Université de Rennes 1–Année 2020/2021

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 10

Exercice 1. On lance une fléchette sur une cible circulaire $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ de rayon 1. On suppose que le point d'impact Z de la fléchette est uniformément distribué sur la cible D. On écrit $Z = (X,Y)$, où X et Y sont les coordonnées cartésiennes du point d'impact.
(i) Quelle est la densité de Z?
(ii) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Vérifier que $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$.
Soit (X,Y) un couple de v.a.r de densité f.
(ii) Déterminer la densité f_X de X.
(iii) Calculer la densité $f|_{Y|X=x}$ pour $x > 0$ et déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$.
(iv) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 3. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.
(i) Quelles sont les lois de X et de Y ? Calculer $\mathrm{Var}(X + Y)$.
(ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(T^2)$.
(iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y.
(iv) Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire leurs densités.
(v) Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$ ainsi que $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$. En déduire $\mathbb{E}(T)$.
(vi) $(*)$ Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U,V)$. (*Indication :* on remarquera que $U + V = X + Y$ et que $\mathrm{Var}(U + V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) + 2\mathbf{Cov}(U,V)$)

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\beta)$, respectivement.
(i) Quelle est la densité du couple aléatoire $Z = (X,Y)$?
(ii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda \neq \beta$.
(iii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda = \beta$.