) pour que les localisés bilatères $A_{\mathscr{F}}$ soient des anneaux de fractions selon certains sous-demi-groupes de A ?

7 - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau de groupe admettant un anneau de fractions S soit un ordre maximal de S.

8 - Existe-t-il un ordre maximal dans un anneau artinien simple S admettant un idéal premier non nul minimal qui ne soit pas un c-idéal ?

9 - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier dans un anneau S, ($\mathcal{O}$ vérifiant éventuellement la condition noethérienne sur les c-idéaux entiers), a-t-on la condition de Ore

par rapport à $\mathscr{C}(P)$ pour P c-idéal premier de $\mathcal{O}$?

10 - Conditions nécessaires (éventuellement suffisantes) pour qu'un ordre maximal soit une algèbre enveloppante.

11 - Les anneaux premiers noethériens semi-locaux (ou quasi-locaux) de dimension homologique globale égale à n sont-ils des ordres maximaux ?

12 - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal noethérien de son corps de fractions Σ. Les ordres maximaux de Σ équivalents à $\mathcal{O}$ sont-ils isomorphes à $\mathcal{O}$ (par un automorphisme intérieur ?) ? Sinon, que peut-on dire des classes d'ordres maximaux équivalents isomorphes entre eux ? Cas où $\mathcal{O}$ est régulier, où $\mathcal{O}$ est un R-ordre maximal classique ?

13 - Soit $\mathcal{O}$ un R-ordre maximal classique (resp. un R-ordre de Fossum) et soit $\mathscr{F}$ une famille bilatère d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathscr{F}}$ est-il un R'-ordre classique (resp. de Fossum), R' désignant le centre de $\mathcal{O}_{\mathscr{F}}$?

14 - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal dans un anneau artinien simple S. Y-a-t-il équivalence entre " $\mathcal{O}$ est un ordre régulier de S " et " $\mathcal{O}$ est totalement borné" ?

15 - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal dans un anneau artinien S. Soient $G(\mathcal{O})$, $P(\mathcal{O})$, $I(\mathcal{O})$ respectivement le groupe des c-$\mathcal{O}$-idéaux, des $\mathcal{O}$-idéaux principaux (à droite et à gauche), des $\mathcal{O}$-idéaux inversibles. Etudier les groupes $G(\mathcal{O})/P(\mathcal{O})$, $G(\mathcal{O})/I(\mathcal{O})$. Si $\mathcal{O}'$ est un ordre maximal de S équivalent à $\mathcal{O}$, les groupes $G(\mathcal{O})/P(\mathcal{O})$ et $G(\mathcal{O}')/P(\mathcal{O}')$ sont-ils isomorphes ? Même question pour $G(\mathcal{O})/I(\mathcal{O})$ et $G(\mathcal{O}')/I(\mathcal{O}')$.

BIBLIOGRAPHIE.

Les articles concernant la théorie des ordres maximaux sont précédés par * .

* [1] AHMAD, M.K., *Anneaux de groupe et ordres maximaux*, Thèse (3ème cycle), Université Claude-Bernard (LYON I), 24 juin 1975.

[2] ASANO, K., *Über die Quotientenbildung von Schiefringen*, J. Math. Soc. Japan 1 (1949), 73-78.

* [3] ASANO, K., *Zur Arithmetik in Schiefringen* I, Osaka J. Math. 1 (1949), 98-134.

* [4] Asano, K., *Zur Arithmetik in Schiefringen* II, J. Inst. Polytechnics Osaka City Univ. Ser. A 1 (1950), 1-27.

* [5] ASANO, K., and MURATA, K., *Arithmetical ideal theory in semigroups*, J. Inst. Polytechnics Osaka City Univ. Ser. A 4 (1953), 9-33.

[6] ATTERTON, T.W., *A prime ideal and its quotient ring*, Bull. Austral. Math. Soc. 3 (1970), 107-110.

[7] AUSLANDER, M., and BUCHSBAUM, D.A., *Unique factorisation in regular local rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 45 (1959), 733-734.

* [8] AUSLANDER, M., and GOLDMAN, O., *Maximal orders*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 1-24.

[9] BASS, H., *Algebraic K-theory*, W.A. Benjamin, NEW YORK, 1968.

[10] BEACHY, J.A., and BLAIR, W.D., *Localization at Semiprime Ideals*, J. Algebra 38 (1976), 309-314.

[11] BIRKHOFF, G., *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium 25 (3 rd. ed.), Amer. Math. Soc. PROVIDENCE, 1967.

[12] BLAIR, W.D., *Right noetherian rings integral over their centers*, J. Algebra 27 (1973), 187-198.

* [13] BECK, I., *Injective modules over a Krull domain*, J. Algebra 17 (1971), 116-131.

[14] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre Commutative*, Chapitres 1 et 2, Act. Sci. Ind. 1290, Hermann, PARIS, 1961.

[15] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre Commutative*, Chapitres 3 et 4, Act. Sci. Ind. 1293, Hermann, PARIS, 1961.

[16] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre,* Chapitres 6 et 7, Act. Sci. Ind. 1179, Hermann, PARIS, 1964.

[17] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre,* Chapitre 8, Act. Sci. Ind. 1261, Hermann, PARIS, 1958.

[18] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre Commutative,* Chapitre 7, Act. Sci. Ind. 1314, Hermann, PARIS, 1965.

[19] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Algèbre Commutative,* Chapitres 5 et 6, Act. Sci. Ind. 1308, Hermann, PARIS, 1964.

[20] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques : Groupes et Algèbres de Lie,* Chapitre 1, Act. Sci. Ind. 1285, Hermann, PARIS, 1960.

[21] CAUCHON, G., *Les* T-*anneaux et les anneaux à identités polynômiales noethériens,* Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université PARIS XI, 17 novembre 1977.

[22] CARTAN, H., and EILENBERG, S., *Homological Algebra,* Princeton University Press, PRINCETON, 1956.

* [23] CHAMARIE, M., *Localisations dans les ordres maximaux,* Comm. Algebra 2 (1974), 279-293.

* [24] CHAMARIE, M., *Localisations dans les ordres maximaux,* Thèse (3ème Cycle) Université Claude-Bernard (LYON I), 13 décembre 1973.

* [25] CHAMARIE, M., *Ordres maximaux et* R-*ordres maximaux,* J. Algebra 58 (1979), 148-156.

* [26] CHAMARIE, M., *Sur les ordres maximaux au sens d'Asano,* Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 3, 1979.

* [27] CHAMARIE, M., *Anneaux de polynômes et ordres maximaux,* C.R. Acad. Sci.Paris, Sér. A 287 (1978), 599-601.

* [28] CHAMARIE, M., *Anneaux de Krull non commutatifs,* à paraître au J. Algebra.

[29] CHAMARIE, M., et HUDRY, A., *Anneaux noethériens à droite entiers sur un sous-anneau de leur centre,* Comm. Algebra 6 (1978), 203-222.

* [30] CHAMARIE, M., et MAURY, G., *Un théorème de l'idéal à gauche principal dans les anneaux premiers, noethériens, à identité polynômiale dont le centre est un domaine de Krull,* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 286 (1978), 609-611.

[31] CHATTERS, A.W., *The restricted minimum condition in noetherian hereditary rings,* J. London Math. Soc. 4 (1971), 83-87.

[32] CHATTERS, A.W., and GINN, S.M., *Localisation in hereditary rings,* J. Algebra 22 (1972), 82-88.

* [33] CHEVALLEY, C., *L'arithmétique dans les algèbres de matrices,* Act. Sci. Ind. 323, Hermann, PARIS, 1936.

* [34] COZZENS, J.H., *Maximal orders and reflexive modules,* Trans. Amer. Math. Soc. 219 (1976), 323-336.

* [35] COZZENS, J.H., and SANDOMIERSKI, F.L., *Reflexive primes, localization and primary decomposition in maximal orders,* Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 44-50.

* [36] COZZENS, J.H., and SANDOMIERSKI, F.L., *Maximal orders and localization.* I, J. Algebra 44 (1977), 319-338.

* [37] DAVIS, E.D., *Overrings of commutative rings.* II. *Integrally closed overrings,* Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 196-212.

* [38] DELIFER, J.B., *Modules sur les anneaux de Krull non commutatifs au sens de Marubayashi,* Thèse (3ème cycle), Université Claude-Bernard (LYON I), 18 Mai 1979.

* [39] DELIFER, J.B., *Modules sur les anneaux de Krull non commutatifs au sens de Marubayashi,* Publ. Dép. Math. (LYON I), à paraître, 1980.

* [40] DELIFER, J.B., et MAURY, G., *Un exemple d'anneau de Krull borné au sens de Marubayashi qui n'est ni noethérien, ni un* R-*ordre maximal de Fossum,* Publ. Dép. Math. (LYON I), à paraître, 1980.

* [41] DEURING, M., *Algebren,* Ergebnisse der Math. 4, Springer-Verlag, BERLIN, 1935.

[42] DIXMIER, J., *Algèbres enveloppantes,* Cahiers Scientifiques 37, Gauthier-Villars, PARIS, 1974.

[43] DUBREIL, P., et DUBREIL-JACOTIN, M.L., *Leçons d'algèbre moderne,* Dunod, PARIS, 1961.

* [44] EISENBUD, D., and ROBSON, J.C., *Modules over Dedekind prime rings,* J. Algebra 16 (1970), 67-85.

[45] FAITH, C., *Lecturès on injective modules and quotient rings,* Lecture Notes in Math. 49, Springer-Verlag, BERLIN, 1967.

[46] FAITH, C., *Algebra : rings, modules and categories* I, Grundlehren Math. Wiss. 190, Springer-Verlag, BERLIN, 1973.

[47] FAITH, C., *Noetherian simple rings,* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 730-731.

* [48] FINDLAY, G.D., *Multiplicative Ideal Theory and Rings of Quotients.* I, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 68 (1968), 30-53.

[49] FORMANEK, E., and JATEGAONKAR, A.V., *Subrings of noetherian rings,* Proc. Amer. Math. Soc. 46 (1974), 181-186.

* [50] FOSSUM, R., *Maximal orders over Krull domains,* J. Algebra 10 (1968), 321-332.

* [51] FOSSUM, R., *The divisor class group of a Krull domain,* Ergebnisse der Math. 74, Springer-Verlag, BERLIN, 1973.

* [52] FOSSUM, R., *Injective modules over Krull orders,* Math. Scand. 28 (1971), 233-246.

[53] GABRIEL, P., *Des catégories abéliennes,* Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448.

[54] GOLAN, J.S., *Localization of noncommutative rings,* Marcel Dekker, NEW YORK, 1975.

[55] GOLDIE, A.W., *Localization in non-commutative noetherian rings,* J. Algebra 5 (1967), 89-105.

[56] GOLDIE, A.W., *Semi-prime rings with maximum condition,* Proc. London Math. Soc. 10 (1960), 201-220.

[57] GOLDMAN, O., *Rings and modules of quotients,* J. Algebra 13 (1969), 10-47.

[58] HACQUE, M., *Localisations exactes et localisations plates,* Publ. Dép. Math. (LYON I) 6 (1969), 97-117.

* [59] HAJARNAVIS, C.R., and LENAGAN, T.H., *Localisation in Asano Orders,* J. Algebra 21 (1972), 441-449.

* [60] HALWANI, I., *Sur les ordres d'Asano,* Publ. Dép. Math. (LYON I) 11 (1974), 107-121. (Et Thèse (3ème cycle) Université Claude-Bernard (LYON I), 29 mai 1974).

[61] HEINICKE, A.G., *On the ring of quotients at a prime ideal of a right noetherian ring,* Canad. J. Math. 24 (1972), 703-712.

[62] HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie,* B.G. Teubner, Verlags-Gesellschaft, STUTTGART, 1962.

[63] HUDRY, A., *Sur la théorie des idéaux dans les anneaux premiers à identité polynômiale,* Arch. Math. 31 (1978), 443-449.

[64] IKEDA, M., *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum,* Osaka Math. J., 14 (1962), 135-144.

[65] JACOBSON, N., *Theory of rings,* Math. Surveys 2, Amer. Math. Soc., PROVIDENCE, 1943.

[66] KÖTHE, G., *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum,* Math. Ann. 105 (1931), 15-39.

[67] LAMBEK, J., *Lectures on rings and modules,* Blaisdell, WALTHAM, 1966.

[68] LAMBEK, J., and MICHLER, G., *The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring*, J. Algebra 25 (1973), 364-389.

* [69] LENAGAN, T.H., *Bounded Asano orders are hereditary*, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 67-69.

[70] LESIEUR, L., et CROISOT, R., *Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I, Colloque d'Algèbre Supérieure, BRUXELLES, 1956, pages 79 à 121.

[71] LESIEUR, L., et CROISOT, R., *Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, II, Math. Ann. 134 (1958), 458-476.

* [72] MARUBAYASHI, H., *Non commutative Krull rings*, Osaka J. Math. 12 (1975), 703-714.

* [73] MARUBAYASHI, H., *A Characterization of bounded Krull prime rings*, Osaka J. Math. 15 (1978), 13-20.

* [74] MARUBAYASHI, H., *On bounded Krull prime rings*, Osaka J. Math. 13 (1976), 491-501.

* [75] MARUBAYASHI, H., *Remarks on ideals of bounded Krull prime rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 53 (1977), 27-29.

* [76] MAURY, G., *La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3ème série 78 (1961), 31-100.

* [77] MAURY, G., *La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques*, II, Bull. Soc. Math. France 98 (1970), 369-399.

* [78] MAURY, G., *La condition intégralement clos* III *: sur les ordres maximaux au sens d'Asano non nécessairement réguliers*, J. Algebra 25 (1973), 522-533.

* [79] MAURY, G., *Anneaux de fractions classiques dans les* R-*ordres maximaux*, Comm. Algebra 3 (1975), 1083-1091 ; *et complément à l'article précédent*, Comm. Algebra 3 (1975), 1093-1096.

[80] MAURY, G., *Un théorème de l'idéal principal dans les* R-*ordres*, Comm. Algebra 7 (1979), 677-687.

* [81] MAURY, G., *La théorie des ordres maximaux au sens de K. Asano*, Vorlesungen aus dem Mathematischen Institut Giessen, Heft 6, 1976.

* [82] MAURY, G., *Ordres maximaux presque factoriels*, Comm. Algebra, à paraître 1980.

* [83] MAURY, G., *Exemples et compléments en théorie des ordres maximaux au sens de K. Asano*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 284 (1977), 839-841.

[84] MICHLER, G.O., *Halberbliche, fastlokale Ordnungen in einfachen Artinringen,* Arch. Math. 18 (1967), 456-464.

* [85] MICHLER, G.O., *Asano orders,* Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 421-443.

* [86] MORI, S., and DODO, T., *Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritäsbereichen,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 7 (1937), 15-28.

* [87] MURATA, K., *On submodules over an Asano order of a ring,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 50 (1974), 584-588.

[88] NAGATA, M., *Basic theorems on commutative rings,* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. 29 (1955), 58-77.

* [89] NAUWELAERTS, E., *Symmetric localisation of Asano orders,* in Ring Theory : Proc. 1977 Antwerp conference, pp. 65-80, Lecture Notes in pure and applied math. 40, Marcel Dekker, NEW YORK, 1978.

[90] ORE, O., *Theory of non-commutative polynomials,* Ann. of Math. 34 (1933), 480-508.

[91] POPESCU, N., and SPIRCU, T., *Quelques observations sur les épimorphismes plats (à gauche) d'anneaux,* J. Algebra 16 (1970), 40-59.

[92] PROCESI, C., *Rings with polynomials identities,* Marcel Dekker, NEW YORK, 1973.

* [93] RAMRAS, M., *Maximal orders over regular local rings of dimension two,* Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 457-479.

[94] RAYNAUD, J., *Localisations et Spectres d'Anneaux,* Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université Claude-Bernard (LYON I), 21 septembre 1976.

* [95] REINER, I., *Maximal Orders,* Academic Press, LONDON, 1975.

[96] RENAULT, G., *Algèbre non commutative,* Varia Mathematica, Gauthier-Villars, PARIS, 1975.

[97] RICHMAN, F., *Generalized quotient rings,* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 794-799.

* [98] RILEY, J.A., *Reflexive ideals in maximal orders,* J. Algebra 2 (1965), 451-465.

[99] ROBSON, J.C., P.R.I.-*rings and* I.P.R.I.-*rings,* Quart. J. Math. Oxford Ser. 18 (1967), 125-145.

* [100] ROBSON, J.C., *Noncommutative Dedekind rings,* J. Algebra 9 (1968), 249-265.

* [101] ROBSON, J.C., *Cyclic and faithful objects in quotient categories with applications to noetherian simple or Asano rings,* in Non commutative ring theory Int. Conf. : Kent 1975, pp. 151-172, Lecture Notes in Math. 545, Springer-Verlag, BERLIN, 1976.

[102] SANDERSON, D.F., *A generalization of divisibility and injectivity in modules*, Canad. Math. Bull. 8 (1965), 505-513.

[103] SCHELTER, W., *Integral extensions of rings satisfying a polynomial identity*, J. Algebra 40 (1976), 245-257.

[104] SILVER, L., *Noncommutative Localizations and Applications*, J. Algebra 7 (1967), 44-76.

[105] STENSTRÖM, B., *Rings of Quotients*, Grundlehren Math. Wiss. 217, Springer-Verlag, BERLIN, 1975.

* [106] STORRER, H.H., *A Characterization of Prüfer domains*, Canad. Math. Bull. 12 (1969), 809-812.

[107] VAN DER WAERDEN, B.L., *Moderne Algebra, Vol. I and II*, Springer-Verlag, BERLIN, 1931.

[108] VAN OYSTAEYEN, F., *Prime spectra in non-commutative algebra*, Lecture Notes in Math. 444, Springer-Verlag, BERLIN, 1975.

[109] ZARISKI, O., and SAMUEL, P., *Commutative algebra, Vol. I and II*, Van Nostrand, PRINCETON, 1958 and 1960.

[110] ZELMANOWITZ, J.M., *Endomorphism rings of torsionless modules*, J. Algebra 5 (1967), 325-341.

BIBLIOGRAPHIE SUPPLEMENTAIRE.

* [111] ASANO, K., *Ergänzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schiefringen*, J. Inst. Polytechnics Osaka City Univ. Ser. A 3 (1952), 1-7.

[112] CHATTERS, A.W., GOLDIE, A.W., HAJARNAVIS, C.R., and LENAGAN, T.H., *Reduced rank in noetherian rings*, J. Algebra, à paraître 1980.

* [113] REHM, H.P., *Multiplicative ideal theory of non commutative Krull pairs (II)*, J. Algebra 48 (1977), 166-181.

[114] NAGARAJAN, *Groups acting on noetherian rings*, Nieuw Arch. Wisk. 16 (1968), 25-29.

[115] JATEGAONKAR, A.V., *Relative Krull dimension and prime ideals in right noetherian rings*, Comm. Algebra 2 (1974), 429-458.

* [116] MAURY, G., *la condition intégralement clos* IV *: Modules de type fini sur un ordre maximal*, Publ. Dép. Math. (LYON I) 11 (1974), 1-22.

I N D E X.