Homework_1

潘子睿 计研三二 2024310675

1.1(2)

证明：根据概率的可列可加性，若$A_i \in \Omega$，$i \geq 1$两两不相容，有$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。

令$\forall j > n$，$A_j = \phi$，则：

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = P(\cup_{i=1}^{n} A_i + \cup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1}$$

1.1(5)

证明：

首先证明：

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) - \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + \quad (2) \\ (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \quad (3) \end{aligned}$$

当$n = 1$时，命题化为$P(A_1) = P(A_1)$，显然成立。

当$n = 2$时，命题化为$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$。而

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(((A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \backslash (A_1 \cap A_2))) && (4) \\ &= P((A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \backslash (A_1 \cap A_2)) && (5) \\ &= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) && (6) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) && (7) \end{aligned}$$

成立。

考虑$n = k$，$k > 2$的情形。假设命题对所有$n < k$均成立。

则

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{k} A_i) &= P(\cup_{i=1}^{k-1} A_i \cup A_k) && (8) \\ &= P(\cup_{i=1}^{k-1} A_i) + P(A_k) - P((\cup_{i=1}^{k-1} A_i) A_k) && (9) \\ &= P(\cup_{i=1}^{k-1} A_i) + P(A_k) - P(\cup_{i=1}^{k-1} A_i A_k) && (10) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^k P(A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) + P(A_k) && (11) \\ &- (\sum_{i=1}^{k-1} P(A_i A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1^k) P(A_1 A_2 \cdots A_k))) && (12) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} P(A_1 A_2 \cdot A_k) && (13) \end{aligned}$$

成立。则根据数学归纳法，原命题成立。

其次证明

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{14}$$

有

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \tag{15}$$

且有A_1，$A_2 \backslash A_1$，$\cdots$，$A_n \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})$两两不相交。

则

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1) + \cdots + P(A_n \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \quad (16) \\ &\geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (17) \end{aligned}$$

成立。

1.3

有$\mathcal{A} = \{A, B\}$，则

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) = & \quad (18) \\ & \{ \quad (19) \\ & \quad \phi, \Omega, A, A^c, B, B^c, \quad (20) \\ & \quad AB, AB^c, A^cB, A^cB^c, \quad (21) \\ & \} \quad (22) \end{aligned}$$

1.4

(1)

有$A_n = \{x : x < a + \frac{1}{n}\}$，则有$A_{n+1} \subset A_n$，$\forall n \geq 1$，即$\{A_n : n \geq 1\}$为递减事件列。从而 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \{x : x < a + \frac{1}{n}\} = \{x : x \leq a\} = A$。

另一方面，$B_n = \{x : x \leq a - \frac{1}{n}\}$，则有$B_n \subset B_{n+1}$，$\forall n \geq 1$，即$\{B_n : n \geq 1\}$为递增事件列。从而 $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \{x : x \leq a - \frac{1}{n}\} = \{x : x < a\} = B$，成立。

(2)

根据σ域的性质，有：

1. $\forall A = (-\infty, a] \in \mathcal{A}_1$，$a \in \mathbb{R}$，有$A = (-\infty, a] = \lim_{n\to\infty}(a-n, a] = \cup_{n=1}^{\infty}[a-n, a] \in \sigma(\mathcal{A}_2)$
2. $\forall A = (a, b] \in \mathcal{A}_2$，$a, b \in \mathbb{R}$，有$A = (a, b] = (-\infty, a]^c \cap (-\infty, b] \in \sigma(\mathcal{A}_1)$

从而$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$。

(3)

（2）中已证明$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$。

- 首先证明$\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$。
  1. $\forall A = (a, b] \in \mathcal{A}_2$，$a, b \in \mathbb{R}$，有$A = (a, b] = \lim_{n\to\infty}(a, b + \frac{1}{n}) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b + \frac{1}{n}) \in \mathcal{A}_3$
  2. $\forall A = (a, b) \in \mathcal{A}_3$，$a, b \in \mathbb{R}$，有$A = (a, b) = \lim_{n\to\infty}(a, b + \frac{1}{n}] = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b + \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}_2$

  所以$\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$。
- 下证明$\sigma(\mathcal{A}_3) = \sigma(\mathcal{A}_4)$。
  1. $\forall A = [a, b) \in \mathcal{A}_4$，$a, b \in \mathbb{R}$，有$A = [a, b) = \lim_{n\to\infty}(a - \frac{1}{n}, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b) \in \mathcal{A}_3$
  2. $\forall A = (a, b) \in \mathcal{A}_3$，$a, b \in \mathbb{R}$，有$A = (a, b) = \lim_{n\to\infty}[a - \frac{1}{n}, b) = \cup_{n=1}^{\infty}[a - \frac{1}{n}, b) \in \mathcal{A}_4$

所以$\sigma(\mathcal{A}_3)=\sigma(\mathcal{A}_4)$。

- 下证明$\sigma(\mathcal{A}_4)=\sigma(\mathcal{A}_5)$
  1. $\forall A=[a,b]\in\mathcal{A}_5$，$a,b\in\mathbb{R}$，有$A=[a,b]=\lim_{n\to\infty}[a,b+\frac{1}{n})=\cup_{n=1}^{\infty}[a,b+\frac{1}{n})\in\mathcal{A}_4$
  2. $\forall A=[a,b)\in\mathcal{A}_4$，$a,b\in\mathbb{R}$，有$A=[a,b)=\lim_{n\to\infty}[a,b+\frac{1}{n}]=\cup_{n=1}^{\infty}[a,b+\frac{1}{n}\in\mathcal{A}_5]$

  所以$\sigma(\mathcal{A}_4)=\sigma(\mathcal{A}_5)$。

综上，有$\sigma(\mathcal{A}_1)=\sigma(\mathcal{A}_1)$，$2\leq i\leq 5$。

1.5

有事件A，B，C相互独立。

1. 证明$A\cup B$与C独立

$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC) &(23)\\&=P(AC)+P(BC)-P(ABC) &(24)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C) &(25)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C) &(26)\\&=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C) &(27)\\&=P(A\cup B)P(C) &(28)\end{aligned}$$

2. 证明$A-B$与C独立

$$P((A-B)C)=P(AB^cC)=P(A)P(B^c)P(C)=P(AB^c)P(C)=P(A-B)P(C) \tag{29}$$

3. 证明AB与C独立

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C) \tag{30}$$

1.6

(1)

- $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$
- $P(X>a)=1-F(a)$
- $P(X=a)=0$
- $P(X\geq a)=1-F(a)$

(2)

- $P(X<a)=F(a)$
- $P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$
- $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$
- $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$

1.7

(1)证明$X+Y$为随机变量

$\forall t\in\mathbb{R}$，考虑$(X+Y)(\omega)\le t$。

有：

$$\begin{aligned}
\{\omega\in\Omega|(X+Y)(\omega)\le t\} &= \{\omega\in\Omega|X(\omega)+Y(\omega)\le t\} && (31)\\
&= \cup_i \{\omega\in\Omega|X(\omega)\le x_i, Y(\omega)\le t-x_i\} && (32)\\
&= \cup_i(\{\omega\in\Omega|X(\omega)\le x_i\}\cap\{\omega\in\Omega|Y(\omega)\le t-x_i\})\in\mathcal{F} && (33)
\end{aligned}$$

所以$X+Y$为随机变量。

(2)证明XY为随机变量

$\forall t\in\mathbb{R}$，考虑$(XY)(\omega)\le t$。

有：

$$\begin{aligned}
\{\omega\in\Omega|(XY)(\omega)\le t\} &= \{\omega\in\Omega|X(Y(\omega))\le t\} && (34)\\
&= \cup_{i:x_i\le t}\{\omega\in\Omega|Y(\omega)\in X_i\}, \text{其中集合}X_i\text{满足}x\in X_i\iff X(x)=x_i && (35)\\
&= \cup_{i:x_i\le t}\{\omega\in\Omega|Y(w)\in\cup_j T(a_j,b_j)\}, && (36)\\
&\text{其中}T(a_j,b_j)\text{表示一个以}a_j,b_j\text{为左右端点的区间，区间左右都可开闭} && (37)\\
&\in\mathcal{F} && (38)
\end{aligned}$$

所以XY为随机变量。

(3)证明$X\vee Y$为随机变量

$\forall t\in\mathbb{R}$，考虑$(X\vee Y)(\omega)\le t$。这里$\vee$表示取$\max$。

有：

$$\begin{aligned}
\{\omega\in\Omega|(X\vee Y)(\omega)\le t\} &= \{\omega\in\Omega|(X(\omega)\le t)\text{且}(Y(\omega)\le t)\} && (39)\\
&= \{\omega\in\Omega|X(\omega)\le t\}\cap\{\omega\in\Omega|Y(\omega)\le t\}\in\mathcal{F} && (40)
\end{aligned}$$

所以$X\vee Y$为随机变量。

1.8

(1)证明$X+Y$与Z独立

有

$$\begin{aligned}
P(X+Y\le a, Z\le b) &= \sum_i P(Y\le a-x_i, Z\le b) && (41)\\
&= \sum_i P(Y\le a-x_i)P(Z\le b) && (42)\\
&= P(Z\le b)\sum_i P(x_i+Y\le a) && (43)\\
&= P(X+Y\le a)P(Z\le b) && (44)
\end{aligned}$$

成立。

(2)证明XY与Z独立

首先，若$\exists x_0$，使得$X(x_0)=0$，则

$$P(XY\le a, X=x_0)=\begin{cases} 1, a\ge 0 & (45)\\ 0, a<0 & (46)\end{cases}$$

此时有$P(XY\le a, X=x_0, Z\le b)=P(XY\le a, X=x_0)P(Z\le b)$，$\forall a,b\in\mathbb{R}$。

因此下不妨设$X\neq 0$

有

$$\begin{aligned} P(XY\le a, Z\le b) &= \sum_i P(Y\le \frac{a}{x_i}, Z\le b) && (47)\\ &= \sum_i P(Y\le \frac{a}{x_i})P(Z\le b) && (48)\\ &= \sum_i P(x_iY\le a)P(Z\le b) && (49)\\ &= P(XY\le a)P(Z\le b) && (50)\end{aligned}$$

成立。

1.14

证明：

有N为取值非负整数的随机变量，则：

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n) && (51)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(P(N\ge n)-P(N\ge n+1)) && (52)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N\ge n) && (53)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N\ge n+1) && (54)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N>n) && (55)\end{aligned}$$

得证。