Chapitre 4

Théorèmes limites

Dans certains cas, il arrive qu'une suite X_n de v.a.r. converge vers une v.a.r. X, dans un sens à préciser. Un tel résultat est appelé "Théorème limite" ; il permet de remplacer X_n par son approximation X, dont la loi est souvent plus facile à étudier.

4.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Nous allons d'abord établir une inégalité classique très utile. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une v.a.r.

Proposition 4.1.1 ***(Inégalité de de Bienaymé-Tchebychev)*** *On suppose que* X *possède un moment d'ordre* 2 *Alors, pour tout* $a > 0$, *on a*

$$\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.}$$

Démonstration Posons $m := \mathbb{E}(X)$.
1er cas : On suppose que X est une v.a.r. discrète, de sorte que $E = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable infini. Posons $A = \{x \in E \ : \ |x - m| \geq a\}$. Alors

$$\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbf{P}(|X - m| \geq a) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x\in E}(x-m)^2\mathbf{P}(X=x)\\ &\geq \sum_{x\in A}(x-m)^2\mathbf{P}(X=x)\\ &\geq a^2\sum_{x\in A}\mathbf{P}(X=x)\end{aligned}$$

D'où l'assertion dans ce cas.
2ème cas : On suppose que X est une v.a.r. continue, de densité f. Comme $\{|X-m|\geq a\} = \{X\leq m-a\}\cup\{X\geq m+a\}$, on a

$$\mathbf{P}(|X-m|\geq a) = \mathbf{P}(\{X\leq m-a\}\cup\{X\geq m+a\}) = \int_{-\infty}^{m-a} f(x)dx + \int_{m+a}^{+\infty} f(x)dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)dx\\ &\geq \int_{-\infty}^{m-a}(x-m)^2 f(x)dx + \int_{m+a}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)dx\\ &\geq a^2\left(\int_{-\infty}^{m-a} f(x)dx + \int_{m+a}^{+\infty} f(x)dx\right).\end{aligned}$$

D'où l'assertion dans ce cas également.■

4.2 Convergence en probabilité de suites de v.a.r.

Soit $X_n : \Omega \to \mathbf{R}$ une suite de v.a.r. ainsi qu'une autre v.a.r. $X : \Omega \to \mathbf{R}$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Nous allons introduire une première notion de convergence vers X pour une telle suite $(X_n)_n$.

Définition 4.2.1 (Convergence en probabilité) On dit que $(X_n)_n$ *converge en probabilité* vers X si :

$$\boxed{\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{on a } \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|X_n - X|\geq \varepsilon) = 0.}$$

On écrit alors, de façon abrégée,

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X.$$

Exemple 4.2.2 Supposons que X_n suive une loi exponentielle de paramètres $n\lambda$ pour un $\lambda > 0$ fixé. Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| \geq \varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} n\lambda e^{-n\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-n\lambda x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} = e^{-n\lambda\varepsilon}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda\varepsilon} = 0$, on a bien $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0$.

4.3 Loi faible des grands nombres

Nous allons montrer que, quand on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence de réalisations d'un événement converge vers la probabilité de réalisation de cet événement. Ce résultat, appelé “Loi des grands nombres", est un outil d'une grande importance.

Théorème 4.3.1 ***(Loi faible des grands nombres)*** *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r. sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. *On suppose que ces v.a.r. admettent toutes une même espérance* m*, un même écart-type* $\sigma > 0$ *et qu'elles sont deux-à-deux non corrélées. Posons* $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. *Alors* $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} m$ *; plus précisément,*

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbf{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Démonstration On a

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m,$$

ainsi que (voir Corollaire 3.3.15)

$$\operatorname{Var}(M_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

et donc, comme les X_k sont deux-à-deux non corrélées et $\operatorname{Var}(X_k) = \sigma^2$,

$$\operatorname{Var}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Proposition 4.1.1), on a

$$\mathbf{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, on a bien $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} m$.$\blacksquare$

Remarque 4.3.2 Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites si les X_n sont indépendantes, ont tous la même loi et admettent un moment d'ordre 2. C'est souvent pour une telle suite que le théorème est appliqué.

Exemple 4.3.3 (Cas de variables aléatoires de Bernoulli) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ pour $p \in]0,1[$; on dira que l'évènement $X_n = 1$, dont la probabilté est égale à p, est un *succès*. La suite $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ représente alors la proportion de succès parmi les n premières épreuves. Comme $\mathbb{E}(X_n) = p$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_n) = p(1-p)$, on a, par la loi des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Comme la fonction $[0,1] \to \mathbf{R}, x \mapsto x(x-1)$ prend son maximum en $x = 1/2$, où elle vaut $1/4$, on a donc

$$\mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Considérons, par exemple, le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, répété plusieurs fois. Soit X_n la v.a.r égale à 1 si on obtient “Pile" au n-ième lancer et 0 sinon. Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est égale au nombre de “Piles" obtenus lors des n premiers lancers et $X_n \sim \mathscr{B}(1/2)$. Ce qui précède montre que, pour $n = 10^3 = 1000$ lancers et $\varepsilon = 0.05$, on a

$$\mathbf{P}(|S_{1000} - 500| \geq 50) = \mathbf{P}(|M_{1000} - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon|) \leq \frac{1}{4 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-4}} = 0.1$$

On s'attend donc à obtenir un nombre de “Piles" compris entre 450 et 550, avec une probabilité supérieure à 90%. En fait, cette borne est assez pessimiste : on peut montrer (voir plus loin Exemple 4.6.3) que ce nombre est compris entre 484 et 516, avec une probabilité de 95%.

4.4 Converge en loi d'une suite de v.a.r

Soient X_n et X des v.a.r. dont on ne suppose *pas* qu'elles sont définies sur un même espace probabilisé.

Définition 4.4.1 (Convergence en loi) On dit que $(X_n)_n$ *converge en loi* vers X si, pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que la fonction de répartition F_X de X est continue en x, on a $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$. On écrit alors, de façon abrégée,

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X.$$

Remarque 4.4.2 (i) Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$. Alors, pour tous points de continuité a, b de F_X avec $a \leq b$, on a

$$\lim_n \mathbf{P}(a < X_n \leq b) = \lim_n F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) = F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}(a < X \leq b).$$

(ii) Un cas important (voir plus loin le théorème central limite) sera la cas où X suit une loi normale $\mathscr{N}(0,1)$. La condition pour que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ signifie alors que, pour tout $a \leq b$, on a

$$\lim_n \mathbf{P}(a < X_n \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a),$$

où $\Pi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Exemple 4.4.3 Supposons que la v.a.r. X_n suive une loi normale $\mathscr{N}(0, \sigma_n)$ et que X suive une loi normale $\mathscr{N}(0,\sigma)$. Si $\lim_n \sigma_n = \sigma$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$.

Dans le cas de v.a.r. discrètes, la proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour prouver la convergence en loi.

Proposition 4.4.4 *Supposons que les v.a.r.* X_n *et* X *prennent leurs valeurs un ensemble contenu dans* $\mathbf{Z}$. *Alors, la suite* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ *si et seulement si*

$$\boxed{\lim_n \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k) \qquad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbf{Z}.}$$

Démonstration : voir Poly complet du cours.

4.5 Approximations de lois discrètes

4.5.1 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Etant donnée une v.a.r qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, le calcul des quantités $\mathbf{P}(X = k)$ est souvent fastidieux quand n est “grand" , car il requiert celui des coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. La proposition suivante montre que, sous certaines conditions, on peut remplacer la loi binomiale par une loi de Poisson.

Proposition 4.5.1 ***(Approximation de lois binomiales)*** *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v.a.r. de loi* $\mathscr{B}(n,p_n)$. *Supposons que* $\lim_n np_n = \lambda \in \mathbf{R}$. *Alors,* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ *pour une v.a.r de loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$, *c-à-d pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *on a*

$$\lim_n \mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration Soit k fixé. On a, pour $n \geq k$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p_n^k e^{(n-k)\log(q_n)}.\end{aligned}$$

Comme $p_n \sim \lambda/n$, on a $\lim_n p_n = 0$ et

$$(n-k)\log(q_n) = (n-k)\log(1-p_n) \sim -np_n \sim -\lambda.$$

D'ou $\lim_n (n-k)\log(1-p_n) = -\lambda$ et donc $\lim_n e^{(n-k)\log(q_n)} = e^{-\lambda}$. Par conséquent, on a

$$\mathbf{P}(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} p_n^k e^{-\lambda} = \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-\lambda} \to_{n\to\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \blacksquare$$

Remarque 4.5.2 Dans la pratique, on considère que la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ peut être approchée de manière acceptable par une loi de Poisson avec $\lambda = np$, quand $n > 30$ et np de l'ordre de quelques unités (par exemple, $np \leq 10$).

Exemple 4.5.3 On considère l'épreuve consistant en un lancer de 5 dés plusieurs fois de suite, et Y le nombre de fois où on obtient 5 fois "6". Alors Y une v.a.r de loi $\mathscr{B}(n,p)$ avec $p = 1/6^5 = 1/7776$. Pour $n = 10000$, le calcul exact donne

$$\mathbf{P}(Y=4) = \binom{10000}{4}\left(\frac{1}{7776}\right)^4\left(\frac{7775}{7776}\right)^9 996 \sim 0.03149.$$

En posant $\lambda = np = 10^5/7776 = 1{,}286$, on a la bonne approximation par une v.a.r $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$:

$$\mathbf{P}(X=4) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \sim 0.0315.$$

4.6 Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi et admettant une espérance m et une variance σ^2. La loi des grands nombres montre que $M_n = \frac{S_n}{n}$ tend vers m en probabilté, où

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

L'erreur faite en estimant m par M_n est la v.a.r. centrée $E_n = M_n - m$; la variance de E_n est

$$\mathrm{Var}(E_n) = \mathrm{Var}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

La v.a.r. centrée-réduite correspondante est donc

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M_n - m) = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Le résultat suivant, qui mérite son nom de Théorème Central Limite ("TCL"), dit que le comportement asymptotique de Z_n est décrit par la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$.

Théorème 4.6.1 ***(Théorème Central Limite)*** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi et admettant une espérance m et une variance σ^2. Soit $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ pour une v.a.r. X de loi normale centrée-réduite $\mathscr{N}(0,1)$, c-à-d pour tout $a < b$, on a*

$$\mathbf{P}(a < Z_n \leq b) \to_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Remarque 4.6.2 La preuve du Théorème Central Limite dépasse le cadre de ce cours.

Exemple 4.6.3 **(Approximation de la loi binomiale par la loi normale)**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes, de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Comme $\mathbb{E}(X_n) = p$ et $\mathrm{Var}(X_n) = p(1-p)$, on a, par le Théorème Central Limite,

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to_{n\to+\infty} \Pi(b) - \Pi(a)$$

En pratique, on admet l'approximation

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Pi(b) - \Pi(a)$$

dès que $n \geq 30$ et $np(1-p) \geq 9$.

Pour $a = 1.96$, on a $\Pi(a) = 0.975$ et $\Pi(-a) = 1 - \Pi(-a) = 0.025$; si n est suffisamment grand, on a donc

$$\mathbf{P}\left(-\sqrt{np(1-p)}a < S_n - np \leq \sqrt{np(1-p)}a\right) = \Pi(a) - \Pi(-a) = 0.95.$$

Reprenons l'Exemple 4.3.3. Soit X_n la v.a.r égale à 1 si on obtient "Pile" au n-ième lancer d'une pièce équilibrée et 0 sinon. Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est égal au nombre de "Piles" obtenus lors des n premiers lancers. On a $p = 1/2$ et $p(1-p) = 1/4$. et donc, pour n suffisamment grand,

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{n}a}{4} < S_n - \frac{n}{2} \leq \frac{\sqrt{n}a}{4}\right) = \Pi(a) - \Pi(-a) = 0.95$$

Pour $n = 1000$, on a ainsi

$$\mathbf{P}(-15.49 < S_{1000} - 500 \leq 15.49) = 0.95,$$

c-à-d $\mathbf{P}(S_{1000} \in [486, 516]) = 0.95$.