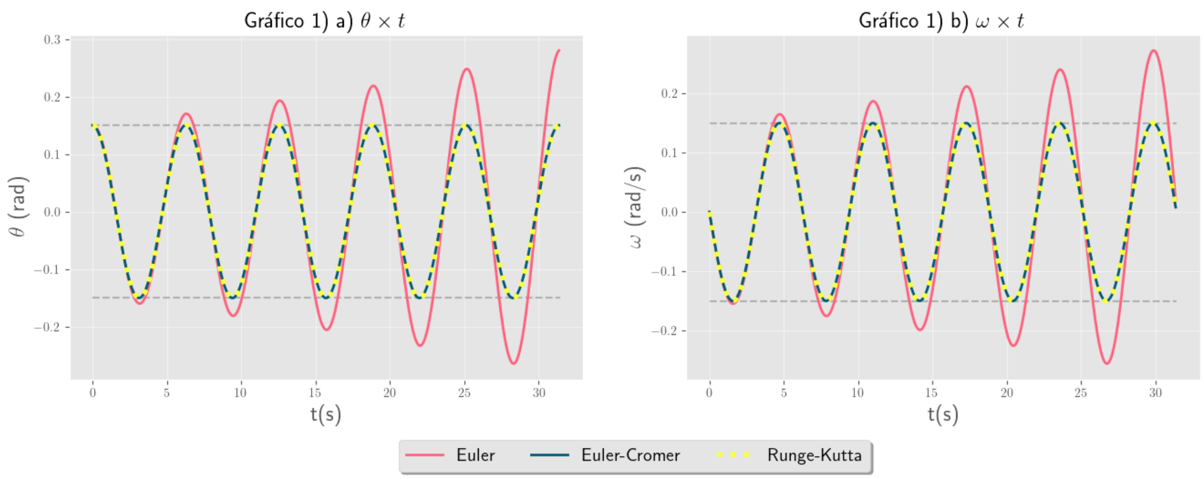
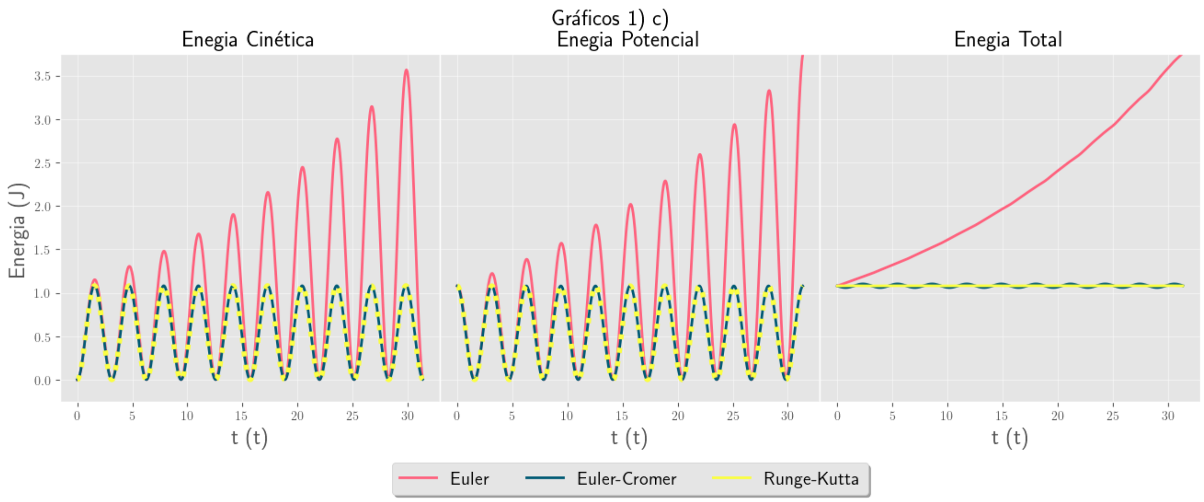
LISTA 1

Pedro Zilves Maio Ventura
Instituto de Física - Universidade Federal do Rio de Janeiro
e-mail: pedrozventura@gmail.com

1. QUESTÃO 1: MÉTODO DE EULER, EULER-CROMER E RUNGE-KUTTA



Em ambos os Gráficos de $\theta \times t$, quanto de $\omega \times t$ é possível observar que a solução de Euler para o problema não se adequa muito bem, aumentando a amplitude do movimento e da velocidade com o passar do tempo. Entretanto, as soluçãos com o método de Euler-Cromer e Runge-Kutta têm uma adequação que é visualmente nítida. As curvas destes se sobrepõem e, a princípio, mantêm a amplitude do movimento restrita a área dos Gráficos entre as linhas tracejadas.

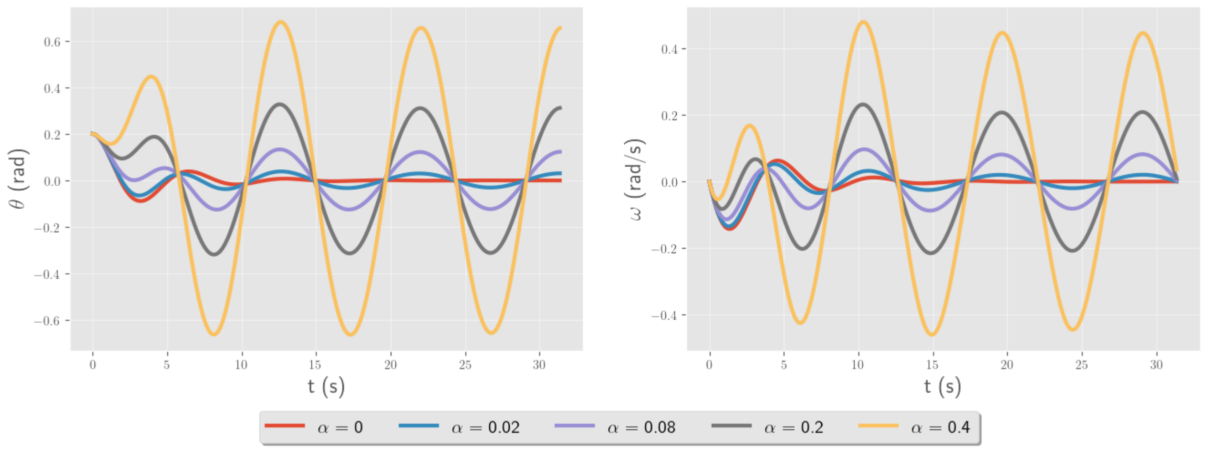


O mesmo comportamento descrito anteriormente é visível nos gráficos da energia cinética e potencial, com o aumento para o método de Euler. No último gráfico, da energia total, pode se ver que este método não conserva a energia. Porém um comportamento interessante aparece para o método de Euler-Cromer com a curva oscilando ao redor do valor da energia mas para o de Runge-Kutta a energia segue uma linha reta, aqui se mostra a principal diferença entre os dois métodos.

Comparando os 3 métodos, podemos constatar que: o método de Euler não se adequa bem para solucionar a equação diferencial de segunda ordem. O de Euler-Cromer tem um resultado satisfatório para as soluções com uma ressalva para a energia total que se mantêm oscilando, o que pode ser um impecilho para determinadas análises. E o método de Runge-Kutta cumpre seu papel perfeitamente, conservando a energia e descrevendo o movimento da forma esperada.

2. QUESTÃO 2: PÊNDULO FORÇADO, AMORTECIDO E NÃO-LINEAR

Gráfico 2) a)



O método escolhido para solucionar numericamente a equação do problema foi o de Euler-Cromer, pois ele é suficiente para produzir as análises das posições e velocidades, e a oscilação da energia não é um problema para tirar conclusões sobre movimento do pêndulo. O intervalo de tempo Δt, correspondendo ao passo da iteração, foi de $0.04\,s$ repetindo o do procedimento da primeira questão. No Gráfico acima, estão alguns exemplos de soluções para a posição angular θ e velocidade angular ω com diferentes valores de α.

Gráfico 2) b)

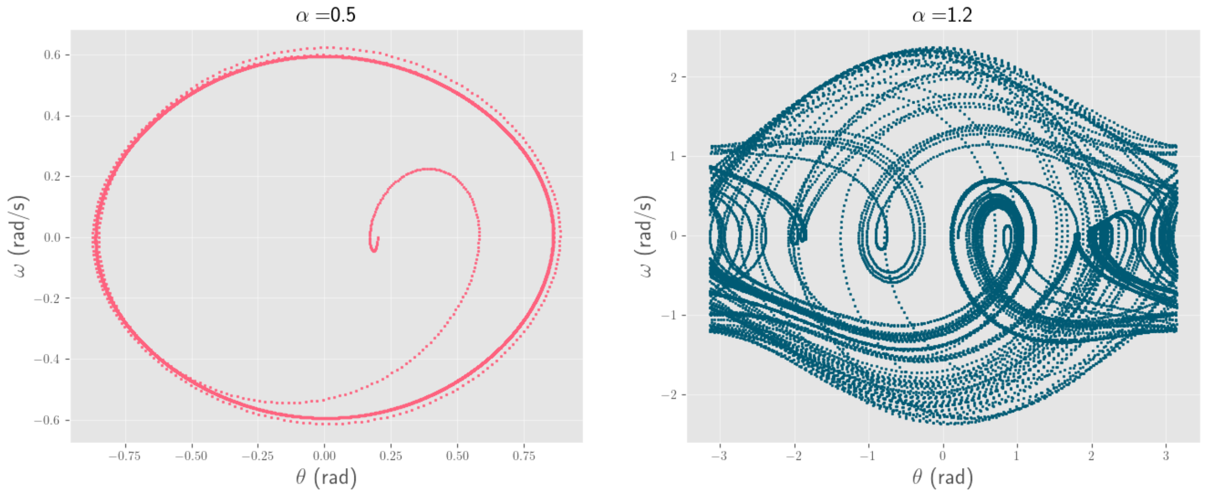


Gráfico 2) c)

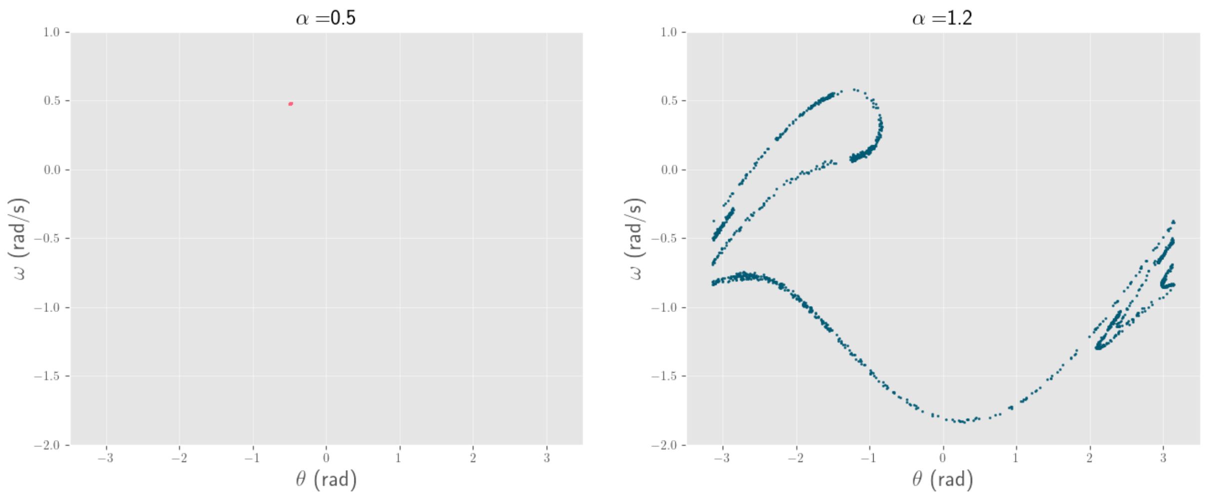
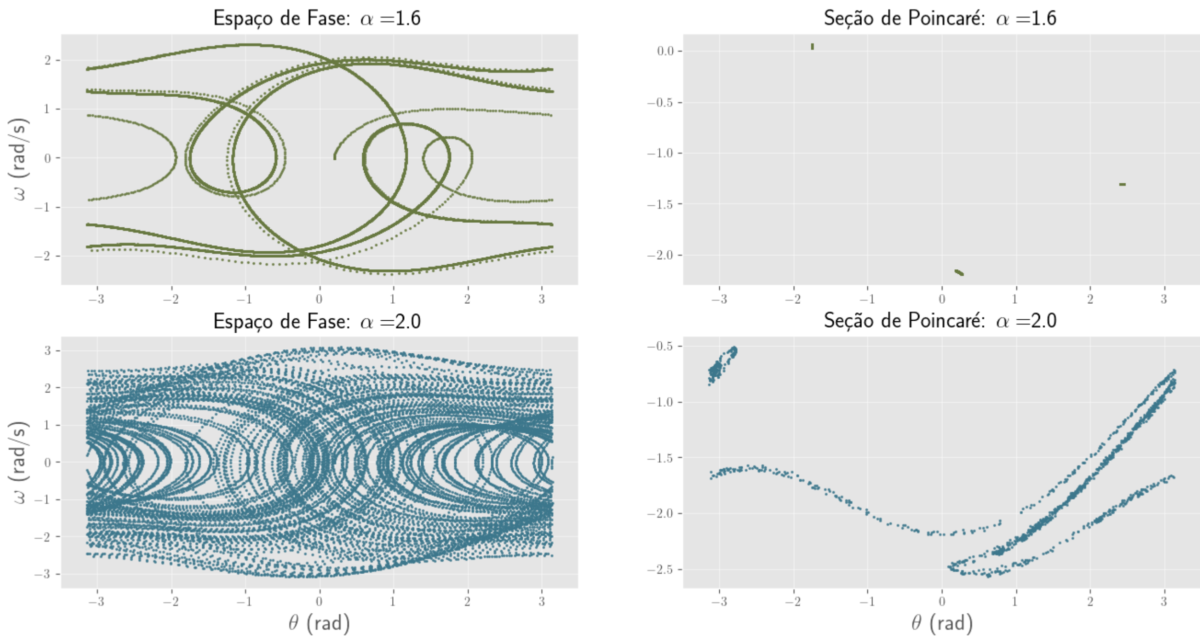


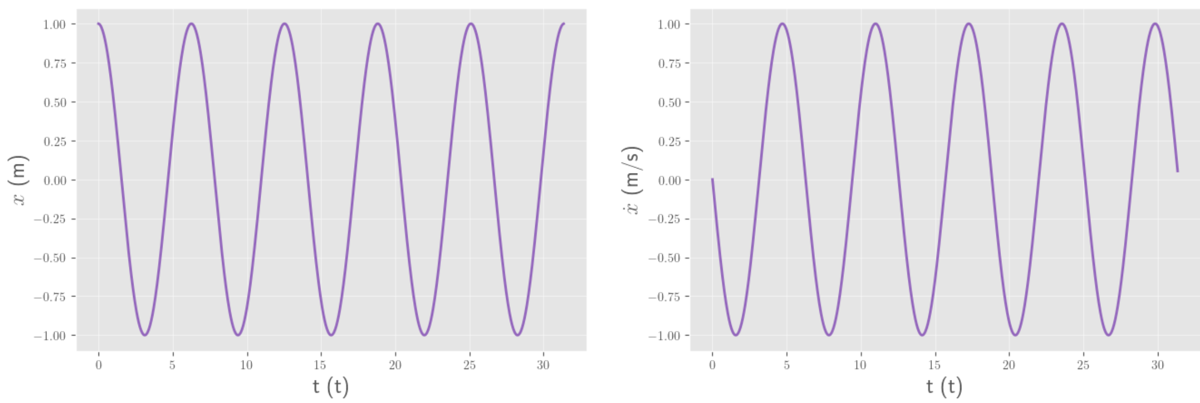
Gráfico 2) d)



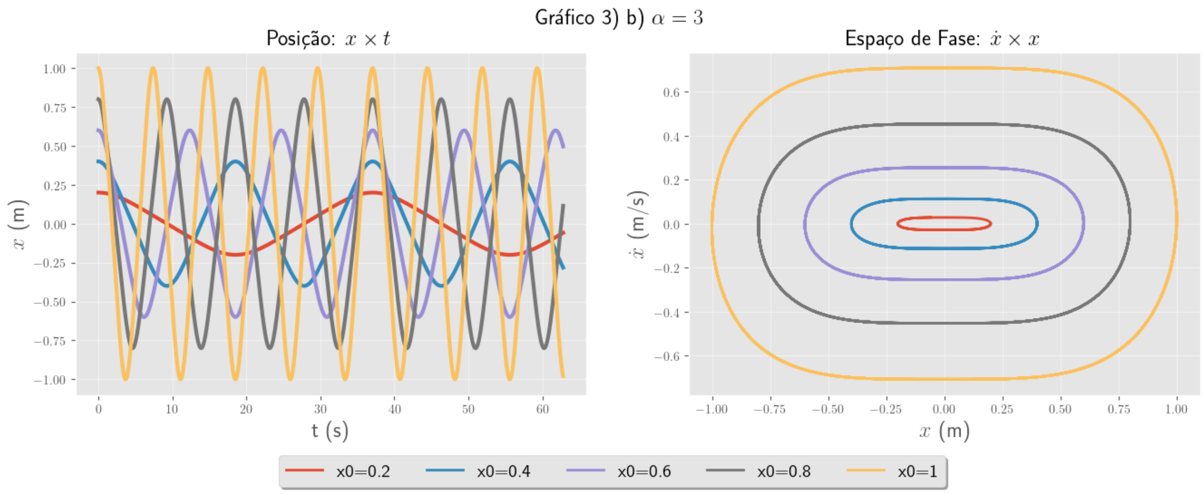
Com as seções de Poincaré dos gráficos de 2)c) e 2)d), nota-se que há um certo comportamente ordenado por trás do movimento caótico do pêndulo. A evolução da seção de Poincaré com o parâmetro α pode ser útil para descrever o movimento em um gráfico mais *limpo* do que do espaço de fase completo.

3. QUESTÃO 3: MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E ANARMÔNICO

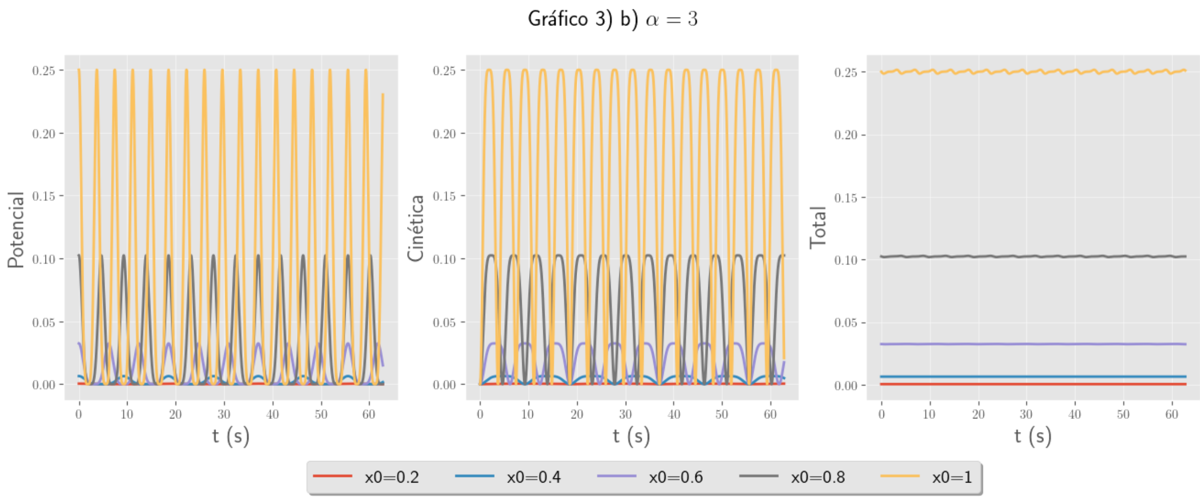
Gráfico 3) a) $\alpha = 1$



Para $\alpha = 1$, temos uma equação idêntica ao do movimento harmônico descrito por um sistema massa mola (*com massa igual a 1*). O comportamento esperado é o de oscilações com amplitude igual a da posição inicial ($x_0 = 1$, neste caso) ao redor do 0, com um período bem definido de $T = 2\pi/\sqrt{k}$ - com $k = 1$ temos um período de $2\pi s$. Daqui, retiramos a informação de que k tem unidade de s^{-2}. Num caso geral com $\alpha \neq 1$, a unidade de k é $m^{1-\alpha}/s^2$.



Aqui nos deparamos com um movimento anarmônico. o gráfico de $x \times t$ para diferentes posições iniciais x_0 mostra nítidamente a presença de mais oscilações para um mesmo intervalo de tempo. Ou seja, com o aumento da amplitude de oscilação - aumento de x_0 - temos uma redução do período de oscilação. Um outro fator importante de mencionar é o comportamento no espaço de fase ($\dot{x} \times x$). *Orbitas* mais externas correspondem a movimentos com amplitude maior.



E seguindo para os gráficos de energia, percebe-se a mesma relação das orbitas no espaço de fase com a energia total do movimento. A energia potencial (U), cinética (K) e total (E) foram calculadas da seguinte forma para $\alpha = 3$:

$$U(x) = -\int_0^x -kx'^3\,dx' = \frac{kx^4}{4} \tag{1}$$

$$K = \frac{\dot{x}^2}{2} \tag{2}$$

$$E = K + U(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{4} \tag{3}$$

O fato do período depender da amplitude, está diretamente relacionado com a expressão da energia (1) e com a forma da energia cinética (2), em especial a potência de x. Como é possivel ver no gráfico da energia total, ela é constante no movimento (apesar da oscilação já discutida por conta do método de Euler-Cromer). Uma vez que sabemos isso, podemos manipular a primeira igualdade da equação (3), para relacionarmos o período de oscilação com a energia E do movimento.

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \Longrightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2[E - U(x)]} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{2[E - U(x)]}}$$

Como estamos trabalhando com potenciais da forma (1), ou semelhantes com potências pares de x (equivalentes a α ímpares), temos um potencial par. Outra informação importante é que para uma dada energia total E teremos pontos de retorno em $-x_0$ e x_0, nos quais $E = U(x_0) = U(-x_0)$. Por se tratar de um potencial par, com essa simetria ao redor do zero e com dois pontos de retorno, podemos integrar a última relação para obtermos o período:

$$\int_{t_{-x_0}}^{t_{x_0}} dt = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}} =$$

$$T(E) = 4\int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}} \tag{4}$$

A equação (4) demonstra a relação do período com a energia. Em se tratando do potencial (1) e escrevendo a energia como: $E = k{x_0}^4/4$, a relação fica:

$$T(x_0) = 4\int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{[{x_0}^4 - x^4]k/2}} \Rightarrow \frac{4}{{x_0}^2}\sqrt{\frac{2}{k}}\int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-(x/x_0)^4}} \tag{5}$$

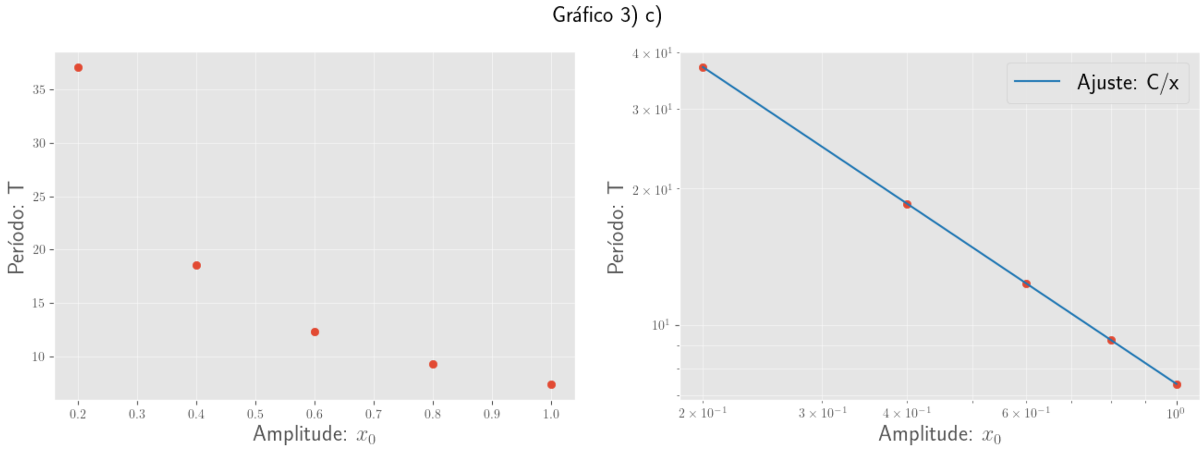
Com uma mudança de variáveis $u = x/x_0$ e $k = 1\,m^{-2}s^{-2}$, temos:

$$T(x_0) = \frac{4}{x_0}\sqrt{2}\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \tag{6}$$

A integral em (6), pode ser resolvida númericamente com resultado igual à 1.311028777. Dessa forma o período de oscilação do movimento anarmônico com $\alpha = 3$, é dado por:

$$T(x_0) \cong \frac{7.416}{x_0} \tag{7}$$

Essa é exatamente a relação vista para o movimento no gráfico de $x \times t$, o período do movimento é inversamente proporcional a amplitude do movimento ($T \propto {x_0}^{-1}$).



Neste gráfico vemos a distribuição dos períodos, calculados tomando a diferença temporal entre os picos no gráfico de $x \times t$, em função da amplitude. O mesmo gráfico porém num gráfico *dilog* na direita vemos uma reta, o que caracteriza uma lei de potência. Ajustando uma função C/x, temos um parâmetro $C = 7.415 \pm 0.002$, de modo que a relação obtida (7) está compatível com os dados com uma discrepância de metade de 1σ, validando a relação desenvolvida, o método de aferição dos períodos e o ajuste.

Se tomarmos $\alpha = 1$, um oscilador harmônico simples, a relação (4) fica da forma:

$$T(x_0) = 4\int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{[{x_0}^2 - x^2]k}} \Rightarrow T = 4\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \tag{8}$$

De modo que o período não é uma função da amplitude, é simplesmente constante. Aqui, é possível ver mais explicitamente porque a potência quarta de x em (1) diferente da potência de 2 da velocidade na energia cinética acarreta em uma dependência da amplitude.