# 泊松分布与泊松流

徐春芳

（福建师范大学 数学与计算机科学学院 福建 福州 350007）

**摘 要：** 主要从泊松分布以及泊松流的性质出发，给出它们在应用方面的一些探讨。

**关键词：** 泊松分布；泊松流；等待时间

**中图分类号：** 021 **文献标识码：** A **文章编号：** 1671－7597（2010）0220011－01

## 1 引入

泊松分布是由法国数学家泊松于1837年引入的。泊松分布也是概率论中最重要的几个分布之一。一种分布之所以重要，通常是由于两种原因：或者它直接产生于实际问题中，或者它作为某些重要的分布的极限而出现，因而在理论上有重要的意义。泊松分布也是如此：首先，已经发现许多随机现象服从泊松分布。特别是在社会生活、物理科学等领域，诸如公共汽车站来到的乘客数，放射性分裂落到某区域的质点数等等。其次，对泊松分布的深入研究（特别是通过随机过程的研究）已发现它具有许多特殊的性质和作用。

## 2 定义和性质

### 2.1 泊松分布

设X为离散型随机变量，且X的取值为所有非负整数。如果X的概率函数为：

$$P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} & 对于k=0,1,2,\text{L}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

则称X服从均值为$\lambda$（$\lambda$>0）的泊松分布。

泊松分布的均值和方差都为$\lambda$。

定理1：如果$X_1,X_2,\text{L}\ ,X_k$是相互独立的随机变量，且$X_i$服从均值为$\lambda_i\left(i=1,2,\text{L}\ k\right)$的泊松分布，则$X_1,X_2,\text{L}\ ,X_k$服从均值为$\lambda_1+\lambda_2+\text{L}+\lambda_k$的泊松分布。

### 2.2 泊松流

源源不断地出现的许多随机的质点构成一个随机质点流，简称流。例如，到某商店去的顾客形成一个顾客流等。

以$X_t$表示在时间区间$(0,t]$内总共出现的质点个数，我们讨论$X_t$的分布。

流称为泊松流，如果流满足下列条件：

1）独立增量性（无后效性）。在任意$n$个不相交的区间$(a_i,b_i]\ (i=1,2,\text{L}\ ,n)$中，各自出现的质点的个数$X(a_i,b_i]$是独立的，即对任意$n$个非负整数$k_i$，诸事件$X(a_i,b_i]_t=k_i$，$i=1,2,\text{L}\ ,n$是独立的；

2）平稳性。在长为$t$的区间$(a,a+t]$中，出现$k$个质点的概率$\theta_k(t)=P(X(a,a+t]=k)$与$a$无关，且$\theta_0(t)$不恒等于1，并且在有限区间$(a,a+t]$中只出现有限多个质点，即有$\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k(t)=1$；

3）普通性。在$(a,a+t]$中出现一个以上质点的概率$\psi(t)\left(=1-\theta_0(t)-\theta_k(t)\right)$是$t$的高阶无穷小量，即$\lim_{t\to0}\dfrac{\psi(t)}{t}=0$。

泊松流也称为泊松过程。

定理2：对于泊松流，$X_t$有参数为$\lambda t$的泊松分布，$\lambda$是正常数；即：

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},(k=0,1,2,\text{L}\ )$$

通常我们用泊松分布来描述事件出现的次数，由于λ是单位时间内事件发生的平均数，λ越大，单位时间内平均发生的事件越多，所以也称λ为泊松过程的强度。用强度为λ的泊松过程来描述单位时间内期望出现事件数为λ的随机事件的出现次数，若在互不相交的时间区域内事件的发生是相互独立的，且两个或多个事件能在同一时间发生，则时间间隔为t时，事件出现的次数服从均值为λt的泊松分布。

## 3 典型例题

### 3.1 顾客到达数

一个店主用独立且服从均值为4.5的泊松随机变量来描述在互不相交的时间间隔里到的顾客数，认为平均每小时到达商店购物的顾客数为4.5。求在两个小时的时间间隔里至少有12名顾客到达商店购物的概率为多少？

解：以$X_1$表示第一小时内到达商店购物的顾客数，$X_2$表示第二小时内到达商店购物的顾客数，则可以认为$X_1$和$X_2$是相互独立的泊松随机变量，且均值都为4.5。由定理1，两个小时内到达购物的顾客总数$X=X_1+X_2$服从均值为9的泊松分布。通过查泊松概率表可得到所求概率是$P(X\geq12)=0.197$。

### 3.2 等待时间悖论

公共汽车依泊松过程到达车站，依次相继到达的汽车间隔的时间期望是λ。假设某人在任意时刻t到达车站，求他等待汽车的时间$X_t$的期望$E(X_t)$是多少？

解一：由泊松过程的无后效性，他等待的时间分布不依赖于他的到达时刻。在这种情形下，$E(X_t)=E(X_0)=\lambda$。

解二：他的到达时刻是“随机地出现”在区间内，在两辆相继到达的汽车之间，由于对称性，他的期望等待时间是两辆相继到达的汽车时间间隔时间的一半，即$E(X_t)=\dfrac{1}{2}\lambda$。

说明：这两个解法都是正确的，并且都被用于实际中。矛盾在于：

我们讨论时间间隔$W_1=S_1,W_2=S_2-S_1,\text{L}$（$S_n$表示第$n$辆车到达的时刻）。则$W_k$有相同的分布，其期望值为。选取“任意”特殊的就得到一个随机变量，从直观上会认为它的期望值为，只要这种选择不需要用到样本序列的知识。但这是不正确的。在本例中，我们选择一个变量使得，这里是固定的。这个选择是不考虑实际过程而做出的，但是这样选出的有两倍的期望值。由这一事实，本例的解二假设有期望等待时间，于是矛盾消失。这个悖论的解决引起了极大地震动，但是我们的思考方式经过适当的调整，它在直观上就变得明显了。粗略地说，长区间比短区间有较多的覆盖点的机会。

## 4 小结

泊松过程除用来描述一定时间间隔内到达者的数量，计算等待的时间间隔外，还可以用来描述一定空间内发生的事件数，某一放射源放射的原子颗粒数等等。泊松过程的模型有如此广泛的应用，主要原因有两个：第一，模型计算起来比较简单；第二，若关于事件的发生可以做出三条合理假设，那么对该模型就有一个很好数学证明。

**参考文献：**

[1]费勒，概率论及其应用，第一卷，胡迪鹤、林向清译，第二卷，李志阐、郑元禄译，北京：科学出版社，1964，1994.

[2]王梓坤，概率论基础及其应用，北京：科学出版社，1976.

[3]何书元，随机过程，北京：北京大学出版社，2008.

[4]孙清华、孙昊，随机过程疑难分析与解题方法，武汉：华中科技学出版社，2008.

[5]李贤平，概率论基础，北京：高等教育出版社，1997.

# 泊松分布与泊松流

作者：徐春芳
作者单位：福建师范大学,数学与计算机科学学院,福建,福州,350007
刊名：硅谷
英文刊名：SILICON VALLEY
年，卷(期)：2010(4)

参考文献(6条)

1. 孙清华;孙吴 随机过程疑难分析与解题方法 2008

2. 何书元 随机过程 2008

3. 王梓坤 概率论基础及其应用 1976

4. 李贤平 概率论基础 1997

5. 费勒;李志阐;郑元禄 概率论及其应用 1994

6. 费勒;胡迪鹤;林向清 概率论及其应用 1964