5.4 Lois et espérance conditionnelles

Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire à densité f. Comme dans le cas de couples discrets (voir Definition 3.3.10), on peut définir la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. On rappelle que f_X et f_Y sont les densités de X et Y.

Définition 5.4.1 (Densité conditionnelle) Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $f_X(x) > 0$. La fonction $f_{Y|X=x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall y \in \mathbf{R} : \qquad \boxed{f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$$

est une densité, appelée *densité conditionnelle* de Y sachant $X = x$. De manière similaire, si $y \in \mathbf{R}$ tel que $f_Y(y) > 0$, la densité conditionnelle $f_{X|Y=y}$ de X sachant $Y = y$ est définie par $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

Remarque 5.4.2 On remarque que $f_{Y|X=x}$ est bien une densité pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $f_X(x) > 0$; en effet, en utilisant la Proposition 5.2.1, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X=x}(y)\,dy = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{f_X(x)} f_X(x) = 1.$$

Définition 5.4.3 (Espérance conditionnelle) On suppose maintenant que Y possède une espérance.
(i) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $f_X(x) > 0$, le nombre réel $\mathbb{E}(Y|X = x)$, défini par

$$\boxed{\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)\,dy},$$

est appelé *espérance conditionnelle* de Y sachant $X = x$.
(ii) Soit $N = \{x \in \mathbf{R} \mid f_X(x) = 0\}$ et définissons $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $\psi(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ pour $x \in \mathbf{R} \setminus N$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \in N$. La variable aléatoire $\mathbb{E}(Y|X)$, définie par

$$\boxed{\mathbb{E}(Y|X) = \psi(X)},$$

est appelée *espérance conditionnelle* de Y sachant X.

Remarque 5.4.4 (i) Soit $N = \{x \in \mathbf{R} \mid f_X(x) = 0\}$. Alors $\mathbf{P}(X \in N) = \int_N f_X(t)\,dt = 0$. En notant $A = \{X \notin N\}$, on a donc $\mathbf{P}(A) = 1$. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}(Y|X)(\omega) = \psi(X(\omega)) = \mathbb{E}(Y|X = X(\omega))$$

pour $\omega \in \mathrm{A}$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})(\omega) = 0$ pour $\omega \notin \mathrm{A}$.
(ii) En échangeant les rôles de X et Y, on définit de manière similaire $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})$, l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

L'espérance conditionnelle possède la propriéte fondamentale suivante.

Proposition 5.4.5 *Soit* $\mathrm{Z} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *un couple aléatoire à densité* f. *On suppose que* Y *possède une espérance. Alors, on a*

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x) f_{\mathrm{X}}(x)\,dx.$$

Démonstration On a, par la formule de transfert (Proposition 5.2.4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_{\mathrm{X}}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x) f_{\mathrm{X}}(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x}(y) f_{\mathrm{X}}(x)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x,y)}{f_{\mathrm{X}}(x)} f_{\mathrm{X}}(x)\,dy\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\mathrm{Y}}(y)\,dy = \mathbb{E}(\mathrm{Y}).
\end{aligned}$$

Exemple 5.4.6 Reprenons l'Exemple 5.1.3 (voir aussi 5.2.2 et 5.4.6). On rappelle que la loi f de $\mathrm{Z} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est la loi uniforme sur le triangle

$$\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Pour $x \in]0,1[$, on a $f_{\mathrm{X}}(x) = 2 - 2x > 0$ et

$$f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x}(y) = 2\frac{\mathbf{1}_{\mathrm{T}}(x,y)}{2-2x} = \frac{1}{1-x}\mathbf{1}_{[0,1-x]}(y)$$

La loi de Y sachant $\mathrm{X} = x$ est donc la loi uniforme $\mathscr{U}([0, 1-x])$. On a ainsi

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x) = \frac{1-x}{2}$$

et donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = \frac{1-\mathrm{X}}{2}.$$

Rappelons (vor Exemple 5.3.3) que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 1/3$. On a donc bien

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})) = \mathbb{E}\left(\frac{1-\mathrm{X}}{2}\right) = \frac{1-1/3}{2} = 1/3 = \mathbb{E}(\mathrm{Y}).$$

5.5 Sommes de variables aléatoires indépendantes

Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire à densité. Supposons que X et Y sont **indépendantes.**

Nous voulons déterminer la densité de la v.a.r. $X+Y$.

Proposition 5.5.1 *Soient* X *et* Y *des v.a.r. indépendantes, de densité f_X et f_Y respectivement. Alors* $X+Y$ *est une v.a.r. continue de densité f_{X+Y} donnée par*

$$\forall x \in \mathbf{R}: \qquad \boxed{f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y) f_Y(y)\,dy.}$$

Démonstration Soit f la densité de $Z = (X, Y)$. Rappelons (voir Proposition 5.2.3) que, comme X et Y sont indépendants, on a $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Calculons la fonction de répartition F_{X+Y} de $X+Y$. Soit $t \in \mathbf{R}$. Considérons le demi-plan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \le t\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le t - y\}.$$

On a

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \mathbf{P}(X+Y \le t) \\ &= \int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_D f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x) f_Y(y)\,dx\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x)\,dx\right) dy \\ &\underset{(x=s-y)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{t} f_X(s-y)\,ds\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-y) f_Y(y)\,ds\right) dy \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la densité f_{X+Y} de $X+Y$ est $s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-y) f_Y(y)\,ds$.■

Remarque 5.5.2 La fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y) f_Y(y)\,dy$ comme dans la Proposition 5.5.1 est appelé le **produit de convolution** des fonctions f_X et f_Y.

Exemple 5.5.3 Soient X et Y des v.a.r. indépendantes, suivant toutes deux une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

En se rappelant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, on a, pour la densité f_{X+Y} de $X+Y$:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2+y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x^2}{2}-xy+y^2)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2} dy \\
&\underset{(t=y-x/2)}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $X+Y \sim \mathcal{N}(0,2)$. Plus généralement, avec un calcul similaire, on peut montrer que, si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1 + \sigma_2)$.

5.6 Changements de variables

Avant d'aborder le cas d'un couple aléatoire, traitons d'abord le cas d'une v.a.r. dans un cas particulier.

Proposition 5.6.1 *Soit* X *une v.a.r. admettant une densité* f_X. *Soit* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une bijection dérivable et strictement croissante (respectivement, décroissante). Alors la v.a.r.* $\varphi(X)$ *admet un densité* f_Y *donnée par*

$$\forall y \in \mathbf{R} : \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y))$$

(respectivement,

$$\forall y \in \mathbf{R} : \qquad f_Y(y) = -\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y)).)$$

Démonstration Soit $y \in \mathbf{R}$. Supposons que φ est croissante Alors, en notant F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y, on a

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \leq \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y)).$$

En dérivant F_Y, on obtient $f_Y(y) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y))$.

Supposons que φ est décroissante. Alors

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_X(\varphi^{-1}(y)).$$

En dérivant F_Y, on obtient $f_Y(y) = -\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y))$.■

Soit Z = (X, Y) un couple aléatoire à densité f. Posons $D = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$ et soit

$$\varphi : D \to \mathbf{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

On cherche à determiner (sous certaines conditions) la densité du couple aléatoire $\varphi(X, Y)$.

On supposera que $\varphi : D \to \varphi(D)$ est bijective, que φ est continûment dérivable. Soit $J(\varphi)$ le déterminant de la matrice **matrice jacobienne** de φ, c-à-d

$$J(\varphi)(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Proposition 5.6.2 *Soit $f_{(X,Y)}$ la densité du couple* (X,Y). *Posons* $T = \varphi_1(X,Y)$ *et* $U = \varphi_2(X,Y)$. *La densité $f_{(T,U)}$ du couple aléatoire* $(T,U) = \varphi(X,Y)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\boxed{f_{(T,U)}(t,u)) = \begin{cases} |J(\varphi^{-1})(t,u)|f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(t,u)) = \dfrac{1}{|J(\varphi)(\varphi^{-1}(t,u))|} f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(t,u)) & \textit{si } (t,u) \in \varphi(D) \\ 0 & \textit{sinon}\,. \end{cases}}$$

Démonstration Omise

Exemple 5.6.3 **(Coordonnées polaires)** Soit (X,Y) un couple aléatoire à densité $f_{(X,Y)}$. Soit (R,Θ) le couple aléatoire te que $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Il s'agit ici du changement de variables en coordonnées polaires : φ est une bijection dérivable entre $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$; l'expression de φ^{-1} est simple : $\varphi^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a

$$J(\varphi^{-1})(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

La densité de (R,Θ) est donc

$$f_{(R,\Theta)}(r,\theta)) = \begin{cases} r f_{(X,Y)}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{si } (r,\theta) \in \varphi(D) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $D = \{(x,y \in \mathbf{R}^2 \mid f_{(X,Y)}(x,y) > 0\}$.

Supposons, par exemple, que X et Y soient indépendantes, toutes deux de loi $\mathcal{N}(0,1)$.La densité de (X,Y) est donnée par $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$ Alors la densité de (R,Θ) est

$$f_{(R,\Theta)}(r,\theta)) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}$$

pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[$.