Université de Rennes 1
Année 2020/2021

L3

PRB-PSI1 – C3 du 1/12/2020-Corrigé

Exercice 1 (10P.)
(i) Soit $a > 0$. Déterminer b en fonction de a pour que

$$x \mapsto f(x) = \frac{b}{x+a}\mathbf{1}_{[0,e-1]}(x)$$

soit une densité de probabilité.

Solution : *On doit avoir* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, *c-à-d*

$$1 = b\int_0^{e-1} \frac{1}{x+a}dx = b[\ln(x+a)]_0^{e-1} = b(\ln(e-1+a) - \ln(a)) = b\ln\left(\frac{e-1+a}{a}\right).$$

Ceci signifie que $\boxed{b = \frac{1}{\ln\left(\frac{e-1+a}{a}\right)}}$.

On suppose dans toute la suite que $a = b = 1$**.**
Soit X une variable aléatoire continue de densité f.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(\mathrm{X} = 1)$ et $\mathbf{P}(0 < \mathrm{X} < 2)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{X} > 3)$. *(A toute fin utile, on signale que* $e \approx 2,718$*).*

Solution : *On remarque que, si dans (i) on prend* $a = 1$, *on a bien* $b = 1$. *On a*

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} = 1) = 0 \qquad \textit{car} \quad \mathrm{X} \quad \textit{est une v.a.r. continue.}$$

$$\mathbf{P}(0 < \mathrm{X} < 2) = \int_0^{+\infty} f(x)dx \underset{(e-1<2)}{=} \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1.$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} > 3) = \int_3^{+\infty} f(x)dx \underset{(e-1<3)}{=} \int_3^{+\infty} 0dx = 0.$$

(iii) Calculer l'espérance de X.

Solution : *On a*

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx = \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx$$
$$= \int_0^{e-1} (1 - \frac{1}{x+1})dx = [x - \ln(x+1)]_0^{e-1} = e-1-1 = e-2.$$

(iv) Soit $Y = X^2$. Calculer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une v.a.r à densité et calculer la densité de Y.

Solution : *Soit* $y \in \mathbf{R}$. *Si* $y < 0$, *alors* $F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = 0$, *car* $X^2 \geq 0$. *Soit* $y \geq 0$; *alors*

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} f(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{x+1} dx.$$

Si $\sqrt{y} \geq e-1$, *c-à-d si* $y \geq (e-1)^2$, *alors* $F_Y(y) = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = 1$. *Si* $\sqrt{y} \leq e-1$, *c-à-d* $y \leq (e-1)^2$, *alors* $F_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^{\sqrt{y}} = \ln(\sqrt{y}+1)$. *En résumé, on a*

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 \quad si \quad y < 0 \\ \ln(\sqrt{y}+1) \quad si \quad 0 \leq y \leq (e-1)^2 \\ 1 \quad si \quad y \geq (e-1)^2 \end{cases}}$$

On obtient la densité f_Y *de* Y *en dérivant* F_Y :

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 0 \quad si \quad y < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)} \quad si \quad 0 \leq y \leq (e-1)^2 \\ 0 \quad si \quad y \geq (e-1)^2. \end{cases}}$$

Exercice 2 (10P.) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(i) Vérifier que f est bien une densité.

Solution : *On a*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dx\right) dy = \int_0^1 [x^2/2 + xy]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 (1/2 + y)dy = [y/2 + y^2]_{y=0}^{y=1} = 1/2 + 1/2 = 1.$$

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f.

(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.

Solution : *On a* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ *pour* $x \in \mathbf{R}$ *et donc* $f_X(x) = 0$ *pour* $x \notin [0,1]$. *Soit* $x \in [0,1]$; *alors* $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = [xy + y^2/2]_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}$. *En résumé, on a*

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R} : \qquad f_X(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(x).}$$

De manière similaire, par symétrie de f *en* x *et* y, *on a, en échangeant les rôles de* x *et* y *,*

$$\boxed{\forall y \in \mathbf{R} : \qquad f_Y(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(y).}$$

(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution : *Non,* X *et* Y *ne sont* ***pas indépendantes****; en effet, supposons par l'absurde que* X *et* Y *sont indépendantes. On a alors (voir Cours)* $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, *pour tous* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. *On a, en particulier,* $x + y = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$, *pour* ***tous*** $(x,y) \in [0,1]^2$. *Ceci est absurde : en prenant* $y = 0$ *par exemple, on aurait* $x/2 = 1/4$ *pour tout* $0 \le x \le 1$*).*

(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Solution : *On a* $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2})dx = [x^3/3 + x^2/4]_0^1 = 7/12$. *Comme* X *et* Y *ont la même loi, on a aussi* $\mathbf{E}(Y) = 7/12$. *On a également*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2y + xy^2)dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \left([yx^3/3 + y^2x^2/2]_{x=0}^{x=1}\right)dy = \int_0^1 (y/3 + y^2/2)dy = [y^2/6 + y^3/6]_{y=0}^{y=1} = 1/3.
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = (1/3) - (7/12)^2 = -1/144.}$