Homework_9

潘子睿 2024310675

Q4.3

根据4.1（1），有$\{U_n: n\geq 0\}$，$\{W_n: n\geq 0\}$关于$\{Y_n: n\geq 0\}$是鞅。且T_b关于$\{Y_n: n\geq 0\}$是停时。由于$p>q$，因此$P(T<+\infty)=1$，$ET_b<+\infty$。从而

$$\begin{aligned}
E(|U_{n+1}-U_n||Y_0,Y_1,\cdots,Y_n) =&E(|Y_{n+1}-(p-q)||Y_0,Y_1,\cdots,Y_n) &(4)\\
\leq&E(|Y_{n+1}|)+(p-q) &(5)\\
=&2p<+\infty &(6)
\end{aligned}$$

故根据定理4.3.1的推论，有

$$EU_{T_b}=EU_0=0 \tag{7}$$

从而

$$b=EX_{T_b}=ET_b(p-q)\Leftrightarrow ET_b=\frac{b}{p-q} \tag{8}$$

另一方面

$$E|W_{T_b\wedge n}|\leq E|W_{T_b\wedge n}\mathit{1}_{n<T_b}|+E|W_{T_b\wedge n}\mathit{1}_{n\geq T_b}| \tag{9}$$

而

$$\begin{aligned}
E|W_{T_b\wedge n}\mathit{1}_{n\geq T_b}| \leq&E|W_{T_b}|=E|U_{T_b}^2-T_b(1-(p-q)^2)| &(10)\\
\leq&E|U_{T_b}^2|+(1-(p-q)^2)ET_b<+\infty \quad (\because ET_b<+\infty) &(11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E|W_{T_b\wedge n}\mathit{1}_{T_b>n}| =&E|W_n\mathit{1}_{n<T_b}| &(12)\\
\leq&E|U_n^2\mathit{1}_{n<T_b}|+E[n[1-(p-q)^2]\mathit{1}_{n<T_b}] &(13)\\
\leq&E(b+T_b(p-q))^2+ET_b[1-(p-q)^2]<+\infty &(14)
\end{aligned}$$

所以

$$E|W_{T_b\wedge n}|<+\infty \tag{15}$$

从而根据定理4.3.1，有$EW_{T_b}=EW_0=EU_0^2=EX_0^2=0$。也即

$$EU_{T_b}^2=ET_b[1-(p-q)^2] \tag{16}$$

而

$$EU_{T_b}^2=E(b-T_b(p-q))^2=b^2-2bET_b(p-q)+(p-q)^2ET_b^2 \tag{17}$$

代入$ET_b=\frac{b}{p-q}$，得到

$$ET_b^2=\frac{1}{(p-q)^2}[b^2+\frac{b}{p-q}[1-(p-q)^2]] \tag{18}$$

所以

$$VarT_b = ET_b^2 - (ET_b)^2 = \frac{b[1-(p-q)^2]}{(p-q)^3} \tag{19}$$

得证。