Université de Rennes 1–Année 2020/2021

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 10-Corrigé

Exercice 1. On lance une fléchette sur une cible circulaire $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ de rayon 1. On suppose que le point d'impact Z de la fléchette est uniformément distribué sur la cible D. On écrit $Z = (X,Y)$, où X et Y sont les coordonnées cartésiennes du point d'impact.

(i) Quelle est la densité de Z?

Solution : *Z est de densité f donnée par $f = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_D$, c-à-d*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & si\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & si\ \ x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

(ii) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.

Solution : *Soit $x \in \mathbf{R}$. On a (voir Cours) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$. Si $|x| > 1$, on a $f(x,y) = 0$ pour tout y et donc $f_X(x) = 0$. Supposons que $|x| \leq 1$. Alors $f(x,y) = \frac{1}{\pi}$ si $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ et $f(x,y) = 0$ sinon. D'où*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}.$$

On a donc $f_X(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

De manière similaire, on a $f_Y(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Vérifier que $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$.

Solution : *On a*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy\right)dx \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x}[-e^{-xy}/x]_{y=0}^{y=+\infty}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

Soit (X,Y) un couple de v.a.r de densité f.

(ii) Déterminer la densité f_X de X.

Solution : *On a (voir Cours), pour* $x \in \mathbf{R}$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ *et donc* $f_X(x) = 0$ *pour* $x \leq 0$ *; pour* $x > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dy = xe^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy \\ &= xe^{-x}[-e^{-xy}/x]_{y=0}^{y=+\infty} = e^{-x}. \end{aligned}$$

On voit donc que X *suit une loi exponentielle* $\mathcal{E}(1)$.

(iii) Calculer la densité $f|_{Y|X=x}$ pour $x > 0$ et déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

Solution : *Soit* $x > 0$. *Pour* $y \in \mathbf{R}$, *on a (voir Cours)*

$$f|_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} xe^{-xy} & si\ y > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La loi de Y *sachant* $X = x$ *est donc la loi exponentielle* $\mathcal{E}(x)$ *de paramètre* x. *Il s'ensuit que* $\mathbb{E}(Y|X = x) = 1/x$.

(iv) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Solution : *Comme* $\mathbb{E}(Y|X = x) = 1/x$, *pour tout* $x > 0$, *on a* $\mathbb{E}(Y|X) = 1/X$.

Exercice 3. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.

(i) Quelles sont les lois de X et de Y ? Calculer $\mathrm{Var}(X + Y)$.

Solution : *On a* $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ *et* $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$. *Comme* X *et* Y *sont indépendantes, on a (voir Cours)* $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ *; comme* $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \int_0^1 x^2dx - (\int_0^1 xdx)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$, *on a donc* $\mathrm{Var}(X + Y) = 1/6$.

(ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(T^2)$.

Solution : *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *on a*

$$T(\omega) = \begin{cases} X(\omega) - Y(\omega) & si\ X(\omega) \geq Y(\omega) \\ Y(\omega) - X(\omega) & si\ Y(\omega) \geq X(\omega). \end{cases}$$

Ceci montre que $T = |X - Y|$.

Comme X *et* Y *sont indépendants, la densité* f *du couple* (X, Y) *est donnée par* $f(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$, *c-à-d* $f = \mathbf{1}_{[0,1]^2}$. *Par la formule de transfert (voir Cours), on a*

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^2 f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2-2xy+y^2)f(x,y)dxdy$$

On calcule

$$\int_0^1\int_0^1 x^2dxdy = \int_0^1 \frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}$$

et de même $\int_0^1\int_0^1 y^2dxdy = \frac{1}{3}$ *ainsi que* $\int_0^1\int_0^1 xydxdy = (\int_0^1 xdx)(\int_0^1 ydy) = \frac{1}{4}$. *D'où* $\mathbb{E}(T^2) = \frac{1}{6}$.

(iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y.

Solution : *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *on a*

$$U(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & si\ X(\omega) \leq Y(\omega) \\ Y(\omega) & si\ X(\omega) \geq Y(\omega). \end{cases}$$

Ceci montre que $U = \min\{X, Y\}$. *De même, on voit que* $V = \max\{X, Y\}$.

(iv) Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire leurs densités.

Solution : *Soit* $x \in \mathbf{R}$. *On rappelle que* $F_X(x) = F_Y(x) = x$ *si* $x \in [0, 1]$, $F_X(x) = F_Y(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $F_X(x) = F_Y(x) = 1$ *si* $x > 1$. *Comme* $V = \max\{X, Y\}$ *et par indépendance de* X *et* Y, *on a*

$$F_V(x) = \mathbf{P}(V \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x)\mathbf{P}(Y \leq x) = F_X(x)^2$$

et donc $F_V(x) = x^2$ *si* $x \in [0, 1]$, $F_V(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $F_V(x) = 1$ *si* $x > 1$. *En dérivant, on en déduit que la densité* f_V *de* V *est donnée par* $f_V(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Comme $U = \min\{X, Y\}$ *et par indépendance de* X *et* Y, *on a aussi*

$$1-F_U(x) = \mathbf{P}(U > x) = \mathbf{P}(X > x, Y > x) = \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(Y > x) = (1-F_X(x))^2$$

et donc $F_U(x) = 2x - x^2$ *si* $x \in [0, 1]$, $F_U(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $F_U(x) = 1$ *si* $x > 1$. *En dérivant, on en déduit que la densité* f_U *de* U *est donnée par* $f_U(x) = (2 - 2x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

(v) Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$ ainsi que $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$. En déduire $\mathbb{E}(T)$.

Solution : *On a*

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = 1/3 \qquad et \qquad \mathbb{E}(V) = \int_0^1 2x^2dx = 2/3.$$

On calcule également que $\mathbb{E}(U^2) = \int_0^1 x^2(2 - 2x)dx = 1/6$ *et* $\mathbb{E}(V^2) = \int_0^1 2x^3dx = 1/2$ *et on obtient*

$$\mathrm{Var}(U) = 1/6 - (1/3)^2 = 1/18 \qquad et \qquad \mathrm{Var}(V) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18.$$

On remarque que $T = V - U$. *On a donc*

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(U) = 2/3 - 1/3 = 1/3.$$

(vi) $(*)$ Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U, V)$. (*Indication :* on remarquera que $U + V = X + Y$ et que $\mathrm{Var}(U + V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) + 2\mathbf{Cov}(U, V)$)

Solution : *On a* $U+V = \min\{X, Y\}+\max\{X, Y\} = X+Y$. *Il s'ensuit, d'une part, que* $\mathrm{Var}(U+V) = \mathrm{Var}(X+Y)$ *et donc par (i) :* $\mathrm{Var}(U+V) = 1/6$. *D'autre part,*

$$\mathrm{Var}(U + V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) + 2\mathbf{Cov}(U, V)$$

et donc

$$\mathbf{Cov}(U,V) = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(U+V) - \mathrm{Var}(U) - \mathrm{Var}(V)).$$

Avec (v), on conclut donc que

$$\mathbf{Cov}(U,V) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{36}.$$

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\beta)$, respectivement.

(i) Quelle est la densité du couple aléatoire $Z = (X,Y)$?

Solution : *Comme X et Y sont indépendantes, la densité f de Z est le produit des densités de X et Y (voir Cours), c-à-d*

$$f(x,y) = \lambda e^{-\lambda x}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[} \times \beta e^{-\beta y}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[} = \lambda\beta e^{-(\lambda x+\beta y)}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[}(x,y).$$

(ii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X+Y$ dans le cas $\lambda \neq \beta$.

Solution : *D'après le Cours, f_{X+Y} est donnée par*

$$\forall x \in \mathbf{R} : \qquad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y)f_Y(y)dy.$$

On remarque d'abord que $\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x-y)\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(y) = \boldsymbol{1}_{[0,x]}(y)\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour tous $x,y \in \mathbf{R}$: en effet, on a $\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x-y)\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(y) = 1$ si et seulement si $y \leq x$ et $y \geq 0$, c-à-d $0 \leq y \leq x$; on aussi $\boldsymbol{1}_{[0,x]}(y)\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x) = 1$ si et seulement si $0 \leq y \leq x$ et $x \geq 0$, c-à-d $0 \leq y \leq x$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \lambda\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x-y)}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x-y)e^{-\beta y}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(y)dy \\
&= \lambda\beta e^{-\lambda x}\int_0^{+\infty} e^{\lambda y}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)\boldsymbol{1}_{[0,x]}(y)e^{-\beta y}dy \\
&= \lambda\beta e^{-\lambda x}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)\int_0^x e^{(\lambda-\beta)y}dy \\
&= \lambda\beta e^{-\lambda x}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{(\lambda-\beta)x}-1}{\lambda-\beta} \\
&= \frac{\lambda\beta}{\lambda-\beta}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{-\beta x}-e^{-\lambda x}}{\lambda-\beta}
\end{aligned}$$

(iii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X+Y$ dans le cas $\lambda = \beta$.

Solution : *On reprend le calcul précédent avec $\lambda = \beta$: pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x-y)}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x-y)e^{-\lambda y}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(y)dy \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda x}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x)\int_0^x dy \\
&= \lambda^2 x e^{-\lambda x}\boldsymbol{1}_{[0,+\infty[}(x).
\end{aligned}$$