3.4 Variables aléatoires à densité

Jusqu'à présent, nous avons étudié des v.a.r. dont l'ensemble des valeurs était fini ou dénombrable infini. Nous allons maintenant nous intéresser à des v.a.r. dont l'ensemble des valeurs est non dénombrable, par exemple un intervalle borné ou non borné de $\mathbf{R}$, et dont les fonctions de répartition sont continues. Une telle v.a.r. décrit, par exemple, la durée de vie d'un atome radioactif, d'un individu ou d'une ampoule électrique, ….

3.4.1 Variables aléatoires à densité : définitions

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une v.a.r. Rappelons (voir Definition 3.1.12) que la fonction de répartition $F_X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de X est définie par $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.

Définition 3.4.1 (Variable aléatoire à densité) On dit que X est une *variable aléatoire à densité* (v.a.r à densité) ou *variable aléatoire continue* (v.a.r continue) si sa fonction de répartition F_X s'écrit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, appelée *densité de* X, avec les propriétés suivantes :

1. $f \geq 0$;
2. f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Remarque 3.4.2 Soit X une v.a.r. continue, avec densité f.

(i) La densité f d'une v.a.r. continue n'est pas unique : par exemple, si $g = f$ sur $\mathbf{R}$, à l'exception d'un nombre fini de points, alors

$$\int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_X(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

(ii) Pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

En effet, on a

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_x(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

(ii) La fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbf{R}$; en effet, nous savons déjà que, pour X une v.a.r quelconque, F_X est continue à droite, et possède une limite à gauche en tout point (voir Proposition 3.1.14). Quand X possède une densité f, alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et toute suite croissante $(x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = x$, on a

$$\lim_n F_X(x) - F_X(x_n) = \lim_n \int_{x_n}^{x} f(t)dt = 0.$$

(iii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathbf{P}(X = x) = 0$. en effet, avec (x_n) comme en (ii), on a $\{x\} = \bigcap_n]x_n, x]$ et donc, par monotonie décroissante (voir Lemme 2.1.9)

$$\mathbf{P}(X = x) = \lim_n \mathbf{P}(]x_n, x]) = \lim_n F_X(x) - F_X(x_n) = 0.$$

(iv) On déduit de (i) et (iii) que, pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

(v) Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a > 0$, la v.a.r $aX + b$ possède une densité donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

En effet, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par le changement de variable $s = at + b$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(aX + b \leq x) &= \mathbf{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t)dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{x} f\left(\frac{s-b}{a}\right) ds.\end{aligned}$$

3.4.2 Moments d'une variable aléatoire à densité

Soit X une v.a.r. continue sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, avec densité f.

Définition 3.4.3 (Espérance et moments d'une v.a.r. à densité) On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$ existe ; dans ce cas, on définit son *espérance*, notée $\mathbb{E}(X)$, par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

On dit que X admet un moment d'ordre $k \geq 1$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x) dx$ existe ; dans ce cas, on définit son *moment d'ordre k*, noté m_k, par

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Remarque 3.4.4 Si X admet un moment d'ordre $k \geq 1$, alors X admet tout moment d'ordre $k' \leq k$. En effet, ceci découle du fait (voir Remarque 3.1.22) que $|x|^{k'} \leq |x|^k + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Définition 3.4.5 (Variance d'une v.a.r à densité) Supposons que X admet un espérance. On appelle *moment centré d'ordre* $k \geq 1$ de X, noté μ_k, le moment d'ordre k de la v.a.r. centrée $X - \mathbb{E}(X)$:

$$\mu_k = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f(x) dx,$$

sous réserve de l'existence de l'intégrale.

La *variance* de X, notée Var(X) est μ_2, le moment centrée d'ordre 2 :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx,$$

sous réserve de l'existence de l'intégrale. On appelle $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ *écart-type* de X.

Voici quelques propriétés et formules couramment utilisées concernant l'espérance et la variance.

Proposition 3.4.6 *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*
(i) ***(Linéarité)*** *Soient* $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ *deux v.a.r. à densité et* $a \in \mathbf{R}$; *alors* $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ *et* $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.
(ii) Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ *une v.a.r. à densite admettant un moment d'ordre 2. Pour tout* $a, b \in \mathbf{R}$, *on a* $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.
(iii) ***(Formule de König-Huyghens)*** *Soit* $X : \Omega \to \mathbf{R}$ *une v.a.r. à densite admettant un moment d'ordre 2. Alors*

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.}$$

Démonstration (i) Nous admettrons la preuve de la linéarite de l'espérance qui dépasse le cadre du cours.
(ii) Cette formule découle directement de la définition de la variance et des propriétés de linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a\mathrm{X}+b) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b-\mathbb{E}(a\mathrm{X}+b))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(a(x-\mathbb{E}(\mathrm{X})))^2 f(x)dx \\ &= a^2\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2 f(x)dx = a^2\,\mathrm{Var}(\mathrm{X}).\end{aligned}$$

(ii) La formule de de König-Huygens se démontre comme dans le cas de v.a.r. discrètes (voir Proposition 3.1.25) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{X}) &= \mathbb{E}((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2\right) \\ &= \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - 2\mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 \\ &= \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2. \blacksquare\end{aligned}$$

3.5 Variables aléatoires à densité classiques

Voici une liste des principales lois de probabilité à densité.

3.5.1 Loi uniforme

Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Définition 3.5.1 (Loi uniforme sur un intervalle) On dit que X suit une *loi uniforme* sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, si X admet comme densité la fonction f définie par

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.}$$

On dit alors que X est de loi $\mathscr{U}([a,b])$ et on écrit souvent $\mathrm{X} \sim \mathscr{U}([a,b])$.

Remarque 3.5.2 On remarquera qu'on a bien $f \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Proposition 3.5.3 *Soit* X *de loi* $\mathscr{U}([a,b])$.

(i) La fonction de répartition de X *est*

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b. \end{cases}}$$

(ii) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}.}$

(ii) $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}.}$

Démonstration (i) On a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{x} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)dt$$

et donc $F_X(x) = 0$ si $x \leq a$, $F_X(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x dt = \frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a,b]$ et $F_X(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b dt = 1$ si $x \geq b$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

et

(iii) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \blacksquare$$

Exemple 3.5.4 Les bus passent à un arrêt donné à 7h, 7h15 et 7h30. Un usager se présente entre 7h et 7h30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable uniforme sur cette période. Cherchons la probabilité qu'il doive attendre moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.

Soit X le nombre de minutes s'écoulant entre 7h et l'arrivée de l'usager. Alors $X \sim \mathscr{U}([0,30])$. L'attente est inférieure à 5 mns si l'usager arrive entre 7h10 et 7h15 ou entre 7h25 et 7h30. La probabilité d'attendre moins de 5 minutes est donc

$$\mathbf{P}(10 < X < 15) + \mathbf{P}(25 < X < 30) = 2\frac{5}{30} = \frac{1}{3} = 0,33...$$

De même, la probabilité d'attendre plus de 10 minutes vaut

$$\mathbf{P}(0 < X < 5) + \mathbf{P}(15 < X < 20) = \frac{1}{3} = 0,33...$$

3.5.2 Loi exponentielle

Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Définition 3.5.5 (Loi exponentielle) On dit que X suit une *loi exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$, si X admet comme densité la fonction f définie par

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.}$$

On dit alors que X est de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et on écrit souvent $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$.

Remarque 3.5.6 On remarquera qu'on a bien $f \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Proposition 3.5.7 *Soit* X *de loi* $\mathscr{E}(\lambda)$. *Alors :*
(i) la fonction de répartition de X *est*

$$\boxed{F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.}$$

(ii) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.}$

(ii) $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$

Démonstration (i) On a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)dt$$

et donc $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$.
(ii) On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

(iii) On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \lambda^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = -\lambda\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + 2\lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \blacksquare$$

Remarque 3.5.8 Dans la pratique, la loi exponentielle modélise souvent une durée de vie ou le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifique. Par exemple la durée de vie d'une bactérie, la durée d'une conversation téléphonique ou l'instant de désintégration d'un noyau radioactif peuvent être considérées comme des variables aléatoires de loi exponentielle.

Exemple 3.5.9 En moyenne, un atome d'uranium 235 se désintègre au bout d'un milliard d'années. Supposons que sa durée de vie X, mesurée en années, soit une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ; on est donc amené à prendre $\lambda = \frac{1}{10^9}$. La période T de l'uranium 235 est le laps de temps nécessaire à la désintégration de la moitié d'un échantillon donné de cette substance ; T est donc solution de l'équation $\mathbf{P}(X > T) = 1/2$, c-à-d

$$\int_T^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$T = \frac{\log 2}{\lambda} \sim 10^9 \times 0,7 = 700 \text{ millions d'années.}$$

3.5.3 Loi normale

Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Nous allons introduire la loi la plus importante de la théorie des probabilités, la loi normale de Gauss ou loi de Laplace-Gauss.

Définition 3.5.10 (Loi normale ou loi de Gauss) On dit que X suit une *loi normale* ou *loi de Gauss-Laplace* de paramètres $m \in \mathbf{R}, \sigma > 0$, si X admet comme densité la fonction $f_{m,\sigma}$, définie par

$$\boxed{f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.}$$

On dit alors que X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et on écrit souvent $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$.

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée *loi normale centrée-réduite*; sa densité est

$$\boxed{f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.}$$

Remarque 3.5.11 On remarquera qu'on a bien $f_{m,\sigma} \geq 0$; montrons d'abord que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x) dx = 1$. Il suffit de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Pour cela, on considère la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ définie sur $\mathbf{R}^2$. On a, d'une part,

$$\int_{\mathbf{R}^2} \varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy = (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^2.$$

D'autre part, en passant aux coordonnées polaires et avec le changement de variable $\rho = r^2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} \varphi(x, y) dx dy &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\rho} d\rho d\theta = \pi \int_{\rho=0}^{+\infty} e^{-\rho} d\rho \\ &= \pi. \end{aligned}$$

L'assertion s'ensuit.

Soient maintenant m et $\sigma > 0$ quelconques. Alors, avec le changement de variables $y = \dfrac{x - m}{\sigma}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

Proposition 3.5.12 *Soit* X *de loi* $\mathcal{N}(m,\sigma)$. *Alors :*
(i) la v.a.r. $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ *est de loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
(ii) $\boxed{\mathbb{E}(X) = m.}$
(ii) $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \sigma^2.}$

En particulier, si X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$, X *est centrée et réduite :* $\mathbb{E}(X) = 0$ *et* $\mathrm{Var}(X) = 1$.

Démonstration Pour $x \in \mathbf{R}$, on a, avec le changement de variable $s = \dfrac{t-m}{\sigma}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}(Y \le x) = \mathbf{P}(X \le \sigma x + m) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma x + m} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{0,1}(s) ds. \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Par les formules de Proposition 3.4.6, il suffit donc de calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ dans le cas $m = 0, \sigma = 1$.

Tout d'abord, $\mathbb{E}(X)$ existe, car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ existe, car

$$|x| e^{-x^2/2} = O(1/x^2) \qquad \text{pour } x \to \pm\infty.$$

D'autre part, $x \mapsto x e^{-x^2/2} dx$ étant impaire, on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

et donc $\mathbb{E}(X) = 0$.

Comme $x^2 e^{-\dfrac{x^2}{2}} = O(1/x^2)$ pour $x \to \pm\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ existe. On a alors, par parité et en intégrant par parties (en remarquant que $\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2/2}) =$

$-xe^{-x^2/2}$) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx &= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\\ &= 2\left[-xe^{-\dfrac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\\ &= \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) = 1.$$

Remarque 3.5.13 (i) La fonction de répartition $\Phi_{0,1}$ de la loi normale centrée-réduite des donnée sous forme intégrale :

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Cette intégrale n'est pas exprimable en termes de fonctions usuelles; ses valeurs sont tabulées dans une table, appelée *table de la loi normale* (voir la table en Annexe, Chapitre 8; ces valeurs sont également disponibles dans certaines calculatrices). Ces tables permettent de déterminer des seuils à des probabilités fixées. On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\Pi(1.24) &= \mathbf{P}(X \le 1.24) = 0.8925\\ 1-\Pi(1.24) &= \mathbf{P}(X > 1.24) = 0.1185\\ \Pi(1.96) &= \mathbf{P}(X \le 1.96) = 0.975\\ 1-\Pi(1.96) &= \mathbf{P}(X > 1.96) = 0.025\\ \Pi(2.58) &= \mathbf{P}(X < 2.58) = 0.995\end{aligned}$$

(ii) Par parité, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Pi(-x) = \Pi(x)$ et donc, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $x \ge 0$,

$$\boxed{\mathbf{P}(|X| \le x) = 2\Pi(x) - 1},$$

car $\mathbf{P}(|X| \le x) = \mathbf{P}(X \le x) - (1 - \mathbf{P}(X \le -x)) = \Pi(x) - (1 - \Pi(-x) = 2\Pi(x) - 1$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(|X| \le 1.96) = 2\Pi(1.96) - 1 = 1.950 - 1 = 0.95,$$

c-à-d avec une probabilité de 95%, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1.96, 1.96]$.

De même,

$$\mathbf{P}(|X| \le 2.58) = 2\Pi(2.58) - 1 = 1.99 - 1 = 0.99,$$

c-à-d avec une probabilité de 99%, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-2.58, 2.58]$.