

# Sezonowość stochastyczna

ASC 2025

---

Piotr Żoch

- Sezonowość deterministyczna
- Sezonowość stochastyczna
- Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

## SARIMA - przypomnienie

---

- Model  $\text{ARIMA}(p, d, q) (P, D, Q)_m$  to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^P \varrho_i L^{im}\right) (1 - L)^d (1 - L^m)^D y_t = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i L^i\right) \left(\sum_{i=0}^Q \vartheta_i L^{im}\right) \epsilon_t$$

gdzie  $m$  to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).

- $(1 - L)^d$  jest związane z niestacjonarnością.
- Za co odpowiada  $(1 - L^m)^D$ ?

- Przykład: model ARIMA(1, 1, 0) to

$$(1 - \rho L)(1 - L)y_t = \epsilon_t$$

czyli

$$(y_t - y_{t-1}) - \rho(y_{t-1} - y_{t-2}) = \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = \rho \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

model AR(1) dla pierwszych przyrostów.

- W modelu ARIMA( $p, d, q$ )  $d > 0$  pozwala modelować procesy niestacjonarne.

- Przykład: model  $\text{ARIMA}(0, 0, 0) (1, 1, 0)_4$  to

$$(1 - \varrho L^4) (1 - L^4) y_t = \epsilon_t$$

czyli

$$(y_t - y_{t-4}) - \varrho (y_{t-1} - y_{t-1-4}) = \epsilon_t$$

model AR(1) dla różnic sezonowych

- W modelu  $\text{ARIMA}(p, d, q) (P, D, Q)$   $D > 0$  pozwala modelować procesy z *sezonowym* pierwiastkiem jednostkowym.

## Typy sezonowości

---

# Typy sezonowości

- Sezonowość deterministyczna

$$y_t = \sum_{s=1}^S \delta_{t,s} m_s + \epsilon_t$$

- Sezonowość stochastyczna

$$\left(1 - \sum_{i=1}^P \varrho_i L^{im}\right) (1 - L^m)^D y_t = \left(\sum_{i=0}^Q \vartheta_i L^{im}\right) \epsilon_t$$

czyli między innymi

$$y_t = \varrho y_{t-S} + \epsilon_t$$



- Sezonowość deterministyczna, przykład:

$$y_t = \delta_{t,1} \cdot (-1) + \delta_{t,2} \cdot 1 + \delta_{t,3} \cdot 2 + \delta_{t,4} \cdot 3 + \epsilon_t$$

czyli jeśli  $t$  przypada na: 1 kwartał, to

$$y_t = -1 + \epsilon_t$$

a jeśli na 2 kwartał to

$$y_t = 1 + \epsilon_t$$

- Jak uwzględnić sezonowość deterministyczną w modelu (S)AR(I)MA w R?

- Jak wyglądają prognozy z modelu z sezonowością deterministyczną?
- Dla przykładu przyjmijmy, że  $S = 4$  a w okresie  $T$  mamy  $s = 1$ .

$$E_T[y_{T+1}] = m_2$$

$$E_T[y_{T+2}] = m_3$$

$$E_T[y_{T+3}] = m_4$$

$$E_T[y_{T+4}] = m_1$$

i tak dalej.

- Stała prognoza.

- Jak wyglądają prognozy z modelu z sezonowością stochastyczną?
- Przykład:

$$y_t = \varrho y_{t-4} + \epsilon_t,$$

więc

$$E_T[y_{T+1}] = \varrho y_{T+1-4}$$

$$E_T[y_{T+2}] = \varrho y_{T+2-4}$$

$$E_T[y_{T+3}] = \varrho y_{T+3-4}$$

$$E_T[y_{T+4}] = \varrho y_{T+4-4}$$

## Sezonowy pierwiastek jednostkowy

---

- Szczególny (ważny przypadek):

$$y_t = y_{t-s} + \epsilon_t$$

- Szereg czasowy jest w tym przypadku *niestacjonarny*.

# Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

- Test Dickey-Hasha-Fuller (1984).
- Przekształcić

$$y_t = \beta y_{t-s} + \epsilon_t$$

do postaci

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-s} &= (\beta - 1) y_{t-s} + \epsilon_t \\ &= \rho y_{t-s} + \epsilon_t \end{aligned}$$

- $H_0 : \rho = 0$
- $H_1 : \rho < 0$
- Idea podobna do testu DF.

- Test Dickey-Hasha-Fuller (1984):
  - niska moc testu.
  - restrykcyjna postać (dokładnie  $S$  pierwiastków jednostkowych). Na przykład

$$(1 - L^4) y_t = \epsilon_t$$

ma rozwiązania  $L = \{1, -1, i, -i\}$  dla  $H_0$ .



- Inne stosowane testy:
  - Test Hylleberg, Engle, Granger, Yoo (1990): testuje każdy z  $S$  potencjalnych pierwiastków osobno.
  - Test Canova-Hansen (1995): hipoteza zerowa to sezonowość deterministyczna.