第三章习题（进阶）

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性．请你在做题的同时，仔细审阅每一道题目，对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价．你可以选择打分和（或）给出评语，或采取你喜欢的任何一种评价手段．若有余力，你还可以尝试总结每道题考察的知识点，或尝试用多种本质上不同的手段求解问题．你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据．
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数．这些分数按作业给分比例折算后，将会直接加到总评成绩上．
- 在作答时请务必清楚标明题号．

3.5. 设 k 是正整数，$a_n = \binom{n+k}{k}$（$n \geq 0$），求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式．

3.6. 设 n 是正整数，有不定方程 $a+b+c+d=n$．求此方程的满足如下全部条件的非负整数解数目：a 为偶数，$b \leq 3$，c 是 4 的倍数，$d \leq 1$．

3.7. 设 $a_0 = 1$，且对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_i$．

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2^n}}$；

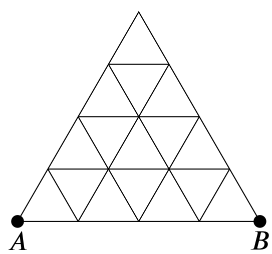
(2) 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n = \frac{A(x)}{1-x}$；

(3) 设 n 是正整数．设 $\{p_k\}$ 是各项之和为 n 的正整数列，且对任意小于数列长度的正整数 k 有 $\sum_{i=1}^{k} p_k \leq p_{k+1}$．证明：共有 a_n 个这样的数列；

(4) 证明：存在正常数 C 和 n_0，使得对任意正整数 $n \geq n_0$ 均有 $a_n \leq Cn^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$；

(5)（选做）给出一个常数 $\alpha < 1$（越小越好），将第 (4) 问的结论加强为 $a_n \leq Cn^{\alpha \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor}$，并证明你的结论．

3.8. 有一边长为 n 的大等边三角形，其内部的若干线段将其划分为边长为 1 的小等边三角形；右图展示了 $n=4$ 时的情形．从左下角（右图中 A 点）出发，沿大等边三角形及其内部线段行走至右下角（右图中 B 点），过程中仅允许向右、右上或右下走．设不同的路线数目为 a_n，求数列 $\{a_n\}$ 的母函数，化简至封闭形式．



习题 8 示意图