Homework_2

潘子睿 2024310675

Q1

设X,Y相互独立，$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$，$Y\sim\mathcal{P}(\mu)$，则在$X+Y=n$，$n\geq 1$条件下，证明$X\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$。

证明：

首先，有

$$g_{X+Y}(s)=g_X(s)g_Y(s)=e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)}=e^{(\lambda+\mu)(s-1)} \tag{59}$$

因此$X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$。

所以：

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=n)&=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} &(60)\\
&=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} &(61)\\
&=\frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}} &(62)\\
&=C_n^k(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-k} &(63)
\end{aligned}$$

而$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}=1$。因此在$X+Y=n$，$n\geq 1$的条件下，有$X\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$，得证。

Q2.

求指数分布、泊松分布的特征函数。

解：

1. **指数分布**：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \qquad (64)\\ 0, & x<0 \qquad (65)\end{cases}$$

   其中$\lambda>0$。其特征函数

$$\phi(t) = Ee^{itx} = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx \tag{66}$$
$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x+itx}dx \tag{67}$$
$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}(\cos(tx) + i\sin(tx))dx \tag{68}$$
$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos(tx)dx + \lambda i \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(tx)dx \tag{69}$$
$$= \lambda A + i\lambda B \tag{70}$$

这里令$A = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos(tx)dx$，$B = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(tx)dx$。

而

$$A = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos(tx)dx = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \cos(tx)d(e^{-\lambda x}) \tag{71}$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\left[\cos(tx)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty te^{-\lambda x}\sin(tx)dx\right] \tag{72}$$
$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{t}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(tx)dx \tag{73}$$
$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{t}{\lambda}B \tag{74}$$

另一方面，

$$B = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(tx)dx = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \sin(tx)d(e^{-\lambda x}) \tag{75}$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\left[\sin(tx)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty t\cos(tx)e^{-\lambda x}dx\right] \tag{76}$$
$$= \frac{t}{\lambda}A \tag{77}$$

从而

$$A = \frac{1}{\lambda} - \frac{t}{\lambda}B = \frac{1}{\lambda} - \frac{t^2}{\lambda^2}A \tag{78}$$

得到

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2} \\ B &= \frac{t}{\lambda^2+t^2} \end{aligned} \tag{79}$$

从而

$$\phi(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2} + i\frac{\lambda t}{\lambda^2+t^2} = \frac{\lambda^2+i\lambda t}{\lambda^2+t^2} \tag{80}$$

2. **泊松分布**：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots \tag{81}$$

其中$\lambda>0$。其特征函数

$$\begin{aligned}
\phi(t)=Ee^{itX} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &(82)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} &(83)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} &(84)\\
&= e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} &(85)\\
&= e^{(e^{it}-1)\lambda} &(86)
\end{aligned}$$

这里用到了e^x的泰勒展开：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{87}$$

Q1.19

(1)

考虑N_i的矩母函数，由于$N_i\sim\mathcal{P}(\lambda_i)$，$i=1,2,3$，故有

$$g_{N_i}(s)=e^{\lambda_i(s-1)},\ i=1,2,3 \tag{88}$$

故

$$g_{N_1+N_2}(s)=g_{N_1}(s)g_{N_2}(s)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} \tag{89}$$

从而$N_1+N_2\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$。因此

$$P(N_1+N_2=n)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \tag{90}$$

(2)

根据**Q1**中的结论，有在$N_1+N_2=n$，$n\ge 1$的情况下，$N_1\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$。

故$n\ge 1$时，有

$$P(N_1=k|N_1+N_2=n)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},q=1-p,n\ge 1,0\le k\le n \tag{91}$$

当$n=0$时，有$N_1+N_2=0$，从而$N_1=0$。因此$P(N_1=0|N_1+N_2=0)=1$。

(3)

证明：

$\forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
P(N_1+N_2=i|N_3=j) &= \frac{P(N_1+N_2=i, N_3=j)}{P(N_3=j)} && (92)\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{i} P(N_1=k, N_2=i-k, N_3=j)}{P(N_3=j)} && (93)\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{i} P(N_1=k)P(N_2=i-k)P(N_3=j)}{P(N_3=j)} && (94)\\
&= \sum_{k=0}^{i} P(N_1=k)P(N_2=i-k) = P(N_1+N_2=i) && (95)
\end{aligned}
$$

从而N_1+N_2和N_3独立。

(4)

有

$$
\begin{aligned}
E(N_1|N_1+N_2=j) &= \sum_{i=0}^{j} iP(N_1=i|N_1+N_2=j) && (96)\\
&= \sum_{i=1}^{j} iC_j^i p^i q^{j-i}, \quad p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, q=1-p && (97)\\
&= \sum_{i=1}^{j} jC_{j-1}^{i-1} p^i q^{j-i} && (98)\\
&= jp\sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^{i} p^i q^{(j-1)-i} = jp && (99)
\end{aligned}
$$

所以

$$
E(N_1|N_1+N_2) = p(N_1+N_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}(N_1+N_2) \qquad (100)
$$

另一方面：

$$E(N_1+N_2|N_1=j) = \frac{\sum_{i=j}^{\infty} iP(N_1+N_2=i, N_1=j)}{P(N_1=j)} \tag{101}$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{\infty}(t+j)P(N_2=t, N_1=j)}{P(N_1=j)} \tag{102}$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{\infty}(t+j)\frac{\lambda_2^t}{t!}e^{-\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}}{\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}} \tag{103}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty}(t+j)\frac{\lambda_2^t}{t!}e^{-\lambda_2} \tag{104}$$

$$= je^{-\lambda_2}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^t}{t!} + \lambda_2 e^{-\lambda_2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\lambda_2^{t-1}}{(t-1)!} \tag{105}$$

$$= j+\lambda_2 \tag{106}$$

所以$E(N_1+N_2|N_1) = N_1+\lambda_2$。

Q1.25

由于X和Y相互独立：

$$f_Z(z) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)f_Y(z-k) \tag{107}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{108}$$

此即为$Z = X+Y$的概率密度函数。

Q1.27

先证明必要性：

有X,Y独立。

则

$$\phi_{X,Y}(s,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} s^i t^j P(X=i, Y=j) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^i t^j P(X=i)P(Y=j) \tag{109}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s_i P(X=i)\sum_{j=0}^{\infty} t^j P(Y=j) \tag{110}$$

$$= \phi_X(s)\phi_Y(j), \quad \forall |s|, |t| < 1 \tag{111}$$

得证。

再证明充分性：

$$\begin{aligned}
P(X=i,Y=j)\cdot i!\cdot j! &= \frac{\partial\phi_{XY}(0,0)}{(\partial s)^i(\partial t)^j} && (112)\\
&= \frac{\partial(\phi_X(0)\phi_Y(0))}{(\partial s)^i(\partial t)^j} && (113)\\
&= \frac{\partial\phi_X(0)}{(\partial s)^i}\cdot\frac{\partial\phi_Y(0)}{(\partial t)^j} && (114)\\
&= i!P(X=i)\cdot j!P(Y=j) && (115)
\end{aligned}$$

从而$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$，$\forall i,j\in\mathbb{N}$。从而X,Y独立，得证。