Modele ARMA

ASC 2023

Piotr Żoch

Plan

- Wold i operator opóźnień
- Model AR
- Model MA
- Modele ARMA
- Prognozy
- Modele SARIMA

Dekompozycja Wolda i operator opóźnień

Stacjonarność - przypomnienie

- Zmienna jest **stacjonarna** w sensie **słabym** (*stacjonarność kowariancyjna*) jeśli spełnione są trzy warunki:
  - $E[Y_t] = \mu < \infty$
  - $Var[Y_t] = \sigma^2 < \infty$
  - $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_s, Y_{s+h}) = \gamma_h$
- Intuicyjnie: właściwości zmiennej nie zmieniają się w czasie.
- Jeśli którykolwiek warunek nie jest spełniony, zmienna jest **niestacjonarna**.
- W praktyce będziemy badać stacjonarność w sensie słabym.

Dekompozycja Wolda

- **Każdy** stacjonarny (w sensie słabym) proces stochastyczny $\{Y_t\}$ można przedstawić jako

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t, \quad \psi_0 = 1, \quad \varepsilon_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

gdzie:

- $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$;
- κ_t jest składnikiem deterministycznym;
- $\varepsilon_t = Y_t - E\left[Y_t \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots\right]$;
- $\{\psi\}$ nie zależą od okresu t, jedynie od horyzontu j.

ARMA

- AR: *autoregressive*
- MA: *moving average*

$$y_t = a_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

Operator opóźnień

- Definicja (*lag operator*):

$$L^i y_t \equiv y_{t-i}$$

- Właściwości:
  - $L^i c = c$
  - $\left(L^i + L^j\right) y_t = L^i y_t + L^j_t y_t$
  - $L^{-i} y_t = y_{t+i}$ *(lead operator)*
  - Dla $|a| < 1$

$$\left(1 + aL + a^2 L^2 + \cdots\right) y_t = \frac{y_t}{1 - aL}$$

  - Dla $|a| > 1$

$$\left[1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \cdots\right] y_t = \frac{-aLy_t}{1 - aL}$$

Wielomian opóźnień

- Niech

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_p L^p$$

- $\theta(L)$ nazywamy **wielomianem opóźnień** *(lag polynomial)*.
- Zachodzi

$$\theta(1) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_p$$
$$\theta\left(L^2\right) = 1 + \theta_1 L^2 + \theta_2 L^4 + \ldots + \theta_p L^{2p}$$

Wielomian opóźnień

Przykład. Mamy dwa wielomiany opóźnień:

$$\begin{aligned} a(L) &= 1 - aL \\ b(L) &= 1 - bL \end{aligned}$$

i zachodzi

$$\begin{aligned} a(L)\, b(L)\, x_t &= (1 - aL)(1 - bL)\, x_t \\ &= \left(1 - (a+b)\, L + abL^2\right) x_t \\ &= x_t - (a+b)\, x_{t-1} + abx_{t-2} \end{aligned}$$

Wielomian opóźnień

- Wielomiany opóźnień możemy dodawać i mnożyć jak zwykłe wielomiany.
- *Transformata z*: zamiast skomplikowanego L można pracować na z i udać, że mamy do czynienia ze zwykłymi wielomianami, żeby znaleźć współczynniki wielomianu opóźnień.
- Przykład:

$$\begin{aligned} a(L) &= 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \cdots + a_p L^p \\ &= (1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L) \cdots (1 - \alpha_p L^p) \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_p^{-1}$ są pierwiastkami. Jeśli $a(L)^{-1}$ istnieje (kiedy?), to mamy

$$a(L)^{-1} = (1 - \alpha_1 L)^{-1} (1 - \alpha_2 L)^{-1} \cdots (1 - \alpha_p L^p)^{-1}$$

Wielomian opóźnień - przykład

- Przykład:

$$x_t = -0.3x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$$

możemy zapisać jako

$$a(L)\,x_t = u_t$$

gdzie

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

- Jakie są pierwiastki tego wielomianu?

Wielomian opóźnień - przykład

- Wielomian

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

  można zapisać jako

$$a(L) = (1 + 0.5L)(1 - 0.2L)$$

  (pierwiastki równe 2 i 5).

Wielomian opóźnień - przykład

- Odwrotność wielomianu

$$a\left(L\right) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

to

$$a\left(L\right)^{-1} = \left(1 + 0.5L\right)^{-1}\left(1 - 0.2L\right)^{-1}$$

gdzie

$$\left(1 + 0.5L\right)^{-1} = 1 + 0.5L + 0.25L^2 + \cdots$$
$$\left(1 - 0.2L\right)^{-1} = 1 - 0.2L + 0.16L^2 -$$

czyli

$$a\left(L\right)^{-1} = 1 - 0.3L + 0.28L^2 - \cdots$$

Wielomian opóźnień - przykład

- Skoro

$$a(L)\,x_t = u_t$$

to

$$\begin{aligned} x_t &= a(L)^{-1}\,u_t \\ &= u_t - 0.3u_{t-1} + 0.28u_{t-2} - \cdots \end{aligned}$$

Model ARMA

- Stacjonarny model ARMA

$$y_t = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

możemy zapisać jako

$$A(L)\, y_t = \Theta(L)\, \varepsilon_t,$$

czyli

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\Theta(L)}{A(L)} \varepsilon_t \\ &= \Psi(L)\, \varepsilon_t \end{aligned}$$

(wszystko działa podobnie, gdy mamy też stałą a_0).

Funkcja reakcji na impuls

- Dekompozycja Wolda: stacjonarny proces ARMA

$$A(L)\,y_t = a_0 + \theta(L)\,\varepsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t + \kappa_t$$

$$\psi_0 = 1$$

gdzie κ_t jest składnikiem deterministycznym.

Funkcja reakcji na impuls

- Mnożnik dynamiczny mierzy efekt ε_t na wartości $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_h}{\partial \varepsilon_0} = \psi_h$$

- Funkcja reakcji na impuls to $\{\psi_h\}_{h=0}^{\infty}$ - mówi nam o tym, jak reagują wartości $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$ na jednorazowy impuls/szok ε_t.

Funkcja reakcji na impuls

- Mnożnik skumulowany: efekt permanentnej zmiany $\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \cdots$.

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+1}} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+2}} + \cdots + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+h}} = \sum_{j=0}^{h} \psi_{h-j}$$

- Dla $h \to \infty$ mamy $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \Psi(1)$.

Model AR

Model AR

- Model AR(p) *(rzędu p)*:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

  gdzie $\epsilon_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$.
- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$\left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \ldots - a_p L^p\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$
$$A\left(L\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

  czyli

$$A\left(L\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

Model AR

- Jeśli (!) wielomian $A(L)$ jest odwracalny, to mamy:

$$\begin{aligned} y_t &= A^{-1}(L)(a_0 + \epsilon_t) \\ &= \mu + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots \\ &= \mu + \beta(L)\epsilon_t \end{aligned}$$

Stabilność i stacjonarność

- Jeśli pierwiastki równania $A(x) = 0$ spełniają $|x_p| > 1$ dla każdego p, to mówimy, że model AR(p) jest **stabilny**.
- Stabilność $\Rightarrow$ stacjonarność (słaba).
- Wtedy można zapisać proces AR(p) jako proces MA(∞) *(Wold)*

$$y_t = \mu + \beta(L)\epsilon_t$$

gdzie $\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0$.

Model AR(1)

- **Przykład** - AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

  można zapisać jako

$$(1 - \rho L)\, y_t = \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

Model AR(1)

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?
- Mamy

$$1 - \rho x = 0$$

dla

$$x = \frac{1}{\rho},$$

więc stacjonarność dla $|\frac{1}{\rho}| > 1$ (czyli $\rho \in (-1, 1)$).

- Można wtedy zapisać:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{(1 - \rho L)} \epsilon_t \\ &= \left(1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \cdots\right) \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \rho \epsilon_{t-1} + \rho^2 \epsilon_{t-2} + \cdots \end{aligned}$$

Model AR(1)

- Mamy

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

- Mnożnik dynamiczny:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \rho^h$$

- Mnożnik skumulowany:

$$1 + \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

- **Przykład** - błądzenie losowe

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

Model AR(p)

- Model AR(p) to

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Możemy zbadać stabilność analizując pierwiastki wielomianu opóźnień

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p.$$

- Stabilność gdy wszystkie pierwiastki są *poza* kołem jednostkowym.

Model AR(p)

- Inne spojrzenie na model AR(p): niech

$$
\begin{aligned}
x_{0,t} &= y_t \\
x_{1,t} &= y_{t-1} \\
x_{2,t} &= y_{t-2}
\end{aligned}
$$

  i tak dalej.
- Możemy zapisać AR(p) jako

$$
\begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{p,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,t-1} \\ x_{1,t-1} \\ \vdots \\ x_{p,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t
$$

Model AR(p)

- Możemy zapisać AR(p) jako

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Ważne: występuje tylko pierwsze opóźnienie wektora $\mathbf{x}_t$!

Model AR(p)

- Analogicznie do tego, co mieliśmy wcześniej:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}L)\,\mathbf{x}_t = 0$$

- To to samo, co

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x}_t = 0$$

Model AR(p)

- Szukamy wartości własnych macierzy

$$
A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

.

- Można pokazać, że wartości własne to odwrotności pierwiastków wielomianu opóźnień.
- Stabilność wtedy, gdy wszystkie wartości własne $|\lambda_k| < 1$ (w kole jednostkowym).
- *Uwaga:* wartości własne **w** kole jednostkowym, pierwiastki wielomianu opóźnień **poza**!

Model AR(p) - momenty

- Wartość oczekiwana:

$$E\left[y_t\right] = a_0 + a_1 E\left[y_{t-1}\right] + a_2 E\left[y_{t-2}\right] + \ldots + a_p E\left[y_{t-p}\right] + E\left[\epsilon_t\right],$$

  gdzie

$$E\left[\epsilon_t\right] = 0.$$

- Dla procesu stacjonarnego

$$E\left[y_t\right] = E\left[y_{t-1}\right] = \cdots$$

  czyli

$$E\left[y_t\right] = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \cdots}$$

Model AR(p) - momenty

- Równania **Yule'a-Walkera**: kowariancja $\gamma_k \equiv Cov\,(y_t, y_{t-k})$ spełnia

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}$$
$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_p\gamma_p + \sigma^2$$

- Korelacja:

$$\rho_k = a_1\rho_{k-1} + \cdots + a_p\rho_{k-p}$$

- Mnożniki:

$$\psi_k = a_1\psi_{k-1} + \cdots + \psi_p\rho_{k-p}$$

Model MA

Model MA

- Model MA(q) *(rzędu q)*

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

  gdzie $\epsilon_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$.
- Model średniej ruchomej (*moving average)* to średnia ważona procesu białego szumu z bieżącego oraz q poprzednich okresów.

Model MA

- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$y_t = \mu + \theta(L)\,\epsilon_t$$

- Trudność: jak oszacować parametry tego modelu?
    - Nie obserwujemy $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$ w danych.

Momenty MA(q)

- Momenty modelu MA(q):

$$
\begin{aligned}
E\left[y_t\right] &= a_0 \\
Var\left[y_t\right] &= \left(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2\right)\sigma^2 \\
Cov\left[y_t, y_{t-k}\right] &= \begin{cases} 0 & k > q \\ \left(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \ldots\theta_q\theta_{q-k}\right)\sigma^2 & k \leq q \end{cases}
\end{aligned}
$$

Odwracalność

- Rozważmy model MA(1)

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L)\, \epsilon_t \end{aligned}$$

- Można go zapisać

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= (1 + \theta_1 L)^{-1} y_t \\ &= y_t - \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + \cdots \end{aligned}$$

  jeśli $|\theta_1| < 1$.
- W tym wypadku mówimy, że model MA(1) jest **odwracalny** i można przedstawić MA(1) jako AR(∞).

Odwracalność

- Momenty

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

to

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \left(1+\theta_1^2\right)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= \theta_1 \sigma^2\end{aligned}$$

- Autokorelacja

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1+\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2}\end{aligned}$$

Odwracalność

- Dwa modele MA(1)

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$
$$y_t = \epsilon_t + \frac{1}{\theta_1} \epsilon_{t-1}$$

  mają taką samą autokorelację (ACF)

- Jeden z nich jest odwracalny, drugi nie.
- Ten odwracalny nazywamy **postacią fundamentalną** modelu MA(1).

Odwracalność

- Uwaga: odwracalność MA(q) nie jest wymagana do stabilności (MA(q) jest *zawsze* stabilny) - jest potrzebna do odwracalności i możliwości przedstawienia jako AR(∞).
- W ogólnym przypadku odwracalność zachodzi, gdy wszystkie pierwiastki $\theta(L)$ są poza kołem jednostkowym.

Modele ARMA w praktyce

Model ARMA

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}$$

gdzie $\epsilon_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$.

- Inna notacja:

$$A\left(L\right) y_t = a_0 + \theta\left(L\right) \epsilon_t$$

  Proces ARMA jest stacjonarny jeśli pierwiastki równania $A\left(x\right) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym.

Model ARMA

- Jak dobrać (p,q)?
  - Metoda Boxa-Jenkinsa (1970)
  - Kryteria informacyjne

Metoda Boxa-Jenkinsa

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów p i q.

ACF

- Funkcja autokorelacji (Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami

$$\rho_k = \frac{Cov\left(y_t, y_{t-k}\right)}{Var\left(y_t\right)}$$

i $\rho_k \in [-1, 1]$

PACF

- Funkcja autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami oddalonymi od siebie o k okresów bez uwzględnienia wpływu wszystkich obserwacji "pomiędzy"
- Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi α_k w modelu autoregresyjnym k-tego rzędu

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{y-1} + \cdots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Metoda Boxa-Jenkinsa

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów p i q.
  - Dla MA:

$$Cov\left[y_t, y_{t-k}\right] = \begin{cases} 0 & k > q \\ \left(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + ...\theta_q\theta_{q-k}\right)\sigma^2 & k \leq q \end{cases}$$

    więc w ACF istotnych jest q pierwszych opóźnień
  - Dla AR w PACF istotnych jest p pierwszych opóźnień

Metoda Boxa-Jenkinsa

- Ustalenie wartości p i q na podstawie wykresu ACF i PACF.
- Estymacja parametrów modelu ARMA(p,q)
- Weryfikacja modelu ARMA(p,q):
    - Dla modelu ARMA(p*,q*), gdzie $p^* \geq p$ i $q^* \geq q$, werykuje się istotność dodatkowych opóźnień.
    - Sprawdza się, czy występuje autokorelacja reszt.

Kryteria informacyjne

- **Kryteria informacyjne:** wybrać specyfikację o wysokiej wartości logarytmu funkcji wiarygodności $\ell = \ln L$ i niskiej liczbie szacowanych parametrów $k = p + q + 1$.
- Najczęściej stosowane: Akaike'a (AIC), Schwarza (BIC) oraz Hannana-Quinna (HQIC):

$$AIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}$$
$$BIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}\ln T$$
$$HQIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}\ln(\ln T)$$

- Nagroda za dobre dopasowanie do danych, kara za liczbę parametrów.

Prognoza punktowa

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}$$

przyjmijmy, że znamy y_t oraz reszty e_t dla $t \leq T$. Interesuje nas prognoza na okresy $T+1$, $T+2$ i tak dalej.

$$y_{T+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{T+1-i} + \epsilon_{T+1}$$

czyli

$$E_T\left[y_{T+1}\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{T+1-i}$$

Prognoza punktowa

- Prognozy punktowe obliczamy w sposób rekurencyjny.

$$
\begin{aligned}
E_T\left[y_{T+2}\right] &= a_0 + E_T\left[\sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+2-i}\right] + \sum_{i=2}^{q} \theta_i e_{T+2-i} \\
&\quad + \theta_1 E_T\left[\epsilon_{T+1}\right] + E_T\left[e_{T+2}\right] \\
&= a_0 + a_1 E_T\left[y_{T+1}\right] + \sum_{i=2}^{p} a_i y_{T+2-i} + \sum_{i=2}^{q} \theta_i e_{T+2-i}
\end{aligned}
$$

- Dla $k > p$ i $k > q$ mamy

$$
E_T\left[y_{T+k}\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i E_T y_{T+k-i}
$$

Wariancja błędu prognozy

- Postać $MA(\infty)$:

$$y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \ldots$$

- Błąd losowy prognozy:

$$y_{T+1} - E_T[y_{T+1}] = \epsilon_{T+1}$$
$$y_{T+2} - E_T[y_{T+2}] = \epsilon_{T+2} + \psi_1 \epsilon_{T+1}$$

i tak dalej:

$$y_{T+k} - E_T[y_{T+k}] = \epsilon_{T+k} + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_k \epsilon_{T+k-i}$$

Wariancja błędu prognozy

- Ponieważ $Cov\left[\epsilon_t, \epsilon_s\right] = 0$ dla $s \neq t$ oraz $Var\left[\epsilon_t\right] = \sigma_\epsilon^2$ mamy

$$\sigma_k^2 = Var\left[y_{T+k}\right] = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^2\right)$$

- Nie uwzględnia to innych błędów prognozy (np. błędnej specyfikacji).
- σ_k^2 wykorzystujemy do stworzenia prognozy przedziałowej.

Modele ARIMA

- Model ARIMA(p, d, q) to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \rho_i L^i\right)(1 - L)^d y_t = \left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i L^i\right) \epsilon_t$$

- Na przykład ARIMA$(0, 1, 0)$

$$y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$$

  a ARIMA$(0, 2, 0)$

$$(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = \epsilon_t$$

- Korzystamy w przypadku niestacjonarnych danych.

Modele SARIMA

- Model ARIMA$(p, d, q)\,(P, D, Q)_m$ to

$$\left(1-\sum_{i=1}^{p}\rho_i L^i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{P}\varrho_i L^{im}\right)(1-L)^d\,(1-L^m)^D\,y_t = \left(\sum_{i=0}^{q}\theta_i L^i\right)\left(\sum_{i=0}^{Q}\vartheta_i L^{im}\right)\epsilon_t$$

gdzie m to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).

Modele SARIMA

- Przykład: model SARIMA$(0,0,0)(1,0,0)_4$ to

$$\begin{aligned}\left(1-\varrho_1 L^4\right) y_t &= \epsilon_t \\ y_t - \varrho_1 y_{t-4} &= \epsilon_t\end{aligned}$$

- Przykład: model SARIMA$(1,0,0)(0,1,0)_4$ to

$$\begin{aligned}(1-\rho L)\left(1-L^4\right) y_t &= \epsilon_t \\ (y_t - y_{t-4}) - \rho\left(y_{t-1} - y_{t-4-1}\right) &= \epsilon_t\end{aligned}$$