# Modele ARMA

ASC 2024

Piotr Żoch

# Plan

- Model AR
- Model MA
- Modele ARMA
- Prognozy

# ARMA

# ARMA

- AR: *autoregressive*
- MA: *moving average*

$$y_t = a_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

# Funkcja reakcji na impuls

- Stacjonarny proces ARMA

$$A(L)\, y_t = a_0 + \theta(L)\, \varepsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t + \kappa_t$$
$$\psi_0 = 1$$

gdzie $\kappa_t$ jest składnikiem deterministycznym.

# Funkcja reakcji na impuls

- Mnożnik dynamiczny mierzy efekt $\varepsilon_t$ na wartości $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_h}{\partial \varepsilon_0} = \psi_h$$

- Funkcja reakcji na impuls to $\{\psi_h\}_{h=0}^{\infty}$ - mówi nam o tym, jak reagują wartości $\{y_{t+h}\}_{h=0}^{\infty}$ na jednorazowy impuls/szok $\varepsilon_t$.

# Funkcja reakcji na impuls

- Mnożnik skumulowany: efekt permanentnej zmiany $\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \cdots$.

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+1}} + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+2}} + \cdots + \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_{t+h}} = \sum_{j=0}^{h} \psi_{h-j}$$

- Dla $h \to \infty$ mamy $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \Psi(1)$.

# Model AR

# Model AR

- Model AR(p) *(rzędu p):*

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

gdzie $\epsilon_t$ i.i.d. z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\sigma^2$.

# Model AR(1)

- **Przykład** - AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

jeśli $|\rho| < 1$.

# Model AR(1)

- Mamy

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

- Mnożnik dynamiczny:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \rho^h$$

- Mnożnik skumulowany:

$$1 + \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

# Model AR(p)

- Model AR(p) to

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Możemy zbadać stabilność analizując pierwiastki *wielomianu opóźnień* (szczegółowa dyskusja wielomianów opóźnień na kolejnych zajęciach)

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p.$$

- Stabilność gdy wszystkie pierwiastki są *poza* kołem jednostkowym.

# Model AR(p)

- Inne spojrzenie na model AR(p): niech

$$x_{0,t} = y_t$$
$$x_{1,t} = y_{t-1}$$
$$x_{2,t} = y_{t-2}$$

  i tak dalej.
- Możemy zapisać AR(p) jako

$$\begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{p,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,t-1} \\ x_{1,t-1} \\ \vdots \\ x_{p,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

# Model AR(p)

- Sprawdźmy:

$$\begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{p,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,t-1} \\ x_{1,t-1} \\ \vdots \\ x_{p,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Pierwszy wiersz to

$$\underbrace{x_{0,t}}_{y_t} = a_0 + a_1 \underbrace{x_{0,t-1}}_{y_{t-1}} + a_2 \underbrace{x_{1,t-1}}_{y_{t-2}} + \dots + a_p \underbrace{x_{p-1,t-1}}_{y_{t-p}} + \epsilon_t.$$

- Drugi wiersz to

$$\underbrace{x_{1,t}}_{y_{t-1}} = \underbrace{x_{0,t-1}}_{y}.$$

- Kolejne wiersze są podobne do drugiego.

## Model AR(p)

- Możemy zapisać AR(p) jako

$$x_t = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + Ax_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Ważne: występuje tylko pierwsze opóźnienie wektora $x_t$!
- Korzyść: możemy badać czy AR(p) da się zapisać jako MA($\infty$) analizując macierz A:

$$x_t = (I - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

# Model AR(p) - momenty

- Wartość oczekiwana:

$$E[y_t] = a_0 + a_1 E[y_{t-1}] + a_2 E[y_{t-2}] + \ldots + a_p E[y_{t-p}] + E[\epsilon_t],$$

gdzie

$$E[\epsilon_t] = 0.$$

- Dla procesu stacjonarnego

$$E[y_t] = E[y_{t-1}] = \cdots$$

czyli

$$E[y_t] = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \cdots}$$

# Model AR(p) - momenty

- Równania **Yule'a-Walkera**: kowariancja $\gamma_k \equiv Cov\left(y_t, y_{t-k}\right)$ spełnia

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + \cdots + a_p\gamma_{k-p}$$
$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_p\gamma_p + \sigma^2$$

- Korelacja:

$$\rho_k = a_1\rho_{k-1} + \cdots + a_p\rho_{k-p}$$

- Mnożniki:

$$\psi_k = a_1\psi_{k-1} + \cdots + \psi_p\rho_{k-p}$$

# Model MA

# Model MA

- Model MA(q) *(rzędu q)*

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

  gdzie $\epsilon_t$ i.i.d. z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\sigma^2$.
- Model średniej ruchomej (*moving average)* to średnia ważona procesu białego szumu z bieżącego oraz $q$ poprzednich okresów.

# Model MA

- Trudność: jak oszacować parametry tego modelu?
    - Nie obserwujemy $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$ w danych.

# Momenty MA(q)

- Momenty modelu MA(q):

$$E\left[y_t\right] = a_0$$
$$Var\left[y_t\right] = \left(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2\right)\sigma^2$$
$$Cov\left[y_t, y_{t-k}\right] = \begin{cases} 0 & k > q \\ \left(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \ldots\theta_q\theta_{q-k}\right)\sigma^2 & k \leq q \end{cases}$$

## Odwracalność

- Rozważmy model MA(1)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} \\
&= (1 + \theta_1 L)\, \epsilon_t
\end{aligned}
$$

- Można go zapisać jako

$$
\epsilon_t = y_t - \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + \cdots
$$

jeśli $|\theta_1| < 1$.

- W tym wypadku mówimy, że model MA(1) jest **odwracalny** i można przedstawić MA(1) jako AR($\infty$).

# Momenty MA(1)

- Momenty

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

  to

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \left(1 + \theta_1^2\right) \sigma^2 \\ \gamma_1 &= \theta_1 \sigma^2 \end{aligned}$$

- Autokorelacja

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1 + \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2} \end{aligned}$$

# Odwracalność

- Dwa modele MA(1)

$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$
$$y_t = \epsilon_t + \frac{1}{\theta_1} \epsilon_{t-1}$$

  mają taką samą autokorelację (ACF)
- Jeden z nich jest odwracalny, drugi nie.
- Ten odwracalny nazywamy **postacią fundamentalną** modelu MA(1).

# Modele ARMA w praktyce

# Model ARMA

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}$$

# Model ARMA

- Jak dobrać (p,q)?
  - Metoda Boxa-Jenkinsa (1970)
  - Kryteria informacyjne

# Metoda Boxa-Jenkinsa

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów p i q.

# ACF

- Funkcja autokorelacji (Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami

$$\rho_k = \frac{Cov\left(y_t, y_{t-k}\right)}{Var\left(y_t\right)}$$

i $\rho_k \in [-1, 1]$

# PACF

- Funkcja autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami oddalonymi od siebie o $k$ okresów bez uwzględnienia wpływu wszystkich obserwacji "pomiędzy"
- Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi $\alpha_k$ w modelu autoregresyjnym $k$-tego rzędu

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{y-1} + \cdots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

# Metoda Boxa-Jenkinsa

- Idea: użyć wykresów ACF i PACF do identyfikacji rzędów $p$ i $q$.
  - Dla MA:

$$Cov\left[y_t, y_{t-k}\right] = \begin{cases} 0 & k > q \\ \left(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + ...\theta_q\theta_{q-k}\right)\sigma^2 & k \leq q \end{cases}$$

    więc w ACF istotnych jest $q$ pierwszych opóźnień
  - Dla AR w PACF istotnych jest $p$ pierwszych opóźnień

# Metoda Boxa-Jenkinsa

- Ustalenie wartości $p$ i $q$ na podstawie wykresu ACF i PACF.
- Estymacja parametrów modelu ARMA(p,q)
- Weryfikacja modelu ARMA(p,q):
    - Dla modelu ARMA(p*,q*), gdzie $p^* \geq p$ i $q^* \geq q$, werykuje się istotność dodatkowych opóźnień.
    - Sprawdza się, czy występuje autokorelacja reszt.

# Kryteria informacyjne

- **Kryteria informacyjne:** wybrać specyfikację o wysokiej wartości logarytmu funkcji wiarygodności $\ell = \ln L$ i niskiej liczbie szacowanych parametrów $k = p + q + 1$.
- Najczęściej stosowane: Akaike'a (AIC), Schwarza (BIC) oraz Hannana-Quinna (HQIC):

$$
\begin{aligned}
AIC &= -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T} \\
BIC &= -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}\ln T \\
HQIC &= -2\frac{\ell}{T} + 2\frac{k}{T}\ln(\ln T)
\end{aligned}
$$

- Nagroda za dobre dopasowanie do danych, kara za liczbę parametrów.

# Metoda od ogólnego do szczegółowego

- Polega na stopniowym upraszczaniu możliwie najogólniejszego modelu początkowego
- Ograniczenia narzucane na model definiowane przez zagnieżdżone hipotezy:
  - $H_0^K$ zawiera najwięcej ograniczeń, $H_0^1$ najmniej.
- Hipotezą alternatywną jest zawsze postać ogólna.

# Metoda od ogólnego do szczegółowego

- Przykład: ogólna postać

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

i szczególne postaci

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + 0 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$
$$y_t = 0 \cdot y_{t-1} + \beta_2 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$
$$y_t = 0 \cdot y_{t-1} + 0 \cdot y_{t-2} + \epsilon_t$$

- Problem: w jakiej kolejności testować?
- W przypadku szeregów czasowych zazwyczaj zagnieżdżanie pod względem kolejności opóźnień.

# Metoda od ogólnego do szczegółowego

- Test LR (likelihood ratio):

$$LR = -2\left[\ell\left(\theta_R\right) - \ell\left(\theta\right)\right]$$

  gdzie $L\left(\theta_R\right)$ odpowiada modelowi z restrykcjami. Można użyć tylko w przypadku modeli zagnieżdżonych.
- Przy $H_0$ (restrykcje) statystyka testowa ma rozkład $\chi^2$ z liczbą stopni swobody równą liczbie niezależnych liniowo restrykcji.

## Prognoza punktowa

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}$$

przyjmijmy, że znamy $y_t$ oraz reszty $e_t$ dla $t \leq T$. Interesuje nas prognoza na okresy $T+1$, $T+2$ i tak dalej.

$$y_{T+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{T+1-i} + \epsilon_{T+1}$$

czyli

$$E_T\left[y_{T+1}\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+1-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{T+1-i}$$

# Prognoza punktowa

- Prognozy punktowe obliczamy w sposób rekurencyjny.

$$
\begin{aligned}
E_T\left[y_{T+2}\right] &= a_0 + E_T\left[\sum_{i=1}^{p} a_i y_{T+2-i}\right] + \sum_{i=2}^{q} \theta_i e_{T+2-i} \\
&\quad + \theta_1 E_T\left[\epsilon_{T+1}\right] + E_T\left[e_{T+2}\right] \\
&= a_0 + a_1 E_T\left[y_{T+1}\right] + \sum_{i=2}^{p} a_i y_{T+2-i} + \sum_{i=2}^{q} \theta_i e_{T+2-i}
\end{aligned}
$$

- Dla $k > p$ i $k > q$ mamy

$$
E_T\left[y_{T+k}\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i E_T y_{T+k-i}
$$

# Wariancja błędu prognozy

- Postać $MA(\infty)$:

$$y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \ldots$$

- Błąd losowy prognozy:

$$\begin{aligned} y_{T+1} - E_T\left[y_{T+1}\right] &= \epsilon_{T+1} \\ y_{T+2} - E_T\left[y_{T+2}\right] &= \epsilon_{T+2} + \psi_1 \epsilon_{T+1} \end{aligned}$$

i tak dalej:

$$y_{T+k} - E_T\left[y_{T+k}\right] = \epsilon_{T+k} + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_k \epsilon_{T+k-i}$$

# Wariancja błędu prognozy

- Ponieważ $Cov\left[\epsilon_t, \epsilon_s\right] = 0$ dla $s \neq t$ oraz $Var\left[\epsilon_t\right] = \sigma_\epsilon^2$ mamy

$$\sigma_k^2 = Var\left[y_{T+k}\right] = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^2\right)$$

- Nie uwzględnia to innych błędów prognozy (np. błędnej specyfikacji).
- $\sigma_k^2$ wykorzystujemy do stworzenia prognozy przedziałowej.