Université de Rennes 1–Année 2020/2021

L3—PRB/PSI1–Feuille de TD 8

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω distribuée selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
(i) Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.
(ii) Soit A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que l'équation $t^2 - 2Y(\omega)t + 1 = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ avec $t_1 \neq t_2$. Déterminer $\mathbf{P}(A)$.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$, soit $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.
(i) Déterminer la loi de X_n.
(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.
(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.
(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers X_1.

Exercice 4. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.
(i) Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X? Quelle est sa variance ?
(ii) Donner une majoration de $\mathbf{P}(X > 20)$ au moyen l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
(iii) En approchant la loi de X par une loi de Poisson, essayer de donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.
(iv) En approchant la loi de X par une loi normale, donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
(i) Justifier l'existence de I_n et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbf{N}$.
(ii) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbb{E}(X^n)$ d'ordre n de X.

Exercice 6. (*) Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre αt. Soit X_1 l'instant d'arrivée du premier client.
(i) Déterminer $\mathbf{P}(X_1 > t)$ et en déduire que X_1 suit une loi exponentielle.
(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
(iii) Pour $n \geq 1$, soit X_n l'instant d'arrivée du n-ième client. Déterminer $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de X_n.
(iv) Montrer que X_n est une v.a. continue et en déterminer une densité. En utilisant l'Exercice 5, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.