Université de Rennes 1–Année 2020/2021

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 7-Corrigé

Dans la suite, on dira qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définit une densité de probabilité si $f \geq 0$, si f est continue sauf en au plus un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et est égale à 1.

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Solution : Soit $y \in \mathbf{R}$. Si $y < 0$, alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = 0$, car $X^2 \geq 0$.

Soit $y \geq 0$; alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)\ dt$, et donc $F_Y(y) = \sqrt{y}$ si $y \leq 1$ et $F_Y(y) = 1$ si $y \geq 1$.

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(s)ds$, où est la densité f_Y de Y. On obtient f_Y en dérivant F_Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \text{ si } 0 < y \leq 1 \\ = 0 \text{ si } y > 1. \end{cases},$$

c-à-d $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathbf{1}_{]0,1]}$.

Exercice 2. Soit X une v.a.r de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto e^{-|t|}/2$

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Solution : • $f \geq 0$;

• f est continue sur $\mathbf{R}$;

•$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1$.

(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

Solution : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t dt = \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t dt + \dfrac{1}{2}\int_0^x e^{-t}dt = 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et les calculer.

Solution : X possède un moment d'ordre 2 , car $t^2e^{-|t|} = O(1/t^2)$ pour $t \to \pm\infty$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent. Comme $t \mapsto te^{-|t|}$ est une fonction impaire, on a $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t|}dt = 0$.

On a, par parité, $\mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-|t|}dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ et une IPP montre que $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = 2$. D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 2 - 0 = 2$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire continue de densité $f : x \mapsto \frac{2}{x^3}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Solution : Il est clair que $f \geq 0$ et que f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$. De plus, $\int_{\mathbf{R}} f(t)dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$.

(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 3)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \leq 2)$ et $\mathbf{P}(X \geq a)$ pour $a \geq 1$.

Solution : On a $\mathbf{P}(X = 3)$ (car X est une variable aléatoire continue) ;

$\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \leq 2) = 2\int_1^2 t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_1^2 = 2(1/2 - 1/8) = 3/4$;

$\mathbf{P}(X \geq a) = 2\int_a^{+\infty} t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_a^{+\infty} = 1/a^2$.

(iii) Calculer l'espérance de X ; X possède-t-elle un moment d'ordre 2 ?

Solution : $\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} tf(t)dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-2}dt = 2[-t^{-1}]_1^{+\infty} = 2$.

On a $\int_{\mathbf{R}} t^2 f(t)dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-1}dt = 2[\log t]_1^{+\infty} = +\infty$; donc : X ne possède pas de moment d'ordre 2.

(iv) Soit $Y = \ln(X)$, où on définit $\ln(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Déterminer la densité de la loi de Y.

Solution : Soit $y \in \mathbf{R}$. On a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(\ln(X) \leq y)$.
1e cas : supposons que $y \leq 0$. Comme $\{\ln X \leq 0\} \subset \{\ln(X) \leq 0\} \subset \{X \leq 1\}$ et comme $\mathbf{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt = 0$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(\ln(X) \leq y) = 0$.
2e cas : supposons que $y > 0$. Alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(0 < Y \leq y) = \mathbf{P}(0 < \ln(X) \leq y) = \mathbf{P}(1 < X \leq e^y) = 2\int_1^{e^y} t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_1^{e^y} = 1 - e^{-2y}$.

La densité f_Y de Y s'obtient en dérivant F_Y : on a $f_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$ et $f_Y(y) = 2e^{-2y}$ pour $y > 0$; qui est la densité d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$; donc $Y \sim \mathcal{E}(2)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire continue de densité $f : x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.
Solution : • $f \geq 0$;
• f est continue sur $\mathbf{R}$;
• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\arctan x|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 1$.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
Solution : Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\arctan t|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$.
(iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.
Solution : On a $\frac{x}{1+x^2} = O(\frac{1}{x})$ pour $x \to +\infty$. Or $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Il s'ensuit que $\mathbf{E}(X)$ n'existe pas.

Exercice 5. Soit X v.a.r continue de loi sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.

Solution : f est bijective, d'inverse $f^{-1} : \mathbf{R} \to]-1,1[$ donnée par $f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. Soit $y \in \mathbf{R}$. On a, pour la fonction de répartition F_Y de Y :

$F_Y(y) = \mathbf{P}(f(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \leq f^{-1}(y)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{f^{-1}(y)} dx = \frac{1}{2}(\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} + 1)$.

On obtient la densité g de Y en dérivant F_Y : $g(y) = \frac{2e^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Exercice 6. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $Y = X^2$.
(i) Déterminer une densité g de Y.
Solution : Pour $y < 0$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = 0$, car $X^2 \geq 0$. Soit $y \geq 0$. Alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-t^2/2}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-t^2/2}dt$;
par changement de variable $t = \sqrt{s}$, on obtient $F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y \frac{e^{-s/2}}{2\sqrt{s}}ds$.

La densité g de Y s'obtient en dérivant F_Y :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}} \text{ si } y \geq 0 \\ 0 \text{ si } y < 0. \end{cases}$$

(ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
Solution : Comme X possède un moment d'ordre 2, $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X^2)$ existe ; comme $\mathbf{E}(X) = 0$, on a $\mathbf{E}(Y) = \mathrm{Var}(X) = 1$.

Y possède un moment d'ordre deux, car $t^4e^{-t^2/2} = o(\frac{1}{t^2})$ pour $t \to +\infty$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\mathbf{E}(X^4)$ existe et on a, par une IPP, $\mathbf{E}(X^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^4e^{-t^2/2}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} t^4e^{-t^2/2}dt = 3$. D'où $\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \mathbf{E}(X^4) - \mathbf{E}(X^2)^2 = 2$.

Exercice 7. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramère λ. Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X.
Solution : Posons $Y := [X]$.
• On a $Y(\Omega) \subset \mathbf{Z}$, car $[x] \in \mathbf{Z}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. (On rappelle que $[x]$ est l'unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.)

• Soit $n \in \mathbf{Z}$. On a $\mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)dx$. Pour $n \geq 0$, on a alors $\mathbf{P}(Y = n) = \lambda \int_n^{n+1} e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_n^{n+1} = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}) = (1-p)^n p$ pour $p := 1 - e^{-\lambda}$.

Pour $n < 0$, on a $n + 1 \leq 0$ et donc $\mathbf{P}(Y = n) = \int_n^{n+1} 0 dx = 0$.

Ce qui précède montre que $Y + 1$ suit une loi géométrique $\mathcal{E}(1 - e^{-\lambda})$.

Exercice 8. On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.

(i) Soit X une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que X est sans mémoire.

Solution : Pour tous $s, t > 0$, on a, d'une part, $\mathbf{P}(X > t) = \int_t^\infty e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$. D'autre part, on a

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\mathbf{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbf{P}(X > s)} = \frac{\mathbf{P}(X > t + s)}{\mathbf{P}(X > s)}$$

et donc

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\lambda \int_{t+s}^\infty e^{-\lambda x} dx}{\lambda \int_s^\infty e^{-\lambda x} dx} = \frac{e^{-\lambda t + s}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}; \text{ d'où } \mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t).$$

(ii) **(*)** Soit X une v.a.r X à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, à densité et sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)

Solution : Soient $x, y > 0$. Comme vu en (i), on a $\mathbf{P}(X > x + y | X > y) = \dfrac{\mathbf{P}(X > x + y)}{\mathbf{P}(X > y)}$. Comme X est sans mémoire, on a donc $\mathbf{P}(X > x + y) = \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(X > y)$. Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $h(x) = \log(1 - F_X(x)) = \log(\mathbf{P}(X > x)$.

Pour $x \leq 0$, on a $\mathbf{P}(X > x) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et donc $h(x) = 0$.

Soient $x, y > 0$. Alors $\log(\mathbf{P}(X > x + y)) = \log(\mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(X > y)) = \log(\mathbf{P}(X > x)) + \log(\mathbf{P}(X > y))$, c-à-d h satisfait la relation

$(*) \qquad h(x + y) = h(x) + h(y) \qquad$ pour tous $\quad x, y > 0$.

Comme $h = \log(1 - F_X)$ et comme F_X est continue (car X est à densité), h est continue.

Posons $a := h(1)$ et observons que $a = \log(\mathbf{P}(X > 1)) \leq 0$ car $\mathbf{P}(X > 1) \leq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, par la relation $(*)$, on a

$$h(n) = h(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-fois}}) = nh(1) = na.$$

De plus, si $n \neq 0$, la relation $(*)$ montre également que $a = h(1) = h(n\frac{1}{n}) = nh(\frac{1}{n})$ et donc $h(\frac{1}{n}) = a/n$.

Soient $m, n \in \mathbf{N}$ avec $n \neq 0$. De nouveau avec relation $(*)$, on a

$$h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = mh(\frac{1}{n}) = a\frac{m}{n}.$$

Il s'ensuit que $h(q) = aq$ pour tout $q \in \mathbf{Q}_+^*$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Il existe une suite $(q_n)_n$ dans $\mathbf{Q}_+^*$ avec $\lim_n q_n = x$. Comme h est continue, on a alors $h(x) = \lim_n h(q_n) = \lim_n (aq_n) = a \lim_n q_n = ax$.

En résumé, on a $h(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $h(x) = ax$ pour $x > 0$. Comme $F_X = 1 - e^h$, ceci signifie que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{ax} \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

Donc X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(-a)$.