Université de Rennes 1–Année 2020/2021

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 11-Corrigé

Exercice 1. On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante.

(i) Décrire un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.

Solution : *L'univers est* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4$, *avec la mesure de probabilité uniforme* $\mathbf{P}$ *définie sur* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *par* $\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ *pour tout* $A \subset \Omega$.

(ii) Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers ?

Solution : *Soit* A *l'événement "deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois". Il y a* $\binom{6}{2}$ *choix possibles pour les deux nombres qui apparaissent dans* A; *pour chacun de ces choix, il y a* $\binom{4}{2}$ *choix possibles de leur positions. D'où* $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{5}{72}$.

Exercice 2. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".

(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.

Solution : *On a* $\mathbf{P}(A|A_1) = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ *et* $\mathbf{P}(A|A_2) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$. *De plus,* $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$. *D'où*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{20}.$$

(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.

Solution : *La probabilité cherchée est*

$$\mathbf{P}(A_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap A_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A)} = 1/3.$$

Exercice 3. On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans remise**. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.

(i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.

Solution : *On a* $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ *et* $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, *et on obtient le tableau suivant*

X_2/X_1	1	0	P_{X_2}
1	3/10	3/10	6/10
0	3/10	1/10	4/10
P_{X_1}	6/10	4/10	1

(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1 X_2)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Solution : *On a* $\mathbb{E}(X_1 X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 3/10$; *d'autre part,* $\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1) = 6/10$ *et* $\mathbb{E}(X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_2 = 1) = 6/10$. *D'où* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = -3/50$.

Exercice 4. On considère un lot d'ampoules électriques. On suppose que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a.r T telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Déterminer la loi de T et la reconnaître. Déterminer la durée de vie moyenne $\mathbb{E}(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$.

Solution : *On a* $F_T(t) = \mathbf{P}(T \leq t) = 1 - \mathbf{P}(T > t)$ *et ainsi* $F_T(t) = 0$ *pour* $t < 0$ *et* $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ *pour* $t \geq 0$. *On a donc* $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. *Par les résultats du cours, on a alors* $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$ *et* $\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$.

On branche simultanément 2 ampoules issues du même lot et de durées de vie indépendantes T_1 et T_2.

(ii) Soit U l'instant où au moins une des ampoules cesse de fonctionner. Déterminer la fonction de répartition de U ; en déduire la loi de U.

Solution : *On a* $U = \min\{T_1, T_2\}$; *pour tout* $t \geq 0$, *on a donc* $\mathbf{P}(U > t) = \mathbf{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbf{P}(T_1 > t)\mathbf{P}(T_2 > t) = e^{-2\lambda t}$, *par indépendance de* T_1 *et* T_2. *Ainsi (avec (i)),* $U \sim \mathcal{E}(2\lambda)$.

(iii) Soit V l'instant où toutes les deux ampoules cessent de fonctionner. Déterminer la fonction de répartition de V.

Solution : *On a* $V = \max\{T_1, T_2\}$; *pour tout* $t \geq 0$, *on a donc* $\mathbf{P}(V \leq t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t)\mathbf{P}(T_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$, *par indépendance de* T_1 *et* T_2. *D'où* $F_V(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 5. Pour $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = axe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

(i) Déterminer a.

Solution : *Pour que f soit une densité, on doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Or*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = a[e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = a.$$

On donc avoir $a = 1$.

(ii) Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

Solution : *Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y)$. Pour $y < 0$, on a donc $F_Y(y) = 0$; pour $y \geq 0$, on a, avec le changement de variable $u = x^2$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}\int_0^y e^{-u/2}du$. Ceci montre que $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.*

(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Solution : *On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}dx \\
&\underset{IPP}{=} [xe^{-x^2/2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\pi/2}.
\end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y) = 2$, car $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$. D'où

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Vérifier que $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$.

Solution : *On a*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^y e^{-y}dx\right)dy \\
&= \int_0^{\infty} ye^{-y}dy \\
&\underset{IPP}{=} [-ye^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y}dy \\
&= 0 + [-e^{-y}]_0^{+\infty} = 1.
\end{aligned}$$

Soit (X,Y) un couple de v.a.r de densité f.

(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et Y.

Solution : *On a, pour $x \in \mathbf{R}$,*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

et donc $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$; soit $x \geq 0$, alors

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = [-e^{-y}]_{y=x}^{y=+\infty} = 0 - (-e^{-x}) = e^{-x}.$$

. Donc $X \sim \mathcal{E}(1)$.

De même, on a $f_Y(y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y \geq 0$, on a

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}.$$

(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Solution : *Non, X et Y ne sont pas indépendantes ; en effet, supposons par l'absurde que X et Y sont indépendantes. On a alors (voir Cours)*

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \qquad f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

*On a, en particulier, $e^{-y} = e^{-x}ye^{-y}$, c-à-d $1 = e^{-x}y$ ou encore $y = e^{-x}$ pour **tous** $0 \leq x \leq y$. Ceci est absurde (en prenant $y = 1$ par exemple, on aurait $e^{-x} = 1$ pour tout $0 \leq x \leq 1$).*

(iv) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$ pour $x \geq 0$.

Solution : *Soit $x \geq 0$. Alors $f_X(x) = e^{-x} > 0$ et la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. On a donc*

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = \frac{e^x}{e^y} & si \;\; y \geq x \\ 0 & si \; y < x. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X=x}(y)dy \\
&= \int_x^{+\infty} y\frac{e^{-y}}{e^{-x}}dy \\
&= e^x \int_x^{+\infty} ye^{-y}dy \\
&\underset{IPP}{=} e^x([-ye^{-y}]_{y=x}^{y=+\infty} + e^x \int_x^{+\infty} e^{-y}dy) \\
&= x + e^x[-e^{-y}]_{y=x}^{y=+\infty} = x + 1
\end{aligned}$$

(v) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Solution : *Comme* $\mathbb{E}(Y|X = x) = x + 1$ *pour tout* x *tel que* $f_X(x) > 0$, *on a*

$$\mathbb{E}(Y|X) = X + 1.$$

Exercice 7. On désire évaluer le nombre N de kangourous vivant sur une île. Pour cela, on commence par capturer 800 kangourous que l'on marque et relâche juste après. Après un certain temps, on capture de nouveau 1000 kangourous parmi lesquels on trouve que 250 sont marqués. En déduire un intervalle de confiance pour N au seuil de risque de $\alpha = 5\%$.

Solution : *Soit* $p = \frac{800}{N}$ *la proportion de kangourous marqués. Une estimation de* p *est donnée par* $\widehat{p} = \frac{250}{1000} = 0.25$. *Comme* $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ *pour* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, *l'intervalle de confiance pour* p *au risque de 5% (voir cours) est donné par*

$$\left[\widehat{p} - 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}, \widehat{p} + 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}\right],$$

c-à-d $[0.25 - 0.03, 0.25 + 0.03] = [0.22, 0.28]$.

Une estimation de N *est* $\widehat{N} = \frac{800}{\widehat{p}} = 3200$. *L'intervalle de confiance pour* N *au risque de 5% est donné par*

$$\left[\frac{800}{0.28}, \frac{800}{0.22}\right] = [2857, 3636].$$