

第四章习题（进阶）

- **本次进阶题模式与以往不同，你需要先完成 4.5 开始的 6 道基本题！**
- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性。请你在做题的同时，仔细审阅每一道题目，对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价。你可以选择打分和（或）给出评语，或采取你喜欢的任何一种评价手段。若有余力，你还可以尝试总结每道题考察的知识点，或尝试用多种本质上不同的手段求解问题。你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据。
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数。这些分数按作业给分比例折算后，将会直接加到总评成绩上。
- 在作答时请务必清楚标明题号。

4.5 ~ 4.10. （参见基本题文件。基本题无需作任何评价，仅考核正确性与过程严谨性。）

4.11. 设 n, m 是正整数，现有两个组合计数场景：

- (I) 将 n 个相同的小球放入 m 个相同的盒子，且允许出现空盒，方案数记为 $f(n, m)$ ；
 (II) 将 n 无序拆分为若干正整数之和，且拆分出的数均不大于 m ，方案数记为 $g(n, m)$ 。

据此完成以下任务：

- (1) 证明 $f(n, m)$ 和 $g(n, m)$ 满足相同的递推关系，从而说明 $f(n, m) = g(n, m)$ ；
 (2) 在场景 (I) 的每个放球方案和场景 (II) 的每个拆分方案之间建立一一对应关系。

4.12. 求解递推关系：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3 \sin \frac{n\pi}{2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 5, a_1 = 3 \end{cases}$$

4.13. 设 p, q 是实数，求解下列 n 阶行列式：

$$\underbrace{\begin{vmatrix} p & p-q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & p & p-q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & p-q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{vmatrix}}_{n \text{ 阶}}$$

4.14. 设有 m 个位置，一醉汉从位置 1 出发，每次移动可以到达除当前位置外的任意位置，求移动 n 次后仍然回到位置 1 的不同路径数目。