

# Modele ARMA

ASC 2023

---

Piotr Żoch

- Wold i operator opóźnień
- Model AR
- Model MA
- Modele ARMA
- Prognozy
- Modele SARIMA

## Dekompozycja Wolda i operator opóźnień

---

# Stacjonarność - przypomnienie

- Zmienna jest **stacjonarna** w sensie **słabym** (*stacjonarność kowariancyjna*) jeśli spełnione są trzy warunki:
  - $E[Y_t] = \mu < \infty$
  - $Var[Y_t] = \sigma^2 < \infty$
  - $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_s, Y_{s+h}) = \gamma_h$
- Intuicyjnie: właściwości zmiennej nie zmieniają się w czasie.
- Jeśli którykolwiek warunek nie jest spełniony, zmienna jest **niestacjonarna**.
- W praktyce będziemy badać stacjonarność w sensie słabym.

- **Każdy** stacjonarny (w sensie słabym) proces stochastyczny  $\{Y_t\}$  można przedstawić jako

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t, \quad \psi_0 = 1, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

gdzie:

- $\psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ;
- $\kappa_t$  jest składnikiem deterministycznym;
- $\varepsilon_t = Y_t - E[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$ ;
- $\{\psi\}$  nie zależą od okresu  $t$ , jedynie od horyzontu  $j$ .

- AR: *autoregressive*
- MA: *moving average*

$$y_t = a_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

# Operator opóźnień

- Definicja (*lag operator*):

$$L^i y_t \equiv y_{t-i}$$

- Właściwości:

- $L^i c = c$
- $(L^i + L^j) y_t = L^i y_t + L^j y_t$
- $L^{-i} y_t = y_{t+i}$  (*lead operator*)
- Dla  $|a| < 1$

$$(1 + aL + a^2L^2 + \dots) y_t = \frac{y_t}{1 - aL}$$

- Dla  $|a| > 1$

$$\left[ 1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \dots \right] y_t = \frac{-aLy_t}{1 - aL}$$

- Niech

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_p L^p$$

- $\theta(L)$  nazywamy **wielomianem opóźnień** (*lag polynomial*).
- Zachodzi

$$\theta(1) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p$$

$$\theta(L^2) = 1 + \theta_1 L^2 + \theta_2 L^4 + \dots + \theta_p L^{2p}$$



Przykład. Mamy dwa wielomiany opóźnień:

$$a(L) = 1 - aL$$

$$b(L) = 1 - bL$$

i zachodzi

$$\begin{aligned} a(L) b(L) x_t &= (1 - aL)(1 - bL) x_t \\ &= (1 - (a + b)L + abL^2) x_t \\ &= x_t - (a + b)x_{t-1} + abx_{t-2} \end{aligned}$$

# Wielomian opóźnień

- Wielomiany opóźnień możemy dodawać i mnożyć jak zwykłe wielomiany.
- *Transformata z*: zamiast skomplikowanego  $L$  można pracować na  $z$  i udać, że mamy do czynienia ze zwykłymi wielomianami, żeby znaleźć współczynniki wielomianu opóźnień.
- Przykład:

$$\begin{aligned} a(L) &= 1 + a_1L + a_2L^2 + \cdots + a_pL^p \\ &= (1 - \alpha_1L)(1 - \alpha_2L) \cdots (1 - \alpha_pL^p) \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_p^{-1}$  są pierwiastkami. Jeśli  $a(L)^{-1}$  istnieje (kiedy?), to mamy

$$a(L)^{-1} = (1 - \alpha_1L)^{-1} (1 - \alpha_2L)^{-1} \cdots (1 - \alpha_pL^p)^{-1}$$

## Wielomian opóźnień - przykład

- Przykład:

$$x_t = -0.3x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$$

możemy zapisać jako

$$a(L)x_t = u_t$$

gdzie

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

- Jakie są pierwiastki tego wielomianu?

## Wielomian opóźnień - przykład

- Wielomian

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

można zapisać jako

$$a(L) = (1 + 0.5L)(1 - 0.2L)$$

(pierwiastki równe 2 i 5).

## Wielomian opóźnień - przykład

- Odwrotność wielomianu

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

to

$$a(L)^{-1} = (1 + 0.5L)^{-1} (1 - 0.2L)^{-1}$$

gdzie

$$(1 + 0.5L)^{-1} = 1 + 0.5L + 0.25L^2 + \dots$$

$$(1 - 0.2L)^{-1} = 1 - 0.2L + 0.16L^2 - \dots$$

czyli

$$a(L)^{-1} = 1 - 0.3L + 0.28L^2 - \dots$$

- Skoro

$$a(L)x_t = u_t$$

to

$$\begin{aligned}x_t &= a(L)^{-1} u_t \\&= u_t - 0.3u_{t-1} + 0.28u_{t-2} - \dots\end{aligned}$$

- Stacjonarny model ARMA

$$y_t = \underbrace{\sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

możemy zapisać jako

$$A(L) y_t = \Theta(L) \varepsilon_t,$$

czyli

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\Theta(L)}{A(L)} \varepsilon_t \\ &= \Psi(L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

(wszystko działa podobnie, gdy mamy też stałą  $a_0$ ).

- Dekompozycja Wolda: stacjonarny proces ARMA

$$A(L)y_t = a_0 + \theta(L)\varepsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t + \kappa_t$$

$$\psi_0 = 1$$

gdzie  $\kappa_t$  jest składnikiem deterministycznym.



- Mnożnik dynamiczny mierzy efekt  $\varepsilon_t$  na wartości  $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$ :

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_h}{\partial \varepsilon_0} = \psi_h$$

- Funkcja reakcji na impuls to  $\{\psi_h\}_{h=0}^{\infty}$  - mówi nam o tym, jak reagują wartości  $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$  na jednorazowy impuls/szok  $\varepsilon_t$ .

- Mnożnik skumulowany: efekt permanentnej zmiany  $\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \dots$ .

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+1}} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+2}} + \dots + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+h}} = \sum_{j=0}^h \psi_{h-j}$$

- Dla  $h \rightarrow \infty$  mamy  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \Psi(1)$ .

## Model AR

---

- Model AR(p) (rzędu  $p$ ):

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

gdzie  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

$$A(L) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

czyli

$$A(L) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

- Jeśli (!) wielomian  $A(L)$  jest odwracalny, to mamy:

$$\begin{aligned}y_t &= A^{-1}(L)(a_0 + \epsilon_t) \\&= \mu + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots \\&= \mu + \beta(L) \epsilon_t\end{aligned}$$

- Jeśli pierwiastki równania  $A(x) = 0$  spełniają  $|x_p| > 1$  dla każdego  $p$ , to mówimy, że model  $AR(p)$  jest **stabilny**.
- Stabilność  $\Rightarrow$  stacjonarność (słaba).
- Wtedy można zapisać proces  $AR(p)$  jako proces  $MA(\infty)$  (Wold)

$$y_t = \mu + \beta(L) \epsilon_t$$

gdzie  $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 0$ .

- Przykład - AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

można zapisać jako

$$(1 - \rho L) y_t = \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

## Model AR(1)

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?
- Mamy

$$1 - \rho x = 0$$

dla

$$x = \frac{1}{\rho},$$

więc stacjonarność dla  $|\frac{1}{\rho}| > 1$  (czyli  $\rho \in (-1, 1)$ ).

- Można wtedy zapisać:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{(1 - \rho L)} \epsilon_t \\ &= (1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \dots) \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \rho \epsilon_{t-1} + \rho^2 \epsilon_{t-2} + \dots \end{aligned}$$



- Mamy

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \dots$$

- Mnożnik dynamiczny:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \rho^h$$

- Mnożnik skumulowany:

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots = \frac{1}{1 - \rho}$$

- Przykład - błądzenie losowe

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

- Model AR(p) to

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Możemy zbadać stabilność analizując pierwiastki wielomianu opóźnień

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p.$$

- Stabilność gdy wszystkie pierwiastki są *poza* kołem jednostkowym.

# Model AR(p)

- Inne spojrzenie na model AR(p): niech

$$x_{0,t} = y_t$$

$$x_{1,t} = y_{t-1}$$

$$x_{2,t} = y_{t-2}$$

i tak dalej.

- Możemy zapisać AR(p) jako (SPRAWDZIC)

$$\begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{p,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,t-1} \\ x_{1,t-1} \\ \vdots \\ x_{p,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Możemy zapisać AR(p) jako

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Ważne: występuje tylko pierwsze opóźnienie wektora  $\mathbf{x}_t$ !

- Analogicznie do tego, co mieliśmy wcześniej:

$$(I - AL) \mathbf{x}_t = 0$$

- To to samo, co

$$(A - \lambda I) \mathbf{x}_t = 0$$

- Szukamy wartości własnych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Można pokazać, że wartości własne to odwrotności pierwiastków wielomianu opóźnień.
- Stabilność wtedy, gdy wszystkie wartości własne  $|\lambda_k| < 1$  (w kole jednostkowym).
- *Uwaga:* wartości własne **w** kole jednostkowym, pierwiastki wielomianu opóźnień **poza**!

## Model AR(p) - momenty

- Wartość oczekiwana:

$$E[y_t] = a_0 + a_1 E[y_{t-1}] + a_2 E[y_{t-2}] + \dots + a_p E[y_{t-p}] + E[\epsilon_t],$$

gdzie

$$E[\epsilon_t] = 0.$$

- Dla procesu stacjonarnego

$$E[y_t] = E[y_{t-1}] = \dots$$

czyli

$$E[y_t] = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots}$$



- Równania Yule'a-Walkera: kowariancja  $\gamma_k \equiv \text{Cov}(y_t, y_{t-k})$  spełnia

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + \dots + a_p \gamma_{k-p}$$

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + \dots + a_p \gamma_p + \sigma^2$$

- Korelacja:

$$\rho_k = a_1 \rho_{k-1} + \dots + a_p \rho_{k-p}$$

- Mnożniki:

$$\psi_k = a_1 \psi_{k-1} + \dots + a_p \psi_{k-p}$$

## Model MA

---

- Model MA( $q$ ) (rzędu  $q$ )

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

gdzie  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

- Model średniej ruchomej (*moving average*) to średnia ważona procesu białego szumu z bieżącego oraz  $q$  poprzednich okresów.

- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$y_t = \mu + \theta(L) \epsilon_t$$

- Trudność: jak oszacować parametry tego modelu?
  - Nie obserwujemy  $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots$  w danych.

- Momenty modelu MA(q):

$$E[y_t] = a_0$$

$$\text{Var}[y_t] = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = \begin{cases} 0 & k > q \\ (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-k}) \sigma^2 & k \leq q \end{cases}$$

- Rozważmy model MA(1)

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L) \epsilon_t\end{aligned}$$

- Można go zapisać

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= (1 + \theta_1 L)^{-1} y_t \\ &= y_t - \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + \cdots\end{aligned}$$

jeśli  $|\theta_1| < 1$ .

- W tym wypadku mówimy, że model MA(1) jest **odwracalny** i można przedstawić MA(1) jako AR( $\infty$ ).

- Momenty

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

to

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2) \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \theta_1 \sigma^2$$

- Autokorelacja

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1 + \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2} \end{aligned}$$

- Dwa modele MA(1)

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

$$y_t = \epsilon_t + \frac{1}{\theta_1} \epsilon_{t-1}$$

mają taką samą autokorelację (ACF)

- Jeden z nich jest odwracalny, drugi nie.
- Ten odwracalny nazywamy **postacią fundamentalną** modelu MA(1).



- Uwaga: odwracalność  $MA(q)$  nie jest wymagana do stabilności ( $MA(q)$  jest zawsze stabilny) - jest potrzebna do odwracalności i możliwości przedstawienia jako  $AR(\infty)$ .
- W ogólnym przypadku odwracalność zachodzi, gdy wszystkie pierwiastki  $\theta(L)$  są poza kołem jednostkowym.

## Modele ARMA w praktyce

---

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

gdzie  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

- Inna notacja:

$$A(L)y_t = a_0 + \theta(L)\epsilon_t$$

Proces ARMA jest stacjonarny jeśli pierwiastki równania  $A(x) = 0$  leżą poza kołem jednostkowym.

- Jak dobrać  $(p,q)$ ?
  - Metoda Boxa-Jenkinsa (1970)
  - Kryteria informacyjne

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów  $p$  i  $q$ .

- Funkcja autokorelacji (Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\text{Var}(y_t)}$$

i  $\rho_k \in [-1, 1]$

- Funkcja autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami oddalonymi od siebie o  $k$  okresów bez uwzględnienia wpływu wszystkich obserwacji “pomiędzy”
- Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi  $\alpha_k$  w modelu autoregresyjnym  $k$ -tego rzędu

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów  $p$  i  $q$ .
  - Dla MA:

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = \begin{cases} 0 & k > q \\ (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-k})\sigma^2 & k \leq q \end{cases}$$

więc w ACF istotnych jest  $q$  pierwszych opóźnień

- Dla AR w PACF istotnych jest  $p$  pierwszych opóźnień



- Ustalenie wartości  $p$  i  $q$  na podstawie wykresu ACF i PACF.
- Estymacja parametrów modelu ARMA( $p,q$ )
- Weryfikacja modelu ARMA( $p,q$ ):
  - Dla modelu ARMA( $p^*,q^*$ ), gdzie  $p^* \geq p$  i  $q^* \geq q$ , werykuje się istotność dodatkowych opóźnień.
  - Sprawdza się, czy występuje autokorelacja reszt.

- **Kryteria informacyjne:** wybrać specyfikację o wysokiej wartości logarytmu funkcji wiarygodności  $\ell = \ln L$  i niskiej liczbie szacowanych parametrów  $k = p + q + 1$ .
- Najczęściej stosowane: Akaike'a (AIC), Schwarza (BIC) oraz Hannana-Quinna (HQIC):

$$AIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}$$

$$BIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T} \ln T$$

$$HQIC = -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T} \ln(\ln T)$$

- Nagroda za dobre dopasowanie do danych, kara za liczbę parametrów.

- Polega na stopniowym upraszczaniu możliwie najogólniejszego modelu początkowego
- Ograniczenia narzucane na model definiowane przez zagnieżdżone hipotezy:
  - $H_0^K$  zawiera najwięcej ograniczeń,  $H_0^1$  najmniej.
- Hipotezą alternatywną jest zawsze postać ogólna.

# Metoda od ogólnego do szczegółowego

- Przykład: ogólna postać

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

i szczególne postaci

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + 0 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_t = 0 \cdot y_{t-1} + \beta_2 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_t = 0 \cdot y_{t-1} + 0 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$

- Problem: w jakiej kolejności testować?
- W przypadku szeregów czasowych zazwyczaj zagnieżdżanie pod względem kolejności opóźnień.

- Test LR (likelihood ratio):

$$LR = -2 [\ell(\theta_R) - \ell(\theta)]$$

gdzie  $L(\theta_R)$  odpowiada modelowi z restrykcjami. Można użyć tylko w przypadku modeli zagnieżdżonych.

- Przy  $H_0$  (restrykcje) statystyka testowa ma rozkład  $\chi^2$  z liczbą stopni swobody równą liczbie niezależnych liniowo restrykcji.

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

przyjmijmy, że znamy  $y_t$  oraz reszty  $e_t$  dla  $t \leq T$ . Interesuje nas prognoza na okresy  $T+1$ ,  $T+2$  i tak dalej.

$$y_{T+1} = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{T+1-i} + \epsilon_{T+1}$$

czyli

$$E_T[y_{T+1}] = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{T+1-i}$$

- Prognozy punktowe obliczamy w sposób rekurencyjny.

$$\begin{aligned} E_T[y_{T+2}] &= a_0 + E_T \left[ \sum_{i=1}^p a_i y_{T+2-i} \right] + \sum_{i=2}^q \theta_i e_{T+2-i} \\ &\quad + \theta_1 E_T[\epsilon_{T+1}] + E_T[e_{T+2}] \\ &= a_0 + a_1 E_T[y_{T+1}] + \sum_{i=2}^p a_i y_{T+2-i} + \sum_{i=2}^q \theta_i e_{T+2-i} \end{aligned}$$

- Dla  $k > p$  i  $k > q$  mamy

$$E_T[y_{T+k}] = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i E_T y_{T+k-i}$$

## Wariancja błędu prognozy

- Postać  $MA(\infty)$ :

$$y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots$$

- Błąd losowy prognozy:

$$y_{T+1} - E_T[y_{T+1}] = \epsilon_{T+1}$$

$$y_{T+2} - E_T[y_{T+2}] = \epsilon_{T+2} + \psi_1 \epsilon_{T+1}$$

i tak dalej:

$$y_{T+k} - E_T[y_{T+k}] = \epsilon_{T+k} + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i \epsilon_{T+k-i}$$



- Ponieważ  $\text{Cov}[\epsilon_t, \epsilon_s] = 0$  dla  $s \neq t$  oraz  $\text{Var}[\epsilon_t] = \sigma_\epsilon^2$  mamy

$$\sigma_k^2 = \text{Var}[y_{T+k}] = \sigma_\epsilon^2 \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^2 \right)$$

- Nie uwzględnia to innych błędów prognozy (np. błędnej specyfikacji).
- $\sigma_k^2$  wykorzystujemy do stworzenia prognozy przedziałowej.

- Model ARIMA( $p, d, q$ ) to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i\right) (1 - L)^d y_t = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i L^i\right) \epsilon_t$$

- Na przykład ARIMA(0, 1, 0)

$$y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$$

a ARIMA(0, 2, 0)

$$(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = \epsilon_t$$

- Korzystamy w przypadku niestacjonarnych danych.

- Model  $\text{ARIMA}(p, d, q) (P, D, Q)_m$  to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^P \varrho_i L^{im}\right) (1 - L)^d (1 - L^m)^D y_t = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i L^i\right) \left(\sum_{i=0}^Q \vartheta_i L^{im}\right) \epsilon_t$$

gdzie  $m$  to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).

- Przykład: model SARIMA(0, 0, 0) (1, 0, 0)<sub>4</sub> to

$$(1 - \varrho_1 L^4) y_t = \epsilon_t$$

$$y_t - \varrho_1 y_{t-4} = \epsilon_t$$

- Przykład: model SARIMA(1, 0, 0) (0, 1, 0)<sub>4</sub>to

$$(1 - \rho L) (1 - L^4) y_t = \epsilon_t$$

$$(y_t - y_{t-4}) - \rho (y_{t-1} - y_{t-4-1}) = \epsilon_t$$