

# Modele ARMA: kontynuacja

ASC 2025

---

Piotr Żoch

- Wielomian opóźnień.
- AR i MA: dodatkowe właściwości.
- SARIMA

## Dekompozycja Wolda i operator opóźnień

---

# Stacjonarność - przypomnienie

- Zmienna jest **stacjonarna** w sensie **słabym** (*stacjonarność kowariancyjna*) jeśli spełnione są trzy warunki:
  - $E[Y_t] = \mu < \infty$
  - $Var[Y_t] = \sigma^2 < \infty$
  - $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_s, Y_{s+h}) = \gamma_h$
- Intuicyjnie: właściwości zmiennej nie zmieniają się w czasie.
- Jeśli którykolwiek warunek nie jest spełniony, zmienna jest **niestacjonarna**.
- W praktyce będziemy badać stacjonarność w sensie słabym.

- **Każdy** stacjonarny (w sensie słabym) proces stochastyczny  $\{Y_t\}$  można przedstawić jako

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t, \quad \psi_0 = 1, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

gdzie:

- $\varepsilon_t$  jest białym szumem z wariancją  $\sigma^2$ ;
- $\psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ;
- $\kappa_t$  jest składnikiem deterministycznym;
- $\varepsilon_t = Y_t - E[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots]$ ;
- $\{\psi\}$  nie zależą od okresu  $t$ , jedynie od horyzontu  $j$ .

# Operator opóźnień

- Definicja (*lag operator*):

$$L^i y_t \equiv y_{t-i}$$

- Właściwości:

- $L^i c = c$
- $(L^i + L^j) y_t = L^i y_t + L^j y_t$
- $L^{-i} y_t = y_{t+i}$  (*lead operator*)
- Dla  $|a| < 1$

$$(1 + aL + a^2L^2 + \dots) y_t = \frac{y_t}{1 - aL}$$

- Dla  $|a| > 1$

$$\left[ 1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \dots \right] y_t = -\frac{aLy_t}{1 - aL}$$

# Wielomian opóźnień

- Niech

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_p L^p$$

- $\theta(L)$  nazywamy **wielomianem opóźnień** (*lag polynomial*).
- Zachodzi

$$\theta(1) = 1 + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p$$

$$\theta(L^2) = 1 + \theta_1 L^2 + \theta_2 L^4 + \dots + \theta_p L^{2p}$$

# Wielomian opóźnień

Przykład. Mamy dwa wielomiany opóźnień:

$$a(L) = 1 - aL$$

$$b(L) = 1 - bL$$

i zachodzi

$$\begin{aligned} a(L) b(L) x_t &= (1 - aL)(1 - bL) x_t \\ &= (1 - (a + b)L + abL^2) x_t \\ &= x_t - (a + b)x_{t-1} + abx_{t-2} \end{aligned}$$



# Wielomian opóźnień

- Wielomiany opóźnień możemy dodawać i mnożyć jak zwykłe wielomiany.
- *Transformata z*: zamiast skomplikowanego  $L$  można pracować na  $z$  i *udać*, że mamy do czynienia ze zwykłymi wielomianami, żeby znaleźć współczynniki wielomianu opóźnień.
- Przykład:

$$\begin{aligned}a(L) &= 1 + a_1L + a_2L^2 + \dots + a_pL^p \\ &= (1 - \alpha_1L)(1 - \alpha_2L) \dots (1 - \alpha_pL^p)\end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_p^{-1}$  są pierwiastkami. Jeśli  $a(L)^{-1}$  istnieje (kiedy?), to mamy

$$a(L)^{-1} = (1 - \alpha_1L)^{-1} (1 - \alpha_2L)^{-1} \dots (1 - \alpha_pL^p)^{-1}$$

## Wielomian opóźnień - przykład

- Przykład:

$$x_t = -0.3x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$$

możemy zapisać jako

$$a(L)x_t = u_t$$

gdzie

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

- Jakie są pierwiastki tego wielomianu?

## Wielomian opóźnień - przykład

- Wielomian

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

można zapisać jako

$$a(L) = (1 + 0.5L)(1 - 0.2L)$$

(pierwiastki równe  $-2$  i  $5$ ).

## Wielomian opóźnień - przykład

- Odwrotność wielomianu

$$a(L) = 1 + 0.3L - 0.1L^2$$

to

$$a(L)^{-1} = (1 + 0.5L)^{-1} (1 - 0.2L)^{-1}$$

gdzie

$$(1 + 0.5L)^{-1} = 1 + 0.5L + 0.25L^2 + \dots$$

$$(1 - 0.2L)^{-1} = 1 - 0.2L + 0.16L^2 - \dots$$

czyli

$$a(L)^{-1} = 1 - 0.3L + 0.28L^2 - \dots$$

- Skoro

$$a(L)x_t = u_t$$

to

$$\begin{aligned}x_t &= a(L)^{-1} u_t \\ &= u_t - 0.3u_{t-1} + 0.28u_{t-2} - \dots\end{aligned}$$

- Stacjonarny model ARMA

$$y_t = \underbrace{\sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}}_{AR(p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}}_{MA(q)}$$

możemy zapisać jako

$$A(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t,$$

czyli

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\Theta(L)}{A(L)} \varepsilon_t \\ &= \Psi(L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

(wszystko działa podobnie, gdy mamy też stałą  $a_0$ ).

- Dekompozycja Wolda: stacjonarny proces ARMA

$$A(L)y_t = a_0 + \theta(L)\varepsilon_t$$

można zapisać jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t + \kappa_t$$

$$\psi_0 = 1$$

gdzie  $\kappa_t$  jest składnikiem deterministycznym.

AR ponownie

---



- Model AR(p) (rzędu  $p$ ):

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Zapis za pomocą wielomianu opóźnień:

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

$$A(L) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

czyli

$$A(L) y_t = a_0 + \epsilon_t$$

- Jeśli (!) wielomian  $A(L)$  jest odwracalny, to mamy:

$$\begin{aligned}y_t &= A^{-1}(L)(a_0 + \epsilon_t) \\&= \mu + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots \\&= \mu + \beta(L) \epsilon_t\end{aligned}$$

- Zapis jako  $MA(\infty)$ .

- Jeśli pierwiastki równania  $A(x) = 0$  spełniają  $|x_p| > 1$  dla każdego  $p$ , to mówimy, że model  $AR(p)$  jest **stabilny**.
- Stabilność  $\Rightarrow$  stacjonarność (słaba).
- Wtedy można zapisać proces  $AR(p)$  jako proces  $MA(\infty)$  (Wold)

$$y_t = \mu + \beta(L) \epsilon_t$$

gdzie  $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 0$ .

- Przykład - AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

można zapisać jako

$$(1 - \rho L) y_t = \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

# Model AR(1)

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?
- Mamy

$$1 - \rho x = 0$$

dla

$$x = \frac{1}{\rho},$$

więc stacjonarność dla  $|\frac{1}{\rho}| > 1$  (czyli  $\rho \in (-1, 1)$ ).

- Można wtedy zapisać:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{(1 - \rho L)} \epsilon_t \\ &= (1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \dots) \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \rho \epsilon_{t-1} + \rho^2 \epsilon_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

# Model AR(1)

- Mamy

$$y_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \dots$$

- Mnożnik dynamiczny:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \rho^h$$

- Mnożnik skumulowany:

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots = \frac{1}{1 - \rho}$$

- Przykład - błądzenie losowe

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Jakie są pierwiastki wielomianu opóźnień?

- Model AR(p) to

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Możemy zbadać stabilność analizując pierwiastki wielomianu opóźnień

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p.$$

- Stabilność gdy wszystkie pierwiastki są *poza* kołem jednostkowym.



- Możemy zapisać AR(p) jako

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

- Ważne: występuje tylko pierwsze opóźnienie wektora  $\mathbf{x}_t$ !

- Analogicznie do tego, co mieliśmy wcześniej:

$$(I - AL) \mathbf{x}_t = 0$$

- To to samo, co

$$(\mathbf{A} - \lambda I) \mathbf{x}_t = 0$$

- Szukamy wartości własnych macierzy **A**..
- Można pokazać, że wartości własne to odwrotności pierwiastków wielomianu opóźnień.
- Stabilność wtedy, gdy wszystkie wartości własne  $|\lambda_k| < 1$  (w kole jednostkowym).
- *Uwaga:* wartości własne **w** kole jednostkowym, pierwiastki wielomianu opóźnień **poza!**

# SARIMA

---

- Model ARIMA( $p, d, q$ ) to

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i\right) (1 - L)^d y_t = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i L^i\right) \epsilon_t$$

- Na przykład ARIMA(0, 1, 0)

$$y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$$

a ARIMA(0, 2, 0)

$$(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = \epsilon_t$$

- Korzystamy w przypadku niestacjonarnych danych.

- Model  $\text{ARIMA}(p, d, q) (P, D, Q)_m$  to

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^P \varrho_i L^{im}\right) (1 - L)^d (1 - L^m)^D y_t \\ = \left(\sum_{i=0}^q \theta_i L^i\right) \left(\sum_{i=0}^Q \vartheta_i L^{im}\right) \epsilon_t \end{aligned}$$

gdzie  $m$  to sezonowość (np. 4 dla danych kwartalnych).

- Przykład: model SARIMA(0, 0, 0) (1, 0, 0)<sub>4</sub> to

$$(1 - \varrho_1 L^4) y_t = \epsilon_t$$

$$y_t - \varrho_1 y_{t-4} = \epsilon_t$$

- Przykład: model SARIMA(1, 0, 0) (0, 1, 0)<sub>4</sub>to

$$(1 - \rho L) (1 - L^4) y_t = \epsilon_t$$

$$(y_t - y_{t-4}) - \rho (y_{t-1} - y_{t-4-1}) = \epsilon_t$$