Modele ARMA: kontynuacja

ASC 2024

Piotr Żoch

Plan

- Wielomian opóźnień.
- AR i MA: dodatkowe właściwości.
- SARIMA

Dekompozycja Wolda i operator opóźnień

Stacjonarność - przypomnienie

- Zmienna jest **stacjonarna** w sensie **słabym** (*stacjonarność kowariancyjna*) jeśli spełnione są trzy warunki:
  - $E[Y_t] = \mu < \infty$
  - $Var[Y_t] = \sigma^2 < \infty$
  - $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_s, Y_{s+h}) = \gamma_h$
- Intuicyjnie: właściwości zmiennej nie zmieniają się w czasie.
- Jeśli którykolwiek warunek nie jest spełniony, zmienna jest **niestacjonarna**.
- W praktyce będziemy badać stacjonarność w sensie słabym.

Dekompozycja Wolda

- **Każdy** stacjonarny (w sensie słabym) proces stochastyczny $\{Y_t\}$ można przedstawić jako

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t, \quad \psi_0 = 1, \quad \varepsilon_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

gdzie:

  - ε_t jest białym szumem z wariancją σ^2;
  - $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$;
  - κ_t jest składnikiem deterministycznym;
  - $\varepsilon_t = Y_t - E\left[Y_t \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots\right]$;
  - $\{\psi\}$ nie zależą od okresu t, jedynie od horyzontu j.

Operator opóźnień

- Definicja (*lag operator*):

$$L^i y_t \equiv y_{t-i}$$

- Właściwości:
  - $L^i c = c$
  - $\left(L^i + L^j\right) y_t = L^i y_t + L^j_t y_t$
  - $L^{-i} y_t = y_{t+i}$ *(lead operator)*
  - Dla $|a| < 1$

$$\left(1 + aL + a^2 L^2 + \cdots\right) y_t = \frac{y_t}{1 - aL}$$

  - Dla $|a| > 1$

$$\left[1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \cdots\right] y_t = -\frac{aLy_t}{1 - aL}$$

Wielomian opóźnień

- Niech

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_p L^p$$

- $\theta(L)$ nazywamy **wielomianem opóźnień** *(lag polynomial)*.
- Zachodzi

$$\theta(1) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_p$$
$$\theta\left(L^2\right) = 1 + \theta_1 L^2 + \theta_2 L^4 + \ldots + \theta_p L^{2p}$$

Wielomian opóźnień

Przykład. Mamy dwa wielomiany opóźnień:

$$a(L) = 1 - aL$$
$$b(L) = 1 - bL$$

i zachodzi

$$\begin{aligned} a(L)\, b(L)\, x_t &= (1 - aL)(1 - bL)\, x_t \\ &= \left(1 - (a+b)\, L + abL^2\right) x_t \\ &= x_t - (a+b)\, x_{t-1} + abx_{t-2} \end{aligned}$$

Wielomian opóźnień

- Wielomiany opóźnień możemy dodawać i mnożyć jak zwykłe wielomiany.
- *Transformata z*: zamiast skomplikowanego L można pracować na z i *udać*, że mamy do czynienia ze zwykłymi wielomianami, żeby znaleźć współczynniki wielomianu opóźnień.
- Przykład:

$$
\begin{aligned}
a(L) &= 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \cdots + a_p L^p \\
&= (1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L) \cdots (1 - \alpha_p L^p)
\end{aligned}
$$

gdzie $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_p^{-1}$ są pierwiastkami. Jeśli $a(L)^{-1}$ istnieje (kiedy?), to mamy

$$
a(L)^{-1} = (1 - \alpha_1 L)^{-1} (1 - \alpha_2 L)^{-1} \cdots (1 - \alpha_p L^p)^{-1}
$$

Wielomian opóźnień - przykład

- Przykład:

$$x_t = -0.3x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$$

  możemy zapisać jako

$$a(L)\, x_t = u_t$$

  gdzie

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

- Jakie są pierwiastki tego wielomianu?

Wielomian opóźnień - przykład

- Wielomian
$$a\left(L\right) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$
można zapisać jako
$$a\left(L\right) = \left(1 + 0.5L\right)\left(1 - 0.2L\right)$$
(pierwiastki równe -2 i 5).

Wielomian opóźnień - przykład

- Odwrotność wielomianu

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

to

$$a(L)^{-1} = (1 + 0.5L)^{-1} (1 - 0.2L)^{-1}$$

gdzie

$$(1 + 0.5L)^{-1} = 1 + 0.5L + 0.25L^2 + \cdots$$
$$(1 - 0.2L)^{-1} = 1 - 0.2L + 0.16L^2 -$$

czyli

$$a(L)^{-1} = 1 - 0.3L + 0.28L^2 - \cdots$$

Wielomian opóźnień - przykład

- Skoro
$$a\left(L\right)x_t = u_t$$
to
$$\begin{aligned} x_t &= a\left(L\right)^{-1}u_t \\ &= u_t - 0.3u_{t-1} + 0.28u_{t-2} - \cdots \end{aligned}$$

Model ARMA

- Stacjonarny model ARMA

$$y_t = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

możemy zapisać jako

$$A(L)\, y_t = \Theta(L)\, \varepsilon_t,$$

czyli

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\Theta(L)}{A(L)} \varepsilon_t \\ &= \Psi(L)\, \varepsilon_t \end{aligned}$$

(wszystko działa podobnie, gdy mamy też stałą a_0).

Funkcja reakcji na impuls

- Dekompozycja Wolda: stacjonarny proces ARMA

$$A(L)\, y_t = a_0 + \theta(L)\, \varepsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t + \kappa_t$$
$$\psi_0 = 1$$

gdzie κ_t jest składnikiem deterministycznym.

AR ponownie

Model AR

- Model AR(p) *(rzędu p)*:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$\left(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \ldots - a_p L^p\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$
$$A\left(L\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

czyli

$$A\left(L\right) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

Model AR

- Jeśli (!) wielomian $A(L)$ jest odwracalny, to mamy:

$$
\begin{aligned}
y_t &= A^{-1}(L)(a_0 + \epsilon_t) \\
&= \mu + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots \\
&= \mu + \beta(L)\epsilon_t
\end{aligned}
$$

- Zapis jako MA(∞).

Stabilność i stacjonarność

- Jeśli pierwiastki równania $A(x) = 0$ spełniają $|x_p| > 1$ dla każdego p, to mówimy, że model AR(p) jest **stabilny**.
- Stabilność $\Rightarrow$ stacjonarność (słaba).
- Wtedy można zapisać proces AR(p) jako proces MA(∞) *(Wold)*

$$y_t = \mu + \beta(L)\epsilon_t$$

gdzie $\lim_{i \to \infty} \beta_i = 0$.

Model AR(1)

- **Przykład** - AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

  można zapisać jako

$$(1 - \rho L)\, y_t = \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

Model AR(1)

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?
- Mamy

$$1 - \rho x = 0$$

dla

$$x = \frac{1}{\rho},$$

więc stacjonarność dla $|\frac{1}{\rho}| > 1$ (czyli $\rho \in (-1, 1)$).
- Można wtedy zapisać:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{(1 - \rho L)} \epsilon_t \\ &= \left(1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \cdots\right) \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \rho \epsilon_{t-1} + \rho^2 \epsilon_{t-2} + \cdots \end{aligned}$$

Model AR(1)

- Mamy

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

- Mnożnik dynamiczny:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \rho^h$$

- Mnożnik skumulowany:

$$1 + \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

Błądzenie losowe

- **Przykład** - błądzenie losowe

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

Model AR(p)

- Model AR(p) to

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Możemy zbadać stabilność analizując pierwiastki wielomianu opóźnień

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p.$$

- Stabilność gdy wszystkie pierwiastki są *poza* kołem jednostkowym.

Model AR(p)

- Możemy zapisać AR(p) jako

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Ważne: występuje tylko pierwsze opóźnienie wektora $\mathbf{x}_t$!

Model AR(p)

- Analogicznie do tego, co mieliśmy wcześniej:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}L)\,\mathbf{x}_t = 0$$

- To to samo, co

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}_t = 0$$

Model AR(p)

- Szukamy wartości własnych macierzy **A**..
- Można pokazać, że wartości własne to odwrotności pierwiastków wielomianu opóźnień.
- Stabilność wtedy, gdy wszystkie wartości własne $|\lambda_k| < 1$ (w kole jednostkowym).
- *Uwaga:* wartości własne **w** kole jednostkowym, pierwiastki wielomianu opóźnień **poza**!

SARIMA

Modele ARIMA

- Model ARIMA(p, d, q) to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \rho_i L^i\right) (1 - L)^d y_t = \left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i L^i\right) \epsilon_t$$

- Na przykład ARIMA$(0, 1, 0)$

$$y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$$

a ARIMA$(0, 2, 0)$

$$(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = \epsilon_t$$

- Korzystamy w przypadku niestacjonarnych danych.

Modele SARIMA

- Model ARIMA$(p, d, q)\,(P, D, Q)_m$ to

$$\left(1-\sum_{i=1}^{p}\rho_i L^i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{P}\varrho_i L^{im}\right)(1-L)^d\,(1-L^m)^D\,y_t$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{q}\theta_i L^i\right)\left(\sum_{i=0}^{Q}\vartheta_i L^{im}\right)\epsilon_t$$

gdzie m to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).

Modele SARIMA

- Przykład: model SARIMA$(0,0,0)\,(1,0,0)_4$ to

$$\begin{aligned}\left(1-\varrho_1 L^4\right) y_t &= \epsilon_t \\ y_t - \varrho_1 y_{t-4} &= \epsilon_t\end{aligned}$$

- Przykład: model SARIMA$(1,0,0)\,(0,1,0)_4$ to

$$\begin{aligned}(1-\rho L)\left(1-L^4\right) y_t &= \epsilon_t \\ (y_t - y_{t-4}) - \rho\left(y_{t-1} - y_{t-4-1}\right) &= \epsilon_t\end{aligned}$$