第七章习题（进阶）

潘子睿 2024310675

Q7.7

> 🌈
>
> 难度：2。对n分奇偶讨论即可。

共有四种旋转方案，分别为恒等变换，顺时针旋转90度，逆时针旋转90度，顺时针旋转180度。

使用波利亚定理，对n分奇偶进行讨论。

1. n为偶数。

变换	数量		
恒等变化	1种	$(1)^{n^2}$	2^{n^2}
顺时针旋转90度	1种	$(4)^{\frac{n^2}{4}}$	$2^{\frac{n^2}{4}}$
逆时针旋转90度	1种	$(4)^{\frac{n^2}{4}}$	$2^{\frac{n^2}{4}}$
顺时针旋转180度	1种	$(2)^{\frac{n^2}{2}}$	$2^{\frac{n^2}{2}}$

因此此时不等价的染色方案数为

$$C=\frac{2^{n^2}+2^{\frac{n^2}{4}}+2^{\frac{n^2}{4}}+2^{\frac{n^2}{2}}}{4}=2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2}{4}-1}+2^{\frac{n^2}{2}-2} \tag{1}$$

2. n为奇数，则不管怎么旋转，中心块位置不变。

变换	数量		
恒等变化	1种	$(1)^{n^2}$	2^{n^2}
顺时针旋转90度	1种	$(4)^{\frac{n^2-1}{4}}(1)$	$2^{\frac{n^2+3}{4}}$
逆时针旋转90度	1种	$(4)^{\frac{n^2-1}{4}}(1)$	$2^{\frac{n^2+3}{4}}$
顺时针旋转180度	1种	$(2)^{\frac{n^2-1}{2}}(1)$	$2^{\frac{n^2+1}{2}}$

因此此时不等价的染色方案数为

$$C=\frac{2^{n^2}+2^{\frac{n^2+3}{4}}+2^{\frac{n^2+3}{4}}+2^{\frac{n^2+1}{2}}}{4}=2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2-1}{4}}+2^{\frac{n^2-3}{2}} \tag{2}$$

Q7.8

> 🌈
>
> 难度：3。第二小题相对来说复杂一些，需要使用到母函数形式的波利亚定理。第一、三小题比较简单

(1)

1. 每切掉一个角，面数加一，因此面数为$6+8=14$
2. 每切掉一个角，顶点数减少1个再增加3个，而增加的每个顶点都恰好被两个切掉的角共用，因此顶点数为$\frac{8-8+3\times 8}{2}=12$。
3. 每切掉一个角，新增三条棱，且当所有角都被切掉后，原来的棱都消失。因此棱数为$8\times 3=24$。

综上，面数为14，顶点数为12，棱数为24。

(2)

该多面体中共有6个正四边形，8个正三角形。使用母函数形式的波利亚定理，对正四边形和正三角形分别考虑，用x,y,z分别表示染了红色、黄色和蓝色，用下标1表示涂在正三角形上，下标2表示涂在正四边形上：

变换	数量		
恒等变换	1种	$(1)^8\quad(1)^6$	$(x_1+y_1+z_1)^8(x_2+y_2+z_2)^6$
面面中心转±90度	$3\times 2=6$种	$(4)^2\quad(4)(1)^2$	$(x_1^4+y_1^4+z_1^4)^2(x_2^4+y_2^4+z_2^4)(x_2+y_2+z_2)^2$
面面中心转180度	3种	$(2)^4\quad(2)^2(1)^2$	$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^4(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^2(x_2+y_2+z_2)^2$
棱中对棱中旋转180度	6种	$(2)^4\quad(2)^3$	$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^4(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^3$
对角线为轴旋转±120度	$2\times 4=8$种	$(1)^2(3)^2\quad(3)^2$	$(x_1+y_1+z_1)^2(x_1^3+y_1^3+z_1^3)^2(x_2^3+y_2^3+z_2^3)^2$

所以总的不等价染色方案数为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{24}[(x_1+y_1+z_1)^8(x_2+y_2+z_2)^6 &(3)\\
&+6\cdot(x_1^4+y_1^4+z_1^4)^2(x_2^4+y_2^4+z_2^4)(x_2+y_2+z_2)^2 &(4)\\
&+3\cdot(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^4(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^2(x_2+y_2+z_2)^2 &(5)\\
&+6\cdot(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^4(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^3 &(6)\\
&+8\cdot(x_1+y_1+z_1)^2(x_1^3+y_1^3+z_1^3)^2(x_2^3+y_2^3+z_2^3)^2] &(7)
\end{aligned}
$$

满足题意的解为$\{x_1^4y_1^4z_2^6,x_1^4z_1^4y_2^4z_2^2,y_1^4z_1^4x_2^4z_2^2\}$。其系数之和为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{24}[(C_8^4+C_8^4C_6^4+C_8^4C_6^4) &(8)\\
&+6\cdot(C_2^1+C_2^1+C_2^1) &(9)\\
&+3\cdot(C_4^2+C_4^2(1+C_2^1)+C_4^2(1+C_2^1)) &(10)\\
&+6\cdot(C_4^2+C_4^2C_3^2+C_4^2C_3^2) &(11)\\
&+8\cdot(C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1\cdot 0+C_2^1C_2^1\cdot 0)] &(12)\\
=&109 &(13)
\end{aligned}
$$

因此满足题意的不等价染色方案数就是109。

(3)

视为对棱的二染色。根据波利亚定理，有

变换	数量		
恒等变换	1种	$(1)^{24}$	2^{24}
面面中心转±90度	$3\times 2=6$种	$(4)^6$	2^6
面面中心转180度	3种	$(2)^{12}$	2^{12}
棱中对棱中旋转180度	6种	$(2)^{12}$	2^{12}
对角线为轴旋转±120度	$2\times 4=8$种	$(3)^8$	2^8

所以不等价的方案数为

$$\frac{1}{24}(2^{24}+6\cdot 2^6+3\cdot 2^{12}+6\cdot 2^{12}+8\cdot 2^8)=700688 \tag{14}$$

Q7.9

> 🌈
> 难度：2。这道题有点奇怪，我认为就是面的四染色问题。

按肖像画中人头的朝向对其进行分类，共有四种，即头朝上、朝左、朝下、朝右。因此，可视为对面的四染色。根据波利亚定理，有

变换	数量		
恒等变换	1种	$(1)^{24}$	4^{24}
面面中心转±90度	$3\times 2=6$种	$(4)^6$	4^6
面面中心转180度	3种	$(2)^{12}$	4^{12}
棱中对棱中旋转180度	6种	$(2)^{12}$	4^{12}
对角线为轴旋转±120度	$2\times 4=8$种	$(3)^8$	4^8

所以不等价的方案数为

$$\frac{1}{24}(4^{24}+6\times 4^6+3\times 4^{12}+6\times 4^{12}+8\times 4^8) \tag{15}$$

Q7.10

> 🌈
> 难度：3。这道题难度不高，但是比较复杂，仿照课上说的四个顶点的完全图的边染色问题去做即可。

即5个顶点的完全图的边的三着色问题。其顶点的所有置换对应着对称群S5的每个置换。首先，该完全图一共有5个顶点，10条边。

根据波利亚定理，有

顶点的变换	数量	边的变换	
$(1)^5$	1种	$(1)^{10}$	3^{10}
$(1)^3(2)$	$C_5^2=10$种	$(1)^4(2)^3$	3^7
$(1)^2(3)$	$C_5^3\frac{A_3^3}{3}=20$种	$(1)(3)^3$	3^4
$(1)(4)$	$C_5^4\cdot\frac{A_4^4}{4}=30$种	$(2)(4)^2$	3^3
$(1)(2)^2$	$C_5^1C_{4-1}^1=15$种	$(1)^2(2)^4$	3^6
$(2)(3)$	$C_5^2\frac{A_3^3}{3}=20$种	$(1)(3)(6)$	3^3
(5)	$\frac{A_5^5}{5}=24$种	$(5)^2$	3^2

所以不等价的染色方案数为

$$\frac{1}{120}(3^{10}+10\times3^7+20\times3^4+30\times3^3+15\times3^6+20\times3^3+24\times3^2)=792 \tag{16}$$

Q7.11

> 🌈
>
> 难度：5。这道题如果用波利亚定理来做，非常困难。主要难点是变换的个数比较难数，非常抽象。需要注意到几个事实，首先1×1的面和1×2的面的位置永远不会交换，其次 两个小正方体分别的侧面上的四个面的相对位置不会改变（但可能由顺时针变为逆时针）。但另一方面，如果不用波利亚定理，我们直接去数，按照某一侧小正方体上涂某种颜色的面的数量进行分类，是很好计数的。因为一种颜色要涂五个面，这五个面分散在两个小正方体上，只有三种可能，分别是$(5,0),(4,1),(3,2)$，对应的种数为1，$2\times2=4$，$3\times3=9$，因此总的方案数为14，这和波利亚定理计算出来的相同。

考虑该$1\times1\times2$正方体表面二着色的问题。

首先，对于1×2的长方体，其空间旋转一共有4种，分别为：

1. 变换一：恒等变换（不变）
2. 变换二：1×1面对应的面心为轴转±90、180度
3. 变换三：1×2面对应的面心为轴转180度
4. 变换四：长为2的对棱棱心为轴转180度

由于两个1×1的小正方体可以旋转，因此上述的第二种空间变换实际上可以通过小正方体的旋转来表示。而对于第三、四种变换，其本质上是将两个小正方体对调了位置，变换四可以通过变换三加小正方体的旋转来得到。因此下可以分为两个方面进行考虑，分别为变换一（不变）加小正方体的旋转，以及变换三加小正方体的旋转。对于后者，我们考虑两个小正方体旋转度数的差值（顺时针转动为正，逆时针转动为负）。若差值为0或360度，则循环长度为2；若差值为90度或270度，则循环长度为8；若差值为180度，则循环长度为4。

根据母函数形式的波利亚定理，有

	变换	种类		
不进行空间旋转（变换一）	两侧的1x1小正方体均不动	1种	$(1)^{10}$	$(x+y)^{10}$
	一侧的1x1小正方体不动，另一侧顺/逆时针转90度	$2\times 2=4$种	$(1)^6(4)$	$(x+y)^6(x^4+y^4)$
	一侧的1x1小正方体不动，另一侧转180度	2种	$(1)^6(2)^2$	$(x+y)^6(x^2+y^2)^2$
	一侧1x1小正方体顺/逆时针转90度，另一侧也顺/逆时针转90度	$2\times 2=4$种	$(1)^2(4)^2$	$(x+y)^2(x^4+y^4)^2$
	一侧1x1小正方体顺/逆时针转90度，另一侧转180度	$2\times 2=4$种	$(1)^2(2)^2(4)$	$(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4)$
	两侧的1×1小正方体均转180度	1种	$(1)^2(2)^4$	$(x+y)^2(x^2+y^2)^4$
进行空间旋转（变换三）	两个小正方体旋转度数的差值为0度或360度	4种	$(2)^5$	$(x^2+y^2)^5$
	两个小正方体旋转度数的差值为180度	4种	$(2)(4)^2$	$(x^2+y^2)(x^4+y^4)^2$
	两个小正方体旋转度数的差值为90度或270度	8种	$(2)(8)$	$(x^2+y^2)(x^8+y^8)$

所以总的旋转的数量为32种，总的不等价染色方案数为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{32}[(x+y)^{10}+4\times(x+y)^6(x^4+y^4)+2\times(x+y)^6(x^2+y^2)^2+4\times(x+y)^2(x^4+y^4)^2 && (17)\\
&+4\times(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4)+(x+y)^2(x^2+y^2)^4+4\times(x^2+y^2)^5 && (18)\\
&+4\times(x^2+y^2)(x^4+y^4)^2+8\times(x^2+y^2)(x^8+y^8)] && (19)
\end{aligned}
$$

考虑其中x^5y^5的系数，为

$$\frac{1}{32}[C_{10}^5+4\times 12+2\times(6+2\times C_6^3+6)+4\times 2\times 2+4\times(2+2)+2\times C_4^2]=14 \tag{20}$$

因此满足题意的每种颜色恰好染五个色块的方法数就是14。

Q7.12

> 🌈
>
> 难度：3。比较简单，先转化为用6种颜色涂正方体的问题，课上介绍过是30种。然后考虑各个面数字的朝向即可。个人觉得可以在数字中加入一些中心对称的数字，例如1，8，或者加入一组 6和9（6旋转180度后变成9）来增加题目的变化？

注意到，对于中心写有数字2，3，4，5，6，7的正方形贴纸，其绕贴纸中心旋转90度、180度、270度后均无法与原来的图案重合。

先不考虑这些中心写有数字的正方形贴纸朝向，根据母函数形式的波利亚定理，有：

变换	数量		
恒等变换	1种	$(1)^6$	$(x+y+z+u+v+w)^6$
面面中心转±90度	$3\times 2=6$种	$(1)^2(4)$	无不动点
面面中心转180度	3种	$(1)^2(2)^2$	无不动点
棱中对棱中旋转180度	6种	$(2)^3$	无不动点
对角线为轴旋转±120度	$2\times 4=8$种	$(3)^2$	无不动点

因此，此时所有不等价的方案数为

$$\frac{1}{24}(x+y+z+u+v+w)^6 \tag{21}$$

进一步地，每一种贴纸恰好都只使用一个的不等价的方案数为

$$\frac{1}{24} \cdot 6! = 30\text{种} \tag{22}$$

最后，考虑到每一种贴纸都有四种可能的朝向，因此原题所要求的不等价的方案数为

$$30 \times 4^6 = 122880 \tag{23}$$