Sezonowość stochastyczna

ASC 2025

Piotr Żoch

Plan

- Sezonowość deterministyczna
- Sezonowość stochastyczna
- Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

SARIMA - przypomnienie

Modele SARIMA

- Model ARIMA$(p, d, q)\,(P, D, Q)_m$ to

$$\left(1-\sum_{i=1}^{p}\rho_i L^i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{P}\varrho_i L^{im}\right)(1-L)^d\,(1-L^m)^D\,y_t \\ =\left(\sum_{i=0}^{q}\theta_i L^i\right)\left(\sum_{i=0}^{Q}\vartheta_i L^{im}\right)\epsilon_t$$

  gdzie m to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).
- $(1-L)^d$ jest związane z niestacjonarnością.
- Za co odpowiada$(1-L^m)^D$?

Modele ARIMA

- Przykład: model ARIMA$(1, 1, 0)$ to

$$(1 - \rho L)\,(1 - L)\,y_t = \epsilon_t$$

czyli

$$\begin{aligned}(y_t - y_{t-1}) - \rho\,(y_{t-1} - y_{t-2}) &= \epsilon_t \\ \Delta y_t &= \rho \Delta y_{t-1} + \epsilon_t\end{aligned}$$

model AR(1) dla pierwszych przyrostów.

- W modelu ARIMA(p, d, q) $d > 0$ pozwala modelować procesy niestacjonarne.

Modele SARIMA

- Przykład: model ARIMA$(0,0,0)(1,1,0)_4$ to

$$\left(1-\varrho L^4\right)\left(1-L^4\right)y_t = \epsilon_t$$

  czyli

$$\left(y_t - y_{t-4}\right) - \varrho\left(y_{t-1} - y_{t-1-4}\right) = \epsilon_t$$

  model AR(1) dla różnic sezonowych

- W modelu ARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)$ $D>0$ pozwala modelować procesy z *sezonowym* pierwiastkiem jednostkowym.

Typy sezonowości

Typy sezonowości

- Sezonowość deterministyczna

$$y_t = \sum_{s=1}^{S} \delta_{t,s} m_s + \epsilon_t$$

- Sezonowość stochastyczna

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{P} \varrho_i L^{im}\right) (1 - L^m)^D y_t = \left(\sum_{i=0}^{Q} \vartheta_i L^{im}\right) \epsilon_t$$

czyli między innymi

$$y_t = \varrho y_{t-S} + \epsilon_t$$

Sezonowość deterministyczna

- Sezonowość deterministyczna, przykład:

$$y_t = \delta_{t,1} \cdot (-1) + \delta_{t,2} \cdot 1 + \delta_{t,3} \cdot 2 + \delta_{t,4} \cdot 3 + \epsilon_t$$

  czyli jeśli t przypada na: 1 kwartał, to

$$y_t = -1 + \epsilon_t$$

  a jeśli na 2 kwartał to

$$y_t = 1 + \epsilon_t$$

Sezonowość deterministyczna

- Jak uwzględnić sezonowość deterministyczną w modelu (S)AR(I)MA w R?

Sezonowość deterministyczna

- Jak wyglądają prognozy z modelu z sezonowością deterministyczną?
- Dla przykładu przyjmijmy, że $S = 4$ a w okresie T mamy $s = 1$.

$$E_T\left[y_{T+1}\right] = m_2$$
$$E_T\left[y_{T+2}\right] = m_3$$
$$E_T\left[y_{T+3}\right] = m_4$$
$$E_T\left[y_{T+4}\right] = m_1$$

i tak dalej.

- Stała prognoza.

Sezonowość stochastyczna

- Jak wyglądają prognozy z modelu z sezonowością stochastyczną?
- Przykład:

$$y_t = \varrho y_{t-4} + \epsilon_t,$$

  więc

$$E_T\left[y_{T+1}\right] = \varrho y_{T+1-4}$$
$$E_T\left[y_{T+2}\right] = \varrho y_{T+2-4}$$
$$E_T\left[y_{T+3}\right] = \varrho y_{T+3-4}$$
$$E_T\left[y_{T+4}\right] = \varrho y_{T+4-4}$$

Sezonowy pierwiastek jednostkowy

Sezonowy pierwiastek jednostkowy

- Szczególny (ważny przypadek):

$$y_t = y_{t-S} + \epsilon_t$$

- Szereg czasowy jest w tym przypadku *niestacjonarny*.

Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

- Test Dickey-Hasha-Fuller (1984).
- Przekształcić

$$y_t = \beta y_{t-S} + \epsilon_t$$

  do postaci

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-S} &= (\beta - 1)\, y_{t-S} + \epsilon_t \\ &= \rho y_{t-S} + \epsilon_t \end{aligned}$$

  - $H_0 : \rho = 0$
  - $H_1 : \rho < 0$
- Idea podobna do testu DF.

Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

- Test Dickey-Hasha-Fuller (1984):
  - niska moc testu.
  - restrykcyjna postać (dokładnie S pierwiastków jednostkowych). Na przykład

    $$\left(1 - L^4\right) y_t = \epsilon_t$$

    ma rozwiązania $L = \{1, -1, i, -i\}$ dla H_0.

Testy sezonowego pierwiastka jednostkowego

- Inne stosowane testy:
    - Test Hylleberg, Engle, Granger, Yoo (1990): testuje każdy z S potencjalnych pierwiastków osobno.
    - Test Canova-Hansen (1995): hipoteza zerowa to sezonowość deterministyczna.