第三章习题（进阶）

潘子睿 2024310675

Q3.5

> 难度3。只要想起来组合恒等式$C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$，解法就比较明显了。

有$a_{n,k} = C_{n+k}^k$，则母函数

$$G_k(x) = a_{0,k} + a_{1,k}x + a_{2,k}x^2 + a_{3,k}x^3 + \cdots + a_{n,k}x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,k}x^i \tag{1}$$

注意到，$\forall i \geq 0$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{i} C_{j+k}^k = \sum_{j=0}^{i} C_{j+k}^j & \quad (2)\\
= C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_{k+i}^i & \quad (3)\\
= C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_{k+i}^i & \quad (4)\\
= C_{k+2}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_{k+i}^i & \quad (5)\\
\vdots & \quad (6)\\
= C_{k+1+i}^i = a_{i,k+1} & \quad (7)
\end{aligned}$$

联立以下等式

$$\begin{cases}
G_k(x) & = & a_{0,k}+ & a_{1,k}x & + & a_{2,k}x^2 + \cdots \\
xG_k(x) & = & & a_{0,k}x & + & a_{1,k}x^2 + \cdots \\
x^2G_k(x) & = & & & & a_{0,k}x^2 + \cdots \\
 & \vdots & & & &
\end{cases} \tag{8}$$

相加，得

$$\frac{1}{1-x}G_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} a_{j,k}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,k+1}x^i = G_{k+1}(x) \tag{9}$$

故

$$G_k(x) = \frac{1}{1-x}G_{k-1}(x) = \cdots = (\frac{1}{1-x})^k G_0(x) \tag{10}$$

而

$$G_0(k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,0}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^0 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \tag{11}$$

所以数列a_n的母函数

$$G(x) = G_k(x) = (\frac{1}{1-x})^{k+1} \tag{12}$$

Q3.6

> 难度1。唯一的一道简单题。

根据条件，考虑$a+b+c+d=n$的母函数：

$$
\begin{aligned}
G(x) =&(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x) &(13)\\
=&\frac{1}{1-x^2}(1+x+x^2+x^3)\frac{1}{1-x^4}(1+x) &(14)\\
=&\frac{1}{(1-x)^2} &(15)\\
=&(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots) &(16)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n &(17)
\end{aligned}
$$

故非负整数解的个数即为$n+1$。

Q3.7

> 难度4。感觉第一小问是最难的。证明过程实际上是反着的。因为a_n的通项始终解不出来，只好从题目要证明的结论入手，尝试去证明$A(x)$对应的数列刚好是a_n。感觉如果题目不是要证明，而是直接求母函数，就很难猜到母函数长成$A(x)$这样了。
> 第5小问是选做，猜了一个答案是$\frac{1}{2}$。我证明了$\frac{1}{2}$是满足题意的，但不确定还有没有比$\frac{1}{2}$更小的α了。

(1)

证明：

有

$$
A(x)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n}}=\overbrace{(1+x+x^2+\cdots)}^{C_0}\cdot\overbrace{(1+x^2+x^4+\cdots)}^{C_1}\cdots\overbrace{(1+x^{2^n}+x^{2\cdot 2^n}+x^{3\cdot 2^n}+\cdots)}^{C_n}\cdots \quad (18
$$

考虑其中x^n项的系数，设为d_n。设从C_k中取出第b_k项，$k=0,1,2,\cdots$，$b_k=0,1,2,\cdots$，则d_n等于以下不定方程非负解的个数：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}b_k2^k=n &(19)\\
\Leftrightarrow&\sum_{k=1}^{\infty}b_k2^k=n-b_0 &(20)\\
\Leftrightarrow&\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1}2^k=\frac{n-b_0}{2} &(21)
\end{aligned}
$$

这即为$d_{\frac{n-b_0}{2}}$。而$b_0\geq 0$，因此$n-b_0\leq n$，$\frac{n-b_0}{2}\leq\frac{n}{2}$，从而$\frac{n-b_0}{2}\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。考虑$b_0$的不同取值，使得$\frac{n-b_0}{2}\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\in\mathbb{N}$，即得

$$
d_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}d_i \quad (22)
$$

这与$\{a_n\}$的递推公式相同。另一方面，$d_0=A(0)=1=a_0$。因此$\forall n\geq 0, a_n=d_n$。从而$\{a_n\}$的母函数就是$\{d_n\}$的母函数，也即$A(x)$，得证。

(2)

证明：

设$B_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$，$B_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$。$\forall k\geq 0$，有

$$a_{2k+1}=\sum_{i=0}^{k}a_i=a_{2k} \tag{23}$$

因此有

$$xB_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=B_1(x) \tag{24}$$

另一方面，

$$B_0(x)+B_1(x)=A(x) \tag{25}$$

因此

$$B_0(x)=\frac{A(x)}{x+1} \tag{26}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n=&B_0(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-(\sqrt{x})^{2^n}} &(27)\\ =&\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{x}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} &(28)\\ =&\frac{1}{1-x}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2^n}} &(29)\\ =&\frac{A(x)}{1-x} &(30)\end{aligned}$$

得证。

(3)

证明：

由题，设$\{p_k\}_n=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$共有$P_n$个，其中$m\geq 1$，$n\geq 0$，有$\sum_{i=1}^{m}p_i=n$，且$p_m\geq\sum_{i=1}^{m-1}p_i$。故

$$n=\sum_{i=1}^{m}p_i\leq 2p_m\Longrightarrow p_m\geq\frac{n}{2}\Longrightarrow p_m\geq\lceil\frac{n}{2}\rceil\Longrightarrow\sum_{i=1}^{m-1}p_i=n-p_m\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor \tag{31}$$

而$\{p_1,p_2,\cdots,p_{m-1}\}$（可能为空）也满足$\forall 1\leq k\leq m-2$，$\sum_{i=1}^{k}p_k\leq p_{k+1}$，因此所有$\{p_1,p_2,\cdots,p_{m-1}\}$的数量就是$P_{\sum_{i=1}^{m-1}p_i}=P_{n-p_m}$（设$P_0=1$）。枚举$p_m$的值，$\lceil\frac{n}{2}\rceil\leq p_m\leq n$，可知：

$$P_n=\sum_{i=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n}P_{n-i}=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}P_i \tag{32}$$

这与a_n的递推关系相同。又P_1表示各项之和为1且满足指定性质的正整数数列的个数，显然此时只有$\{1\}$满足题意，因此$P_1=1=a_1$，$P_0=1=a_0$，从而$\forall n\geq 1$，$P_n=a_n$，得证。

(4)

证明：

令$C=1$。下证明$\forall n\geq 1$，有$a_n\leq n^{\lfloor \log_2 n\rfloor}$。

首先，$n=1$时，有$a_1=1=1^0=1^{\lfloor \log_2 1\rfloor}$成立。假设命题对$1\leq n\leq k-1$（$k\geq 2$）成立，考虑$n=k$的情形。有

$$
\begin{aligned}
a_k=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} a_i &\leq 1+\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} i^{\lfloor \log_2 i\rfloor} && (33)\\
&\leq 1+\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} i^{\lfloor \log_2 \frac{k}{2}\rfloor} && (34)\\
&=1+\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} i^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1} && (35)\\
&\leq 1+\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} k^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1}=1+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor k^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1} && (36)\\
&\leq k\cdot k^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1} \quad (\because 当k\geq 2时, 1\leq k^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1}\leq \lceil\frac{k}{2}\rceil k^{\lfloor \log_2 k\rfloor-1}) && (37)\\
&=k^{\lfloor \log_2 k\rfloor} && (38)
\end{aligned}
$$

也成立。故由第二数学归纳法，知$\forall n\geq 1$，$a_n\leq n^{\lfloor \log_2 n\rfloor}$。即$n_0=1$，$C=1$。则原题得证。

(5)

取$\alpha=\frac{1}{2}$，下证明存在正常数C和n_0使得对任意正整数$n\geq n_0$均有$a_n\leq Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}$。

首先，给定一个充分大正整数M，取$C=\sup\{\frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}}\}_{1\leq n\leq M}$，可知，当$1\leq n\leq M$时，均有$a_n\leq Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}$成立。取$n>M$，假设命题对$1\leq k<n$都成立。考虑$a_n$，有

$$
\begin{aligned}
a_n=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_i &= 2+\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_i && (39)\\
&\leq 2+C\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} i^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 i\rfloor} && (40)\\
&\leq 2+C\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} i^{\frac{1}{2}(\lfloor \log_2 n\rfloor-1)} && (41)\\
&=2+C\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} i^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor-\frac{1}{2}} && (42)\\
&\leq 2+C\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor-\frac{1}{2}} && (43)\\
&\leq C(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor+\frac{1}{2}} \quad (\because 当M充分大时，一定有C(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor-\frac{1}{2}}\geq 2) && (44)\\
&=Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}\cdot\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor+\frac{1}{2}}} && (45)\\
&\leq Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}\cdot\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor} && (46)
\end{aligned}
$$

成立。因此，由第二数学归纳法即止$\forall n>M$，都有$a_n\leq Cn^{\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n\rfloor}$成立。

特别地，我们令$M=2$，则$C=2^{\frac{3}{2}}$，此时当$n>M$时有$C(\frac{n}{2}^{\frac{1}{2}\lfloor\log_2 n\rfloor-\frac{1}{2}})\geq C>2$成立。因此此时取$n_0=1$即知当$n\geq n_0$时有$a_n\leq 2^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}\lfloor\log_2 n\rfloor}$成立。

Q3.8

> 难度5。想了很长时间的题目。一上来有两种思路，一是直接求出a_n，另一种是设出母函数，根据某些关系列出一些方程，在不求a_n的情况下直接求解母函数。我先尝试后一种方法，花了很长时间但是无果。后来发现a_n和卡特兰数有关，用组合意义解出a_n后，化简母函数的过程中用到了卡特兰数的母函数，以及Q3.5证明得到的结论。非常复杂，但很有意思。

根据题意，一共有三种走法，分别为向右、向右上和向右下。考虑从A走到B的一条路径，则其中向右上走和向右下走的步数一定相等（因为A和B在一条水平线上）。因此，设向右上走的步数=向右下走的步数=m，向右走的步数为t，则有$m+t=n$。这是因为，如果我们从A出发的两条边看做两条坐标轴，则在AB轴方向上前进一格当且仅当向右走了一步或是向右下走了一步。而AB轴方向上一共恰好需要走n格，因此$m+t=n$，也即$t=n-m$。另一方面，由于走的路径一定在AB轴之上（包含AB轴），因此在路径上任取一个时刻，一定有向右上走的步数≥向右下走的步数。

先考虑只能向右上或右下行走时的方法数。假设此时需要向右上走和向右下走的步数均为n步，总方法数设为c_n，$n\geq 0$。由上分析，任一时刻向右上走过的步数一定不小于向右下走过的步数。因此，这种情况等价于这样的一个格点模型：从$(0,0)$向上或向右走到(n,n)，且始终位于对角线上方（包括对角线）的总方案数。如果不要求路径落在对角线上方，此时的方案数为C_{2n}^n。而任意一条穿过对角线的路径均可以与一条从$(1,-1)$出发到达(n,n)的路径一一对应，此时方案数为C_{2n}^{n-1}。从而

$$c_n=C_{2n}^n-C_{2n}^{n-1}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n \tag{47}$$

特别地，$c_0=1=c_1$。

实际上，c_n就是**卡特兰数**。它有以下性质：

$$c_n=\sum_{i=1}^n c_{i-1}c_{n-i} \tag{48}$$

这是因为，我们考虑从$(0,0)$走到(n,n)的路径上第一次回到对角线的点，设为(i,i)，有$1\leq i\leq n$。首先，从$(0,0)$开始第一步只能向上走到$(0,1)$，而(i,i)只能由$(i-1,i)$这一点走到。从$(0,1)$走到$(i-1,i)$且不触及对角线，这等价于从$(0,0)$走到$(i-1,i-1)$，且始终位于对角线上方（包括对角线），对应方案数就是c_{i-1}。另一方面，走到(i,i)后，继续走到(n,n)而不走到对角线下方的方案数为c_{n-i}。对i求和即知上性质成立。

因此，我们考虑$\{c_n:n\geq 0\}$的母函数

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{49}$$

有

$$
\begin{aligned}
(F(x))^2=&\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)^2 &(50)\\
=&c_0^2+(c_0c_1+c_1c_0)x+\cdots+(\sum_{i=1}^n c_{i-1}c_{n-i})x^{n-1}+\cdots &(51)\\
=&c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1}+\cdots &(52)\\
=&\frac{1}{x}(F(x)-1) &(53)
\end{aligned}
$$

得到

$$x(F(x))^2-F(x)+1=0 \tag{54}$$

解得

$$F(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{55}$$

考虑到$F(0)=c_0=1$，因此

$$F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{56}$$

另一方面，我们考虑将$t=n-m$条向右的路径插入到已经排好的向右上走、向右下走的$2m$条路径中。考虑这$2m$条路径构成的$2m+1$个空格中，可以得到总方案数即为下不定方程的非负解个数：

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2m+1}=n-m \tag{57}$$

因此方案数为C_{n+m}^{2m}，其中$0\le m\le n$。故

$$a_n=\sum_{m=0}^{n}c_mC_{n+m}^{2m}=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}C_{n+m}^{2m} \tag{58}$$

设$\{a_n\}$的母函数为$G(x)$，则

$$\begin{aligned}
G(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_mC_{n+m}^{2m}x^n && (59)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\sum_{n=m}^{\infty}C_{n+m}^{2m}x^n && (60)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m\sum_{n=m}^{\infty}C_{2m+(n-m)}^{2m}x^{n-m} && (61)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_{2m+n}^{2m}x^n\right] && (62)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^{2m+1}\quad(\text{由}Q3.5\text{结论}) && (63)\\
&=\frac{1}{1-x}\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^m=\frac{1}{1-x}F\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) && (64)\\
&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\frac{4x}{(1-x)^2}}}{\frac{2x}{(1-x)^2}}\quad(\text{由前证明的卡特兰数的母函数可得}) && (65)\\
&=\frac{1-x-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x} && (66)
\end{aligned}$$