应用随机过程

> 作业20 小测验20 期末考试60

预备知识 随机过程定义

概率

随机试验：结果无法预先确定的试验。结果可能出现的集合称为**样本空间**Ω。样本空间的子集称为**事件**。

Kolmogorov公理化定义

Ω非空，定义若Ω的一些子集构成的**非空**集合类$\mathcal{F}$满足：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F}$，$A^c \in \mathcal{F}$，即对求余运算封闭
3. $\forall A_n \in \mathcal{F}$，$n \geq 1$，有$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

则称$\mathcal{F}$为Ω上的σ域，或σ代数。**$\mathcal{F}$中的每一个元素称为事件**。$(\Omega, \mathcal{F})$称为可测空间。

给定非平凡$A \in \Omega$，则$\mathcal{F}_A = \{\phi, \Omega, A, A_c\}$

概率定义

定义：设$(\Omega, \mathcal{F})$是可测空间，若定义在$\mathcal{F}$上的实值函数P满足：

1. $\forall A \in \mathcal{F}$，$P(A) \geq 0$。（**非负性**）
2. $P(\Omega) = 1$。（**规范性**）
3. 若$A_n \in \Omega$，$n \geq 1$两两不相容，有$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n)$。（**可列可加性**）

则称P为$(\Omega, \mathcal{F})$或$\mathcal{F}$上的**概率测度**。$\forall A \in \mathcal{F}$，$P(A)$称为$A$发生的**概率**。

定理1

（σ域$\mathcal{F}$对有限及可列集合运算封闭）设$\mathcal{F}$是Ω上σ域，则：

1. 若$A_i \in \mathcal{F}$，则$\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$，$\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
2. 若$A_n \in \mathcal{F}$，$n \geq 1$，则$\cap_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
3. 若A，$B \in \mathcal{F}$，则$A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$。

定理2（概率P性质）

1. $P(\phi) = 0$
2. 若$A \in \mathcal{F}$，则$P(A^c) = 1 - P(A)$
3. 若$A_i \in \mathcal{F}$且两两不交，则$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$（有限可交性）
4. 若A，$B \in \mathcal{F}$，$A \subset B$则$P(A) \leq P(B)$，且$P(B) - P(A) = P(B \backslash A)$。（单调性&可减性）
5. 若$A_n \in \mathcal{F}$，$n \geq 1$，则$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$。（半可列可加性）

> 性质1、2、3$\longrightarrow$定理2.1$\longrightarrow$定理2.3$\longrightarrow$定理2.2、定理2.4、定理2.5

离散概率空间

$\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots\}$，非负数列$\{p_n\}$使得$\Sigma_n p_n = 1$。有对$\mathcal{F} = \{A | A \subset \Omega\}$，$\forall A \subset \Omega$，$P(A) = \Sigma_{i:w_i \in A} p_i$。则$P$是$\mathcal{F}$上的概率测度。

性质

若事件列$\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$，使得$A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geq 1$，则称$\{A_n : n \geq 1\}$为**递增事件**，定义$\lim_{n \to \infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$。反之若$A_{n+1} \subset A_n$，$\forall n \geq 1$，则称为**递减事件列**。定义$\lim_{n \to \infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$。

命题：

1. 若$\{A_n : n \geq 1\}$为递增事件列，则$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$。（**下连续性**，类比左连续性）
2. 若$\{A_n : n \geq 1\}$为递减事件列，则$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$。（**上连续性**，类比右连续性）

给定Ω的一些子集构成的集合$\mathcal{C}$。定义

$$\sigma(\mathcal{C}) = \cap_{\sigma\text{域}A:\mathcal{C} \subset A} A \tag{1}$$

称为$\mathcal{C}$生成的σ域。或包含$\mathcal{C}$的最小σ域。（所有包含A的σ域的交集）

> 证明：$\sigma(\mathcal{C})$是一个σ域
>
> 1. $\forall\sigma$域A，$\mathcal{C}\subset A$，有$\Omega\in A$，从而$\Omega\in\cap_{\sigma域A:\mathcal{C}\subset A}A=\sigma(\mathcal{C})$
> 2. $\forall C\in\sigma(\mathcal{C})$，则$\forall\sigma$域$A:\mathcal{C}\subset A$，有$C\in A$，而$A$为$\sigma$域，从而$C^c\in A$，进而$C^c\in\sigma(\mathcal{C})$
> 3. 与2类似

对于$\Omega=\mathbb{R}$，有定义Borel σ-域$\mathcal{B}=\sigma(\{[a,b]|a,b\in\mathbb{R}\})=\sigma(\{(a,b]|a,b\in\mathbb{R}\})=\sigma(\{[a,b)|a,b\in\mathbb{R}\})=\sigma(\mathbb{R}中闭集)=\sigma(\mathbb{R}中开集)$。可以证明它是一个$\sigma$域。

可以证明，$([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]})$存在唯一概率测度$P$使得$\forall A=[a,b]\in[0,1]$，$P([a,b])=b-a$。

设$\Omega=[0,1]$，$\mathcal{F}=\mathcal{B}_{[0,1]}$定义为$\{B\cap[0,1]|B\in\mathcal{B}\}=\sigma(\{[0,1]中闭集\})$。

命题：令$B=[0,1]$中有理数的集合，$B^c=[0,1]$中无理数的结合，则$B,B^c\in\mathcal{B}_{[0,1]}$，且$P(B)=0$，$P(B^c)=1$。

> 证明：
>
> $\forall a\in[0,1]$，考虑单点集$a=\cap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n}]\in\mathcal{B}[0,1]=\mathcal{F}$，从而$B=\{0\}\cup\{\frac{m}{n}:1\le m<n,n,m\in N^+\}\in\mathcal{F}$。进而$B^c\in\mathcal{F}$。对右端点1考虑$a=\cap_{n=1}^{\infty}[a,a-\frac{1}{n}]\in\mathcal{B}[0,1]=\mathcal{F}$即可。
>
> 进一步地，
>
> $$\begin{aligned}P(B)&=P(\{0\}\cup\{\frac{m}{n}:1\le m<n,n,m\in N^+\}) &(2)\\&=P(\{0\})+\Sigma P(\{\frac{m}{n}\})=0 &(3)\\&\because\forall a\in[0,1],P(a)=0 &(4)\end{aligned}$$
>
> 从而$P(B^c)=1-P(B)=1$。

概率的性质

- 事件独立性：若$A,B\in\mathcal{F}$，使得$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A和B相互独立。若$P(B)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B)\Longleftrightarrow P(A|B)=P(A)$。另，有$A$与$B$独立$\Longleftrightarrow A^c$与$B$独立。

  若n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$，使得$\forall k\ge2$，$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，有$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n})$，则称$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$相互独立。或者，当$P(A_1A_2\cdots A_n)>0$时，$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$相互独立$\Longleftrightarrow P(A_{i_k}|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k-1})=P(A_{i_k})$。

Bernstein悖论

（彼此独立而不互相独立）

> https://www.researchgate.net/publication/237996395_Are_Bernstein's_Examples_on_Independent_Events_Paradoxical

考虑一个正四面体，其四个面分别被涂为红色、蓝色、黄色、红蓝黄色。此时：

- $P(red)=P(blue)=P(yellow)=\frac{1}{2}$
- $P(red\ \&\ blue)=\frac{1}{4}=P(red)P(blue)$，即出现红色和出现蓝色这两个事件独立。同理可得出现红色和出现黄色这两个事件独立，出现蓝色和出现黄色这两个事件独立。
- $P(red\ \&\ blue\ \&\ yellow)=\frac{1}{4}\ne P(red)P(blue)P(yellow)$，也即，出现红色、出现蓝色和出现黄色这三个事件**不互相独立**。

随机变量分布函数与数字特征

随机变量及其分布函数

定义：假设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是一个概率空间，$X:\Omega\to\mathbb{R}$满足$\forall x\in\mathbb{R}$，有$\{w\in\Omega,X(w)\le x\}\in\mathcal{F}$（**即半直线的原像集**），则称$X$是$(\Omega,\mathcal{F})$上的随机变量。则：

$$P(X\le x)\triangleq P(\{X\le x\})=P(\{w\in\Omega,X(w)\le x\}) \tag{5}$$

命题1：$\forall A\in\mathcal{F}$，定义

$$\mathit{1}_A(w)\triangleq\left\{\begin{array}{ll}1,w\in A & (6)\\0,w\notin A & (7)\end{array}\right.$$

称为A的**指示函数**。则$\mathit{1}_A(w)$为$(\Omega,\mathcal{F})$上的随机变量。即

$$\{\mathit{1}_A\le x\}=\left\{\begin{array}{lrr}\Omega, & x\ge1 & (8)\\A^c, & 0\le x<1 & (9)\\\phi, & x<0 & (10)\end{array}\right.$$

特别地，若$A\notin\mathcal{F}$，则$\mathit{1}_A$不是$(\Omega,\mathcal{F})$上的随机变量，这是因为$\{\mathit{1}_A\le\frac{1}{2}\}=A^c\notin\mathcal{F}$。

命题2：设$\{B_n: n\geq 1\}$是$(\Omega,\mathcal{F})$的可测分割，$B_kB_l=\phi$，$\forall k\neq l$，且$\cup_{n=1}^{\infty}B_n=\Omega$，$B_n\in\mathcal{F}$，$\forall n\geq 1$。取定$\{x_n,n\geq 1\}\subset\mathbb{R}$，令$X(w)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n 1_{B_n}$是$(\Omega,\mathcal{F})$上随机变量。可证明：$\forall B\in\mathcal{B}$，有$\{x\in B\}=\{w\in\Omega: X(w)\in B\}=X^{-1}B\in\mathcal{F}$。$X^{-1}B$表示$B$中元素在$X$映射下的原像。

定义：设X是$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量，$\mathbb{R}$上函数$F(x)=P(X\leq x)$，$x\in\mathbb{R}$称为X的分布函数。当X的所有取值为有限个时，称为离散型随机变量。

若$\exists\mathbb{R}$上非负可积函数f，使得$F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$，则称$X$是连续型随机变量。$f$称为$X$的概率密度函数。

若f在x_0点连续，则$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0-\frac{h}{2}<X\leq x_0+\frac{h}{2})}{h}=f(x_0)$（类比于单位长度的线密度）

性质：F为**非降右连续函数**，有$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$

定义：设(X,Y)为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的二维随机变量，$F(X,Y)\triangleq P(X\leq x,Y\leq y)=P(w\in\Omega,X(\omega)\leq x,Y(\omega)\leq y)$，称为$(X,Y)$的**联合分布函数**。

定义：X,Y的**边缘分布函数**：

$$\begin{gathered}F_X(x)=P(X\leq x)=P(\{X\leq x\})=\cup_{n=1}^{\infty}\{X\leq x,Y\leq n\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)\triangleq F(x,\infty)\\ F_Y(y)=P(Y\leq y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)\triangleq F(\infty,y)\end{gathered}\tag{11}$$

定义：若$\exists\mathbb{R}^2$上的非负可积函数$f(x,y)$，使得$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$，则称$(X,Y)$时二维连续型随机变量，$f(x,y)$称为$(X,Y)$的联合概率密度。

考虑f的连续点(x_0,y_0)，则：

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{P(x_0-\frac{\Delta x}{2}\leq X\leq x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0-\frac{\Delta x}{2}\leq Y\leq y_0+\frac{\Delta y}{2})}{\Delta x\Delta y}=f(x_0,y_0)\tag{12}$$

性质：若(X,Y)联合分布函数$F(X,Y)=F_X(x)F_Y(y)$，$\forall x,y\in\mathbb{R}$，则称X和Y相互独立。

注意到，有$F(X,Y)=F_X(x)F_Y(y)\iff P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)\iff P(x\in\mathcal{B}_1,Y\in\mathcal{B}_2)=P(x\in\mathcal{B}_1)P(y\in\mathcal{B}_2)$。

Riemann-Stieltjes积分

定义：设F为非降右连续函数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，取$a<b\in\mathbb{R}$，$\forall$分点，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$\forall u_i\in[x_{i-1},x_i]$，取$\lambda\triangleq\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$，若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}g(u_i)(F(x_i)-F(x_{i-1}))\tag{13}$$

存在极限，则此极限为g关于F在$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes积分，记为$\int_a^b g(x)dF(x)$或$\int_a^b g(x)F(dx)$。**这里$F(x)$可视为直线上的测度。**

若$\lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\int_a^b g(x)dF(x)$存在，则称此极限为$g$关于$F$在$(-\infty,+\infty)$上R-S积分，记为$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x)$。

性质：

1. 当$a=c_0<c_1<\cdots<c_n=b$时，

$$\int_a^b g(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}}g(x)dF(x)\tag{14}$$

2. 若$g(x)\leq 0$，则$\int_a^b g(x)dF(x)\leq 0$
3. $\int_a^b\sum_{i=1}^{n}c_ig_i(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\int_a^b g_i(x)dF(x)$（线性性）
4. 若F_1,F_2是两个非降右连续函数，$c_1,c_2\geq 0$，则

$$\int_a^b g(x)d(c_1F_1+c_2F_2)(x)=c_1\int_a^b g(x)dF_1(x)+c_2\int_a^b g(x)dF_2(x)\tag{15}$$

例题：设F为X的分布函数，则

1. $g\triangleq 1$，则$\int_a^b 1dF(x)=F(b)-F(a)$
2. 若X是离散型随机变量，$P(X=x_i)=p_i$，则

$$F(x)=\sum_{i:x_i\leq x}p_i\tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x)=\sum_i g(x_i)(F(x_i)-F(x_{i-}))=\sum_i g(x_i)p_i\tag{17}$$

3. 若X是连续型随机变量，$f(x)$为其概率密度。则

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \tag{18}$$

数字特征

定义：设随机变量X的分布函数为F，若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|F(dx)<\infty$（保证极限存在），则称

$$E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} xF(dx) \tag{19}$$

为X的随机期望。

若X为离散型随机变量，$EX=\sum_i x_i p_i$。

若X为连续型随机变量，$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$。

期望性质：

1. 线性性
2. 任给一个好函数g（其半直线的原像集是Borel集/Borel可测），若$Eg(X)$存在，则

$$Eg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \tag{20}$$

定义：若$E|X|^k<\infty$，则称EX^k为X的k阶原点矩。即

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) \tag{21}$$

9.19 矩母函数、特征函数

> $$\begin{cases} \text{矩母函数}\Phi(t) \triangleq Ee^{tX} & (22) \\ \text{（取值为非负整数）矩母函数}g(t) \triangleq Et^X & (23) \\ \text{特征函数}\phi(t) \triangleq Ee^{itX} & (24) \end{cases}$$

1.矩母函数

定义：设随机变量X的分布函数为F，若$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}dF(x)<+\infty$，则称其为$X$的**矩母函数**，记为

$$\Phi(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}dF(x) = Ee^{tx} \tag{25}$$

特别地，若x的k阶矩存在有限，则$EX^k=\Phi^{(k)}(0)$。（上式两边求导即得）

若X为一个取非负整数值的随机变量，概率分布列$P(X=k)=p_k$，$k\geq 0$，则定义X的**矩母函数**$g(s)\triangleq Es^X=\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$，$|s|\leq 1$。同样，两边求导，有一系列结论：

$$p_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}, \forall k \geq 0 \tag{26}$$

$$g^{(k)}(1) = EX(X-1)\cdots(X-k+1) \tag{27}$$

$$\begin{gathered} EX = g^{(1)}(1) \\ \text{若}EX^2<\infty\text{，则}Var(x) = g^{''}(1) + g^{'}(1) - (g^{'}(1))^2 \end{gathered} \tag{28}$$

性质：若X_1,X_2相互独立，X_1,X_2均为取非负整数值的随机变量，则$g_{X_1+X_2}(s)=g_{X_1}(s)\cdot g_{X_2}(s)$。

例1：设$X\sim\mathcal{B}(n,p)$，则$g_X(s)=ES^X=\sum_{k=0}^{n} s^k C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(ps+1-p)^n$

例2：设$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$（泊松分布）：则$g_X(s)=ES^X=\sum_{k=0}^{\infty} s^k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda s}e^{-\lambda}=e^{\lambda(s-1)}$

2.特征函数

假设X,Y为实值随机变量，$Z=X+iY$的期望$EZ\triangleq EX+iEY$。

定义：对实值随机变量X，其**特征函数**$\phi(t)\triangleq Ee^{itx}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$，$t\in\mathbb{R}$。

性质：

1. $\phi(0)=1, \phi(-t)=\overline{\phi(t)}, |\phi(t)|\leq 1$
2. ϕ在$\mathbb{R}$上一致连续
3. **非负定性**：$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbb{R}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$，有

$$\sum_{k,j=1}^{n} \phi(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j} \geq 0 \tag{29}$$

证明：

$$\sum_{k,j=1}^{n}\phi(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}=\sum_{k,j=1}^{n}Ee^{i(t_k-t_j)x}\lambda_k\overline{\lambda_j} \tag{30}$$

$$=E(\sum_{k=1}^{n}e^{it_kx}\lambda_k)(\sum_{j=1}^{n}e^{-it_jx}\overline{\lambda_j}) \tag{31}$$

$$=E|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kx}X|^2\geq 0 \tag{32}$$

4. 若X与Y相互独立，则$\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\phi_Y(t)$

   证明：

$$\phi_{X+Y}(t)=Ee^{it(X+Y)}=E(e^{itX}e^{itY})=Ee^{itX}\cdot e^{itY}=Ee^{itX}\cdot Ee^{itY}=\phi_X(t)\cdot\phi_Y(t) \tag{33}$$

5. 对于随机变量X，其特征函数与分布函数一一对应。

> 若X为连续型，则$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx$，其即为傅立叶变换，通过傅立叶反变换即可从$\phi(t)$求出$f(x)$，从而二者一一对应。当$X$为离散型时，$phi(t)$和$f(x)$之间的关系为离散型傅立叶变换。

6. 若EX^n存在且有限，则$E\phi^{(k)}(t)=i^kEX^ke^{itX}$，$EX^k=i^{-k}\phi^{(k)}(0)$。

例1：设$X\sim\mathcal{B}(n,p)$，则$\phi_X(t)=E^{itX}=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}C_n^kp^kq^{n-k}=(pe^{it}+q)^n$，$q=1-p$。

例2：设$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$，则$\phi_X(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$。

例3：设$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$，则$\phi_X(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$

先求$X\sim\mathcal{N}(0,1)$。有

$$\phi_X(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itX}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{34}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{35}$$

则

$$\phi_X^{'}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}-x\sin tx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{36}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}} \tag{37}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin txe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}t\cos txdx=-t\phi_X(t) \tag{38}$$

得到方程组：

$$\begin{cases}\phi_X^{'}(t)=-t\phi_X(t) & (39)\\ \phi_X(0)=1 & (40)\end{cases}$$

得到$\phi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$。

因此当$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$时，设$Y\sim\mathcal{N}(0,1)$有

$$\phi_X(t)=Ee^{itX}=Ee^{it(\mu+\sigma Y)}=E(e^{it\mu}e^{it\sigma Y})=e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{it\mu-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \tag{41}$$

条件数学期望

设$A,B\in\mathcal{F}_1$，$P(B)>0$，则$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)}$。

1.离散型随机变量

设(X,Y)为离散型随机向量，联合概率分布$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$。

则Y的边缘分布$P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}$。给定$j$，使得$P(Y=y_j)>0$，则$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$，$i=1,2,\cdots$。这称为在$Y=y_j$条件下，$X$的**条件概率分布（列）**。

若$\sum_i|x_i|p(X=x_i|y=y_j)<+\infty$（计数条件，确保求和与次序无关），则称$\sum_i x_iP(X=x_i|Y=y_j)$为$Y=y_j$条件下，$X$的**条件数学期望**，记为$E(X|Y=y_j)$。

令$m(y_j)\triangleq E(X|Y=y_j)$，**定义**：令$E(X|Y)\triangleq m(Y)=\sum_j 1_{\{y_j\}}(Y)E(X|Y=y_j)=\sum_j 1_{\{y_j\}}(Y)m(y_j)$。称为$X$关于$Y$的**条件期望**。

例1：假设各次射击独立，每次击中目标的概率是p，$p\in(0,1)$，记X表示第一次击中目标时的射击次数，Y表示第二次击中目标时的射击次数。求(X,Y)的联合概率分布和条件概率分布，条件期望。

解：

1. (X,Y)的联合概率分布

$$P(X=i,Y=j)=(1-p)^{i-1}\cdot p\cdot(1-p)^{j-i-1}\cdot p=p^2\cdot(1-p)^{j-2},\ i=1,2,\cdots,\ j=i+1,i+2,\cdots \tag{42}$$

   则$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p$，$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}P(X-i,Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}(p^2(1-p)^{j-2})=(j-1)p^2(1-p)^{j-2}$。

2. 给定j，求在$Y=j$的条件下X的条件概率分布

$$P(X=i|Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{1}{j-1},\ i=1,2,\cdots,j-1 \tag{43}$$

   给定i，求在$X=i$的条件下Y的条件概率分布

$$P(Y=j|X=i)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}=p(1-p)^{j-i-1},\ j=i+1,i+2,\cdots \tag{44}$$

3. 条件期望

$$\begin{gathered}E(X|Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j-1}=\frac{j}{2},\ j\geq 2\\ E(X|Y)=\frac{Y}{2}\\ E((E(X|Y)))=\sum_j E(X|Y=j)P(Y=j)=\sum_j\frac{j}{2}(j-1)p^2(1-p)^{j-2}=\frac{p^2}{2}(\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j)''=\frac{1}{p}=EX\end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}E(Y|X=i)&=\sum_{j=i+1}^{\infty}jp(1-p)^{j-i-1}=p(1-p)^{-i}\sum_{j=i+1}^{\infty}j(1-p)^{j-1} && (46)\\ &=pq^{-i}\sum_{j=i+1}^{\infty}jq^{j-1} && (47)\\ &=pq^{-i}(\sum_{j=i+1}^{\infty}q^j)' && (48)\\ &=pq^{-i}(\frac{q^{i+1}}{1-q})' && (49)\\ &=pq^{-i}\frac{(i+1)q^i(1-q)+q^{i+1}}{(1-q)^2} && (50)\\ &=\frac{ip+1}{p} && (51)\end{aligned}$$

全期望公式：

$$E(E(X|Y))=E(X) \tag{52}$$

证明：

$$\begin{aligned}E(E(X|Y))&=\sum_j E(X|Y=y_j)P(Y=y_j) && (53)\\ &=\sum_j\sum_i x_iP(X=x_i,Y=y_j)P(Y=y_j) && (54)\\ &=\sum_i x_i\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)P(Y=y_j)\quad(\text{全概率公式}) && (55)\\ &=\sum_i x_iP(X=x_i)=EX && (56)\end{aligned}$$

例2（作业题1）：设X,Y相互独立，$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$，$Y\sim\mathcal{P}(\mu)$，则在$X+Y=n$，$n\geq 1$条件下，证明$X\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$。(即求$P(X=k|X+Y=n)$

首先，有

$$g_{X+Y}(s)=g_X(s)g_Y(s)=e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)}=e^{(\lambda+\mu)(s-1)} \tag{57}$$

因此$X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$。

所以：

$$P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \tag{58}$$
$$=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \tag{59}$$
$$=\frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}} \tag{60}$$
$$=C_n^k(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-k} \tag{61}$$

而$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}=1$。因此在$X+Y=n$，$n\geq 1$的条件下，有$X\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$，得证。

2.连续型随机变量

设(X,Y)为二维连续型随机变量，联合概率密度$f(x,y)$，联合分布函数为$F(x,y)$。

Y的边缘密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$。$\forall y\in\mathbb{R}$，则$P(Y=y)=0$。考虑极限

$$\lim_{\epsilon\to 0}P(X\leq x|y-\epsilon<Y<y+\epsilon) \tag{62}$$

下面，我们在适当条件（f_Y在y处连续，$\int_{-\infty}^{x}f(u,vdu)$在$v=y$处连续）下，证明上述极限存在。

有

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}P(X\leq x|y-\epsilon<Y\leq y) \tag{63}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}P(X\leq x|y-\epsilon<Y<y+\epsilon) \tag{64}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{F(x,y)-F(x,y-\epsilon)}{F_Y(y)-F_Y(y-\epsilon)} \tag{65}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{[F(x,y)-F(x,y-\epsilon)]/\epsilon}{[F_Y(y)-F_Y(y-\epsilon)]/\epsilon} \tag{66}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)} \tag{67}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(y,u)}{f_Y(y)}du \tag{68}$$

故**定义**：给定y，使得$f_Y(y)>0$，称$f_{X|Y}(x|y)\triangleq\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，，$x\in\mathbb{R}$为$Y=y$条件下$X$的条件概率密度函数。$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u,y)du$，$x\in\mathbb{R}$为$Y=y$条件下$X$的条件分布函数。

当$\int_{\infty}^{\infty}|x|f_{X|Y}(x|y)dx<+\infty$时，称$E(X|Y=y)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$为$Y=y$条件下$X$的条件数学期望。

记$m(y)=E(X|Y=y)$，称$E(X|Y)=m(Y)$为X关于Y的条件期望。

例：$(X,Y)\sim\mathcal{U}(D)$（圆盘），则有

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}1_D(x,y)$$
$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ |y|\leq 1 \tag{69}$$

$\forall y\in(-1,1)$，在$Y=y$条件下，X的条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1_D(x,y)}{2\sqrt{1-y^2}}=\frac{1_{\{|x|\leq\sqrt{1-y^2}\}}}{2\sqrt{1-y^2}} \tag{70}$$

为一个在$[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}]$上的均匀分布。则有$E(X|Y=y)=0$，$E(X|Y)=0$。（对称）

接note3

例：设$(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则联合密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2}\right]\right\} \tag{71}$$

X的边缘密度$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2})$，则$\forall x\in\mathbb{R}$，在$X=x$条件下，$Y$的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)]^2\} \tag{72}$$

故$Y|_{X=x}\sim\mathcal{N}(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$。从而

$$E(Y|X=x)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$
$$E(Y|X)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1) \tag{73}$$

3.一般情况

定义：设$y\in\mathbb{R}$，使得对充分小$\epsilon>0$，有$P(y-\epsilon<Y\le y)>0$，则若$\lim_{\epsilon\to0}P(X\le x|y-\epsilon<Y\le y)$存在（**使用极限，是因为一般情况下，无法直接表示**$P(Y=y)$），则称该极限为$Y=y$条件下，X的条件分布函数。记为$F_{X|Y}(x|y)$。且称

$$E(X|Y=y)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xdF_{X|Y}(x|y) \tag{74}$$

为X在$Y=y$条件下的条件期望。记$m(y)\triangleq E(X|Y=y)$，称其为X关于Y的条件期望。

定义1.4.3：设$D\in\mathcal{B}$，使得$P(Y\in D)>0$，称$P(X\le x|Y\in D)\triangleq\frac{P(X\le x,Y\in D)}{P(Y\in D)}$为$Y\in D$条件下$X$的条件分布函数。称

$$E(X|Y\in D)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xdP(X\le x|Y\in D) \tag{75}$$

为$Y\in D$条件下X的数学期望。

4.条件概率与条件期望

设$B\in\mathcal{F}$，$\mathit{1}_{\mathcal{B}}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\mathcal{B} \quad (892)\\ 0, & \omega\notin\mathcal{B} \quad (893)\end{cases}$

$$E\mathit{1}_{\mathcal{B}}=P(\omega\in\mathcal{B})=P(B) \tag{76}$$

称$EP(B|Y)\triangleq E(\mathit{1}_{\mathcal{B}}|Y)$为事件$\mathcal{B}$关于$Y$的条件概率。

定义$F(x|Y)\triangleq P(X\le x|Y)$，$x\in\mathbb{R}$，为$X$关于$Y$的条件分布函数。

有

$$Eg(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x) \tag{77}$$

其条件期望

$$E(g(x)|Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x|Y) \tag{78}$$

5.条件期望的性质

条件期望$E(X|Y)$是**几乎处处意义下唯一确定**，可以在$Y^{-1}\mathcal{B}\triangleq\mathcal{B}$的原像集的零概率集上有不同。

对**离散型随机变量**，若存在y_j，使得$P(Y=y_j)=0$，则$E(X|Y=y_j)$可取任意给定值，对**连续型随机变量**，若存在y使得$f_Y(y)=0$，则$E(X|y=y)$可任意取值。

若随机变量Z_1,Z_2使得$P(Z_1\neq Z_2)\triangleq P(\{\omega\in\Omega:Z_1(\omega)\neq Z_2(\omega)\})=0$，则称$Z_1$和$Z_2$**几乎必然**相等。记成$Z_1=Z_2$。（almost sure, a.s.）

定理：设随机变量X,Y，X_i，假设$E|X|<+\infty$，$E|X_i|<+\infty$，g,h均为Borel可测函数，使得$E|g(X)h(Y)|<+\infty$，$E|g(x)|<+\infty$，则

1. $E(E(g(x)|Y))=Eg(x)$（**全期望公式**）
2. $\forall\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$（常数），则

$$E(\alpha_0+\sum_i\alpha_ix_i|Y)=\alpha_0+\sum_i\alpha_iE(x_i|Y) \tag{79}$$

3. $E(g(X)h(Y)|Y)=h(Y)E(g(X)|Y)$
4. 若X,Y相互独立，则$E(g(X)|Y)=Eg(X)$，a.s.

证明：

1. 考虑连续型随机向量(X,Y)

$$E(E(g(X)|Y))=\int_{-\infty}^{\infty}E(g(X)|Y=y)f_Y(y)dy \tag{80}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X|Y(x|y)(dx)f_Y(y)(dy) \tag{81}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_{X,Y}(x,y)dxdy=E(g(x)) \tag{82}$$

而

$$Eg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(g(x)|Y=y) f_Y(y) dy \tag{83}$$

对离散型，

$$Eg(x) = \sum_j E(g(x)|Y=y_j) P(Y=y_j) \tag{84}$$

2. 证明显然
3. 有

$$E(g(X)h(Y)|Y=y) = h(y)E(g(X)|Y=y) \tag{85}$$

从而

$$E(g(x)h(Y)|Y) = h(Y)E(g(x)|Y) \tag{86}$$

4. 有X与Y独立，在$Y=y$条件下X条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = F_X(x) \tag{87}$$

则

$$E(g(x)|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x) = E(g(x)) \tag{88}$$

所以

$$E(g(x)|Y) = E(g(x)) \tag{89}$$

例：设某超市周日顾客数$N \sim \mathcal{P}(\lambda)$，顾客消费金额$X_1, X_2, \cdots, X_n$，独立同分布且与$N$独立，平均消费额为$\mu = EX_i$，记$S=$周日超市营业额。求$E(S|N), E(S)$

有：

$$E(S|N=n) = E(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\mu \tag{90}$$

$$E(S|N) = \mu N \tag{91}$$

故

$$E(S) = \mu E(N) = \mu\lambda \tag{92}$$

6.高维情形

以三维为例。

1. **离散型随机变量**：设(X,Y,Z)为三维离散型随机向量，$P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k) = p_{i,j,k}$，$i,j,k \geq 1$。有

$$P(Y=y_j, Z=z_k) = \sum_i p_{i,j,k} \triangleq p_{.jk} \tag{93}$$

称

$$P(X=x_i|Y=y_j, Z=z_k) = \frac{p_{i,j,k}}{p_{.jk}} \tag{94}$$

为X在$Y=y_j, Z=z_k$下的条件概率分布。其条件期望定义为

$$E(X|Y=y_j, Z=z_k) \triangleq \sum_i x_i P(X=x_i|Y=y_j, Z=z_k) \tag{95}$$

记为$m(y_j, z_k)$。进一步地，称

$$E(X|Y,Z) = m(Y,Z) \triangleq \sum 1_{Y=y_j, Z=z_k} E(X|Y=y_j, Z=z_k) \tag{96}$$

为X关于Y,Z的期望。

2. **连续型随机变量**

假设(X,Y,Z)为三维连续型随机向量，有联合密度函数$f(x,y,z)$，Y,Z的边缘密度函数为$f_{Y,Z}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)dx$。称

$$f_{X|Y,Z}(x|y,z) \triangleq \frac{f(x,y,z)}{f_{Y,Z}(y,z)} \tag{97}$$

为X在$Y=y, Z=z$条件下的条件概率密度。其条件期望定义为

$$E(X|Y=y, Z=z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y,Z}(x|y,z) dx \tag{98}$$

记为$m(y,z)$。进一步地，称

$$E(X|Y,Z)\triangleq m(Y,Z) \tag{99}$$

为X关于Y,Z的条件数学期望。

可以证明：

1. $$E(E(X|Y,Z)|Y)=E(X|Y)=E(E(X|Y)|Y,Z),a.s.\quad \text{（平滑性）} \tag{100}$$
2. $$\forall D_1,D_2\in\mathcal{B},E(E(X|Y,Z)|Y\in D_1,Z\in D_2)=E(X|Y\in D_1,Z\in D_2) \tag{101}$$

性质：若$E|X|<+\infty$，$E|X_i|<+\infty$，$E|h(x)|<+\infty$，$E|g(Y_1,\cdots,Y_n)|<+\infty$，$E|h(x)g(Y_1,\cdots,Y_N)|<+\infty$，则

1. $$E(\alpha_0+\sum_i\alpha_iX_i|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)=\alpha_0+\sum_i\alpha_iE(X_i|Y_1,\cdots,Y_n) \tag{102}$$
2. $$E(E(h(x)|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n))=E(h(x)) \tag{103}$$
3. $$E(h(x)g(Y_1,\cdots,Y_n)|Y_1,\cdots,Y_n)=g(Y_1,\cdots,Y_n)E(h(x)|Y_1,\cdots,Y_n) \tag{104}$$
4. 若X与$Y_1,\cdots,Y_n$独立，则
$$E(h(x)|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)=E(h(x)) \tag{105}$$
5. $\forall 1\le m<n$，$E(E(X|Y_1,\cdots,Y_n)|Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)=E(X|Y_1,Y_2,\cdots Y_m)=E(E(X|Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$

7.条件乘法公式与条件独立性

对于事件，有

$$\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B),\quad A,B\text{独立}\\P(AB)=P(B)P(A|B),\quad A,B\text{不独立}\end{aligned} \tag{106}$$

命题：设$A,B,C\in\mathcal{F}$，$P(A)>0$，$P(AB)>0$，则$P(BC|A)=P(B|A)P(C|AB)$

证明：

$$P(BC|A)=\frac{P(ABC)}{P(A)}=\frac{P(AB)P(C|AB)}{P(A)}=P(B|A)P(C|AB) \tag{107}$$

关于**条件独立性**，**定义**：设$A,B,C\in\mathcal{F}$，$P(B)>0$，若$P(AC|B)=P(A|B)\cdot P(C|B)$，则称$A,C$关于$B$条件独立。

命题：若设$A,B,C\in\mathcal{F}$，$P(AB)>0$，则A,C关于B条件独立$\Longleftrightarrow P(C|AB)=P(C|B)$。

作业：1.15，1.18（$P(\xi=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)P(\xi=k|N=n)$），1.19，1.21

补充题：假设连续型随机向量(X,Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1 \quad (108)\\0, & otherwise \quad (109)\end{cases}$$

1. 求X概率密度$f_Y(x)$
2. 给定$x\in(0,1)$，求$X=x$条件下Y的条件期望
3. $E(X|Y)$

1.5 随机过程定义

1.定义

设T是指标集，如$T=\mathbb{Z},\mathbb{Z}^+,\mathbb{R},\mathbb{R}^+,[0,t],\cdots$，$\forall t\in T$，$x_t$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上取值于集合$S$的随机变量，则称$X=\{X_t:t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上以$S$为状态空间的随机过程。

例如：

1. 电话程控交换机$[0,t]$上收到电话呼唤次数N_t，$t\in[0,+\infty)$
2. 某只股票第n天收盘价格X_n，$n=0,1,2,\cdots$
3. 某地第n天最高气温X_n，$n=0,1,2,\cdots,365$

- 如果T是可数集（有限集/可列无穷集），如$\mathbb{Z}$，则称X是离散（时间）参数的随机过程；如果T是连续统（如$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^+$，$[0,t]$），则称X是连续时间参数的随机过程。
- 如果S是可数集，则称X是离散状态的随机过程；如果S是连续统（如$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^d$，$[a,b]$，子区域等），则称X是连续状态的随机过程

可记$X_t(\omega)$为$X(t,\omega):T\times\Omega\to S$为一个二元映射。任意给定$\omega\in\Omega$，$X_t(\omega):T\to S$称为随机过程$X$的一条**样本轨道**（sample pass，trajectory）。

2.例子

1. $\mathbb{Z}^1$上**紧邻随机游走**。当前时刻位于i，下一时刻以概率p运动到$i+1$，以概率$1-p$运动到$i-1$。若$p=\frac{1}{2}$，则称为简单随机游走（Simple Random Walk，SRW）。

   设X_n表示时刻n例子的位置，则随机变量$X=\{X_n:n=0,1,2,\cdots\}$。
2. 某服务站$[0,t]$内到达的顾客数N_t，$t\geq 0$。

3.随机过程的分布

随机过程的分布由其**有限维联合分布**决定。不妨设$S=\mathbb{R}$。$\forall n\geq 1$，$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，记

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_{t_1}\leq x_1,X_{t_2}\leq x_2,\cdots,X_{t_n}\leq x_n) \tag{110}$$

$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}:t_1,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$为一个**有限维联合分布族**，满足：

1. **对称性**：对$(1,2,\cdots,n)$的任意一个排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，有$F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。
2. **相容性**：$\forall m<n$，有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)=F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{111}$$

第3章 马尔可夫链

3.1.定义与例子

定义：若取值于可数集S的随机变量序列$\{X_n:n\geq 0\}$满足$\forall n\in\mathbb{Z}$，$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i,j\in S$，考虑
$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，则称$X=\{X_n:n\geq 1\}$为离散时间参数马尔可夫链。这一性质称为**无后效性**，或**马尔可夫性**。

$\forall i,j\in S$，称$P(X_{n+1}=j|X_n=i)$为X在时刻n的（一步）**转移概率**。若$\forall i,j\in S$，$P(X_{n+1}=j|X_n=i)$**不依赖**于n，记
$p_{ij}\triangleq P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，则称$X$为**时齐的**（homogenous），相应的称p_{ij}为X从i到j的一步转移概率。称

$$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in S} \tag{112}$$

为X的**一步转移概率矩阵**。

考虑转移图$G=(V,E)$是一个有向图，令顶点集$V=S$，边集$\overrightarrow{ij}\in E\iff p_{ij}>0$。

例子：

1. $\mathbb{Z}^1$上**随机游动**，设$\{\xi_n:n\geq 1\}$是一个独立同分布的随机变量序列，且取整数值。设初始位置S_0是一个整数值随机变量，与$\{\xi_n\}$独立，$P(\xi_i=k)=p_k$，$k\in\mathbb{Z}$，则$S_n=S_0+\sum_{k=1}^n\xi_n$。考虑随机过程$\{S_n:n\geq 0\}$，称其为$\mathbb{Z}^1$上随机游动。有：

$$\begin{aligned}&P(S_{n+1}=j|S_n=i,S_{n-1}=i_{n-1},\cdots,S_0=i_0) &(113)\\ &=P(S_n+\xi_{n+1}=j|S_n=i,S_{n-1}=i_{n-1},\cdots,S_0=i_0) &(114)\\ &=P(\xi_{n+1}=j-i|\xi_n=i-i_{n-1},\xi_{n-1}=i_{n-1}-i_{n+1},\cdots,\xi_0=i_0) &(115)\\ &=P(\xi_{n+1}=j-i)=P(S_{n+1}=j|S_n=i)=p_{j-i} &(116)\end{aligned}$$

   则$p_{ij}=p_{j-i}$，$\forall i,j,\in\mathbb{Z}$。

   特别地，对紧邻随机游动，$p_1=p,p_{-1}=1-p$。对简单随机游动，$p_1=p_{-1}=\frac{1}{2}$。
2. **带吸收壁随机游动**（紧邻随机游动，到达两侧$0,N$时停留不动），$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$。
3. **带反射壁随机游动**（紧邻随机游动，到达两侧$0,N$时概率为一离开），$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$。
4. **Ehrenfest模型**：粒子通过隔膜进行扩散。每一时刻随机取一个粒子，若其位于A内，则将其移动到B内，反之将其移动到A内。记X_n的n时刻A中粒子数。则$\{X_n:n\geq 0\}$是一个马尔可夫链。状态空间$S=\{0,1,\cdots,N\}$。转移概率$p_{i,i+1}=\frac{N-i}{N}$，$p_{i,i-1}=\frac{i}{N}$，$1\leq i\leq N-1$。特别地，$p_{0,1}=1$，$p_{N,N-1}=1$，因此其有两个反射壁。
5. **离散排队系统**：记ξ_n表示第n个时间单位到达的顾客数，为一个取值为非负整数的随机变量，且$\{\xi_n:n\geq 1\}$ i,i,d（独立同分布）。X_n表示第n个时间周期开始时队列中顾客数。则随机过程$\{X_n:n\geq 1\}$是一个马氏链。记$a^+=\max(a,0)$，有：

$$X_{n+1}=(X_n-1)^++\xi_n \tag{117}$$

   服务时间可以是正整数实值的几何分布。

定理3.1.1：假设$\{\xi_n:n\geq 1\}$独立同分布是一个随机变量序列，X_0与$\{\xi_n:n\geq 1\}$相互独立，且均取值于可数集，令$f:S\times S\to S$，$X_n=f(X_{n-1},\xi_n)$，$\forall n\geq 1$，则$\{X_n:n\geq 0\}$构成时齐马氏链，转移概率$p_{ij}=p(f(i,\xi_i)=j)$。

3.2.转移概率矩阵

设$X=\{X_n:n\geq 0\}$，为一个时齐马氏链（HMC），转移矩阵$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in S}$。有$\sum_j p_{ij}=1$。

定义：若矩阵$A=(a_{ij})_{i,j\in S}$满足$a_{ij}\geq 0$，且$\forall i$，$\sum_j a_{ij}=1$，则称A是**转移概率矩阵**。

考虑联合概率分布$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)$，$\forall n\geq 0$：

$$\begin{aligned}P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)&=P(X_0=i_0)\prod_{j=1}^n P(X_j=i_j|X_{j-1}=i_{j-1}) &(118)\\ &=P(X_0=i_0)\prod_{j=1}^n p_{i_ji_{j-1}} &(119)\end{aligned}$$

由初始分布和转移概率矩阵唯一确定。记$X_n\sim\Pi(n)$，即$P(X_n=i)=\Pi_i(n)$，$i\in S$。则

$$\Pi_j(n+1)=P(X_{n+1}=j)=\sum_i P(X_{N=1}=j|X_n=i)P(X_n=i)=\sum_i\Pi_i(n)p_{ij} \tag{120}$$

即$\Pi(n+1)=\Pi(n)\mathbb{P}$。从而归纳法，可证$\Pi(n)=\Pi(0)\mathbb{P}^n$。

记$p_{ij}^{(m)}=P(X_{n+m}=j|X_n=i)$不依赖于$n$，称其为$X$从$i$到$j$的$m$步转移概率。对应矩阵$\mathbb{P}^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})_{i,j\in S}$为$X$的$m$步转移矩阵

定理（Chapman-Kolmogorov方程）：

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)},\quad\forall i,j\in S,m,n\geq 0 \tag{121}$$

即$\mathbb{P}^{(m+n)}=\mathbb{P}^m\mathbb{P}^{(n)}$，进一步地，$\mathbb{P}^{(m)}=\mathbb{P}^m$。

3.3状态分类

定义：对$i,j\in S$，若存在$n\geq 0$，使得$p_{ij}^{(n)}>0$，则称i**可达**j，记为$i\rightarrow j$。特别地，有$i\rightarrow i$。并且，可达有传递性。

命题：对$i\neq j$，$i\rightarrow j\iff \exists m>0$，以及$i_1,i_2,\cdots,i_m\in S$，使得$p_{ii_1},p_{i_1i_2},\cdots,p_{i_mj}$均大于0。也即

$$p_i(\exists n\geq 0 \quad s.t. X_n=j)=P(\cup_{i=0}^{\infty}\{X_n=j\}|X_0=i)>0 \tag{122}$$

定义：若$i\rightarrow j$，$j\rightarrow i$，则称i与j互通，记为$i\leftrightarrow j$。**互通是S上的等价关系**（反射性$i\leftrightarrow i$、传递性、对称性$i\leftrightarrow j\iff j\leftrightarrow i$）。

按互通等价关系将S分成若干等价类，则每个等价类称为一个**互通类**。

定义：若$p_{ii}=1$，则称状态i为**吸收态**。

定义：对$j\in S$，定义j的**首达时**$T_j=\min\{n\geq 1:X_n=j\}$。**首中时（击中时）**$\sigma_j=\min\{n\geq 0:X_n=j\}$。**首达概率** $f_{ij}^{(n)}\triangleq P(T_j=n|X_0=i)\triangleq P_i(T_j=n)=P(X_n=j,X_l\neq j,1\leq l<n|X_0=i)$，**即在$n$时刻首次到达状态$j$**。进一步地，

$$f_{ij}\triangleq P(T_j<+\infty|X_0=i)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^n \tag{123}$$

定义：若$f_{ii}=1$，则称状态i是**常返的**（Recurrent），否则，若$f_{ii}<1$，则称状态i是**暂态的**（transient）。

定义：若$f_{ii}=1$，即$\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=1$，记$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$表示从$i$出发返回$i$的平均时长。若$\mu_i<+\infty$，则称$i$是**正常返**。否则，若$\mu_i=+\infty$，则称$i$是**零常返**。

定义：若$\{n\geq 1:p_{ii}^{(n)}>0\}\neq\phi$，则称其**最大公约数**为状态$i$的周期，记为$d_i$。若$d_i>1$，则称$i$是**周期的**。否则，若$d_i=1$，则称$i$是**非周期的**。

定义：若$i\in S$，是**正常返**，**非周期的**，则i是**遍历的**（ergodic）。

考虑$p_{ij}^{(n)}$与$f_{ij}^{(n)}$关系：**定理**：$\forall i,j\in S,n\geq 1$，有

1. $p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}$（枚举首次到达$j$的时刻即可）
2. $f_{ij}^{(n)}=\begin{cases}\sum_{k\neq j}p_{ik}f_{kj}^{(n-1)}, & n>1\\ p_{ij}, & n=1\end{cases}$（枚举第一次到达的状态即可）
3. $i\neq j$时，$i\rightarrow j\Leftrightarrow f_{ij}>0$，$i\leftrightarrow j\Leftrightarrow f_{ij}>0,f_{ji}>0$

证明1:

有

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)}=P(X_n=j|X_0=i)&=P(\cup_{l=1}^{n}\{T_j=l,X_n=j\}|X_0=i) &(124)\\
&=\sum_{l=1}^{n}P(T_j=l,X_n=j|X_0=i) &(125)\\
&=\sum_{l=1}^{n}P(T_j=l|X_0=i)P(X_n=j|T_j=l,X_0=i) &(126)\\
&=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}P(X_n=j|X_l=j,X_m\neq j,1\leq m<l,X_0=i) &(127)\\
&=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}P(X_n=j|X_l=j)=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)} &(128)
\end{aligned}$$

$\forall i,j\in S$，**格林函数**$G_{ij}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}$。**定理**：

$$\begin{gathered}
i\text{常返}\iff G_{ii}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty\\
i\text{暂态}\iff G_{ii}<+\infty
\end{gathered} \tag{129}$$

证明：

令$P(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n$，$\rho>0$，$F(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}\rho^n$，$|\rho|\leq 1$。有

$$\begin{aligned}
P(\rho)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}f_{ii}^{(l)}p_{ii}^{(n-l)}\rho^n &(130)\\
&=1+\sum_{l=1}^{\infty}(\sum_{n=l}^{\infty}p_{ii}^{(n-l)}\rho^{n-l})f_{ii}^{l}\rho^{l} &(131)\\
&=1+\sum_{l=1}^{\infty}f_{ii}^{l}\rho^{l}\sum_{n=l}^{\infty}p_{ii}^{(n-l)}\rho^{n-l} &(132)\\
&=1+F(\rho)P(\rho) &(133)
\end{aligned}$$

而当$0\leq\rho<1$时，$F(\rho)\leq f_{ii}\leq 1$，实际上有$F(\rho)<1$。故$P(\rho)=\frac{1}{1-F(\rho)}$，当$0\leq\rho<q$时。两边取极限，即得原命题。

$$\lim_{\rho\to 1^-} P(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=G_{ii} \\ \lim_{\rho\to 1^-} F(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}=f_{ii} \tag{134}$$

令$S(i)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathit{1}_{\{X_n=i\}}$（即$\{X_n:n\geq 0\}$处在$i$的次数），则

$$E\{S(i)|X_0=i\}=E\{\mathit{1}_{\{X_n=i\}}|X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n=i|X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=G_{ii} \tag{135}$$

因此，G_{ii}实际上表示**由i出发返回到i的平均次数**。从而，当i为常返状态时，返回i的平均次数为无限多次，从而$G_{ii}=+\infty$。

推论1：若j是暂态，则$\forall i\in S$，$G_{ij}<+\infty$，从而$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。

证明：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \tag{136}$$

则

$$G_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad where\ \delta_{ij}=p_{ij}^{(0)} \tag{137}$$
$$=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{l} p_{jj}^{(n-l)} \tag{138}$$
$$=\delta_{ij}+\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\sum_{n=l}^{\infty} p_{jj}^{(n-l)} \tag{139}$$
$$=\delta_{ij}+\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \tag{140}$$
$$=\delta_{ij}+f_{ij}G_{jj}<+\infty \tag{141}$$

得证。

接note6

推论2：若j常返，则

1. $i\to j$时，$G_{ij}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}=+\infty$
2. 若$i\nrightarrow j$，则$G_{ij}=0$

证明：当$i\to j$时

$$G_{ij}=\delta_{ij}+f_{ij}G_{jj}\geq f_{ij}G_{jj}=+\infty \tag{142}$$

命题：若$i\leftrightarrow j$，则i常返$\Leftrightarrow j$常返

证明：只需证i常返$\Rightarrow j$常返。有$\exists r,s\geq 0$，使得$p_{ji}^{(r)}>0, p_{ij}^{(s)}>0$，则

$$p_{jj}^{r+n+s}\geq p_{ji}^{r} p_{ii}^{n} p_{ij}^{s} \tag{143}$$

从而

$$G_{jj}\geq\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{r+n+s}\geq p_{ji}^{r} p_{ij}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n}=p_{ji}^{r} p_{ij}^{s} G_{ii}=+\infty \tag{144}$$

从而j常返。

根据上述命题，我们可以说，**一个互通类是常返/暂态的**。

定义：设马尔可夫链$X=\{X_0,X_1,\cdots,X_t,\cdots\}$，状态空间为$S$，则对于**任意状态**$i,j\in S$，若存在一个时刻$t$，满足

$$P(X_t=i|X_0=j)>0 \tag{145}$$

也即时刻0从j出发，时刻t到达状态i的概率大于0，则称X是**不可约的**，否则称为**可约的**。

例：$\mathbb{Z}^d$上简单随机游动。

1. $d=1$时，有$p_{00}^{(2n-1)}=0$，$p_{00}^{(2n)}=C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$（斯特林公式），则

$$G_{00}=\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)}=+\infty \tag{146}$$

   这说明0是常返的，而$d=1$时简单随机游动不可约，从而所有点都是常返的。

2. $d=2$时，$p_{00}^{(2n-1)}=0$，

$$p_{00}^{(2n)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(2n)!}{(i!)^2((n-i)!)^2}\frac{1}{4^{2n}} \tag{147}$$
$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(i!(n-i)!)^2}\frac{1}{4^{2n}} \tag{148}$$
$$= C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_n^iC_n^{n-i}\frac{1}{4^{2n}} = (C_{2n}^n)^2\frac{1}{4^{2n}} \sim \frac{1}{\pi n} \tag{149}$$

从而

$$G_{00} = \sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{2n} = +\infty \tag{150}$$

这说明0是常返的，而$d=2$时简单随机游动也不可约，从而所有点都是常返的。

3. $d=3$时，$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{3\sqrt{3}}{2(\pi n)^{\frac{3}{2}}}$，收敛，即$G_{00}<+\infty$，0是暂态的。进而所有点都是暂态的。
4. 进一步地，当$d>3$时，所有格点都是暂态的。

例（Success Run）：$S=\{1,2,\cdots\}$，$p_{i\,i+1}=p_{i1}=\frac{1}{2}$，$i\in S$。

显然这一马氏链是不可约的。因此只需考察状态1是否常返。

有$f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}$，$f_{11}^{(2)}=\frac{1}{4}$，$\cdots$，$f_{11}^{(n)}=\frac{1}{2^n}$。从而$G_{11}=\sum_{i=1}^{\infty}f_{11}^{(i)}=1$，也即状态1是常返的。从而$\forall i\in S$，$i$都是常返的。

记$S_m(j)=\sum_{n=m}^{\infty}\mathit{1}_{\{X_n=j\}}$，记

$$g_{ij}=P(S_1(j)=+\infty|X_0=i)=P(S_{m+1}(j)=+\infty|X_m=j) \tag{151}$$

定理3.3.3：$\forall i\in S$，$g_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & j\text{常返} \\ 0, & j\text{暂态}\end{cases}$

证明：$\{S_1(j)=+\infty\}=\cap_{k=1}^{\infty}\{S_1(j)\ge k\}$，则

$$g_{ij}=P_i(S_1(j)=+\infty|X_0=i)=\lim_{k\to\infty}P_i(S_1(j)\ge k|X_0=i) \tag{152}$$

而

$$P(S_1(j)\ge k+1|X_0=i) = P(\cup_{l=1}^{\infty}\{S_1(j)\ge k+1\},T_j=l|X_0=i) \tag{153}$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty}P(T_j=l|X_0=i)P(S_1(j)\ge k+1|T_j=l,X_0=i) \tag{154}$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty}f_{ij}^{(l)}P(S_{l+1}(j)\ge k|X_l=j) \tag{155}$$
$$= \sum_{l=1}f_{ij}^{(l)}P(S_1(j)\ge k|X_0=j) \tag{156}$$
$$= f_{ij}P(S_1(j)\ge k|X_0=j) \tag{157}$$
$$= f_{ij}f_{jj}P(S_1(j)\ge k-1|X_0=j) \tag{158}$$
$$= f_{ij}(f_{jj})^{k-1}P(S_1(j)\ge 1|X_0=j)=f_{ij}(f_{jj})^k \tag{159}$$

分类讨论j是否常返（f_{jj}是否为1），即知定理得证。

定理3.3.4：

1. i常返$\Leftrightarrow g_{ii}=1$（即$P_i(X_n=i,i.o.)=1$）
2. i暂态$\Leftrightarrow g_{ii}=0$（即$P_i(X_n=i,i.o.)=0$）

其中

$$\{X_n=i,i.o.\}=\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=n}^{\infty}\{X_m=i\} \tag{160}$$

i.o.表示infinitely often（也即不管从哪个n开始，都有$m\ge n$，$P(\{X_m=i|m\ge n\})=1$）。由定理3.3.3即得。

定理3.3.5：设j常返，则$\forall i\in S$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$，其中$\mu_j=E(T_j|X_0=j)$表示状态$j$的平均返回时间。

定理3.3.6：设i常返，周期d，则

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i} \tag{161}$$

其中$\mu_i=E_iT_i$表示i的平均回转时间。

定理3.3.7：设i常返，则

1. i零常返$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$
2. i遍历（正常返，非周期）$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

由定理3.3.6即得。

定理3.3.8：若i常返，且$i \to j$，则j必为常返状态，且$f_{ji} = 1$。

证明：有$0 \le g_{ij} \le f_{ij}$。由于$i \to j$，则$\exists m > 0$，使得$p_{ij}^{(m)} > 0$。则

$$\begin{aligned}
g_{ih} &\triangleq P(S_1(h) = +\infty | X_0 = i) && (162)\\
&= P(\cup_{k\in S}\{S_1(h) = +\infty, X_m = k | X_0 = i\}) && (163)\\
&= \sum_{k\in S} P(X_m = k | X_0 = i) P(S_{m+1}(h) = +\infty | X_m = k) && (164)\\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} g_{kh} && (165)
\end{aligned}$$

而i是常返的，从而$f_{ii} = g_{ii} = 1$，从而

$$\begin{aligned}
0 = 1 - g_{ii} &= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} - \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} g_{ki} && (166)\\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} (1 - g_{ki}) \ge p_{ij}^{(m)} (1 - g_{ji}) \ge 0 && (167)
\end{aligned}$$

从而$g_{ji} = 1$。所以$f_{ji} = 1$。进而$j \to i$，i, j互通，则j也是常返的。

定理3.3.9：若$i \Leftrightarrow j$，则

1. i与j同为常返/暂态；若都为常返态，则同为正常返或同为零常返。
2. i与j有相同周期，或同为非周期。

证明：

1. 考虑1。假设j为零常返，则由定理3.3.7，有$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$。设存在$r > 0$，$s > 0$，使得$p_{ij}^s > 0$，$p_{ji}^r > 0$，而$p_{jj}^{(n+r+s)} \ge p_{ji}^r p_{ii}^n p_{ij}^s \to 0$。从而$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，也即$i$也是零常返的。由于$i$，$j$地位等同，因此$i$，$j$同为零常返或同为正常返。
2. 考虑2，要证$d_i = d_j$，由于i, j地位等同，只需证$d_i | d_j$。设存在$r > 0$，$s > 0$，使得$p_{ij}^s > 0$，$p_{ji}^r > 0$。则$p_{ii}^{(r+s)} \ge p_{ij}^{(s)} p_{ji}^{(r)} > 0$。有

   $$p_{ii}^{(r+s+n)} \ge p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(r)} \tag{168}$$

   $\forall n$使得$p_{jj}^{(n)} > 0$，有$p_{ii}^{(r+s+n)} > 0$，则$d_i | (r+s+n)$，而$d_i | r+s$，所以$d_i | n$，从而$d_i | d_j$，得证。

定理3.3.10：下列命题等价：

1. i为常返状态
2. $P\{\cup_{n=1}^{\infty}(X_n = i) | X_0 = i\} = 1$
3. $P(S_1(i) = +\infty | X_0 = i) = 1$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$
5. $E\{S_1(i) | X_0 = i\} = +\infty$

3.4 状态空间分解

定义3.4.1：设$C \subset S$，若$\forall i \in C$，$j \notin C$，均有$p_{ij} = 0$，则称C是马氏链$X(\mathbb{P})$的**闭集**。若闭集C中状态是互通的，则称C是**不可约的**。

引理：C是闭集$\Longleftrightarrow \forall i \in C, j \notin C$，有$p_{ij}^{(n)} = 0$，$\forall n \ge 1$。

定理：所有常返状态构成一个闭集。

证明：假设$C = \{\text{常返态构成的集合}\}$。若$i \in C$，说明i是常返态。若$i \to j$，则$j \to i$且j是常返态，即$j \in C$。从而C是闭集（因为i出发只能到达常返态，不能到达暂态）。

推论：不可约的马氏链或者**所有状态常返**或者**所有状态暂态**。

定理3.4.2：设$C = \{\text{常返态}\} \ne \phi$，则$C$可分为若干互不相交的闭集的并$C = \cup\{C_h\}$。且$\forall h$：

1. C_h中任两个状态互通
2. $C_h \cap C_l = \phi$，$\forall l \ne h$

证：因$C \ne \phi$，任取$i_1 \in C$，令$C_1 = \{i : i \leftrightarrow i_1\}$。若$C/C_1 = \phi$，则结束。否则，对$C/C_1$反复进行如上过程即可。

记$T = \{\text{所有非常返状态}\}$。注意：T不一定是闭集。

推论：$S=T\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_h\cup\cdots$，每个$C_h$是互通常返类。

定理：若S是有限集，则T一定不是闭集。

推论：有限状态不可约的马氏链一定有常返态，从而一定是常返的。

命题：假设$C_h\in S$是闭集，将$\mathbb{P}^{(n)}=\mathbb{P}^n$限制在$C$上是随机阵（行和为1）。

3.5 $\mathbb{P}^{(n)}$极限与不变分布（平稳分布）

设马氏链（MCX）$X=\{X_n:n\geq 0\}$，$X_0\sim\pi(0)$，考虑$X_n\sim\pi(0)\mathbb{P}^n$。

1.$\mathbb{P}^n$极限

即考虑$p_{ij}^{(n)}$的极限$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$

1. j暂态或零常返。

   定理：若j为暂态或零常返，则$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，$\forall i\in S$。

   如果j为暂态，则$G_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<+\infty$，从而$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

   如果j为零常返，则$\lim_{n\to\infty}p_{jj}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_j}=0$。从而$\lim_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=0$（当$d$不整除$n$时，$p_{jj}^{(n)}=0$）。

   另一方面，取$m<n$，有

   $$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}=\sum_{l=1}^{m}f_{ij}^{(l)}p_{ij}^{(n-l)}+\sum_{l=m+1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{ij}^{(n-l)}\tag{169}$$

   令$n\to\infty$，有

   $$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=m+1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{ij}^{(n-l)}\leq\sum_{l=m+1}^{n}f_{ij}^{(l)}\tag{170}$$

   再令$m\to\infty$，有$\lim_{m\to\infty}\sum_{l=m+1}^{n}f_{ij}^{(l)}=0$，从而$\lim_{n\to}p_{ij}^{(n)}=0$。（本质上找到了一个上极限）

   推论1：有限状态马氏链没有零常返态。

   证明：假设i是一个零常返态，令$C_i=\{j:j\leftrightarrow i\}$。则$\sum_{j\in C_i}p_{ij}^{(n)}=1$，令$n\to\infty$，即知矛盾。

   推论2：有限状态不可约马氏链正常返。

   推论3：若MC有一个零常返态，则必有无穷多个零常返态。

2. j正常返。$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$可能不存在；存在时，可能与$i$有关。

   定理3.5.2：若j正常返，周期是d，则$\forall i\in S$，及$0\leq r\leq d-1$，有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd+r)}=f_{ij}^{(r)}\frac{d}{\mu_j}$。其中$\mu_j$是状态$j$的平均返回时间。$f_{ij}^{(r)}=\sum_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md+r)}$。（$f_{ij}^{(0)}=0$）

   推论1：若j是遍历状态（正常返，非周期），则$\forall i\in S$，有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$。

   推论2：对不可约遍历链，则$\forall i,j\in S$，$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}$。

   定理：若j常返，则$\forall i\in S$，有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ij}^{(l)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$。

   推论：若不可约马氏链常返，则$\forall i,j\in S$，有

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}\tag{171}$$

定理3.5.4：若MC不可约正常返（非周期），则$\left(\pi_i=\frac{1}{\mu_i}\right)_{i\in S}$是方程组

$$x_j=\sum_{i\in S}x_ip_{ij}\tag{172}$$

在$x_i\geq 0$，$\forall i\in S$，及$\sum_{i\in S}x_i=1$条件下的唯一解。

证明：记$\pi_i=\frac{1}{\mu_i}$，由定理3.5.2推论2有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}=\pi_j$。下先证$\sum_{i\in S}\pi_i\leq 1$。

固定M,n，有

$$1=\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}\geq\sum_{j=1}^{M}p_{ij}^{(n)}\tag{173}$$

另$n\to\infty$，有

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^{M} \pi_j \tag{174}$$

再令$M \to \infty$，则$\sum_{i\in S} \pi_i \leq 1$。再证$\Pi\mathbb{P} \leq \Pi$。有

$$\sum_{l=1}^{M} p_{il}^{(n)} p_{lj} \leq p_{ij}^{n+1} \tag{175}$$

令$n \to \infty$，则

$$\sum_{l=1}^{M} \pi_l p_{lj} \leq \pi_j \tag{176}$$

再令$M \to \infty$，则$\sum_{l\in S} \pi_l p_{lj} \leq \pi_j$，即$\Pi\mathbb{P} \leq \Pi$。下再证$\Pi\mathbb{P} = \Pi$。

若存在$j_0 \in S$，使得$\sum_{l\in S} \pi_l p_{lj_0} < \pi_{j_0}$，则

$$\sum_{j\in S} \pi_j > \sum_{j\in S}\sum_{l\in S} \pi_l p_{lj} = \sum_{l\in S} \pi_l \sum_{j\in S} p_{lj} = \sum_{l\in S} \pi_l \tag{177}$$

矛盾。从而$\forall j \in S$，$\sum_{l\in S} \pi_l p_{lj} = \pi_j$。从而$\Pi\mathbb{P} = \Pi$。

下证$\sum_{i\in S} \pi_i = 1$。由上由$\Pi\mathbb{P}^n = \Pi$。也即$\forall j \in S$，$n \geq 1$，有

$$\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j \tag{178}$$

而$\sum_{i\in S} \pi_i \leq 1$，$p_{ij}^{(n)} \leq 1$，则由控制（有限）收敛定理（逐项取极限）：

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = (\sum_{i\in S} \pi_i)\pi_j \tag{179}$$

而$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0$，因此$\sum_{i\in S} \pi_i = 1$。综上，可以知道$\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$是该方程的一组满足条件的解。

最后证明唯一性。若$V = (v_i)_{i\in S}$是该方程满足条件的另一组解，则$V\mathbb{P} = V$，$V\mathbb{P}^n = V$。即

$$\sum_{i\in S} v_i p_{ij}^{(n)} = v_j \tag{180}$$

同样由控制收敛定理，有

$$v_j = \sum_{i\in S} v_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \sum_{j\in S} v_i = \pi_j \tag{181}$$

从而$V = \Pi$，则唯一性得证。综上，原命题得证。

接note8

3.5 $\mathbb{P}^{(n)}$极限与不变分布（平稳分布）

2.不变分布（平稳分布）

定义：若S上概率分布$\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$满足$\Pi\mathbb{P} = \Pi$，即$\sum_{k\in S} \pi_k p_{ki} = \pi_i$，$\forall i \in S$，则称$\Pi$是$X(\mathbb{P})$的不变分布（平稳分布）。

1. **不变分布**：若$X_0 \sim \Pi$，则$X_n \sim \Pi\mathbb{P}^n = \Pi$，不变。
2. **平稳分布**：

   定义：若随机过程$X = \{X_t : t \in T\}$满足任给$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，及$s > 0$，则

$$\begin{gathered}(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (X_{s+t_1}, X_{s+t_2} + \cdots + X_{s+t_n}) \\ \Longleftrightarrow f(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) \overset{d}{=} f(X_{s+t_1}, X_{s+t_2} + \cdots + X_{s+t_n}) \\ \text{其中} \overset{d}{=} \text{表示同分布}\end{gathered} \tag{182}$$

   则称X是（严）平稳过程。这相当于X与$\tilde{X} \triangleq \{X_{s+t} : t \in T\}$同分布。

   定理3.5.5：时齐马氏链HMC $X = \{X_n : n \geq 0\}$是**平稳过程**$\Leftrightarrow$ X的初始分布X_0是不变分布，即$\Pi(0)$。

   证明：必要性显然。下证明充分性。则有$\Pi(0)\mathbb{P} = \Pi(0) \Rightarrow \Pi(0)\mathbb{P}^n = \Pi(0)$，即$X_n \sim \Pi(0)\mathbb{P}^n = \Pi(0)$。$\forall 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_m$，$i_1, i_2, \cdots, i_m \in S$，$n > 0$，则

$$P(X_{n_1}=i_1,X_{n_2}=i_2,\cdots,X_{n_m}=i_m) = P(X_{n_1}=i_1)p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{m-1}i_m}^{(n_m-n_{m-1})} \tag{183}$$
$$= \pi_{i_1}(0)p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{m-1}i_m}^{(n_m-n_{m-1})} \tag{184}$$
$$= P(X_{n_1+n}=i_1)p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{m-1}i_m}^{(n_m-n_{m-1})} \tag{185}$$
$$= P(X_{n_1+n}=i_1,X_{n_2+n}=i_2,\cdots,X_{n_m+n}=i_m) \tag{186}$$

即X是平稳过程。

定理5.5.6：不可约遍历链有唯一的不变分布$\Pi=(\pi_i=\frac{1}{\mu_i})_{i\in S}$，且$\lim_{n\to\infty}p_{ij}=\pi_j$，$\forall i,j\in S$。

例：$S=\{1,2\}$，$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$，$\alpha,\beta>0$，求$\mathbb{P}$的不变分布。

待定系数法，结合$\pi_1+\pi_2=1$，求出$\Pi=\begin{pmatrix}\frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta}\end{pmatrix}$。（注意，有$rank(I-\mathbb{P})=n-1$，因此必须要结合$\sum_{\pi_i}=1$来求解）

例：带两反射壁马氏链，$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$，$p_i(向右),q_i(向左)>0$，$p_i+q_i=1$，其不可约、正常返，因此存在唯一不变分布。

则$\pi_1q_1=\pi_0$，$\pi_{n-1}p_{n-1}=\pi_n$。，此外，有$\forall 1\le i\le N-1$，
$\pi_{i-1}p_{i-1}+\pi_{i+1}q_{i+1}=\pi_i\Leftrightarrow\pi_{i+1}q_{i+1}-\pi_ip_i=\pi_iq_i-\pi_{i-1}p_{i-1}=\cdots=\pi_1q_1-\pi_0p_{i0}=0$。所以

$$\pi_{i+1}=\pi_i\frac{p_i}{q_{i+1}}=\frac{\prod_{j=0}^{i}p_j}{\prod_{j=1}^{i+1}q_j}\pi_0 \tag{187}$$

从而

$$1=\sum_{i=0}^{N}\pi_i=\pi_0(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=0}^{i-1}p_j}{\prod_{j=1}^{i}q_j})\Longrightarrow\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{j=0}^{i-1}p_j}{\prod_{j=1}^{i}q_j}} \tag{188}$$

带入即得各个π_i。

例：在0点有反射壁的生灭链，$S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{Z}^+$。$p_i(向右),q_i(向左)>0$，$p_i+q_i=1$。

若其存在不变分布Π，则Π满足$\Pi\mathbb{P}=\Pi$，且$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1$。与上同理，依然有$\pi_{i+1}=\pi_i\frac{p_i}{q_{i+1}}=\frac{\prod_{j=0}^{i}p_j}{\prod_{j=1}^{i+1}q_j}\pi_0$。

则

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=\pi_0\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{i}p_i}{\prod_{j=1}^{i+1}q_j}\right) \tag{189}$$

故该生灭链正常返$\Longleftrightarrow$该生灭链有不变分布$\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{i}p_i}{\prod_{j=1}^{i+1}q_j}<\infty$。

定理：令$C_+=\{全体正常返态\}$，则

1. 平稳分布存在$\Leftrightarrow C_+\neq\phi$。
2. 平稳分布唯一存在$\Leftrightarrow C_+$只有一个正常返互通类，$C_+=C_a$。
3. 有限状态时齐马氏链平稳分布总存在。
4. 有限状态不可约（非周期）马氏链平稳分布存在且唯一。

证明：

1. “$\Rightarrow$”：设MC有不变分布$\Pi\neq\mathbf{0}$，则$\Pi\mathbb{P}=\Pi$。若$C_+=\phi$，即所有的状态均为零常返或暂态，则$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)=0}$，从而$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^n=\mathbf{0}$，对$\Pi\mathbb{P}^n=\Pi$两边取极限即知矛盾。

   “$\Leftarrow$”：有$C_+\neq\phi$，则C_+包含一个正常返态所在的互通类C，则在C上在不变分布Π_1，使得$\Pi_1\mathbb{P}|_C=\Pi_1$。令$\Pi=(\Pi_1,\mathbf{0})$，则$\Pi\mathbb{P}=(\Pi_1\ 0)\begin{pmatrix}\mathbb{P}_C & 0\\ \star & \star\end{pmatrix}=\Pi$，从而$\Pi$是一个平稳分布。
2. “$\Rightarrow$”：反证即得。
3. 由有限状态马氏链一定有一个正常返互通类即得。
4. 有限状态不可约马氏链一定是一个正常返互通类，即得。

3.$\lim_{n\to\infty}\pi(n)$

定义：若$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n)=\pi_j^*$存在，则称$\Pi^*=(\pi_j^*)_{j\in S}$是$X$的极限分布。

定理：非周期不可约马氏链X正常返$\Longleftrightarrow$其不变分布存在，此时不变分布就是极限分布。

证明：“$\Leftarrow$”设X有不变分布$\Pi=(\pi_i)_{i\in S}$，则存在$i_0\in S$，使得$\pi_{i_0}>0$。则有

$$\sum_{k\in S}\pi_kp_{k_{i_0}}^{(n)}=\pi_{i_0} \tag{190}$$

从而

$$0<\pi_{i_0}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in S}\pi_k p_{k i_0}^{(n)}=\sum_{k\in S}\pi_k\lim_{n\to\infty}p_{k i_0}^{(n)}=\sum_{k\in S}\pi_k\frac{1}{\mu_{i_0}}=\frac{1}{\mu_{i_0}} \tag{191}$$

也即

$$\mu_{i_0}<+\infty \tag{192}$$

从而i_0正常返，进一步X正常返。

“⇒”有X是遍历链，则$\pi_j=\frac{1}{\mu_j}=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$。此外，

$$\Pi(n)=\Pi(0)\mathbb{P}^n \tag{193}$$

从而

$$\begin{aligned}\pi_i(n)&=\sum_{k\in S}\pi_k(0)p_{ki}^{(n)}\\ \lim_{n\to\infty}\pi_i(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in S}\pi_k(0)p_{ki}^{(n)}&=\sum_{k\in S}\pi_k(0)\lim_{n\to\infty}p_{ki}^{(n)}=\sum_{k\in S}\pi_k(0)\pi_i=\pi_i\end{aligned} \tag{194}$$

注意，这里初始分布$\pi(0)$不一定是平稳分布/极限分布！

遍历定理：

1. 设$\mathbb{P}$不可约，则$\forall i\in S$及初始分布μ，有

$$P_\mu\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1_{X_k=i}=\frac{1}{E_iT_i}\right)=1 \tag{195}$$

2. 设$\mathbb{P}$不可约，正常返，f是S上的有界函数，对任意初始分布μ，则

$$P_\mu\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=\sum_{i\in S}\pi_i f(i)\right)=1 \tag{196}$$

第二章 泊松过程及其推广

2.0 独立增量过程

定义：若随机过程$X=\{X_t:t\in T\}$，T可以是离散或连续的，满足$\forall s_1<t_1\le s_2<t_2\le\cdots\le s_n<t_n$，$X_{t_1}-X_{s_1}$，$X_{t_2}-X_{s_2}$，$\cdots$，$X_{t_n}-X_{s_n}$相互独立，则称$X$是**独立增量过程**。

若$\forall t\in T$，$s>0$，若$X_{t+s}-X_t$分布不依赖于t，则称X有**平稳增量**。（类似于**时齐**）

若X是有平稳增量的独立增量过程，则称X是**独立平稳增量过程**。

例：（紧邻随机游动，**独立同分布序列和**）设$\{\xi_n:n\ge 1\}$，是一个独立同分布序列，$P(\xi_n=1)=p$，$P(\xi_n=-1)=q=1-p$，X_0为取整数值的随机变量与$\{\xi_n:n\ge 1\}$独立。$X_n=X_0+\sum_{k=1}^n\xi_k$，$\forall n\ge 1$，则

$$\{X_n:n\ge 1\} \tag{197}$$

是独立平稳增量过程。

2.1定义与背景

> 1874 Poisson

若N_t表示$[0,t]$内某事件发生次数，则$\{N_t:t\ge 0\}$称为**计数过程**。N_t满足如下性质：

1. $N_t\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$
2. $0\le s<t$，N_t-N_s表示$(s,t]$内事件发生次数。

定义：若计数过程$N=\{N_t:t\ge 0\}$满足：

1. $N_0=0$
2. N有**独立增量性**，即$\forall 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，$N_{t_1},N_{t_2}-N_{t_1},\cdots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$相互独立
3. $\forall s\ge 0$，$t>0$，$N_{s+t}-N_s\sim\mathcal{P}(\lambda t)$，即

$$P(N_{s+t}-N_s=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{198}$$

服从一个参数为λt的泊松过程。

则称N是具有强度参数为λ的（时齐）泊松过程。

> $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$，则$E\frac{N_t}{t}=\lambda$，表示单位时间内的发生次数。因此$\lambda$被称为强度参数。

定义：计数过程$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda) \iff N$是零初值独立平稳增量过程，且具有普通性（简单性）：

$$\begin{gathered}P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda h+o(h)\quad(h\downarrow 0)\\ P(N_{t+h}-N_t\geq 2)=o(h)\quad(h\downarrow 0)\\ \text{从而}P(N_{t+h}-N_t=0)=1-\lambda h+o(h)\quad(h\downarrow 0)\end{gathered}\tag{199}$$

这里$PP(\lambda)$表示一个强度参数为λ的泊松过程（Poisson Process，PP）。

证明：

“$\Rightarrow$”：直接验证即可。

“$\Leftarrow$”：只需证明增量$N_{s+t}-N_s\sim\mathcal{P}(\lambda t)$。即求$p_n(t)=P(N_{s+t}-N_s=n)$，$n\geq 0$。

1. $n=0$，则

$$\begin{aligned}p_0(t+h)=&P(N_{t+h}=0)=P(N_t=0,N_{t+h}-N_t=0)&(200)\\ =&P(N_t=0)P(N_{t+h}-N_t=0)&(201)\\ =&p_0(t)(1-\lambda h+o(h))\quad(h\downarrow 0)&(202)\end{aligned}$$

从而考虑右导数（左导数同理）

$$p_0^{'}(t)=\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=\frac{-\lambda hp_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t),\quad\text{及}p_0(0)=P(N_0=0)=1\tag{203}$$

解得

$$p_0(t)=e^{-\lambda t}\tag{204}$$

2. $n\geq 1$，则

$$\begin{aligned}\{N_{t+h=n}\}=&\cup_{k=0}^{n}\{N_t=k,N_{t+h}-N_t=n-k\}&(205)\\ =&\{N_t=0,N_{t+h}-N_t=n\}\cup\{N_t=1,N_{t+h}-N_t=n-1\}&(206)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}p_n(t+h)=&P(N_{t+h}=n)=P(N_t=n,N_{t+h}-N_t=0)+P(N_t=n-1,N_{t+h}-N_t=1)+o(h)&(207)\\ =&P(N_t=n)P(N_{t+h}-N_t=0)+P(N_t=n-1)P(N_{t+h}-N_t=1)+o(h)&(208)\\ =&p_n(t)(1-\lambda h+o(h))+p_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)&(209)\end{aligned}$$

所以：

$$p_n^{'}(t+h)=\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}=\frac{-\lambda hp_n(t)+p_{n-1}(t)(\lambda h)}{h}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)\tag{210}$$

以及初始条件$p_n(0)=P(N_0=n)=0$。由数学归纳法可得：

$$p_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\tag{211}$$

从而$N_t\sim\mathcal{P}(\lambda t)$。得证。

> 直观理解，考虑二项分布$\mathcal{B}(n,p_n)$，有$\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$，即
>
> $$C_n^kp_n^k(1-p_n)^{n-k}\xrightarrow{d}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\tag{212}$$
>
> 即二项分布依分布收敛到泊松分布。

2.2相邻事件时间间隔，简单呼唤流

$N=\{N_t:t\geq 0\}$是一个计数过程，令$S_0\triangleq 0$，$S_n=\inf\{t\geq 0:N_t\geq n\}$表示第$n$次事件发生的时刻（$\inf$表示inferior，代表下界）。$X_n\triangleq S_n-S_{n-1}$，$\forall n\geq 1$。有$\{S_n\leq t\}=\{N_t\geq n\}$，及$\{N_t=n\}=\{S_n\leq t,S_{n+1}>t\}$，设$N\sim\mathcal{P}(\lambda)$

$$\begin{aligned}P(S_n\leq t)=&P(N_t\geq n)=1-P(N_t\leq n-1)&(213)\\ =&\begin{cases}1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}&(214)\end{aligned}$$

求出S_n的概率密度

$$f_{S_n}(t)=\frac{\lambda n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}1_{t\geq 0}\tag{215}$$

所以$S_n\sim\Gamma(n,\lambda)$（Erlang分布）。特别地，$X_1=S_1\sim\Gamma(1,\lambda)=\epsilon(\lambda)$为指数分布。

定理2.2.1：计数过程$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda)\iff\{X_n:n\geq 1\}$是独立同分布的随机过程，且$X_1\sim\epsilon(\lambda)$（指数分布），此时，称$\{S_n:n\geq 1\}$为简单呼唤流。

证明：“$\Rightarrow$”：先求$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的联合分布：

$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，取充分小的$h$，使得$t_1-\frac{h}{2}<t_1<t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<t_2<\cdots<t_n-\frac{h}{2}<t_n$。考虑

$$
\begin{aligned}
&P(t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}) &(216)\\
=&P(N_{t_1-\frac{h}{2}}=0,N_{t_1+\frac{h}{2}}-N_{t_1-\frac{h}{2}}=1,N_{t_2-\frac{h}{2}}-N_{t_1+\frac{h}{2}}=0,N_{t_2+\frac{h}{2}}-N_{t_2-\frac{h}{2}}=1,\cdots, &(217)\\
&N_{t_n-\frac{h}{2}}-N_{t_{n-1}+\frac{h}{2}}=0,N_{t_n+\frac{h}{2}}-N_{t_n-\frac{h}{2}}\ge 1) &(218)\\
=&P(N_{t_1-\frac{h}{2}}=0)P(N_{t_1+\frac{h}{2}}-N_{t_1-\frac{h}{2}}=1)P(N_{t_2-\frac{h}{2}}-N_{t_1+\frac{h}{2}}=0)P(N_{t_2+\frac{h}{2}}-N_{t_2-\frac{h}{2}}=1)\cdots &(219)\\
&P(N_{t_n-\frac{h}{2}}-N_{t_{n-1}+\frac{h}{2}}=0)P(N_{t_n+\frac{h}{2}}-N_{t_n-\frac{h}{2}}\ge 1) &(220)\\
=&e^{-\lambda(t_1-\frac{h}{2})}\cdot\lambda he^{-\lambda h}e^{-\lambda(t_2-t_1-h)}\lambda he^{-\lambda h}\cdots e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-h)}(1-e^{-\lambda h}) &(221)\\
=&(\lambda h)^n e^{-\lambda(t+\frac{h}{2})}+o(h^n) &(222)
\end{aligned}
$$

所以$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的联合概率密度$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n},0<t_1<t_2<\cdots<t_n\\0,otherwise\end{cases}$。而$X_n=S_n-S_{n-1}$，$n\ge 1$。

$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$。

从$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$到$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的线性变换矩阵

$$
P=\begin{pmatrix}1\\1&1\\1&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},\quad S=PX \tag{223}
$$

从而有$\det(P)=1$。

因此$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots x_n)}\cdot\det(P)=\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots x_n)}, & x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0\\0, & otherwise\end{cases} \tag{224}
$$

进一步

$$
x_k\text{边缘密度}f_k(x_k)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_k}, & x_k>0\\0, & otherwise\end{cases}\sim\epsilon(\lambda) \tag{225}
$$

也即$\{X_n:n\ge 1\}$是一个独立同分布的随机变量序列，且$X_1\sim\epsilon(\lambda)$。

2.2.1泊松过程汇合与分流

（汇合）定理：设$N^{(1)}=\{N_t^{(1)}:t\ge 0\}\sim PP(\lambda_1)$，$N^{(2)}=\{N_t^{(2)}:t\ge 0\}\sim PP(\lambda_2)$相互独立，令$N_t=N_t^{(1)}+N_t^{(2)}$，则$\{N_t:t\ge 0\}\sim PP(\lambda_1+\lambda_2)$。（考虑两个泊松分布的和，其仍然遵循泊松分布）

（分流）定理：设$N=\{N_t:t\ge 0\}\sim PP(\lambda)$，$\{\xi_n:n\ge 1\}$是一个独立同分布的随机变量序列与$N$独立。且

$$
P(\xi_n=1)=p,P(\xi_n=0)=q=1-p \tag{226}
$$

令$N_t^{(1)}=\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k$，$N_t^{(2)}=\sum_{k=1}^{N_t}(1-\xi_k)$，则

$$
N_t^{(1)}\sim PP(\lambda p),\quad N_t^{(2)}\sim PP(\lambda q) \tag{227}
$$

且$N_t^{(1)}$与$N_t^{(2)}$是独立的。实际上汇合与分流可以推广到n条线路的情况。

2.3剩余寿命与年龄

$N_t=[0,t]$当中事件发生次数（更换次数）。$S_n=$第n次事件发生的时刻（第n次更换发生的时刻）。

定义$W_t=S_{N_t+1}-t$表示t时刻部件的剩余寿命。$V_t=t-S_{N_t}$表示t时刻时部件的年龄（已使用的时间）。

定理2.3.1：设$N=\{N_t:t\ge 0\}\sim PP(\lambda)$，则

1. $W_t\sim\epsilon(\lambda)$
2. V_t服从“**截尾**”的指数分布即

$$
P(V_t\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 0\le x<t\\1, & x\ge t\end{cases} \tag{228}
$$

证明：考虑$\{W_t>x\}=\{N_{t+x}-N_t=0\}$。所以

$$
P(W_t>x)=P(N_{t+x}-N_t=0)=e^{-\lambda x},\quad x>0 \tag{229}
$$

所以

$$
P(W_t\le x)=1-e^{-\lambda x} \tag{230}
$$

此即为指数分布的累积概率密度函数。所以$W_t \sim \epsilon(\lambda)$。

接note10

引理：若非负随机变量列$\{X_n : n \geq 1\}$独立同分布$X_i \sim F(x)$，则$\forall x \geq 0$，$t \geq 0$，有

$$P(W_t > x) = 1 - F(x+t) + \int_0^t P(W_{t-u} > x) dF(u) \tag{231}$$

证明：由全概率公式，

$$\begin{aligned} P(W_t > x) =& E(P(W_t > x | X_1)) && (232) \\ =& \int_0^\infty P(W_t > x | X_1 = s) dF(s) && (233) \end{aligned}$$

则

1. 当$s > t + x$时，$P(W_t > x | X_1 = s) = 1$。
2. 当$t < s \leq t + x$时，$P(W_t > x | X_1 = s)$，$P(W_t > x | X_1 = s) = 0$。
3. 当$s \leq t$时，有

$$\begin{aligned} P(W_t > x | X_1 = s) =& P(S_{N_t+1} - t > x | X_1 = s) && (234) \\ =& P(\sum_{j=1}^{N_t+1} X_j - t > x | X_1 = s) && (235) \\ =& P(\sum_{j=2}^{N_t+1} X_j - (t-s) > x | X_1 = s) && (236) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, N_t = m | X_1 = s) && (237) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, S_m \leq t < S_{m+1} | X_1 = s) && (238) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, \sum_{j=2}^{m} X_j \leq t - s < \sum_{j=2}^{m+1} X_j) && (239) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m - (t-s) > x, S_{m-1} \leq t - s < S_m) \quad (\sum_{j=2}^{m+1} X_j \overset{d}{=} S_m, \sum_{j=2}^{m} X_j \overset{d}{=} S_{m-1}) && (240) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m - (t-s) > x, N_{t-s} = m - 1) && (241) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty} P(S_{N_{t-s}+1} - (t-s) > x, N_{t-s} = m - 1) = P(W_{t-s} > x) && (242) \end{aligned}$$

所以

$$P(W_t > x) = \int_{t+x}^{\infty} 1 \cdot dF(s) + \int_0^t P(W_{t-s} > x) dF(s) = 1 - F(t+x) + \int_0^t P(W_{t-s} > x) dF(s) \tag{243}$$

得证。

定理：若$\{X_n : n \geq 1\}$ i.i.d非负，$\forall t \geq 0$，$W_t \overset{d}{=} X_1 \sim F(x)$，且$F(0) = 0$，则由此定义出的计数过程$\{N_t : t \geq 1\}$为一个泊松过程。

证明：记$G(x) = 1 - F(x) = P(W_t > x)$，为生存函数。由引理，有

$$G(x) = G(t+x) + \int_0^t G(x) dF(s) = G(t+x) + G(x)F(t) \tag{244}$$

得到

$$G(t+x) = G(x)G(t) \tag{245}$$

而G非增右连续，得到（证明过程：有理数$\frac{1}{n} \to \frac{m}{n} \to$无理数）

$$G(x) = G(1)^x \tag{246}$$

令$\lambda = -\ln G(1) > 0$，则$G(x) = e^{-\lambda x}$。从而$X_1 \sim \epsilon(\lambda)$。从而$\{N_t\}$是一个泊松过程。

2.4到达时间的条件分布

到达时间的条件分布，指已知$N_t=n$条件下，$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的条件分布。

定理：设$N=\{N_t:t\geq 1\}\sim PP(\lambda)$，则$\forall 0<s<t$，有

$$P(X_1\leq s|N_t=1)=\frac{s}{t} \tag{247}$$

从而$X_1|_{N_t=1}\sim U[0,t]$为一个均匀分布。

证明：

$$\begin{aligned}
P(X_1\leq s|N_t=1)=&\frac{P(X_1\leq s,N_t=1)}{P(N_t=1)} &(248)\\
=&\frac{P(N_s=1,N_t-N_s=0)}{P(N_t=1)} &(249)\\
=&\frac{P(N_s=1)P(N_t-N_s=0)}{P(N_t=1)} &(250)\\
=&\frac{\lambda se^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda te^{-\lambda t}}=\frac{s}{t} &(251)
\end{aligned}$$

得证。

> 注：此时若想求概率密度函数，需要取一个足够小的h，并令事件$A=\{x<X_1<x+h\}$，求出$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P(A)}{h}$。

命题：设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ i.i.d，有公共概率密度f，将其从小到大排列，得到**次序统计量**$Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)}$。则其联合概率密度

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^n f(y_i), & y_1<y_2<\cdots<y_n\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{252}$$

若$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ i.i.d$\sim U(0,t)$，则其次序统计量的联合概率密度

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n}, & 0<y_1<y_2<\cdots<y_n\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{253}$$

定理：设$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda)$，则已知$N_t=n$的条件下，有

$$(S_1,S_2,\cdots,S_n)|_{N_t=n}\overset{d}{=}(Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)}) \tag{254}$$

其中$Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)}$是$n$个独立同分布且遵循均匀分布的随机变量序列$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$的次序统计量。

定理：设$N=\{N_t:t\geq 0\}$为计数过程，X_n为第n次与第$n-1$次事件间隔时间，且$\{X_n:n\geq 1\}$ i.i.d$\sim F(x)=P(X_1\leq x)$使得$F(0)=0$。$\forall 0\leq s\leq t$，有$P(X_1\leq s|N_t=1)=\frac{s}{t}$，则$N\sim PP(\lambda)$。

证明：由假定，$P(X_1\leq s|N_{s+x}=1)=\frac{s}{s+x}$，同样的有$P(X_1\leq x|N_{s+x}=1)=\frac{x}{s+x}$，则二者之和为1。有

$$\begin{aligned}
P(X_1\leq x|N_{s+x}=1)=&\frac{P(X_1\leq s,N_{s+x}=1)}{P(N_{s+x}=1)} &(255)\\
=&\frac{P(X_1\leq s,X_1\leq s+x<X_1+X_2)}{P(X_1\leq s+x<X_1+X_2)} &(256)
\end{aligned}$$

由全概率公式，

$$\begin{aligned}
P(X_1\leq s,X_1\leq s+x<X_1+X_2)=\int_0^s(1-F(s+x-u))dF(u)\\
P(X_1\leq s+x<X_1+X_2)=\int_0^{s+x}(1-F(s+x-u))dF(u)
\end{aligned} \tag{257}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^x(1-F(s+x-u))dF(u)+\int_0^s(1-F(s+x-u))dF(u)=\int_0^{s+x}(1-F(s+x-u))dF(u) &(258)\\
\Rightarrow&\int_0^s(1-F(s+x-u))dF(u)=\int_{(x,s+x]}(1-F(s+x-u))dF(u) &(259)
\end{aligned}$$

而由分部积分，

$$\begin{aligned}
-\int_{(x,s+x]}(1-F(s+x-u))dF(u)=&-F(s+x-u)F(u)|_x^{x+s}+\int_{(x,x+s]}F(u)dF(s+x-u) &(260)\\
(令v=s+x-u)\quad =&F(s)F(x)+\int_s^0F(s+x-v)dF(v) &(261)\\
=&F(s)F(x)-\int_0^sF(s+x-v)F(v) &(262)
\end{aligned}$$

从而得到

$$F(s)+F(x)=F(s+x)+F(s)F(x) \tag{263}$$

代入生存函数$G(x)=1-F(x)$，得

$$G(s+x)=G(s)G(x) \tag{264}$$

从而$G(x)\sim\epsilon(\lambda)$，进而$N\sim PP(\lambda)$，得证。

定理：设$N=\{N_t:t\geq 0\}$为计数过程，$\{X_n:n\geq 1\}$为间隔时间，独立同分布且分布函数F，使得$F(0)=0$，$EX_n<+\infty$，且$\forall n\geq 1$，$0<s<t$，$P(S_n\leq s|N_t=n)=(\frac{s}{t})^n$。则$N\sim PP(\lambda)$。

例：火车站，旅客按$PP(\lambda)$到达。t时刻车到站，所有旅客离开。考虑$[0,t]$时间内到达车站的旅客的总候车时间$S(t)$。求$ES(t)$。

解：第i个旅客的到达时刻S_i，其候车时间为$t-S_i$。则

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N_t}t-S_i \tag{265}$$

$$\begin{aligned}
E(S(t)|N_t=n)=&E(\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)|N_t=n) &(266)\\
=&nt-E(\sum_{i=1}^{n}S_i|N_t=n) &(267)\\
=&nt-E(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}) &(268)\\
=&nt-E(\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\frac{nt}{2} &(269)
\end{aligned}$$

从而

$$E(S(t)|N_t)=\frac{tN_t}{2} \tag{270}$$

$$E(S(t))=E(E(S(t)|N_t))=E(\frac{tN_t}{2})=\frac{\lambda t^2}{2} \tag{271}$$

2.7复合泊松过程

定义：设$\{Y_n:n\geq 1\}$，i.i.d，$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda)$且与$\{Y_n:n\geq 1\}$独立，$\forall t\geq 0$，令$X_t=\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$，则称$X=\{X_t:t\geq 0\}$为复合泊松过程（Compound Poisson Process）。

例：

1. 保险公司的事故险，N_t表示$[0,t]$时间内理赔申请数量，Y_i表示第i个理赔的赔偿金，X_t就表示$[0,t]$内总的赔偿金。
2. N表示粒子流，Y_i表示第i个粒子能量，X_t就表示$[0,t]$内粒子总的能量。

考虑EX_t，$VarX_t$。

有

$$\phi_t(u)=E\exp\{iuX_t\}=E(\exp\{iu\sum_{k=1}^{N_t}Y_k\}) \tag{272}$$

而

$$\begin{aligned}
E(\exp\{iu\sum_{k=1}^{N_t}Y_k\}|N_t=n)=&E(\exp\{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k\}) &(273)\\
=&(E\exp(iuY_1))^n\triangleq(\xi_{Y_1}(u))^n &(274)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\phi_t(u)=&E(E\exp\{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k\}|N_t) &(275)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}E(\exp\{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k\}|N_t=n)P(N_t=n) &(276)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\xi_{Y_1}(u)^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} &(277)\\
=&\exp(\lambda t(\xi_{Y_1}(u)-1)) &(278)
\end{aligned}$$

在$u=0$处求导，得

$$
\begin{aligned}
EX_t^k &= i^{-k}\phi_t^{(k)}(0) \\
EX_t &= i^{-1}\phi_t^{'}(0) = \lambda t EY_1 \\
EX_t^2 &= \lambda t EY_1^2 + (\lambda t)^2 (EY_1)^2 \\
VarX_t &= \lambda t (EY_1)^2
\end{aligned} \tag{279}
$$

2.9 更新过程

一个计数过程，若它们相邻事件到达的时间间隔X_n是指数分布，则此过程为**泊松流**。而当X_n是一般分布的时候，便称之为**更新过程**。

定义：设$\{X_n : n \geq 1\}$ i.i.d取非负值，分布函数$F(x)$使得$F(0) < 1$，令$S_0 = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$，$\forall n \geq 1$。$\forall t \geq 0$，$N_t \triangleq \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}$，则称$N = \{N_t : t \geq 0\}$为更新过程。

则有

$$
\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}, \quad \{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} \tag{280}
$$

考虑S_n的分布函数$F_n(x)$。有$S_1 = X_1 \sim F$。则

$$
F_n(x) = P(S_n \leq x) = P(S_{n-1} + X_n \leq x) = E(P(S_{n-1} + X_n \leq x | X_n)) \tag{281}
$$

$$
= \int_0^{\infty} P(S_{n-1} + X_n \leq x | X_n = u) dF(u) \tag{282}
$$

$$
= \int_0^{\infty} P(S_{n-1} \leq x - u) dF(u) \tag{283}
$$

$$
= \int_0^{\infty} F_{n-1}(x-u) dF(u) = F_{n-1} * F = (F^*)^n \quad \text{(指做}n\text{次卷积)} \tag{284}
$$

记$m(t) = EN_t$，称为更新函数。

定理：$\forall t \geq 0$，$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$。

证明：

$$
m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t = n) \tag{285}
$$

$$
= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P(N_t = n) \tag{286}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P(N_t = n) \tag{287}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t \geq k) \tag{288}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \tag{289}
$$

得证。

推论：$\forall t \geq 0$，$F(t) < 1$，有$m(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)}$。

证明：归纳可证明$F_n(t) \leq F(t)^n$。则$m(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(t)^n = \frac{F(t)}{1-F(t)}$。

定理：$\forall t \geq 0$，$m(t)$满足更新方程

$$
m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u) dF(u) \tag{290}
$$

证明：

$$
m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t F_{n-1}(t-u) dF(u) \tag{291}
$$

$$
= F(t) + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(t-u) dF(u) \tag{292}
$$

$$
= F(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t-u) dF(u) \tag{293}
$$

$$
= F(t) + \int_0^t m(t-u) dF(u) \tag{294}
$$

命题：$m(t)$与$F(t)$一一对应。（根据二者的拉普拉斯变换一一对应来证明）

> 有命题：$L[x(t) * g(t)] = L(x(t)) \cdot L(g(t)) = X(s)G(s)$，即卷积的拉普拉斯变换为拉普拉斯变换的乘积。
>
> 对上更新方程做Stieltjes 拉普拉斯变换，令

$$\begin{aligned}\tilde{m}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dm(t) \\ \tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t)\end{aligned} \tag{295}$$

则

$$\tilde{m}(s) = \tilde{F}(s) + \tilde{m}(s)\tilde{F}(s) \tag{296}$$

从而

$$\begin{cases}\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}(t)}{1-\tilde{F}(t)} \\ \tilde{F}(t) = \frac{\tilde{m}(t)}{1+\tilde{m}(t)}\end{cases} \tag{297}$$

这同时也说明$m(t)$与$F(t)$一一对应。

2.10 若干极限定理与基本更新过程

令$\mu = EX_n$，由$F(0) < 1$知$\mu > 0$。

由强大数定律，$P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu) = 1$。

命题：$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu$，a.s.

推论：$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$，a.s.；$\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu > 0\} \subset \{\lim_{n\to\infty} S_n \infty\}$。

推论：$\forall t \geq 0$，$m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t) < +\infty$。

证明：

1. $t = 0$，$m(t) \leq \frac{F(0)}{1-F(0)} < +\infty$。
2. $t > 0$，F_k非降，有

$$F_{n+m}(t) = F_n * F_m(t) = \int_0^t F_n(t-u) dF_m(u) \leq \int_0^t F_n(t) dF_m(u) = \int_0^t F_n(t)(F_m(t) - F_m(0)) \leq \int_0^t F_n(t) F_m(t) \tag{298}$$

对正整数r,

$$F_{nr+m}(t) \leq (F_r(t))^n F_m(t), \quad 1 \leq m \leq r \tag{299}$$

而$\forall t > 0$,

$$\{S_n \to \infty\} \subset \cup_{n=1}^\infty \{S_n > t\} \tag{300}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > t) = 1 \tag{301}$$

故$\exists$充分大$r \geq 1$，使得

$$P(S_r > t) \triangleq \beta > 0 \tag{302}$$

从而

$$F_r(t) = P(S_r \leq t) = 1 - \beta < 1 \tag{303}$$

进而

$$\begin{aligned} m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t) &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^r F_{nr+m}(t) && (304)\\ &\leq \sum_{n=0}^\infty (F_r(t))^n \sum_{m=1}^r F_m(t) && (305)\\ &\leq \sum_{n=0}^\infty (F_r(t))^n \sum_{m=1}^r (F(t))^n && (306)\\ &\leq \sum_{n=0}^\infty (F_r(t))^n \sum_{m=1}^r F(t) && (307)\\ &\leq rF(t) \frac{1}{1-F_r(t)} < +\infty && (308)\end{aligned}$$

证毕。

记$N_\infty = \lim_{t\to\infty} N_t$。

命题：$P(N_\infty = +\infty) = 1$。

证明：$\{N_\infty<+\infty\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{S_n=+\infty\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{X_n=+\infty\}$。从而

$$P(N_\infty<+\infty)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=+\infty)=0 \tag{309}$$

从而$P(N_\infty=+\infty)=1$。

命题2.10.3：$P(\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\frac{1}{\mu})=1$

证明：

记$A=\{\omega\in\Omega:N_\infty(\omega)=+\infty\}$，$B=\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}=\mu\}$

则有$P(A)=1$，$P(B)=1$，则$P(AB)=1$。

记$C=\{\omega\in\Omega:\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)}=\mu\}$，有$AB\subset C$，从而$P(C)=1$。

有$S_{N_t}\leq t<S_{N_t+1}$，从而

$$\frac{S_{N_t}}{N_t}\leq\frac{t}{N_t}<\frac{S_{N_t+1}}{N_t}=\frac{S_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t} \tag{310}$$

取极限，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{N_t}=\mu,\ \forall\omega\in C \tag{311}$$

因此$C\subset\{\omega\in\Omega:\lim_{t\to\infty}\frac{N_t(\omega)}{t}=\frac{1}{\mu}\}=D$，从而$P(D)=1$。

Wald等式：

定义：设$\{X_n:n\geq1\}$是一个随机变量序列，若取广义非负整值$(\mathbb{Z}^+\cup\{+\infty\})$，随机变量$T$满足$\forall n\geq0$，$\{T=n\}$由$X_1,X_2,\cdots,X_n$决定发生与否，即

$$1_{T=n}=f(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{312}$$

则称T为随机变量序列$\{X_n:n\geq1\}$的停时（Stopping Time）。（决定是否做/不做某件事）

例：设$\{X_n:n\geq\}$ i.i.d取整数值，如$P(X_n=1)=p$，$P(X_n=-1)=q=1-p$（紧邻随机游动）。$S_0=0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$\forall n\geq1$，$T_i=\inf\{n\geq0:S_n=i\}$。则T_i是$\{S_n:n\geq0\}$的停时，也是$\{X_n:n\geq0\}$的停时。

定理（Wald等式）设$\{X_n:n\geq1\}$i.i.d，$\mu=EX_n$存在有限，T关于$\{X_n:n\geq1\}$是停时，$ET<+\infty$，则$E\sum_{n=1}^{T}X_n=\mu ET$。

证明：令$S_T\triangleq\sum_{n=1}^{T}X_n$。先证明$E|S_T|<+\infty$。

$$S_T=\sum_{n=1}^{T}X_n=\sum_{n=1}^{\infty}1_{n\leq T}X_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|1_{T\geq n} \tag{313}$$

$$\Longrightarrow E|S_T|\leq E\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|1_{T\geq n}=\sum_{n=1}^{\infty}E|X_n|1_{T\geq n} \tag{314}$$

而$\{T\geq n\}=\{T\leq n-1\}^c$由$X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$决定，则

$$\Longrightarrow E|S_T|\leq\sum_{n=1}^{\infty}E|X_n|P(T\geq n)=E|X_1|ET<+\infty \tag{315}$$

进一步地，

$$\begin{aligned}ES_T&=E\sum_{n=1}^{\infty}X_n1_{T\geq n} &(316)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}EX_n1_{T\geq n} &(317)\\&=EX_1\sum_{n=1}^{\infty}P(T\geq n) &(318)\\&=EX_1ET=\mu ET &(319)\end{aligned}$$

例：设$\{X_n:n\geq1\}$ i.i.d，$P(X_n=1)=p$，$P(X_n=0)=q=1-p$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$。记$T_N=\inf\{n\geq1:\sum_{k=1}^{n}X_k=N\}$。则$T$关于$\{X_n:n\geq1\}$是停时。求$ET_N$。

由Wald等式，$E\sum_{n=1}^{T_N}X_n=EX_1ET_N=pET_N$，而$\sum_{n=1}^{T_N}X_n=N$。故

$$ET_N=\frac{N}{p} \tag{320}$$

例：设$\{X_n:n\geq1\}$ i.i.d，$P(X_n=1)=p$，$P(X_n=-1)=1-p=q$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$。$\forall N\in\mathbb{N}^+$，令$T_N=\inf\{n\geq1:S_n=N\}$。则T_n关于$\{X_n:n\geq1\}$是停时，且$p>q$时，$ET_N<+\infty$。

由Wald等式，$N=ES_{T_N}=E\sum_{k=1}^{T_N}X_k=(p-q)ET_N$，则$ET_N=\frac{N}{p-q}$。

特别地，$p=q=\frac{1}{2}$时，$ET_N=+\infty$。证明时采用反证法，设$ET_N<+\infty$，则有Wald等式，有$N=ET_N(p-q)=0$，矛盾。

继续讨论更新过程。

命题：设$\{X_n:n\geq 1\}$ i.i.d，$P(X_n\geq 0)=1$，$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$，**则**N_t+1**关于**$\{X_n:n\geq 1\}$**是停时。**

证明：$\{N_t+1=n\}=\{N_t=n-1\}=\{S_{n-1}\leq t<S_n\}$只由$X_1,X_2,\cdots,X_n$决定。

推论：当$EX_n=\mu<+\infty$时，$ES_{N_t+1=}\mu(m(t)+1)$。直接应用Wald等式即得。

定理（基本更新定理）：$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$。

证明：

先考虑$\mu<+\infty$的情形。由$S_{N_t+1}>t$，两边取均值，得$\mu(m(t)+1)>t$，得到$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}$。再证上极限。

任意给定$M>0$，令$\overline{X}_n=\begin{cases}X_n,X_n\leq M\\ M,X_n>M\end{cases}$。

则有$\mu_M\triangleq E\overline{X}_n\leq EX_n=\mu$。类似定义$\overline{S}_0=0$，$\overline{S}_n=\sum_{k=1}^n\overline{X}_k$及$\overline{N}_t$，$\overline{m}(t)\triangleq E\overline{N}_t$。

有$\overline{S}_n\leq S_n$，$\overline{N}_t\geq N_t$，$\overline{m}(t)\geq m(t)$。则

$$\overline{S}_{N_t+1}\leq t+M \tag{321}$$

这是因为$\overline{S}_{N_t}\leq S_{N_t}\leq t$，而新产品的寿命不超过$M$。上式两边取均值，得

$$\mu_M(m(t)+1)\leq t+M\Longrightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu_M}\overset{m\to\infty}{=}\frac{1}{\mu} \tag{322}$$

从而$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$。

考虑$\mu=+\infty$情形。如上考虑截断过程，有

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leq\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\overline{m}(t)}{t}=\frac{1}{\mu_M},\quad\forall M>0 \tag{323}$$

令$M\to\infty$，有

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=0 \tag{324}$$

因此$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$，证毕。

第六章 连续时间参数马氏链

6.1 定义与基本概念

定义：设取值于可数集S的随机过程$X=\{X_t:t\geq 0\}$满足$\forall 0\leq t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}$，$i_0,i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S$，有

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,X_{t_0}=i_0)=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}|X_{t_n}=i_n) \tag{325}$$

则称X**是连续时间参数马氏链**。

若还满足$\forall i,j\in S$，$s,t\geq 0$，有

$$P(X_{s+t}=j|X_s=i)\text{ 不依赖于}s \tag{326}$$

则称X**是时齐的**。此时记

$$p_{ij}(t)\triangleq P(X_{s+t}=j|X_s=i) \tag{327}$$

称为**转移概率**。从而可得**转移概率矩阵**$\mathbb{P}(t)=(p_{ij}(t))_{i,j\in S}$。

例：设$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda)$，则$\forall 0\leq t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t<t+s$，$0\leq i_0\leq i_1\leq\cdots\leq i_{n-1}\leq i\leq j$，则

$$\begin{aligned}&P(N_{t+s}=j|N_t=i,N_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,N_{t_0}=i_0) &(328)\\ =&P(N_{t+s}-N_t=j-i)\quad\because\text{泊松分布具有独立增量性} &(329)\\ =&\frac{(\lambda s)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda s} &(330)\\ =&P(N_{t+s}=j|N_t=i) &(331)\end{aligned}$$

故N为连续时间参数的马氏链，转移概率

$$p_{ij}(t)=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t},\quad j\geq i\geq 0,\quad\text{否则}p_{ij}(t)=0 \tag{332}$$

转移矩阵的性质：

1. $p_{ij}(t) \geq 0, \ \forall i,j \in S, \ t \geq 0$
2. $\sum_{j\in S} P_{ij}(t) = 1, \ \forall t \geq 0$
3. **Chapman-Kolmogorov方程**：$p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$，即$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t)$。

定义：若**转移矩阵族**（满足C-K方程）$\{\mathbb{P}(t): t \geq 0\}$满足$\lim_{t\to 0} \mathbb{P}(t) = I$（零点连续），则称$\{\mathbb{P}(t): t \geq 0\}$是**标准的**（Standard）。

例：$S = \{1,2\}, \ \mathbb{P}(0) = I, \ \mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$（幂等阵），此时$\{\mathbb{P}(t)\}$就不是标准的。

命题6.1.1设$\{\mathbb{P}(t): t \geq 0\}$是一个标准转移矩阵族，则

1. $\forall i \in S, \ p_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上**一致连续**，且此时一致连续对$j$也成立。
2. $\forall t \geq 0, i \in S, \ p_{ii}(t) > 0$。

证明：

1. 考虑

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \tag{333}$$
$$= \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)) \tag{334}$$

   从而

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \geq -p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)) \geq -(1-p_{ii}(h)) \tag{335}$$

   另一方面

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \leq \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \leq \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h) \tag{336}$$

   也即

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h) \tag{337}$$

   而$\lim_{h\downarrow 0} p_{ii}(h) = 1$，从而一致连续成立。
2. 有$\{\mathbb{P}\}$是标准的，

$$\lim_{t\downarrow 0} p_{ii}(t) = 1 \tag{338}$$

   对任意固定$t > 0$，n充分大，有

$$p_{ii}(\frac{t}{n}) > 0 \tag{339}$$

   从而由C-K方程，

$$p_{ii}(t) \geq (p_{ii}(\frac{t}{n}))^n > 0 \tag{340}$$

得证。

记$\pi_i(t) = P(X_t = i), \ i \in S, \ t \geq 0, \ \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \ i_0, i_2, \cdots, i_n \in S$，考虑

$$P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) \tag{341}$$

为一个**联合分布**。有

$$P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) = \sum_{k\in S} P(X_0 = k)P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n | X_0 = i) \tag{342}$$
$$= \sum_{k\in S} \pi_k(0) P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = k) P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1, X_0 = k) \cdots P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_0 = k) \tag{343}$$
$$= \sum_{k\in S} \pi_k(0) p_{ki_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2) \cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n) \tag{344}$$

特别地，$X_t \sim \pi(t) = \pi(0)\mathbb{P}(t)$。

设$X = \{X_t : t \geq 0\}$为连续时间参数马氏链（CTMC），对任意取定$h > 0$，令$X_n^{(h)} \triangleq X_{nh}, \ \forall n \geq 0$，则

$$\{X_n^{(h)} : n \geq 0\} \tag{345}$$

是一个离散时间参数马氏链，转移阵为$\mathbb{P}(h)$。称其为X的$h-$**离散骨架**。

定义：若存在$t \geq 0$，使得$p_{ij}(t) > 0$，则称i可达j，记为$i \to j$。若$i \to j, \ j \to i$，则称i与j互通，记为$i \leftrightarrow j$。

互通关系是S上的等价关系，每个等价类称为**互通类**。

特别地，由于$p_{ii}(nh)>0$，因此其总是非周期的，从而在CTMC中不需要引入周期的概念，进一步地就有$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(nh)$总存在。

命题：$\forall i,j\in S$，$\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(t)$总存在。

定义：

1. 若$\int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$（格林函数），则称状态$i$是**常返的**（Recurrent），否则称$i$是**暂态的**。
2. 设i常返态，若$\lim_{t\to\infty}p_{ii}(t)>0$，则称$i$**正常返**，否则$\lim_{t\to\infty}p_{ii}(t)=0$，则称$i$是**零常返**。
3. 若S上概率测度$\Pi=(\pi_i)_{i\in S}$满足$\Pi\mathbb{P}(t)=\Pi$，$\forall t\ge 0$，即

$$\sum_{k\in S}\pi_k P_{ki}(t)=\pi_i,\quad \forall i\in S,\forall t\ge 0 \tag{346}$$

   则称Π为$X(\{\mathbb{P}(t)\})$的**不变分布**（平稳分布）。
4. 若$\forall i\in S$，$\lim_{t\to\infty}\pi_i(t)=\pi_i^*$，则称$\Pi^*=(\pi_i^*)_{i\in S}$为$X$的极限分布。

定理：不可约马氏链正常返$\Longleftrightarrow$存在不变分布。此时不变分布就是极限分布。

6.2 转移速率矩阵

对离散时间参数马氏链，$\mathbb{P}^{(n)}=\mathbb{P}^n$。

考虑非负实值函数$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$，满足$f(s+t)=f(s)f(t)$，$f$连续，$f(0)=1$，则$f(t)=e^{at}$。其中$a=\ln f(1)=f^{'}(0_+)$。

例：设$N=\{N_t:t\ge 0\}\sim PP(\lambda)$，其转移概率$p_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{(\lambda t)^{i-j}}{(i-j)!}e^{\lambda t}, & j\ge i\ge 0\\ 0, & otherwise\end{cases}$，从而

$$p_{ij}^{'}(0_+)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=\begin{cases}-\lambda, & j=i\\ \lambda, & j=i+1\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{347}$$

考虑一般的连续时间参数马氏链。

定理：设$\{\mathbb{P}(t):t\ge 0\}$标准，则$\forall i\in S$，有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}\triangleq q_i=-p_{ii}^{'}(0_+)=-q_{ii} \tag{348}$$

存在，但可能是∞（广义的导数）。

证明：$\forall t\ge 0$，$p_{ii}(t)>0$，令$\phi(t)=-\ln p_{ii}(t)$非负且有限。$\forall s,t\ge 0$，有$p_{ii}(s+t)\ge p_{ii}(s)p_{ii}(t)$，从而

$$\phi(s+t)\le\phi(s)+\phi(t)\quad (\text{次可加性}) \tag{349}$$

令$q\triangleq\sup\frac{\phi(t)}{t}$（这里取的是上界，广义地来说一定存在），下证明$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\phi(t)}{t}=q$。考虑上极限，显然有$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\phi(t)}{t}\le q$。考虑下极限，有$\forall 0<h<t$，取$n$满足$t=nh+\epsilon$，$0\le\epsilon<h$。从而$\phi(t)=\phi(nh+\epsilon)\le n\phi(h)+\phi(\epsilon)$，进而

$$\frac{\phi(t)}{t}\le\frac{n\phi(h)}{h}\cdot\frac{h}{t}+\frac{\phi(\epsilon)}{t} \tag{350}$$

$$\overset{h\downarrow 0}{\Rightarrow}\frac{\phi(t)}{t}\le\lim_{h\downarrow 0}\frac{\phi(h)}{h} \tag{351}$$

$$\overset{\text{取}\sup}{\Rightarrow}q\le\lim_{h\downarrow 0}\frac{\phi(h)}{h} \tag{352}$$

所以$q=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\phi(h)}{h}$。从而

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-e^{-\phi(t)}}{\phi(t)}\cdot\frac{\phi(t)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\phi(t)}{t}=q \tag{353}$$

得证。

定理：假设$\{\mathbb{P}(t):t\ge 0\}$标准，$\forall i\ne j\in S$，极限

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=p_{ij}^{'}(0_+)\triangleq q_{ij} \tag{354}$$

存在有限。

推论：$\forall i\in S$，$0\le\sum_{j\ne i}q_{ij}\le q_i$。

证明：有$\sum_{j\in S}p_{ij}(t)=1$，则

$$\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=\sum_{j\ne i}\frac{p_{ij}(t)}{t} \tag{355}$$

从而

$$
q_i = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} \tag{356}
$$

$$
\geq \sum_{j\neq i}\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t} = \sum_{j\neq i}p_{ij}^{'}(0_+) = \sum_{j\neq i}q_{ij} \tag{357}
$$

特别地，**当状态空间有限时，上式中不等号取等**，此时有$\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i<+\infty$。

记$Q=(q_{ij})_{i,j\in S}=\mathbb{P}^{'}(0_+)$称为$X$的**转移速率矩阵**。若$Q$满足$\forall i\in S$，有

$$
\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i<+\infty \tag{358}
$$

则称Q是**保守的**（Consecutive）。此条件可以转化为状态空间有限。

Q的概率含义：

令$\tau_1=\inf\{t>0:X_t\neq X_0\}$（**在初始位置停留的时间**）。

定理：设CTMC $X=\{X_t:t\geq 0\}$轨道右连续，则$\forall i\in S$，有

$$
P(\tau_1>t|X_0=i)=e^{-q_it} \tag{359}
$$

也即**状态i停留时间的分布是一个指数分布**（当$q_i>0$时）。

证明：轨道右连续⇒其转移概率矩阵是标准的。有

$$
|p_{ii}(t)-1| = 1-p_{ii}(t) = \sum_{j\neq i}p_{ij}(t) = P(X_t\neq i|X_0=i)\to 0\ \ (\text{当}t\to 0) \tag{360}
$$

令

$$
\begin{aligned}
B &\triangleq \{\omega\in\Omega: X_u(\omega)=i,\forall 0\leq u\leq t\}\\
A_n &= \{\omega\in\Omega: X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)=i,k=0,1,2,\cdots,2^n\}\\
A = \lim_{n\to\infty}A_n &= \{\omega\in\Omega, X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)=i,k=0,1,2,\cdots,2^n,n\geq 1\}
\end{aligned} \tag{361}
$$

由轨道右连续，有

$$
B\subset A,\quad P(A\backslash B)=0 \tag{362}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
P(\tau_1>t|X_0=i) =& P(X_u=i,\forall 0\leq u\leq t|X_0=i) && (363)\\
=& P(\cap_{0\leq u\leq t}\{X_u=i\}|X_0=i) && (364)\\
=& P(B|X_0=i)=P(A|X_0=i) && (365)\\
=& \lim_{n\to\infty}P(A_n|X_0=i) && (366)\\
=& \lim_{n\to\infty}(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n}\quad (\because \text{马氏性}) && (367)\\
=& \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln p_{ii}(\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}t\right\} && (368)\\
=& \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln[1-q_i\frac{t}{2^n}+o(t)]}{q_i\frac{t}{2^n}}q_it\right\} && (369)\\
=& e^{-q_it} && (370)
\end{aligned}
$$

进一步地，

$$
E(\tau_1|X(0)=i)=\frac{1}{q_i} \tag{371}
$$

也即q_i决定了过程X停留在$X_0=i$的平均时间，从而也即q_i刻画了过程从i出发的**转移速率**。

接note13

6.2 转移速率矩阵

有当$q_i\in(0,+\infty)$时，X在状态i停留的时间$\tau_i\sim\epsilon(q_i)$。特别地，当$q_i=0$的时候，$P(\tau_1>t|X_0=i)=1$，令$t\to\infty$，有$P(\tau_1=\infty|X_0=i)=1$，此时称i为**吸收态**。当$q_i=\infty$时，有$P(\tau_1>t|X_0=i)=0$，从而$P(\tau_1=0|X_0=i)=1$，此时称i为**瞬时态**。

定理：设CTMC $X=\{X_t:t\geq 0\}$轨道右连续，$q_i\in(0,\infty)$，则$\forall t\geq 0$，$j\neq i$，有

$$P(\tau_1 \le t, X_{\tau_1}=j|X_0=i)=(1-e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i}$$
$$P(X_{\tau_1}=j|X_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i} \tag{372}$$

证明：$P_i(\tau_1=t, X_{t_1}=j)\le P_i(\tau_1\le t)=0$（?）

令$\tilde{\tau}_n=\inf\{\frac{kt}{2^n}:X_{\frac{kt}{2^n}}\neq X_0\}$，则$\tau_1\le\tilde{\tau}_n$，且$\tilde{\tau}_n$单调下降，设其极限为$\tilde{\tau}=\lim_{n\to\infty}\tilde{\tau}_n$，则$\tau_1\le\tilde{\tau}$。从而有

$$X_{\frac{kt}{2^n}}=i,\forall\frac{kt}{2^n}<\tilde{\tau} \tag{373}$$

由轨道X右连续，有$X_s=i,\forall s<\tilde{\tau}$。则$\tau\ge\tilde{\tau}$。所以$\tau=\tilde{\tau}$。**（即用离散骨架跳跃的时刻来逼近连续时间跳跃的时刻）**

从而

$$1_{\{X_\tau=j\}}=\lim_{n\to\infty}1_{\{X_{\tilde{\tau}_n}=j\}} \tag{374}$$

所以

$$\begin{aligned}
P_i(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j)=&P_i(\tau_1<t, X_{\tau_1}=j) && (375)\\
=&\lim_{n\to\infty}P_i(\tau_1<t, X_{\tilde{\tau}_n}=j) && (376)\\
\le&\lim_{n\to\infty}P_i(\tilde{\tau}_n\le t, X_{\tilde{\tau}_n}=j) && (377)\\
\le&\lim_{n\to\infty}P_i(\tau_1\le t, X_{\tilde{\tau}_n=j}) && (378)\\
=&P_i(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j) && (379)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j)=&\lim_{n\to\infty}P_i(\tilde{\tau}_n\le t, X_{\tilde{\tau}_n}=j) && (380)\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}P_i(\tilde{\tau}_n=\frac{kt}{2^n},X_{\frac{kt}{2^n}}=j) && (381)\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}P_i(X_{\frac{vt}{2^n}}=i,\forall 0\le v<k, X_{\frac{kt}{2^n}}=j) && (382)\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}p_{ii}(\frac{t}{2^n})^{k-1}p_{ij}(\frac{t}{2^n}) && (383)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1-(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n}}{1-p_{ii}(\frac{t}{2^n})}p_{ij}(\frac{t}{2^n}) && (384)\\
=&\lim_{n\to\infty}[1-(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n}]\frac{\frac{p_{ij}(\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}}{\frac{1-p_{ii}(\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}} && (385)\\
=&(1-e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i} && (386)
\end{aligned}$$

推论：X轨道右连续，$\mathbb{Q}$保守，$i\in S$，使得$0<q_i<+\infty$，则在$X_0=i$的条件下，τ_1与X_{τ_1}独立。（因为二者的联合分布就是边缘分布的乘积）

6.5 强马氏性 嵌入链

对随机变量Y，定义$\sigma(Y)=Y^{-1}\mathcal{B}\triangleq\{Y^{-1}B:B\in\mathcal{B}\}=\sigma(\{Y\le y|y\in\mathbb{R}\})$。若$Y$为离散型，则$\sigma(Y)=\{\cup_{y_i\in A}\{Y=y_i\}|A\subset S\}$，其中$S$为$Y$的取值集合。

对$X=\{X_t:t\ge 0\}$，$\forall t\ge 0$，$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s:0\le s\le t)\triangleq\sigma(\cup_{0\le s\le t}X_s^{-1}\mathcal{B})$。若取值于$[0,+\infty]$，即广义的随机变量。$\forall\tau$，使得$\forall t\ge 0$，$\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$，即

$$1_{\{\tau\le t\}}=f(X_s:0\le s\le t) \tag{387}$$

则称τ关于X是停时（stopping time）。

定理：设$X=\{X_t:t\ge 0\}$CTMC，且轨道右连续，τ为关于X的停时，在$\tau<+\infty$条件下，$X_\tau=i$时，$Y=\{Y_t=X_{\tau+t}:t\ge 0\}$，是从$i$出发的连续时间马氏链，与$X$有相同的转移概率矩阵族，且与$\{X_s:0\le s\le\tau\}$独立。（强马氏性）

推论：取$\tau=\tau_1=\inf\{t\ge 0:X_t\neq X_0\}$为首次跳跃的时刻，则$\tau$为停时，有上述结论成立。

令$\tau_0=0$，$\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}:X_t\neq X_{\tau_{n-1}}\}$，$\forall n\ge 1$。考虑$Y^{(n)}=\{X_{\tau_n+t}:t\ge 0\}$。（注意这要求$X$轨道右连续，$\mathbb{Q}$保守，$0<q_i<+\infty$，$\forall i\in S$）且假定$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\infty$ a.s.（非爆炸，即有限时间内只能跳有限次）。

推论：$Y^{(n)}$在$\tau_n<+\infty$条件下是CTMC，且与X有相同的转移概率矩阵族与转移速率矩阵。

定理：

$$P(X_{\tau_n+t}=j|X_{\tau_n}=i_n,X_{\tau_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,X_{\tau_1}=i_1,X_0=i_0)=P(X_{\tau_n+t}=j|X_{\tau_n}=i_n)=p_{i_n j}(t) \tag{388}$$

记$\theta_n=\tau_n-\tau_{n-1}$，$\forall n\ge 1$，有如下推论：

推论：

1. $\forall i_k \in S$，$i_k \neq i_{k-1}$，$i \neq i_{n-1}$，$\forall t \geq 0$，

$$P(\theta_{n+1} \leq t | X_{\tau_n} = i, X_{\tau_{n-1}} = i_{n-1}, \cdots, X_{\tau_1} = i_1, X_0 = i_0) = 1 - e^{-q_i t} \quad (\text{停留时间}) \tag{389}$$

2. $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \theta_{n+1}$关于$X_0, X_{\tau_1}, \cdots, X_{\tau_n}$条件独立。实际上，$\theta_i$都服从独立的指数分布$\epsilon(q_i)$。
3.

$$P(X_{\tau_{n+1}} = j | X_{\tau_n} = i, X_{\tau_{n-1}} = i_{n-1}, \cdots, X_{\tau_1} = i_1, X_0 = i_0) = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases} \tag{390}$$

令$\tilde{X}_n \triangleq X_{\tau_n}$，$\forall n \geq 0$，称$\tilde{X} = \{\tilde{X}_n : n \geq 0\}$为$X$的**嵌入链**（imbedded chain）。

定理：**$\tilde{X}$是离散时间参数马氏链。转移概率矩阵**

$$\tilde{\mathbb{P}} = (\tilde{p}_{ij})_{i,j \in S} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases} \tag{391}$$

$\forall j \in S$，令$T_j = \inf\{t \geq 0 : X_t = j\}$表示**首次击中$j$的时刻**。有$i \to j \Leftrightarrow \exists t > 0, p_{ij}(t) > 0$。

命题：下列叙述等价：

1. $i \to j$；
2. $\forall t > 0$，$p_{ij}(t) > 0$；
3. $P_i(T_j < +\infty) > 0$；
4. 对嵌入链$\tilde{X}$，$i \to j$；
5. $\exists i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n$使得$i_n = j$，$i_0 = i$，$i_k \neq i_{k+1}$，且$q_{i_k i_{k+1}} > 0$；
6. $\exists \delta > 0$，使得对离散骨架$\mathbb{P}(\delta)$，$i \to j$；
7. $\forall \delta > 0$，使得对离散骨架$\mathbb{P}(\delta)$，$i \to j$；

令$\sigma_i = \inf\{t > 0 : X_t = i\}$，为**首次跳到$i$的时刻**。若$X_0 = i$，则$0 = T_i < \sigma_i$，若$X_0 \neq i$，$T_i = \sigma_i$。类似地定义$\sigma_i^{(k)}$表示$X$第$k$次跳到$i$的时刻。

命题：下列叙述等价：

1. i常返（$G_{ii} \triangleq \int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$）
2. $q_i = 0$或$\rho_{ii} \triangleq P_i(\sigma_i < +\infty) = 1$
3. $q_i = 0$或$\forall k \geq 1$，$P_i(\sigma_i^{(k)} < +\infty) = 1 \Leftrightarrow P_i(\sigma_i^{(k)} < +\infty, \forall k \geq 1) = 1$
4. i是嵌入链常返态
5. $\exists \delta > 0$，i是离散骨架$\mathbb{P}(\delta)$的常返态
6. $\forall \delta > 0$，i是离散骨架$\mathbb{P}(\delta)$的常返态

命题：若i常返且$q_i > 0$，则$P_i(\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = i\}} ds = \frac{1}{q_i (E_i \sigma_i)}) = 1$。

命题：

1. i正常返$\Leftrightarrow q_i > 0$或$E_i \sigma_i < +\infty$
2. i零常返$\Leftrightarrow q_i > 0, i$常返且$E_i \sigma_i = +\infty$
3. i正常返$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$，$i$是$\mathbb{P}(\delta)$正常返态$\Leftrightarrow \forall \delta > 0$，$i$是$\mathbb{P}(\delta)$正常返态。

6.3 Kolmogorov前进方程、后退方程

对于离散时间马氏链，$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$。

定义：若矩阵$\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$满足

1. $q_{ij} \triangleq -q_i \leq 0$，可能为$-\infty$
2. $0 \leq q_{ij} < +\infty$，$\forall j \neq i$
3. $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$，$\forall i \in S$

则称$\mathbb{Q}$为Q**矩阵**。若还有$\forall i \in S$，$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < +\infty$，则称$\mathbb{Q}$矩阵是保守的。

定义：对给定的Q矩阵$\mathbb{Q}$，若存在马氏链$X = \{X_t : t \geq 0\}$，使得其转移概率矩阵$\mathbb{P}(t)$满足$\mathbb{P}'(0_+) = \mathbb{Q}$，则称$X$是$\mathbb{Q}$的**$Q$过程**。

定理：当S有限时，$\mathbb{P}(t)$满足下列**Kolmogorov前进后退方程**：

1. $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$　（Kolmogorov前进方程）

2. $\mathbb{P}^{'}(t)=\mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$ （Kolmogorov后退方程）

此时$\mathbb{P}(t)=e^{t\mathbb{Q}}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\mathbb{Q})^k}{k!}$。

接note14

6.3 Kolmogorov前进方程、后退方程

定理：当S有限时，$\mathbb{P}(t)$满足下列**Kolmogorov前进后退方程**：

1. $\mathbb{P}^{'}(t)=\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$ （Kolmogorov前进方程）
2. $\mathbb{P}^{'}(t)=\mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$ （Kolmogorov后退方程）

此时$\mathbb{P}(t)=e^{t\mathbb{Q}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\mathbb{Q})^k}{k!}$。

证明：

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{'}(t) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} && (392)\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{\sum_k p_{ik}(t)(p_{kj}(h)-\delta_{kj})}{h} && (393)\\
&= \sum_{k\in S}p_{ik}(t)\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h} && (394)\\
&= \sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj} && (395)
\end{aligned}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{'}(t) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} && (396)\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{\sum_{k\in S}(p_{ik(h)}-\delta_{ik})p_{kj}(t)}{h} && (397)\\
&= \sum_{k\in S}\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}p_{kj}(t) && (398)\\
&= \sum_{k\in S}\lim_{h\downarrow 0}q_{ik}p_{kj}(t) && (399)
\end{aligned}
$$

从而得证。

注意，当S无限时，上推导过程中的**求和与极限不可交换**！此时我们有结论$\mathbb{P}^{'}(t)\geq\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$以及$\mathbb{P}^{'}(t)\geq\mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$成立。

定理：

1. 当S可数，$Q=(q_{ij})_{ij\in S}$保守，则Kolmogorov后退方程成立。
2. 若$\sup\{q_i:i\in S\}<+\infty$，则Kolmogorov前进方程成立。

证明（1）：有

$$
\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) \tag{400}
$$

此外

$$
\underline{\lim}_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\geq\sum_{k\neq i}\underline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{401}
$$

将状态空间编号为$1,2,3,\cdots$，则$\forall N>i$，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) &= \sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\sum_{k\geq N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) && (402)\\
&\leq \sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\sum_{k\geq N}\frac{p_{ik}(h)}{h} && (403)\\
&= \sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\frac{-p_{ii}(h)}{h}-\sum_{k<N,k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h} \quad \text{（由}Q\text{的保守性）} && (404)
\end{aligned}
$$

从而上极限

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) &\leq \sum_{k\neq i,k<N}\overline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\lim_{h\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}-\sum_{k\neq i,k<N}\overline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{p_{ik}(h)}{h} && (405)\\
&= \sum_{k\neq i,k<N}q_{ik}p_{kj}(t)+q_i-\sum_{k\neq i,k<N}q_{ik} && (406)
\end{aligned}
$$

令$N\to\infty$，得到

$$\overline{\lim}_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\le\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{407}$$

从而

$$\lim_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{408}$$

定理：当S有限时，下列Fokker-Planck方程（主方程）成立：

$$p_{ij}^{'}(t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}=-p_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj} \tag{409}$$

证明：

$$p(t)=p(0)\mathbb{P}(t)\Longrightarrow p^{'}(t)=p(0)\mathbb{P}^{'}(t)=p(0)\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}=p(t)\mathbb{Q} \tag{410}$$

若Π是$X(\{\mathbb{P}(t)\})$的不变分布，即$\Pi\mathbb{P}(t)=\Pi$，$\forall t\ge 0$。对其两边在$t=0$处求导，得到

$$\sum_{k\in S}\pi_k q_{kj}=0,\text{也即}\pi Q=0 \tag{411}$$

定理：当S有限，X不可约，则X存在平稳分布Π，且满足$\sum_{k\in S}\pi_k q_{kj}=0\Leftrightarrow\pi_j q_j=\sum_{k\in S}\pi_k q_{kj}\Leftrightarrow\sum_{k\neq j}\pi_j q_{kj}=\sum_{k\neq j}\pi_k q_{kj}$，$\forall j\in S$。这意味着流出$j$的速率等于流入$j$的速率。

定理：设$X(\mathbb{Q})$保守非爆炸，则$\Pi\mathbb{P}(t)=\Pi,\forall t\ge 0\Leftrightarrow\Pi\mathbb{Q}=0$。

命题：CTMC$X=\{X_t:t\ge 0\}$与其嵌入链$\tilde{X}=\{\tilde{X}_n:n\ge 0\}$不一定同时有不变分布。从而二者不一定同为或同不为正常返。

当S有限时，$X(Q)$不可约$\Leftrightarrow$ $\tilde{X}(\tilde{\mathbb{P}})$不可约。设$\tilde{X}$不变分布为$\tilde{\Pi}$，即$\tilde{\Pi}\tilde{\mathbb{P}}=\tilde{\Pi}$，也即$\sum_{k\in S}\tilde{\pi}_i\tilde{p}_{ki}=\tilde{\pi}_i$。又$\tilde{q}_{ki}=\begin{cases}\frac{q_{ki}}{q_k}, & k\neq i\\ 0, & k=i\end{cases}$从而有

$$\sum_{k\neq i}\pi_k\cdot\frac{q_{ki}}{q_k}=\tilde{\pi}_i=\frac{\tilde{\pi}_i}{q_i}\cdot q_i \tag{412}$$

令$\mu_i=\frac{\tilde{\pi}_i}{q_i}$，则$\sum_{k\in S}\mu_k q_{ki}=0$。再令$\pi_i=\frac{\tilde{\pi}_i}{q_i\tilde{Z}}$，其中$\tilde{Z}=\sum_{k\in S}\frac{\tilde{\pi}_k}{q_k}$，则$\Pi$是$X$的不变分布。

反过来，若Π是X的不变分布，则$\Pi\mathbb{Q}=0$。令$Z=\sum_{k\in S}\pi_k q_k$，$\tilde{\pi}_i=\frac{\pi_i q_i}{Z}$，则$\tilde{\pi}_i$是$\tilde{X}$的不变分布。

注意，当S无限时，上述归一化分母Z可能是无限的，因此此时二者的不变分布无法彼此推导。

例（生灭过程及嵌入链）：设$S=\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移速率矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \mu_i & -(\lambda_i+\mu_i) & \lambda_i & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix} \tag{413}$$

非爆炸（如$\sup\{\lambda_i+\mu_i:i\ge 1\}<+\infty$。则其不变分布$\Pi$满足$\Pi Q=0$。根据流入速率等于流出速率，有

$$\begin{cases}\pi_0\lambda_0=\pi_1\mu_1\\ \pi_i\lambda_i+\pi_i\mu_i=\pi_{i+1}\mu_{i+1}+\pi_{i-1}\lambda_{i-1}\Leftrightarrow\pi_{i+1}\mu_{i+1}-\pi_i\lambda_i=\pi_i\mu_i-\pi_{i-1}\lambda_{i-1}=\cdots=\pi_1\mu_1-\pi_0\lambda_0-0, & i>0\end{cases} \tag{414}$$

从而

$$\pi_{i+1}\mu_{i+1}=\pi_i\lambda_i\Longrightarrow\pi_{i+1}=\frac{\pi_i\lambda_i}{\mu_{i+1}}=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_i}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{i+1}}\pi_0 \tag{415}$$

从而

$$\sum_{i\ge 0}\pi_i=(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{i}\lambda_j}{\prod_{j=1}^{i+1}\mu_j})\pi_0=1 \tag{416}$$

而$\pi_0>0$，因此

$$\text{不变分布存在}\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{i}\lambda_j}{\prod_{j=1}^{i+1}\mu_j}<+\infty \tag{417}$$

1. 若$\lambda_0=1$，$\lambda_1=\mu_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_n=\frac{(n-1)n}{2n-1}$，$\mu_n=\frac{n^2}{2n-1}$。则$q_0=1,q_n=\lambda_n+\mu_n=n$，$\forall n\ge 1$。则

$$\frac{\prod_{j=0}^{i}\lambda_j}{\prod_{j=1}^{i+1}\mu_j}=\frac{2i-1}{i^2(i-1)} \tag{418}$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{i}\lambda_j}{\prod_{j=1}^{i+1}\mu_j}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i-1}{i^2(i-1)}<+\infty \tag{419}$$

故X有不变分布。再考虑嵌入链$\tilde{X}$，其转移概率矩阵

$$\tilde{\mathbb{P}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \\ & & \ddots & & \\ & & \frac{n}{2n-1} & 0 & \frac{n-1}{2n-1} \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{420}$$

其对应的$b_n=\frac{n-1}{2n-1}$，$d_n=\frac{n}{2n-1}$，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_{n-1}}{d_1d_2\cdots d_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{(n-1)n}=\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}]=\infty \tag{421}$$

考虑排队模型，当$\lambda<\mu s$时，可以达到稳定分布。

$$PP(\lambda)\xrightarrow{input}\underset{\epsilon(\mu)}{\overset{server(s)}{\square\square\square}}\xrightarrow{output} \tag{422}$$

第4章 离散鞅引论

定义4.1：若随机过程$X=\{X_n:n\geq 0\}$满足：

1. $E|X_n|<+\infty$，$\forall n\geq 0$
2. $\forall n\geq 0$，$E(X_{n+1}|X_n,X_{n-1},\cdots,X_0)=X_n$，a.s.

则称X是鞅（martingale）。

定义：假设随机过程$X=\{X_n:n\geq 0\}$，$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$满足$\forall n\geq 0$,

1. $E|X_n|<+\infty,\forall n\geq 0$
2. $E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=X_n$，a.s.

则称X关于Y是鞅。

注意：

1. X_n是关于$Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$的函数。
2. $EX_{n+1}=E(E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n))=EX_n$为一个常数。

命题（独立同分布随机变量列的部分和）：设$Y_0=0$，$\{Y_n:n\geq 1\}$为独立同分布的随机变量序列，且$EY_n=0$。令$X_n=0$，$X_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$，则$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 1\}$是鞅。而由于X和Y任意前n项可以互相表示，因此X自己也是鞅。

证明：首先，$E|X_n|=E|\sum_{k=1}^{n}Y_k|\leq\sum_{k=1}^{n}E|Y_k|=E|Y_1|<+\infty$。而

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_1,Y_0)=&E(Y_{n+1}+X_n|Y_n,\cdots,Y_0) &(423)\\ =&E(Y_{n+1}|Y_n,\cdots,Y_0)+E(X_n|Y_n,\cdots,Y_0) &(424)\\ =&EY_{n+1}+X_n=X_n &(425)\end{aligned}$$

例（和的平方）设$Y_0=0$，$\{Y_n:n\geq 1\}$独立同分布的随机变量序列，$EY_n=0$，$EY_n^2=\sigma^2$，令$X_n=(\sum_{k=1}^{n}Y_k)^2-n\sigma^2$，则$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅。

证明：记$S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$，$\forall n\geq 1$，$S_0=0$。则

$$\begin{aligned} E|X_n|=&E|(\sum_{k=1}^{n}Y_k)^2-n\sigma^2| &(426)\\ \leq&E(\sum_{k=1}^{n}Y_k)^2+n\sigma^2 &(427)\\ =&E\sum_{k=1}^{n}Y_k^2+2E\sum_{i<j}EY_iY_j+n\sigma^2 &(428)\\ =&2n\sigma^2 &(429)\end{aligned}$$

有限。而m

$$
\begin{aligned}
& E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (430)\\
=& E((S_n+Y_{n+1})^2-(n+1)\sigma^2|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (431)\\
=& E(S_n^2+2S_nY_{n+1}+Y_{n+1}^2|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)-(n+1)\sigma^2 && (432)\\
=& E(S_n^2|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)+2E(S_nY_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)+E(Y_{n+1}^2|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)-(n+1)\sigma^2 && (433)\\
=& S_n^2+2S_nE(Y_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)+EY_{n+1}^2-(n+1)\sigma^2 \quad \because S_n\text{是}\{Y_n\}\text{的函数，而}Y_{n+1}\text{与}Y_0,\cdots,Y_n\text{独立} && (434)\\
=& S_n^2+2S_nE(Y_{n+1})-n\sigma^2=S_n^2-n\sigma^2=X_n && (435)
\end{aligned}
$$

所以$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅。得证。

例（由马氏链导出的鞅）：设$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$为时齐马氏链，转移矩阵$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in S}$，$f$是$\mathbb{P}$**有界调和函数**，即$\mathbb{P}\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}$。令$X_n=f(Y_n)$，$\forall n\geq 0$，则$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y$是鞅。

证明：由于f有界，因此$E|X_n|$有界。而

$$E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=E(f(Y_{n+1})|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) \tag{436}$$

而

$$
\begin{aligned}
& E(f(Y_{n+1})|Y_n=i_n,Y_{n-1}=i_{n-1},\cdots,Y_0=i_0) && (437)\\
=& \sum_j f(j)P(Y_{n+1}=j|Y_n=i_n,Y_{n-1}=i_{n-1},\cdots,Y_0=i_0) && (438)\\
=& \sum_j f(j)P(Y_{n+1}=j|Y_n=i_n) && (439)\\
=& \sum_j f(j)P_{i_nj}=(\mathbb{P}\overrightarrow{f})_{i_n} && (440)
\end{aligned}
$$

从而

$$E(f(Y_{n+1})|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=E(f(Y_{n+1})|Y_n)=(\mathbb{P}\overrightarrow{f})_{Y_n}=\overrightarrow{f}_{Y_n}=f(Y_n)=X_n \tag{441}$$

所以$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅。

例（由转移矩阵的特征向量导出的鞅）：设$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$为时齐马氏链，转移矩阵$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in S}$，$\vec{f}=(f(i))_{i\in S}^T$满足$\mathbb{P}\vec{f}=\lambda\vec{f}$。即

$$\sum_{j\in S}p_{ij}f_j=\lambda f_i,\quad \forall i\in S \tag{442}$$

若$E|f(Y_n)|<+\infty$，$\forall n\geq 0$，则令$X_n=\frac{1}{\lambda^n}f(Y_n)$，$\forall n\geq 0$，则$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y$是鞅。

证明：只需验证鞅定义中的第二条。有

$$
\begin{aligned}
E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=& E(\lambda^{-(n+1)}f(Y_{n+1})|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (443)\\
=& E(\lambda^{-(n+1)}f(Y_{n+1})|Y_n) && (444)\\
=& \lambda^{-(n+1)}\mathbb{P}\vec{f}_{Y_n} && (445)\\
=& \lambda^{-n}Y_n=X_n && (446)
\end{aligned}
$$

所以$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅。

例（Doob鞅过程）：假设$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$是一个随机变量序列，随机变量X满足$E|X|<+\infty$，令$X_n=E(X|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)$，$\forall n\geq 0$，则$\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y$是鞅。

证明：首先，$E|X_n|=E|E(X|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)|\leq E(E(|X|\ |Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0))=E|X|<+\infty$。另一方面，

$$
\begin{aligned}
E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=& E(E(X|Y_{n+1},Y_{n-1},\cdots,Y_0)|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (447)\\
=& E(X|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)=X_n && (448)
\end{aligned}
$$

注意：上述推导过程使用了**条件期望的平滑性**。

4.2 上（下）鞅及Doob分解定理

定义：假设随机过程$X=\{X_n:n\geq 0\}$，与$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$满足

1. $E|X_n|<+\infty$，$\forall n\geq 0$
2. X_n是$Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$的函数
3. $\forall n\geq 0$，$E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)\leq X_n$，a.s.

则称X关于Y是**上鞅（super-martingale）**。

若第三个条件改为$E(X_{n+1}|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0)\geq X_n$，则称$X$关于$Y$是**下鞅（sub-martingale）**。

命题：若X关于Y是上鞅$\Longleftrightarrow -X \triangleq \{-X_n : n \geq 0\}$是下鞅。

例：设$Y_0 = 0$，$\{Y_n : n \geq 0\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E|Y_n| < +\infty$，令$X_0 = 0$，$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$，当$EY_1 \leq 0$时，有$X = \{X_n : n \geq 0\}$，关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是上鞅。另一方面，若$EY_1 \geq 0$，则X关于Y是下鞅。

证明：容易证明期望有限。另一方面，

$$E(X_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) = E(X_n + Y_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) = X_n + EY_{n+1} \leq X_n \tag{449}$$

下鞅的证法同理。

例：设$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是时齐马氏链，$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$，$f$是$\mathbb{P}$的有界上调和函数（超正则函数），即$\mathbb{P}\vec{f} \leq \vec{f}$，令$X_n = f(Y_n)$，则$X = \{X_n : n \geq 0\}$关于$Y$是上鞅。

证明：首先$E|X_n| \leq \vec{f}$的界$= M < +\infty$。另一方面，

$$E(X_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) = E(f(Y_{n+1})|Y_n) = \mathbb{P}\vec{f}_{Y_n} \leq \vec{f}_{Y_n} = X_n \tag{450}$$

得证。

Jensen不等式与条件Jensen不等式

若$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，$0 \leq \alpha \leq 1$，有$\phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\phi(x_1) + (1-\alpha)\phi(x_2)$，则称$\phi$是**凸函数**。推广可以得到，$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$，及$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in [0,1]$满足$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$，则有

$$\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(x_i) \tag{451}$$

若令X为一个随机变量，且$P(X = x_i) = \alpha_i$，$1 \leq i \leq n$，则上式变为

$$\phi(EX) \leq E\phi(X) \tag{452}$$

Jensen不等式：设$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是凸函数，$E|X| < +\infty$，$E\phi(X) < +\infty$，则

$$\phi E(X) \leq E\phi(X) \tag{453}$$

条件Jensen不等式：设$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是凸函数，$E|X| < +\infty$，$E\phi(X) < +\infty$，对任意随机变量$Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$，有

$$\phi(E(X|Y_n, \cdots, Y_0)) \leq E(\phi(X)|Y_n, \cdots, Y_0) \quad a.s. \tag{454}$$

引理：设$X = \{X_n : n \geq 0\}$关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是鞅，$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是凸函数，且$E|\phi(X_n)| < +\infty$，则$\{\phi(X_n) : n \geq 0\}$关于$Y$是下鞅。

证明：由条件Jensen不等式，

$$E(\phi(X_{n+1})|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) \geq \phi(E(X_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0)) = \phi(X_n) \tag{455}$$

即证。

推论：若$X = \{X_n : n \geq 0\}$关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是鞅，则

1. $\{|X_n| : n \geq 0\}$关于Y是下鞅。（$\because |X|$是凸函数）
2. 当$EX_n^2 < +\infty$时，$\{X_n^2 : n \geq 0\}$关于Y是下鞅。

上（下）鞅的性质：

1. 若$X = \{X_n : n \geq 0\}$关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是上（下）鞅，则

   $$E(X_{n+k}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) \underset{(\geq)}{\leq} X_n, \quad \forall k \geq 0 \tag{456}$$

   证明：对k采用归纳法。$k = 1$记为上（下）鞅的定义，成立。考虑$k+1$的情形：

   $$\begin{aligned} E(X_{n+k+1}|Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_0) =& E(E(X_{n+k+1}|Y_{n+k}, \cdots, Y_0)|Y_n, \cdots, Y_0) \quad (457) \\ \leq& E(X_{n+k}|Y_n, \cdots, Y_0) \leq X_n \quad (458) \end{aligned}$$

   也成立。则由归纳法知得证。对下鞅同理。
2. 若$X = \{X_n : n \geq 0\}$关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$是上鞅（鞅），则$\forall 0 \leq k \leq n$，

   $$EX_n \underset{(=)}{\leq} EX_k \underset{(=)}{\leq} EX_0 \tag{459}$$

   证明：$EX_n = E(E(X_n|Y_k, Y_{k-1}, \cdots, Y_0)) \leq E(X_k)$得证。
3. 若$X = \{X_n : n \geq 0\}$是关于$Y = \{Y_n : n \geq 0\}$的（上）鞅，$g : \mathbb{R}^{n+1} \to \underset{(\mathbb{R}^+)}{\mathbb{R}}$，则

   $$E(g(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)X_{n+k}|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) \underset{(\leq)}{=} g(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)X_n, \quad \forall k \geq 0 \tag{460}$$

   证明：$E(g(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)X_{n+k}|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = g(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)E(X_{n+k}|Y_0, \cdots, Y_n) \underset{(\leq)}{=} g(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)X_n$

定理（Doob分解定理）：设$X=\{X_n:n\geq 1\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 1\}$是下鞅，则存在两个随机过程$\{M_n:n\geq 1\}$以及$\{Z_n:n\geq 1\}$使得

1. $\{M_n:n\geq 1\}$关于Y是鞅
2. Z_n是$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1}$的函数（Z关于Y是**可料的**（Predictable））且$Z_1=0$，$Z_n\leq Z_{n+1}$，$E|Z_n|<+\infty$。Z_n称为**趋势项**。
3. $X_n=M_n+Z_n$

且上述分解是**唯一的**。

> 若存在，则$X_n=M_n+Z_n$，$E(M_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0)=M_{n-1}$，$Z_n$是$Y_{n-1},\cdots,Y_0$的函数。
>
> 则
>
> $$\begin{aligned} E(X_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0)=&E(M_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0)+E(Z_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (461)\\ =&M_{n-1}+Z_n && (462)\\ =&X_{n-1}-Z_{n-1}+Z_n && (463)\end{aligned}$$
>
> 从而
>
> $$Z_n-Z_{n-1}=E(X_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0)-X_{n-1}=E(X_n-X_{n-1}|Y_{n-1},\cdots,Y_0) \tag{464}$$

证明：令$Z_1=0$，$M_0=X_0=0$，$M_1=X_1$，

$\forall n\geq 1$，$M_n=X_n-\sum_{k=2}^n E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0)$，$Z_n=X_n-M_n=\sum_{k=1}^n E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0)$。

因为X关于Y是下鞅，则

$$E(X_k|Y_{k-1},\cdots,Y_0)\geq X_{k-1}\Longleftrightarrow E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0)\geq 0 \tag{465}$$

因此Z_n非负非降，且是$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$的函数。及

$$E|Z_n|=\sum_{i=2}^n E(E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0))=\sum_{i=2}^n E(X_k-X_{k-1})=EX_n-EX_1=EX_1<+\infty \tag{466}$$

下证明M是Y的鞅。首先，$E|M_n|=E|X_n-Z_n|\leq EX_n+EZ_n<+\infty$。及

$$\begin{aligned} E(M_n|Y_{k-1},\cdots,Y_1)=&E(X_n-\sum_{k=2}^n E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_1)|Y_{n-1},\cdots,Y_1) && (467)\\ =&E(X_n|Y_{n-1},\cdots,Y_1)-\sum_{k=2}^n E(E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0)|Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (468)\\ =&E(X_n|Y_{n-1},\cdots,Y_0)-\sum_{k=2}^{n-1} E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0) && (469)\\ &-E(X_n-X_{n-1}|Y_{n-1},\cdots,Y_0) && (470)\\ =&X_{n-1}-\sum_{k=2}^{n-1} E(X_k-X_{k-1}|Y_{k-1},\cdots,Y_0)=M_{n-1} && (471)\end{aligned}$$

因此M是Y的鞅。唯一性由分解时Z的唯一性即得。

4.3 停时定理

T,σ关于$\{X_n:n\geq 0\}$是停时，则$T\vee\sigma\triangleq\max(T,\sigma),T\wedge\sigma\triangleq\min(T,\sigma)$，$T+\sigma$也是停时。

引理4.3.1：设$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是（上）鞅，T关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是停时，则$\forall n\geq k\geq 0$，有

$$EX_n\mathit{1}_{\{T=k\}}\underset{(\leq)}{=}EX_k\mathit{1}_{\{T=k\}} \tag{472}$$

证明：有$\mathit{1}_{\{T=k\}}=f(Y_0,\cdots,Y_k)$，则

$$\begin{aligned} EX_n\mathit{1}_{\{T=k\}}=&E(E(X_n\mathit{1}_{T=k}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_k)) && (473)\\ =&E(\mathit{1}_{\{T=k\}}E(X_n|Y_0,Y_1,\cdots,Y_k)) && (474)\\ \underset{(\leq)}{=}&EX_k\mathit{1}_{\{T=k\}} && (475)\end{aligned}$$

引理4.3.2：设$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是（上）鞅，T关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是停时，则$\forall n\geq 1$，有

$$EX_0\underset{(\geq)}{=}EX_{T\wedge n}\underset{(\geq)}{=}EX_n \tag{476}$$

证明：有$\mathit{1}_{\{T<n\}}+\mathit{1}_{\{T\geq n\}}=1$，则

$$
\begin{aligned}
EX_{T\wedge n} =& EX_{T\wedge n}(\mathit{1}_{\{T<n\}}+\mathit{1}_{\{T\geq n\}}) & (477)\\
=& EX_{T\wedge n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathit{1}_{\{T=k\}}+EX_{T\wedge n}\mathit{1}_{\{T\geq n\}} & (478)\\
=& \sum_{k=0}^{n-1}EX_k\mathit{1}_{\{T=k\}}+EX_n\mathit{1}_{\{T\geq n\}} & (479)\\
\underset{(\geq)}{=}& \sum_{k=0}^{n-1}EX_n\mathit{1}_{\{T=k\}}+EX_n\mathit{1}_{\{T\geq n\}} & (480)\\
=& EX_n & (481)
\end{aligned}
$$

另一方面，考虑前半部分不等式。若X关于Y是鞅，则$EX_0=EX_n$，成立。下设X关于Y是上鞅，令$\tilde{X}_0=0$，$\tilde{X}_n=\sum_{k=1}^n(X_k-E(X_k|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}))$，$\forall n\geq 0$。可以验证$\tilde{X}=\{\tilde{X}_n:n\geq 0\}$关于$Y$是鞅。则$0=E\tilde{X}_0=E\tilde{X}_{T\wedge n}=E\tilde{X}_n$。故

$$
0=E\tilde{X}_{T\wedge n}=E\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k-E(X_k|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}))\geq E\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k-X_{k-1})=EX_{T\wedge n}-EX_0 \tag{482}
$$

故$EX_0\geq EX_{T\wedge n}$，得证。

定理4.3.1：设$\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅，T关于Y是停时，$P(T<+\infty)=1$，且$E\sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|<+\infty$，则有$EX_T=EX_0$。

证明：$|X_{T\wedge n}|\leq\sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|\triangleq Z$，有$EZ<+\infty$。则由**控制收敛定理**，有

$$
EX_T=E\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}=\lim_{n\to\infty}EX_{T\wedge n}=EX_0 \tag{483}
$$

推论：设$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅，T关于Y是停时，$ET<+\infty$，若存在常数$b<+\infty$，使得

$$
E(|X_{n+1}-X_n||Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\mathit{1}_{\{n<T\}}\leq b\mathit{1}_{\{n<T\}} \tag{484}
$$

则$EX_T=EX_0$。

证明：令$Z_0=|X_0|$，$Z_n=|X_n-X_{n-1}|$，$\forall n\geq 1$，$W=\sum_{k=0}^T Z_k=|X_0|+|X_1-X_0|+\cdots+|X_T-X_{T-1}|$。有

$$
EW=E\sum_{n=1}^{\infty}Z_k\mathit{1}_{\{k\leq T\}}=\sum_{n=1}^{\infty}EZ_k\mathit{1}_{\{k\leq T\}} \tag{485}
$$

而

$$
EZ_k\mathit{1}_{\{k\leq T\}}=E(E(Z_k\mathit{1}_{k\leq T})|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1})\leq Eb\mathit{1}_{k\leq T}=bP(T\geq k) \tag{486}
$$

从而

$$
EW=\sum_{k=0}^{\infty}EZ_k\mathit{1}_{\{k\leq T\}}\leq b\sum_{k=0}^{\infty}P(T\geq k)=b(ET+1)\text{有限} \tag{487}
$$

因此

$$
|X_T|=|X_0+\sum_{k=0}^{T}(X_k-X_{k-1})|\leq|X_0|+\sum_{k=0}^{T}|X_k-X_{k-1}|=W \tag{488}
$$

所以

$$
|X_{T\wedge n}|\leq|X_0|+\sum_{k=0}^{T\wedge n}|X_k-X_{k-1}|\leq W \tag{489}
$$

进一步，

$$
E\sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|\leq EW<+\infty \tag{490}
$$

另一方面，$ET<+\infty$，因此$P(T<+\infty)=1$，从而由定理知$EX_T=EX_0$。

定理4.3.2（停时定理）：设$\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅，T关于Y是停时，若

1. $P(T<+\infty)=1$
2. $E|X_T|<+\infty$
3. $\lim_{n\to\infty}E|X_n\mathit{1}_{\{T\geq n\}}|=0$

则$EX_T=EX_0$。

证明：

$$
\begin{aligned}
X_T =& X_T\mathit{1}_{\{T\leq n\}}+X_T\mathit{1}_{\{T>n\}} & (491)\\
=& X_{T\wedge n}\mathit{1}_{\{T\leq n\}}+X_T\mathit{1}_{\{T>n\}} & (492)
\end{aligned}
$$

因此

$$EX_T = EX_{T\wedge n} - EX_{T\wedge n}1_{\{T>n\}} + EX_T1_{\{T>n\}} \tag{493}$$

由第三个条件，有$\lim_{n\to\infty} EX_{T\wedge n}1_{\{T>n\}} = \lim_{n\to\infty} EX_n1_{\{T>n\}} = 0$。且由控制收敛定理，$\lim_{n\to\infty} EX_T1_{\{T>n\}} = E\lim_{n\to\infty} X_T1_{\{T>n\}} = 0$，而$EX_{T\wedge n} = EX_0$，令$n\to\infty$时依然成立。因此有$EX_T = EX_0$，得证。

推论：设$\{X_n : n\geq 0\}$关于$Y = \{Y_n : n\geq 0\}$是鞅，T关于Y是停时，若

1. $P(T<+\infty) = 1$
2. 存在$k<+\infty$，使得$\forall n\geq 0$，$EX^2_{T\wedge n}\leq k$

则$EX_T = EX_0$。

证明：先证$EX^2_T<+\infty$。

有$EX^2_{T\wedge n}1_{\{T\leq n\}}\leq EX^2_{T\wedge n}\leq k$，因此

$$\lim_{n\to\infty} EX^2_T1_{\{T\leq n\}} = E\lim_{n\to\infty} X^2_T1_{\{T\leq n\}} = EX^2_T\leq k<+\infty \tag{494}$$

进一步地，由Cauchy-Shwarz不等式，有

$$E|X_T| = E|X_T|\cdot 1\leq (EX^2_T)^{\frac{1}{2}}(E1^2)^{\frac{1}{2}} = E(X^2_T)^{\frac{1}{2}}<+\infty \tag{495}$$

及

$$\begin{aligned}(E(|X_n1_{\{T>n\}}|))^2 =&(E(|X_{T\wedge n}1_{\{T>n\}}|))^2 &(496)\\ \leq& EX^2_{T\wedge n}E1^2_{\{T>n\}}\leq kP(T>n)\to 0\quad (n\to\infty) &(497)\end{aligned}$$

因此$\lim_{n\to 0} E(|X_n1_{\{T>n\}}|) = 0$。从而由停时定理，即有$EX_T = EX_0$。

例2：（$\mathbb{Z}^1$上的紧邻随机游动）设$Y_0 = 0$，$\{Y_n : n\geq 1\}$是一个独立同分布的随机变量序列，$P(Y_n = 1) = p\geq 0$，$P(Y_n = -1) = 1-p\triangleq q$。令$X_0 = 0$，$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$。击中时$T_j = \inf\{n\geq 1 : X_n = j\}$，$T\triangleq T_a\wedge T_b$。令$V_a\triangleq P(T_a<T_b|X_0 = 0)$，$V_b\triangleq P(T_b<T_a|X_0 = 0)$，$a<0<b$。

1. $p = q = \frac{1}{2}$，此时为简单随机游走。有$P(T_a<+\infty) = 1$，$P(T<+\infty) = 1$。有$\{X_n : n\geq 0\}$关于$\{Y_n : n\geq 0\}$是鞅。有

   $$E\sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|\leq \max(|a|,|b|)<+\infty \tag{498}$$

   由定理4.3.1，$EX_T = EX_0 = 0$。而$0 = EX_T = aV_a + bV_b$，而$V_a + V_b = 1$，因此

   $$\begin{cases} V_a = \frac{b}{b-a}\\ V_b = \frac{-a}{b-a}\end{cases} \tag{499}$$

   $\forall n\geq 0$，令$Z_n = X^2_n - n$，则$\{Z_n :\geq 0\}$关于$\{Y_n : n\geq 0\}$是鞅。由引理4.3.2，$EZ_{T\wedge n} = E(X^2_{T\wedge n} - T\wedge n) = EZ_0 = 0$。从而$EX^2_{T\wedge n} = ET\wedge n$。由单调收敛定理，

   $$ET = \lim_{n\to\infty} ET\wedge n = \lim_{n\to\infty} EX^2_{T\wedge n} = EX^2_T \tag{500}$$

   而$EX^2_T = a^2V_a + b^2V_b = |a|b$，从而$ET = |a|b$。

2. $p>q$的情形。$EY_n = p-q\triangleq\mu>0$。$\forall n\geq 0$，令$U_n = X_n - n\mu = \sum_{k=1}^n (Y_k-\mu)$，则$\{U_n : n\geq 0\}$关于$\{Y_n : n\geq 0\}$是鞅。由引理4.3.2，$EU_{T\wedge n} = EU_0 = 0$，因此

   $$EX_{T\wedge n} = \mu E(T\wedge n) \tag{501}$$

   有$P_0(T_b<+\infty) = 1$，$P_0(T<+\infty) = 1$。则由单调收敛定理，$\lim_{n\to\infty} E(T\wedge n) = ET$。另一方面，$|X_{T\wedge n}|\leq \max(|a|,b)$，因此$\lim_{n\to\infty} EX_{T\wedge n} = EX_T$。所以$ET = \frac{1}{\mu}EX_T$。

   > 注意，此时$E\sup_{n\geq 0}|U_{T\wedge n}| = E\sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n} - n\mu|$不能证明小于$\infty$。因此不能使用定理4.3.1得出$EU_T = EU_0 = 0$，而只能使用引理4.3.2得出$EU_{T\wedge n} = EU_0 = 0$。

   $\forall n\geq 0$，令$V_n = (\frac{q}{p})^{X_n}$，则$\{V_n : n\geq 0\}$关于$\{Y_n : n\geq 0\}$是鞅。$\forall n\leq T = T_a\wedge T_b$，此时$a\leq X_n\leq b$，且有$0<\frac{q}{p}\leq 1$，从而

   $$(\frac{q}{p})^b\leq V_n = (\frac{q}{p})^{X_n}\leq (\frac{q}{p})^a \tag{502}$$

   所以$E|V_T|\leq (\frac{q}{p})^a<+\infty$，以及

   $$0\leq \lim_{n\to\infty} EV_n1_{\{T>n\}}\leq \lim_{n\to\infty}(\frac{q}{p})^a1_{T>n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{q}{p})^aP(T>n) = 0 \tag{503}$$

   因此由定理4.3.2，$EV_T = EV_0 = 1$，也即

   $$(\frac{q}{p})^aV_a + (\frac{q}{p})^bV_b = 1 \tag{504}$$

以及$V_a+V_b=1$。因此

$$\begin{cases} V_a = \frac{1-(\frac{q}{p})^b}{(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^b} \\ V_b = \frac{(\frac{q}{p})^a-1}{(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^b} \end{cases} \tag{505}$$

所以

$$ET = \frac{1}{\mu}EX_T = \frac{1}{p-q}(aV_a+bV_b) = \frac{b}{(p-q)} - \frac{(b-a)[1-(\frac{q}{p})^b]}{(p-q)[(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^b]} \tag{506}$$

4.4 鞅收敛定理

$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$是（下）鞅，考虑$\lim_{n\to\infty}X_n$，a.s.（依概率、依均方）。

> 对于数列$\{a_n:n\geq 0\}$，有
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n\text{存在} \Leftrightarrow \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n \tag{507}$$
>
> 反过来
>
> $$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a_n\text{不存在} && (508)\\ \Leftrightarrow &\varliminf_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty} a_n && (509)\\ \Leftrightarrow &\exists a,b\in\mathbb{R},\ s.t.\ \varliminf_{n\to\infty} a_n < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} a_n && (510) \end{aligned}$$

令$V^{(n)}(a,b)(\omega)=(X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$向上穿越$(a,b)$的次数。即令$\alpha_0=0$，$\alpha_1=\inf\{n\geq 0,X_n\leq a\}$，$\alpha_2=\inf\{n>\alpha_1,X_n\geq b\}$，递归定义$\alpha_{2k-1}=\inf\{n>\alpha_{2k-2},X_n\leq a\}$，$\alpha_{2k}=\inf\{n>\alpha_{2k-1},X_n\geq b\}$，$k\in\mathbb{N}^+$。

则$V^{(n)}(a,b)=\max\{k\geq 0:\alpha_{2k}\leq n\}$。可能取值为0，1，2，$\cdots$，$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。

引理4.4.1（Doob上穿不等式）：设$X=\{X_n:n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n:n\geq 0\}$是下鞅，$V^{(n)}(a,b)$表示$\{X_k:0\leq k\leq n\}$上穿(a,b)的次数（$a<b$），则有

$$EV^{(n)}(a,b)\leq \frac{E(X_n-a)^+-E(X_0-a)^+}{b-a}\leq\frac{EX_n^+ +|a|}{b-a} \tag{511}$$

证明：有X关于Y是下鞅，而$g(x)=(x-a)^+$是凸函数，因此有$\{(X_n-a)^+:n\geq 0\}$关于Y也是下鞅。

> 首先，有$E(X_n-a)^+\leq E(|X_n|+|a|)<+\infty$。其次
>
> $$\begin{aligned} E((X_{n+1}-a)^+|Y_n,Y_{n-1},\cdots,Y_0) =& E(X_{n+1}\vee a|Y_n,\cdots,Y_0)-a && (512)\\ \geq& E(X_n|Y_n,\cdots,Y_0)\vee a-a && (513)\\ \geq& X_n\vee a-a=(X_n-a)^+ && (514) \end{aligned}$$

而$\{\tilde{X}_k=(X_k-a)^+:0\leq k\leq n\}$上穿区间$(0,b-a)$的次数就等于$V^{(n)}(a,b)$。则要证的式子等价于

$$(b-a)EV^{(n)}(a,b)\leq E\tilde{X}_n-E\tilde{X}_0 \tag{515}$$

记

$$\{\epsilon_i=1\}=\cup_{k=1}^{\infty}\{\alpha_{2k-1}<i\leq\alpha_{2k}\}=\cup_{k=1}^{\infty}\{\alpha_{2k-1}\leq i-1\}\backslash\{\alpha_{2k}\leq i-1\} \tag{516}$$

这表示上穿的片段，由上推导可以看出是由$Y_0,\cdots,Y_{i-1}$决定的，因此是停时。对称的，记

$$\{\epsilon_i=0\}=\cup_{k=1}^{\infty}\{\alpha_{2k}<i\leq\alpha_{2k+1}\} \tag{517}$$

若$\epsilon_i=1$，其上一次下穿的时间为α_{2k-1}，下一次上穿的时间为α_{2k}。则$\tilde{X}_{\alpha_{2k-1}}\leq 0$，$\tilde{X}_{\alpha_{2k}}\geq b-a$。从而

$$(b-a)V^{(n)}(a,b)\leq\sum_{k=1}^{V^{(n)}(a,b)}(\tilde{X}_{\alpha_{2k}}-\tilde{X}_{\alpha_{2k-1}})=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{X}_i-\tilde{X}_{i-1})\epsilon_i \tag{518}$$

所以

$$
\begin{aligned}
(b-a)EV^{(n)}(a,b) &\le \sum_{i=1}^{n} E(\tilde{X}_i-\tilde{X}_{i-1})\epsilon_i && (519)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(E(\tilde{X}_i-\tilde{X}_{i-1})\epsilon_i|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{i-1}) && (520)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(\epsilon_i E(\tilde{X}_i-\tilde{X}_{i-1})|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{i-1}) && (521)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(\epsilon_i (E(\tilde{X}_i|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{i-1})-\tilde{X}_{i-1})) && (522)\\
&\le \sum_{i=1}^{n} E(E(\tilde{X}_i|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{i-1})-\tilde{X}_{i-1})) && (523)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(\tilde{X}_i)-E(\tilde{X}_{i-1}) = E(\tilde{X}_n)-E(\tilde{X}_0) && (524)
\end{aligned}
$$

此即为（9）式。因此得证。

> 注意到第二个不等号是平凡的。
>
> $$\frac{E(X_n-a)^+-E(X_0-a)^+}{b-a} \le \frac{E(X_n-a)^+}{b-a} \le \frac{E|X_n|+a}{b-a} = \frac{EX_n^+ + a}{b-a} \tag{525}$$

4.4 鞅收敛定理

定理：设$\{X_n:n\ge 0\}$关于$\{Y_n:n\ge 0\}$是下鞅，$\sup_{n\ge 0} E|X_n|<+\infty$，则存在随机变量$X_\infty$使得

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty) = 1 \tag{526}$$

且$E|X_\infty|<+\infty$。

证明：先证$\sup_{n\ge 0} E|X_n|<+\infty \Leftrightarrow \sup_{n\ge 0} EX_n^+<+\infty$。有

$$EX_n^+ \le E|X_n| = E(2X_n^+ - X_n) = 2EX_n^+ - EX_n \le 2EX_n^+ - EX_0 \tag{527}$$

取sup即得结论（$E|X_n|$被EX_n^+控制）。

$\forall a<b\in\mathbb{R}$，由单调收敛定理

$$
\begin{aligned}
EV(a,b) =&E\lim_{n\to\infty} V^{(n)}(a,b) && (528)\\
=&\lim_{n\to\infty} EV^{(n)}(a,b) && (529)\\
\le&\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{EX_n^+ + |a|}{b-a} && (530)\\
\le&\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sup_{n\ge 0} EX_n^+ + |a|}{b-a} < +\infty && (531)
\end{aligned}
$$

所以$P(V(a,b)<+\infty)=1$，反过来，$P(V(a,b)=\infty)=0$。考虑

$$
\begin{aligned}
P(\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\text{不存在}\}) \le&P(\cup_{a<b\in\mathbb{Q}}\{\omega\in\Omega:\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega)<a<b<\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega)\}) && (532)\\
\le&P(\cup_{a<b\in\mathbb{Q}}\{\omega\in\Omega:V(a,b)(\omega)=+\infty\}) && (533)\\
\le&\sum_{a<b\in\mathbb{Q}} P(V(a,b)=+\infty)=0 && (534)
\end{aligned}
$$

因此$P(\lim_{n\to\infty} X_n\text{存在})=1$。定义$X_n\triangleq\lim_{n\to\infty} X_n$。则

$$E|X_\infty| = E\lim_{n\to\infty}|X_n| \overset{Fatou\text{引理}}{\le} \underline{\lim}_{n\to\infty} E|X_n| \le \sup_{n\ge 0} E|X_n| < +\infty \tag{535}$$

从而定理得证。

推论：若$\{X_n:n\ge 0\}$关于$\{Y_n:n\ge 0\}$是非负上鞅，则$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty)=1$，且$EX_\infty\le EX_0$。

证明：$\{Z_n\triangleq -X_n:n\ge 0\}$关于$\{Y_n:n\ge 0\}$是下鞅，有$\sup_{n\ge 0}E|X_n|=\sup_{n\ge 0}EX_n\le EX_0<+\infty$，因此存在一个随机变量$X_\infty$，使得$P(\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty=1)$。另一方面，有

$$EX_\infty = E\lim_{n\to\infty} X_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} EX_n \le EX_0 \tag{536}$$

例1：（Polya坛子模型）设坛子中有r个红球，g个绿球，每次从中任取一个球，观察其颜色后放回，并且还要放入与之同色的c个球。令$X_n=n$次抽取后坛中绿球比例，$Y_n=(n\text{次抽取后坛中红球数，}n\text{次抽取后坛中红球数})=(R_n,G_n)$。

首先，显然$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$可以互相表示，且Y具有马氏性。有

$$E(X_{n+1}|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n) = E(X_{n+1}|Y_n) \tag{537}$$

而

$$P\left(X_{n+1}=\frac{j+c}{i+j+c}|Y_n=(i,j)\right)=\frac{j}{i+j} \tag{538}$$

$$P\left(X_{n+1}=\frac{j}{i+j+c}|Y_n=(i,j)\right)=\frac{i}{i+j} \tag{539}$$

所以

$$E(X_{n+1}|Y_n=(i,j))=\frac{j}{i+j}\Longrightarrow E(X_{n+1}|Y_n)=\frac{G_n}{R_n+G_n}=X_n \tag{540}$$

也即$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是非负上鞅，由推论知$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$，a.s.。

考虑前m次抽取到绿球，接下来$n-m$次取到红球的概率$\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1=\frac{g}{r+g}\cdot\frac{g+c}{r+g+c}\cdots\frac{g+(m-1)c}{r+g+(m-1)c}\cdot\frac{r}{r+g+c}\cdots\frac{r+(n-m-1)c}{r+g+(n-m)c} \tag{541}$$

前n次抽取中，抽到m次绿球，$n-m$次红球，每个抽取结果的概率同上。其概率为$C_n^m\mathcal{P}_1$。

考虑一些特殊情况。设$r=g=c=1$。有

$$P(X_n=\frac{m+1}{n+2})=P(G_n=m+1)=C_n^m\frac{m!(n-m)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1} \tag{542}$$

也即

$$P(X_n=\frac{l}{n+2})=\frac{1}{n+1},\quad l=1,2,\cdots,n+1 \tag{543}$$

有$X_\infty\sim\mathcal{U}[0,1]$，为$[0,1]$上的均匀分布。

一般地，$X_\infty\sim\mathcal{B}(\frac{g}{c},\frac{r}{c})$，有概率密度$\frac{\Gamma(\frac{g+r}{c})}{\Gamma(\frac{g}{c})\Gamma(\frac{r}{c})}x^{\frac{g}{c}-1}(1-x)^{\frac{r}{c}-1}$，$0<x<1$。

例2（Gaton-Watson分支过程）设$\{\xi_i^n:n\geq 0,i\geq 0\}$为一组独立同分布的非负整值随机变量。初始$Y_0=1$，$Y_{n+1}=\sum_{i=1}^{Y_n}\xi_i^n$，$n\geq 0$。其中$\xi_i^n$表示第$n$代中第$i$个个体的后代个数，$Y_n$表示生物群体中第$n$代个体总数。设

$$P(\xi_i^n=k)=p_k,\quad k=0,1,2,\cdots\quad\text{表示子代数目的分布} \tag{544}$$

设平均后代数$\mu=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k>0$。有$\{Y_n:n\geq 0\}$是一个时齐马氏链。

令$X_n=\frac{Y_n}{\mu^n}$，$n\geq 0$。有

$$E(X_{n+1}|Y_n,\cdots,Y_0)=E(X_{n+1}|Y_n) \tag{545}$$

而

$$E(Y_{n+1}|Y_n=i)=E(\sum_{k=1}^{Y_n}\xi_k^n|Y_n=i)=E(\sum_{k=1}^{i}\xi_k^n|Y_n=i) \tag{546}$$

$$=E(\sum_{k=1}^{i}\xi_k^n)=i\mu \tag{547}$$

$$\Rightarrow E(Y_{n+1}|Y_n)=Y_n\mu \tag{548}$$

所以

$$E(X_{n+1}|Y_n)=\frac{Y_n}{\mu^n}=X_n \tag{549}$$

则$\{X_n:n\geq 0\}$关于$\{Y_n:n\geq 0\}$是鞅。而X_n非负，因此其为非负上鞅。由推论，存在X_∞使得$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$，a.s.。有以下结论：

1. （下临界）若$\mu<1$，则$P(\exists M>0,s.t.\forall n\geq M,Y_n=0)=1$。从而$X_n=\frac{Y_n}{\mu_n}\xrightarrow{a.s.}0(n\to\infty)$。

   这是因为，$EX_n=E\frac{Y_n}{\mu^n}=EX_0=1$，所以$EY_n=\mu^n$，由Markov不等式，

$$P(Y_n>0)=P(Y_n\geq 1)\leq EY_n\mathit{1}_{\{Y_n\geq 1\}}=EY_n=\mu^n\to 0(n\to\infty) \tag{550}$$

   所以$\forall\epsilon>0$，$P(\frac{Y_n}{\mu^n}<\epsilon)\leq P(Y_n>0)\to 0$，因此$\frac{Y_n}{\mu^n}\xrightarrow{P}0$。而$Y_n\leq\frac{Y_n}{\mu^n}=X_n$，因此$Y_n\xrightarrow{a.s.}0$，也即几乎必然灭绝。

2. （临界）若$\mu=1$，$P(\xi_i^n=1)<1$。则n充分大以后，$Y_n=0$，a.s.。此时$Y_n=X_n$，其几乎必然收敛到Y_∞。

   $\forall k\in\mathbb{N}^+$，$P(Y_n=k,\forall n\geq N)=P(Y_N=k)P(Y_{N+1}=k|Y_N=k)P(Y_{N+2}=k|Y_{N+1}=k,Y_N=k)\cdots$。也即

$$P(Y_n=k,\forall n\geq N)=\lim_{n\to\infty}P(Y_N=k)\prod_{m=0}^{n}P(Y_{n+m+1}=k|Y_{n+m}=k) \tag{551}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P(Y_n=k)p_{kk}^n=0\quad(\because p_{kk}<1) \tag{552}$$

所以$Y_\infty = 0$，a.s.。

3. （上临界）若$\mu > 1$，则$P(Y_n > 0, \forall n \geq 0) > 0$。有结论（Kesten-Stigum）：

$$W = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{\mu^n}\text{不恒为0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k k \ln k < \infty \tag{553}$$

设$\{Y_n : n \geq 1\}$是独立同分布的随机变量序列，$EY_n = 0$，$EY_n^2 = \sigma^2$。令$X_0 = 0$，$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$。由**Chebyshev不等式**，$\forall \epsilon > 0$，

$$P(|X_n| > \epsilon) \leq \frac{VarX_n}{\epsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{554}$$

由此，可以得到**Kolmogorov最大值不等式**：

$$\epsilon^2 P(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| > \epsilon) \leq n\sigma^2 \tag{555}$$

命题（Doob不等式）：设$\{X_n : n \geq 0\}$关于$\{Y_n : n \geq 0\}$是下鞅，$\forall n \geq 0$，有$X_n \geq 0$，则$\forall \lambda > 0$，有

$$\lambda P(\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda) \leq EX_n \tag{556}$$

证明：令$T = \inf\{k \geq 0 : X_k > \lambda\}$（为一个击中时），由引理4.3.2，$EX_n \geq EX_{T\wedge n} \geq EX_{T\wedge n} 1_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda\}}$。当$\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda$时，有$T \leq n$，$T \wedge n = T$。所以

$$\begin{aligned} EX_n \geq & EX_{T\wedge n} 1_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda\}} & (557)\\ = & EX_T 1_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda\}} & (558)\\ \geq & \lambda P(\max_{0\leq k\leq n} X_k > \lambda) & (559)\end{aligned}$$

得证。

推论：设$\{X_n : n \geq 0\}$关于$\{Y_n : n \geq 0\}$是鞅，则$\forall \lambda > 0$，有

$$\lambda P(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| > \lambda) \leq E|X_n| \tag{560}$$

注意因为$|x|$是凸函数，因此$\{|X_n| : n \geq 0\}$关于$\{Y_n : n \geq 0\}$是下鞅，则应用Doob不等式即得。

定理：设$\{X_n : n \geq 0\}$关于$\{Y_n : n \geq 0\}$是鞅，且存在常数$k > 0$使得$EX_n^2 \leq k < +\infty$，则存在随机变量X_∞（有限值）使得$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty) = 1$，且$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X_\infty|^2 = 0$（均方收敛）。由此，$EX_0 = \lim_{n\to\infty} EX_n = EX_\infty$。

4.5 连续时间参数鞅

定义：若随机过程$X = \{X_t : t \geq 0\}$满足

1. $\forall t \geq 0$，$|EX_t| < +\infty$
2. $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$，有$E(X_{t_{n+1}} | X_{t_n}, \cdots, X_{t_0}) \underset{(\geq,\leq)}{=} X_{t_n}$，a.s.

则称$\{X_t : t \geq 0\}$是（下/上）鞅。

若参考另一个过程$\{Y_t : t \geq 0\}$，以及X_t是由$\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}$决定，则称$\{X_t : t \geq 0\}$关于$\{Y_t : t \geq 0\}$是（下/上）鞅。

定义：对随机过程$X = \{X_t : t \geq 0\}$，若取值于$\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$的随机变量$T$满足$\forall t \geq 0$，$\{T \leq t\}$发生与否由$\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$决定，即$1_{T\leq t} = f(X_s : 0 \leq s \leq t)$，则称$T$是$X$的**停时**。

定理（停时定理）设$X = \{X_t : t \geq 0\}$是鞅，T是X的停时，$P(T < +\infty) = 1$，且$E\sup_{t\geq 0} |X_{T\wedge t}| < +\infty$，则$EX_T = EX_0$。

例：设$N = \{N_t : t \geq 0\} \sim PP(\lambda)$，$\lambda > 0$。$\forall t \geq 0$，令$X_t = N_t - \lambda t$，$Y_t = X_t^2 - \lambda t$。$U_t = \exp\{-\theta N_t + \lambda t(1 - e^{-\theta})\}$（$\theta \in \mathbb{R}$）。则$\{X_t : t \geq 0\}$，$\{Y_t : t \geq 0\}$，$\{U_t : t \geq 0\}$关于$N$是鞅。

第五章 布朗运动

5.1 随机游动极限与布朗运动定义

中心极限定理，CLT：$\{Y_n : n \geq 1\}$是一个独立同分布的随机变量序列，$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$，$EY_n = 0$，$VarY_n = EY_n^2 = 1$。令$S_0 = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$，则$ES_n = 0$，$VarS_n = n$。则

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} dx \quad \text{（依分布收敛）} \tag{561}$$

> Donsker不变原理（泛函中心极限定理）

粒子每经过Δt时间向左或向右移动Δx，$X_t = t$时刻粒子的位置，$X_t = \Delta x \sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} Y_k = \Delta x S_{[\frac{t}{\Delta t}]}$。因此$EX_t = 0$，$VarX_t = \Delta x^2 [\frac{t}{\Delta t}]$。取$\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$，$c > 0$是一个常数。则$VarX_t = c^2 \Delta t [\frac{t}{\Delta t}] \to c^2 t \ (\Delta t \downarrow 0)$。从而根据中心极限定理，

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} P\left(\frac{X_t}{\sqrt{c^2t}}\le x\right)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} P\left(\frac{\Delta x S_{[\frac{t}{\Delta t}]}}{\sqrt{c^2t}}\le x\right)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} P\left(\frac{S_{[\frac{t}{\Delta t}]}}{\sqrt{\frac{t}{\Delta t}}}\le x\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1) \tag{562}$$

从而

$$X_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,c^2t),\quad \forall t>0 \tag{563}$$

定义：若实值随机过程$X=\{X_t:t\ge 0\}$满足

1. X是独立增量过程。
2. $\forall s,t>0$，$X_{s+t}-X_s\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2 t)$。
3. 几乎所有轨道连续，也即对几乎所有ω，$X_t(\omega)$是连续函数。

则称X是布朗运动（或维纳过程，Wiener Process）。当$\sigma^2=1$时，称X是标准布朗运动，此时若$X_0=0$，则$X_t\sim\mathcal{N}(0,t)$。下考虑**标准布朗运动（BM）**。

1. **标准布朗运动的有限维联合概率密度**

   定理：设$B=\{B_t:t\ge 0\}$是标准BM，$B_0=0$，$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})$的联合概率密度

   $$g_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n p(t_i-t_{i-1},x_{i-1},x_i)\quad(t_0\triangleq 0,x_0\triangleq 0) \tag{564}$$

   其中

   $$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} \tag{565}$$

   证明：令$Y_1=B_{t_1}$，$Y_i=B_{t_i}-B_{t_{i-1}}$，$2\le i\le n$，则根据BM定义，有$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$的联合概率密度

   $$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\left\{-\frac{y_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right\} \tag{566}$$

   而$B_{t_i}=\sum_{k=1}^i Y_k$，这是一个线性变换，对应的Jacobi矩阵

   $$\left|\frac{\partial y_1,\cdots,\partial y_n}{\partial x_1,\cdots,\partial x_n}\right|=\begin{vmatrix}1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & -1 & 1\end{vmatrix}=1 \tag{567}$$

   所以

   $$g_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\left\{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right\} \tag{568}$$

   进一步地，考虑(B_{t_1},B_{t_2})，在$B_{t_1}=x$条件下，B_{t_2}的条件概率密度

   $$\frac{g_{t_1,t_2}(x_1,x_2)}{g_{t_1}(x_1)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\exp\left\{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right\} \tag{569}$$

   记$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}$，为**转移概率密度**。

   此外，有

   $$P(B_{s+t}>x|B_s=x)=P(B_{s+t}<x|B_s=x) \tag{570}$$

2. **布朗运动的马氏性**

   1. **正向马尔可夫性**

      $\forall 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，在给定$B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_{n-1}}$下，$B_{t_n}$条件概率密度与只给定$B_{t_{n-1}}$下$B_{t_n}$的条件概率密度相同。即

      $$f_{B_{t_n}}(x|B_{t_{n-1}}=x_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}=x_{t_2},B_{t_1}=x_{t_1})=f_{B_{t_n}}(x|B_{t_{n-1}}=x_{t_{n-1}})=p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x) \tag{571}$$

   2. **逆向马尔可夫性**

      $\forall t_1>t_2>\cdots>t_n$，在给定$B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_{n-1}}$下，$B_{t_n}$的条件概率密度与只给定$B_{t_{n-1}}$下$B_{t_n}$的条件概率密度相同。即

      $$f_{B_{t_n}}(x|B_{t_{n-1}}=x_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}=x_{t_2},B_{t_1}=x_{t_1})=f_{B_{t_n}}(x|B_{t_{n-1}}=x_{t_{n-1}}) \tag{572}$$

   3. **中间关于两边马尔可夫性**

      $\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$，有

$$f_{B_{t_i}}(x_i|B_{t_1}=x_1,\cdots,B_{t_{i-1}}=x_{i-1},B_{t_{i+1}}=x_{i+1},\cdots,B_{t_n}=x_n)=f_{B_{t_i}}(x_i|B_{t_{i-1}}=x_{i-1},B_{t_{i+1}}=x_{i+1}) \tag{573}$$

特别地，给定B_{t_1}，B_{t_3}条件下，B_{t_2}的条件概率密度，设$t_1=0,t_3=1,t_2=t$，$0<t<1$。设$B_0=0$。则

$$(B_t,B_1)\text{联合密度}f(x,y)=g_{t,1}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{t(1-t)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2t}-\frac{(y-x)^2}{2(1-t)}\right\} \tag{574}$$

而B_1密度

$$f_1(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{575}$$

所以$B_0=0,B_1=0$条件下，B_t的条件概率密度

$$f_t(x|B_0=0,B_1=0)=\frac{f(x,0)}{f_1(0)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2t(1-t)}\right\}\sim\mathcal{N}(0,t(1-t)) \tag{576}$$

定理5.1.2：$\forall 0\le t_1<t<t_2$，给定$B_{t_1}=a$，$B_{t_2}=b$条件下，

$$B_t\big|_{B_{t_1}=a,B_{t_2}=b}\sim\mathcal{N}\left(a+(b-a)\frac{t-t_1}{t_2-t_1},\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{t_2-t_1}\right) \tag{577}$$

证明：(B_{t_1},B_t,B_{t_2})的联合概率密度

$$g_{t_1,t,t_2}(x_1,x,x_2) \tag{578}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi t_1(t-t_1)(t_2-t)}}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t_1}-\frac{(x-x_1)^2}{2(t-t_1)}-\frac{(x_2-x)^2}{2(t_2-t)}\right\} \tag{579}$$

而(B_{t_1},B_{t_2})的联合概率密度

$$g_{t_1,t_2}(x_1,x_2) \tag{580}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t_1}-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right\} \tag{581}$$

因此给定$B_{t_1}=a$，$B_{t_2}=b$条件下，B_t的条件概率密度

$$f_{B_t|B_{t_1},B_{t_2}}(x|a,b)=\frac{g_{t_1,t,t_2}(a,x,b)}{g_{t_1,t_2}(a,b)} \tag{582}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{t_2-t_1}{(t-t_1)(t_2-t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{t-t_1}+\frac{(b-x)^2}{t_2-t}-\frac{(b-a)^2}{t_2-t_1}\right]\right\} \tag{583}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{t_2-t_1}{(t-t_1)(t_2-t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[x-\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)+a\right)\right]^2}{\frac{(t-t_1)(t_2-t)}{t_2-t_1}}\right\} \tag{584}$$

从而

$$\begin{aligned}E(B_t|B_{t_1}=a,B_{t_2}=b)&=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)+a\\ Var(B_t|B_{t_1}=a,B_{t_2}=b)&=\frac{(t-t_1)(t_2-t)}{t_2-t_1}\end{aligned} \tag{585}$$

3. **正态过程**

定义：若随机过程$X=\{X_t:t\in T\}$满足$\forall t_i\in T$，$i=1,2,\cdots,n$，$X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n}$服从$n$元正态分布，则称$X$是正态过程（高斯过程）。

有布朗运动是正态过程。

定理5.1.3：$B=\{B_t:t\ge0\}$是零初值的标准布朗运动$\Longleftrightarrow B$是正态过程，轨道连续，$B_0=0$，使得$EB_t=0$，协方差$EB_sB_t=s\wedge t\triangleq\min(s,t)$。

证明：先证必要性，设B是零初值标准布朗运动，则$B_t\sim\mathcal{N}(0,t)$，$EB_t=0$。不妨设$0<s<t$，则有

$$EB_sB_t=EB_s(B_t-B_s+B_s)=EB_s(B_t-B_s)+EB_s^2 \tag{586}$$

$$=EB_sE(B_t-B_s)+s=s \tag{587}$$

再证充分性：$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，考虑$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$的联合分布。而$(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$是$n$元正态过程。因此$(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$也是$n$元正态过程。且

$$\begin{aligned}E(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})&=0\\ E(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2&=E(B_{t_i}^2-2EB_{t_i}B_{t_{i-1}}+B_{t_{i-1}}^2)=t_i-2t_{i-1}+t_{i-1}=t_i-t_{i-1}\end{aligned} \tag{588}$$

所以$B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\sim\mathcal{N}(0,t_i-t_{i-1})$。另一方面，$\forall i<j$，$t_{i-1}<t_i\le t_{j-1}<t_j$，有

$$
\begin{aligned}
&E(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}) && (589)\\
=&EB_{t_i}B_{t_j}-EB_{t_i}B_{t_{j-1}}-EB_{t_{i-1}}B_{t_j}+EB_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}} && (590)\\
=&t_i-t_i-t_{i-1}+t_{i-1}=0 && (591)
\end{aligned}
$$

从而$B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$相互独立。从而$B$是独立增量过程，且$\forall s,t>0$，$B_{t+s}-B_t\sim\mathcal{N}(0,t)$。因此$B$是零初值的标准布朗运动，得证。

定理5.1.4：设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是零初值标准布朗运动，则

1. $\forall T>0$，$\{B_{T+t}-B_T:t\geq 0\}$也是标准布朗运动。（**时间平移**）
2. $\forall\lambda>0$，$\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}:t\geq 0\}$也是标准布朗运动。（**时空尺度变换**）
3. $\{tB_{\frac{1}{t}}1_{\{t>0\}}:t\geq 0\}$也是标准布朗运动。（**时间倒立**，需要检查一下轨道连续的性质）
4. $\forall T>0$，$\{B_{T-t}-B_T:0\leq t\leq T\}$也是标准布朗运动。（**时间倒立**）

> $B_0=0$时，有$P(\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t}=0)=1$，可以用来证明第三条**时间倒立**中的轨道连续性质。

4. **布朗运动的鞅**

   定理：设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是布朗运动，$B_0=0$，则

   1. $\{B_t:t\geq 0\}$
   2. $\{B_t^2-t:t\geq 0\}$
   3. $\{e^{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t}:t\geq 0\}$
   4. $\{e^{i\lambda B_t+\frac{\lambda^2}{2}t}:t\geq 0\}$

   关于布朗运动B是鞅。

5.2 布朗运动轨道性质

Borel-Cantelli引理：设$\{A_n\in\mathcal{F}_1:n\geq 1\}$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<+\infty$，则$P(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}A_k)=0$。即$P(A_n\ i.o.)=0$或$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)=0$。

证明：有$\cup_{k=n}^{\infty}A_k$关于n递减，则由概率的上连续性，有

$$
P(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{n=k}^{\infty}A_k)=P(\lim_{n\to\infty}\cup_{k=n}^{\infty}A_k)=\lim_{n\to\infty}P(\cup_{k=n}^{\infty}A_n)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=0 \tag{592}
$$

引理：对随机变量序列$\{X_n:n\geq 1\}$以及随机变量X，有

$$
\begin{aligned}
&P(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1 && (593)\\
\Longleftrightarrow&\forall\epsilon>0,P(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k-X|\geq\epsilon\})=0 && (594)\\
\Longleftrightarrow&\forall m\geq 1,P(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k-X|\geq\frac{1}{m}\})=0 && (595)
\end{aligned}
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\} && (596)\\
\Longleftrightarrow&\forall\epsilon>0,\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}\{|X_k(\omega)-X(\omega)|<\epsilon\} && (597)
\end{aligned}
$$

设$B=\{B_t:t\geq 0\}$为标准布朗运动，$B_0=0$。

根据Borel-Cantelli引理以及上引理，可知若$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_k-X|\geq\frac{1}{m})<+\infty$，$\forall m\geq 1$，则$P(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1$。

定理5.1：$\forall t\geq 0$，有

$$
P\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)^2=t\right)=1 \tag{598}
$$

证明：记$W_{n,k}=\left(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)^2-\frac{t}{2^n}$。则$EW_{n,k}=0$。且

$$
\begin{aligned}
EW_{n,k}^2=&E\left(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)^4-2\frac{t}{2^n}E\left(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)^2+\frac{t^2}{2^{2n}} && (599)\\
=&3\frac{t^2}{2^{2n}}-2\frac{t^2}{2^{2n}}+\frac{t^2}{2^{2n}} && (600)\\
=&\frac{2t^2}{2^{2n}} && (601)
\end{aligned}
$$

> **Chebyshev不等式**（Markov不等式）：$\forall\epsilon>0$，$P(|X|\geq\epsilon)\leq\frac{EX^2}{\epsilon^2}$。

定义$X_n\triangleq\sum_{k=1}^{2^n}W_{n,k}$，则只需证$P(\lim_{n\to\infty}X_n=0)=1$。而

$$
\begin{aligned}
P(|X_n|\geq\epsilon)\leq&\frac{EX^2}{\epsilon^2} &(602)\\
=&\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=1}^{2^n}VarW_{n,k}\quad(\because \text{独立随机变量的和的方差等于方差的和}) &(603)\\
=&\frac{1}{\epsilon^2}\cdot 2^n\cdot\frac{2t^2}{2^{2n}}=\frac{2}{\epsilon^2}\frac{t^2}{2^n} &(604)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\geq\epsilon)\leq\frac{2}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^2}{2^{2n}}<+\infty \tag{605}
$$

因此由$P(\lim_{n\to\infty}X_n=0)=1$，得证。

引理：令$Y_n=\max_{1\leq k\leq 2^n}\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|$，$\forall n\geq 1$，则$P(\lim_{n\to\infty}Y_n=0)=1$。

证明：$\forall n\geq 1$，$m\geq 1$，有

$$
\begin{aligned}
P(|Y_n|\geq\frac{1}{m})=&P(\cup_{k=1}^{2^n}\left\{\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|\geq\frac{1}{m}\right\})\leq\sum_{k=1}^{2^n}P(\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|\geq\frac{1}{m}) &(606)\\
\leq&\sum_{k=1}^{2^n}\frac{E\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|^4}{(\frac{1}{m})^4}\quad(\because Markov\text{不等式}) &(607)\\
=&\sum_{k=1}^{2^n}3(\frac{t}{2^n})^2m^4=3m^4\frac{t^2}{2^n} &(608)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\sum_{n=1}^{\infty}P(|Y_n|\geq\frac{1}{m})\leq\sum_{n=1}^{\infty}3m^4\frac{t^2}{2^n}<+\infty \tag{609}
$$

由m的任意性，$P(\lim_{n\to\infty}Y_n=0)=1$。

定理5.2.2：**非有限变差**

$$
P\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|=+\infty\right)=1 \tag{610}
$$

证明：记$A=\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}})^2=t\}$，$B=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq 2^n}|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}|=0$。则$P(A)=P(B)=1$，因此$P(AB)=1$。令$C=\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right|=+\infty\}$。只需证$AB\subset C$。

$\forall w\in AB$，有

$$
\sum_{k=1}^{2^n}(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}})^2\leq\max_{1\leq k\leq 2^n}|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}|\sum_{k=1}^{2^n}|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}| \tag{611}
$$

令$n\to\infty$，则有

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}|=\infty \tag{612}
$$

因此$\omega\in C$，从而原定理得证。

> 因为非有限变差，因此无法对布朗运动使用Reimann-Stiledges积分

定理：给定$t>0$，设$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=t$，记$\lambda=\max_{1\leq k\leq n}(t_k-t_{k-1})$，则

$$
\lim_{\lambda\to 0}E(\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2-t)^2=0 \tag{613}
$$

即$\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2$**均方收敛到**$t$，记为$\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2\overset{m.s.}{=}t$。

证明：记$Y_k=B_{t_k}-B_{t_{k-1}}$，$1\leq k\leq n$。则$Y_k\sim\mathcal{N}(0,t_k-t_{k-1})$。因此$EY_k^4=3(VarY_k)^2=3(t_k-t_{k-1})^2$，$EY_k^2=VarY_k=(t_k-t_{k-1})$。则$\forall k\neq l$，有

$$
EY_k^2Y_l^2=EY_k^2EY_l^2=(t_k-t_{k-1})(t_l-t_{l-1}) \tag{614}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2-t)^2 =&E(\sum_{k=1}^{n}Y_k^2-t)^2 &(615)\\
=&E(\sum_{k=1}^{n}Y_k^2)^2-2tE\sum_{k=1}^{n}Y_k^2+t^2 &(616)\\
=&\sum_{k=1}^{n}EY_k^4+2\sum_{i<j}EY_i^2EY_j^2-2tE\sum_{k=1}^{n}Y_k^2+t^2 &(617)\\
=&3\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})^2+2\sum_{i<j}(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})-t^2 &(618)\\
=&2\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})^2+(\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1}))^2-t^2 &(619)\\
=&2\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})^2 &(620)\\
\le&2\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\max_{1\le k\le n}|t_k-t_{k-1}|=2\lambda t &(621)
\end{aligned}
$$

令$\lambda\to 0$，即证。

定理：（左、右端点积分不同）

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}B_{t_{k-1}}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}}) \overset{m.s.}{=} \frac{1}{2}(B_t^2-t) \quad (\text{取左端点})\\
\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}B_{t_k}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}}) \overset{m.s.}{=} \frac{1}{2}(B_t^2+t) \quad (\text{取右端点})
\end{aligned}
\tag{622}
$$

证明：记$A_n=\sum_{k=1}^{n}B_{t_k}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})$，$C_n=\sum_{k=1}^{n}B_{t_{k-1}}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})$。有

$$
\begin{aligned}
A_n-C_n=\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2 \overset{\lambda\to 0,m.s.}{\longrightarrow} t\\
A_n+C_n=\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}^2-B_{t_{k-1}}^2)=B_t^2
\end{aligned}
\tag{623}
$$

有$\lim_{\lambda\to 0}E(A_n-C_n-t)^2=0$，$\lim_{\lambda\to 0}E(A_n+C_n-B_t^2)^2=0$。代入$A_n=B_t^2-C_n$，有

$$
\lim_{\lambda\to 0}E(B_t^2-2C_n-t)^2=0\Rightarrow\lim_{\lambda\to 0}E(\frac{B_t^2-t}{2}-C_n)^2=0 \tag{624}
$$

代入$C_n=B_t^2-A_n$，有

$$
\lim_{\lambda\to 0}E(2A_n-B_t^2-t)^2=0\Rightarrow\lim_{\lambda\to 0}E(A_n-\frac{B_t^2+t}{2})^2=0 \tag{625}
$$

从而原命题得证。

引理：设$B=\{B_t:t\ge 0\}$是标准布朗运动，对任意固定$t\ge 0$，有

$$
\begin{aligned}
P(\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=+\infty)=1\\
P(\underline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=-\infty)=1
\end{aligned}
\tag{626}
$$

定理：对布朗运动$\{B_t:t\ge 0\}$，$\forall t\ge 0$，几乎所有轨道在t处无有限导数，也即布朗运动的轨道几乎处处不可导。

布朗运动重对数率：

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1,\ a.s.\\
\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1,\ a.s.\\
\\
\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1,\ a.s.\\
\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=-1,\ a.s.
\end{aligned}
\tag{627}
$$

5.3 首中时与最大值

设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是一个标准布朗运动，$B_0=0$。令$T_a=\inf\{t\geq 0:B_t=a\}$。$\forall t>0$，$M_t=\max_{0\leq s\leq t}B_s$。

当$a>0$时，$\{T_a\leq t\}=\{M_t\geq a\}$。因此$P(T_a\leq t)=P(M_t\geq a)$。而

$$P(B_t\geq a)=P(B_t\geq a|T_a\leq t)P(T_a\leq t)+P(B_t\geq a|T_a>t)P(T_a>t) \tag{628}$$

$$=P(B_t\geq a|T_a\leq t)P(T_a\leq t) \tag{629}$$

而根据反射原理，$P(B_t\geq a|T_a\leq t)=P(B_t<a|T_a\leq t)=\frac{1}{2}$。所以

$$P(T_a\leq t)=2P(B_t\geq a)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \tag{630}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du=2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})) \tag{631}$$

$a<0$时，根据对称性，$P(T_a\leq t)=P(T_{-a}\leq t)$。因此一般地，有

$$P(T_a\leq t)=2(1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}})) \tag{632}$$

进一步地，有

$$P(T_a<+\infty)=\lim_{n\to\infty}P(T_a\leq n)=\lim_{n\to\infty}2(1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{n}}))=1 \tag{633}$$

也即是**常返的**。

又T_a是连续型随机变量，有概率密度

$$f_{T_a}(t)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\{-\frac{a^2}{2t}\}\mathit{1}_{t\geq 0} \tag{634}$$

所以

$$ET_a=\int_0^\infty P(T_a>t)dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\int_0^{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{u^2}{2}}dudt \tag{635}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\int_0^{\frac{a^2}{u^2}}dt\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{636}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{a^2}{u^2}e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{637}$$

$$\geq\frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\frac{1}{u^2}e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{638}$$

$$\geq\frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{1}{u^2}du=+\infty \tag{639}$$

因此布朗运动是**零常返的**。

记$o(t_1,t_2)=\{\exists t\in(t_1,t_2)\ s.t.\ B_t=0\}$。

定理5.3.1：$\bar{o}(t_1,t_2)=\{\forall t\in(t_1,t_2),B_t\neq 0\}$，则

$$P(\bar{o}(t_1,t_2))=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \tag{640}$$

取$t_1=xt$，$t_2=t$，$x\in(0,1)$，则

$$P(\bar{o}(xt,t))=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} \tag{641}$$

称为**反正弦律**。

5.4 布朗桥

$X=\{X_t:t\geq 0\}$，给定$X_0=x$，$X_{t_0}=y$条件下，考虑$\{X_t:0\leq t\leq t_0\}|_{X_0=x,X_{t_0}=y}$。

定义：设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是一个标准布朗运动，$B_0=0$，令$B_{00}(t)=B_t-tB_1$，$0\leq t\leq 1$，则$B_{00}(0)=B_{00}(1)=0$，称$\{B_{00}(t):0\leq t\leq 1\}$为**布朗桥**。

一般地，考虑$\{B_t+\frac{t}{t_0}(b-a-B_{t_0})+a:0\leq t\leq t_0\}$。

定理：$\{B_{00}(t):0\leq t\leq 1\}$的分布与$\{B_t:0\leq t\leq 1\}$在$B_1=0$条件下条件分布相同，即

$$\{B_{00}(t):0\leq t\leq 1\}\overset{d}{=}\{B_t:0\leq t\leq 1\}|_{B_0=0,B_1=0} \tag{642}$$

证明：布朗运动$B=\{B_t:0\le t\le 1\}$是一个正态过程，而$(B_{00}(t_1)=B_{t_1}-t_1B_1,\cdots,B_{00}(t_n)=B_{t_n}-t_nB_1)$是$(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n},B_1)$的线性变换，因此$\{B_{00}(t):0\le t\le 1\}$依然是正态过程。而$\{B_t:0\le t\le 1\}|_{B_0=0,B_1=0}$也是正态过程。

考虑期望：$EB_{00}(t)=E(B_t-tB_1)=EB_t-tEB_1=0$。由定理5.1.2，$E(B_t|B_0=B_1=0)=0$，$\forall 0\le t\le 1$。

考虑方差：$EB_{00}^2(t)=E(B_t-tB_1)^2=EB_t^2-2tEB_1B_t+t^2EB_1^2=t-2t^2+t^2=t(1-t)$。而由定理5.1.2，$E(B_t^2|B_0=B_1=0)=\frac{(1-t)(t-0)}{1-0}=t(1-t)$。

考虑协方差：$\forall 0\le s<t\le 1$，$Cov(B_{00}(s),B_{00}(t))=E(B_s-sB_1)(B_t-tB_1)=E(B_sB_t-tB_sB_1-sB_1B_t+stB_1^2)=s(1-t)$，

$$
\begin{aligned}
Cov(B_s,B_t|B_0=B_1=0)=&E(B_sB_t|B_0=B_1=0) &(643)\\
=&E(E(B_sB_t|B_t,B_0=B_1=0)|B_0=B_1=0) &(644)\\
&(\text{先对}B_t,B_0,B_1\text{取期望，再对}B_0,B_1\text{取期望，相当于直接对}B_0,B_1\text{取期望}) &(645)\\
=&E(B_tE(B_s|B_t,B_0=0)|B_0=B_1=0) &(646)\\
=&E(B_t[0+(B_t-0)\frac{s-0}{t-0}]|B_0=B_1=0) &(647)\\
=&E(\frac{s}{t}B_t^2|B_0=B_1=0) &(648)\\
=&\frac{s}{t}\frac{(t-0)(1-t)}{1-t}=s(1-t) &(649)
\end{aligned}
$$

所以$\{B_{00}(t):0\le t\le 1\}\overset{d}{=}\{B_t:0\le t\le 1\}|_{B_0=0,B_1=0}$。

> $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$。

5.5 布朗运动的变形与推广

5.5.1 在某点被吸收的布朗运动

设$B=\{B_t:t\ge 0\}$是一个标准BM，$B_0=0$。给定$x>0$，令$T_x=\inf\{t\ge 0:B_t=x\}$，及

$$
Z_t=\begin{cases}B_t, & t<T_x\\ x, & t\ge T_x\end{cases}=B_{T_x\wedge t} \tag{650}
$$

则Z_t是一个**混合型随机变量**（$P(Z_t=x)=P(t\ge T_x)>0$）。考虑Z_t的分布函数$F_{Z_t}(y)=P(Z_t\le y)$。

当$y\ge x$时，$F_{Z_t}(y)=P(Z_t\le y)=P(\Omega)=1$。特别地，$P(Z_t=x)=P(T_x\le t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}}du$。?(因此其分布函数相当于在$x$这一点直接跳到1)

当$y<x$时，$\{Z_t\le y\}=\{B_t\le y,T_x>t\}=\{B_t\le y\}\setminus\{T_x\le t\}\cap\{B_t\le y\}$。所以

$$
P(Z_t\le y)=P(B_t\le y)-P(B_t\le y,T_x\le t) \tag{651}
$$

而

$$
\begin{aligned}
P(B_t\le y,T_x\le t)=&P(B_t\le y|T_x\le t)P(T_x\le t) &(652)\\
=&P(B_t\ge 2x-y|T_x\le t)P(T_x\le t)\quad(\because\text{对称性}) &(653)\\
=&P(B_t\ge 2x-y,T_x\le t) &(654)\\
=&P(B_t\ge 2x-y) &(655)
\end{aligned}
$$

因此

$$
P(Z_t\le y)=P(B_t\le y)-P(B_t\ge 2x-y)=P(y-2x\le B_t\le y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{y-2x}^{y}e^{-\frac{u^2}{2t}}du \tag{656}
$$

所以

$$
F_{Z_t}(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{y-2x}^{x}e^{-\frac{u^2}{2t}}du, & y<x\\ 1, & y\ge x\end{cases} \tag{657}
$$

5.5.2 在原点反射的布朗运动

令$Y_t=|B_t|$，称$\{Y_t:t\ge 0\}$为在原点反射的布朗运动。求Y_t的分布函数。

$\forall y<0$，$P(Y_t\le y)=P(\phi)=0$。

$\forall y\ge 0$，$P(Y_t\le y)=P(-y\le B_t\le y)=2P(B_t\le y)-1$。所以$Y_t$有概率密度，

$$
f_{Y_t}(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}1_{\{y\ge 0\}} \tag{658}
$$

5.5.3 几何布朗运动

令$W_t = e^{B_t}$，称$\{W_t : t \geq 0\}$为几何布朗运动。设Y_n为时刻n商品的价格，$X_n = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$，$\forall n \geq 1$独立同分布。则$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$，$Y_0 = 1$。从而$\ln Y_n = \sum_{k=1}^{n} \ln X_k$。有

$$\frac{\ln Y_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{BM}\ \{B_t : t \geq 0\} \tag{659}$$

$$\exp\{\frac{\ln Y_{[nt]}}{\sqrt{n}}\} = Y_{[nt]}^{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} e^{B_t} = W_t \tag{660}$$

考虑W_t的矩生成函数

$$\begin{aligned}
\phi(s) = Ee^{sB_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx && (661)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}} e^{\frac{s^2 t}{2}} dx && (662)\\
&= e^{\frac{s^2 t}{2}} && (663)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{gathered}
EW_t = Ee^{B(t)} = \phi(1) = e^{\frac{t}{2}}\\
EW_t^2 = Ee^{2B_t} = e^{2t}\\
VarW_t = e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}
\end{gathered} \tag{664}$$

5.5.4 布朗运动的积分

令$S_t = \int_0^t B_u du$，$\{S_t : t \geq 0\}$称为**积分布朗运动**。则$\{S_t : t \geq 0\}$是一个正态过程。因为

$$S_t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} B_{ui}(t_i - t_{i-1}), \quad u_i \in [t_{i-1}, t_i], 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t \tag{665}$$

正态分布的和取极限还是正态分布。而考虑$0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n = T$,

$$(\sum_{i=1}^{m_1} B_{u_i}(t_i - t_{i-1}), \sum_{i=1}^{m_2} B_{u_i}(t_i - t_{i-1}), \cdots, \sum_{i=1}^{m_n} B_{u_i}(t_i - t_{i-1})) \tag{666}$$

为联合正态分布，则其取极限$\lambda \to 0$后依然也是正态分布。

定理：设随机过程$\{X_t : t \geq 0\}$使得$E|X| < +\infty$，$VarX_t < +\infty$，则

$$\begin{gathered}
E\int_0^t X_s ds = \int_0^t EX_s ds \quad (\textbf{Fubini}\text{定理})\\
E\int_0^s \int_0^t X_u X_v dudv = \int_0^s \int_0^t EX_u X_v duduv
\end{gathered} \tag{667}$$

S有

$$ES_t = E\int_0^t B_u du = \int_0^t EB_u du = 0 \tag{668}$$

$\forall 0 \leq \delta \leq t,$

$$\begin{aligned}
Cov(S_\delta, S_t) = ES_\delta S_t &= E\int_0^\delta B_u du \int_0^t B_v dv && (669)\\
&= \int_0^\delta \int_0^t EB_u B_v dvdu && (670)\\
&= \int_0^\delta \int_0^t u \wedge v dvdu && (671)\\
&= \int_0^\delta (\int_0^t u \wedge v dv + \int_u^t u \wedge v dv) du && (672)\\
&= \int_0^\delta (\int_0^u v dv + \int_u^t u dv) du && (673)\\
&= \int_0^\delta (\frac{u^2}{2} + u(t-u)) du && (674)\\
&= \frac{\delta^2}{2}(t - \frac{\delta}{3}) && (675)
\end{aligned}$$

5.6 带漂移的布朗运动

定义：设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是一个标准布朗运动，$\mu\in\mathbb{R}$是一个常数，$\forall t\geq 0$，令$X_t=B_t+\mu t$，称$\{X_t:t\geq 0\}$为带漂移系数μ的布朗运动（**漂移布朗运动**）。

考虑非对称随机游动在时空尺度变换下的极限过程。当时空尺度变换合适时，其极限会依分布收敛到漂移布朗运动。假设粒子（质点）在$\mathbb{R}$上运动，每隔Δt向左或向右移动Δx，向右概率p，向左概率为$q=1-p$，每次位移相互独立。设$\{Y_n:n\geq 1\}$是i.i.d的随机变量序列，$P(Y_n=1)=p$，$P(Y_n=-1)=q=1-p$。令$S_n=\sum_{k=1}^n Y_k$，$S_0=0$。t时刻粒子位置$X_t=\Delta x S_n$。

令$\Delta x=\sqrt{\Delta t}$，$p=(1+\mu\sqrt{\Delta t})/2$，$q=(1-u\sqrt{\Delta t})/2$，$\Delta t$足够小使得$p\geq 0$，$q\geq 0$。有

$$\begin{aligned}EX_t&=E(\Delta x S_{[t/\Delta t]})=\Delta x[t/\Delta t](p-q)=\mu\Delta t[\frac{t}{\Delta t}]\to\mu t\quad(\Delta t\downarrow 0)\\ VarX_t&=Var(\Delta x S_{[t/\Delta t]})=\Delta x^2[\frac{t}{\Delta t}][1-(p-q)^2]=\Delta t[\frac{t}{\Delta t}][1-\mu^2\Delta t]\to t\quad(\Delta t\downarrow 0)\end{aligned}\tag{676}$$

由中心极限定理，

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}X_t\overset{d}{\to}\mathcal{N}(\mu t,t)\overset{d}{=}B_t+\mu t\tag{677}$$

从而

$$\{X_t:t\geq 0\}\overset{d}{\longrightarrow}\{B_t+\mu t:t\geq 0\}\tag{678}$$

5.6带漂移的布朗运动

定理5.6.2：设$X=\{X_t=B_t+\mu t:t\geq 0\}$，是带漂移系数$\mu$的布朗运动，$\forall a,b>0$，$-b<x<a$，$T_a=\inf\{t\geq 0:X_t=a\}$，$T_{-b}=\inf\{t\geq 0:X_t=-b\}$，则

$$P(T_a<T_{-b}|X_0=x)=\begin{cases}\frac{e^{2\mu b}-e^{-2\mu x}}{e^{2\mu b}-e^{-2\mu a}}, & \mu\neq 0\\ \frac{b+x}{b+a}, & \mu=0\end{cases}\tag{679}$$

证明：记$T=T_a\wedge T_b$，$T\wedge n=\min(T,n)$。T关于X,B是停时。则$T\wedge n$关于X,B也是停时。$P_x(T\wedge n<+\infty)=1$。有$|X_{T\wedge n}|\leq\max(a,b)$。且

$$\sup_{t\geq 0}|B_{T\wedge n\wedge t}|\leq\sup_{t\geq 0}|X_{T\wedge n\wedge t}-\mu T\wedge n\wedge t|\leq\sup_{t\geq 0}|X_{T\wedge n\wedge t}|+|\mu|n\tag{680}$$

所以

$$E\sup_{t\geq 0}|B_{T\wedge n\wedge t}|\leq\max(a,b)+|\mu|n<+\infty\tag{681}$$

则由连续时间参数鞅的停时定理（定理4.5.1），有

$$0=EB_0=EB_{T\wedge n}=E(X_{T\wedge n}-\mu T\wedge n)\tag{682}$$

因此

$$EX_{T\wedge n}=\mu ET\wedge n\Leftrightarrow ET\wedge n=\frac{1}{\mu}EX_{T\wedge n}\tag{683}$$

而$|X_{T\wedge n}|\leq\max(a,b)$。所以$EX_{T\wedge n}\leq\frac{1}{\mu}\max(a,b)<+\infty$。因此由单调收敛定理，

$$ET=\lim_{n\to\infty}ET\wedge n\leq\frac{1}{|\mu|}\max(a,b)<+\infty\tag{684}$$

因此$P(T<+\infty)=1$。又由控制收敛定理，

$$ET=\lim_{n\to\infty}ET\wedge n=\frac{1}{\mu}\lim_{n\to\infty}EX_{T\wedge n}=\frac{1}{\mu}EX_T\tag{685}$$

$\forall t\geq 0$，令$V_t=\exp\{-2\mu X_t\}=\exp\{-2\mu B_t-2\mu^2 t\}$，则$\{V_t:t\geq 0\}$关于$B$是鞅。有$|V_{T\wedge t}|=V_{T\wedge t}\leq\exp\{2|\mu|\max(a,b)\}$。因此

$$E\sup_{t\geq 0}|V_{T\wedge t}|\leq\exp\{2|\mu|\max(a,b)\}<+\infty\tag{686}$$

因此由连续时间参数鞅的停时定理，假设$x=0$，有

$$1=EV_0=EV_T=\exp\{-2\mu a\}P_0(T_a<T_{-b})+\exp\{2\mu b\}P_0(T_{-b}<T_a)\tag{687}$$

而

$$P_0(T_a<T_{-b})+P_0(T_{-b}<T_a)=1\tag{688}$$

解得

$$\begin{cases}P_0(T_a<T_{-b})=\frac{1-\exp\{2\mu b\}}{\exp\{-2\mu a\}-\exp\{2\mu b\}}\\ P_0(T_-b<T_a)=1-P_0(T_a<T_{-b})\end{cases} \tag{689}$$

而

$$P(T_a<T_{-b}|X_0=x)=P(T_{a-x}<T_{-b-x}|X_0=0)=\frac{1-\exp\{2\mu(b+x)\}}{\exp\{-2\mu(a-x)\}-\exp\{2\mu(b+x)\}}=\frac{\exp(2\mu b)-\exp(-2\mu x)}{\exp(2\mu b)-\exp(-2\mu a)} \tag{690}$$

由此可计算出ET。

推论：设$X_t=B_t+\mu t$，$t\geq 0$，若$\mu<0$，则

$$P(\max_{t\geq 0}X_t\geq a|X_0=0)=e^{2\mu a} \tag{691}$$

即$\max_{t\geq 0}X_t\sim\epsilon(-2\mu)$，为一个指数分布。上定理中令$b\to+\infty$即得。

考虑**单边**。给定$x\in(0,b)$，T_x关于B是停时，而$\{B_t:t\geq 0\}$是鞅，由停时定理，有

$$EB_{T_x\wedge n}=EB_0=0\Leftrightarrow EX_{T_x\wedge n}=\mu ET_x\wedge n \tag{692}$$

由单调收敛定理，

$$ET_x=\lim_{n\to\infty}ET_x\wedge n=\frac{1}{\mu}\lim_{n\to\infty}EX_{T_x\wedge n}=\frac{1}{\mu}EX_{T_x} \tag{693}$$

> 证明$|E\min_{r\geq 0}X_t|<+\infty$，然后用$x$和$|\min_{t\geq 0}X_t|$来控制$X_{T_x\wedge n}$。而$\min_{r\geq 0}X_t\sim\epsilon(-2\mu a)$。

5.7 n维布朗运动

定义：若$X=\{X_t=(X_{1,t},X_{2,t},\cdots,X_{n,t}):t\geq 0\}$是取值于$\mathbb{R}^n$的随机过程，满足

1. $\forall 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m$，$X_{t_1}-X_0$，$X_{t_2}-X_{t_1}$，$\cdots$，$X_{t_m}-X_{t_{m-1}}$相互独立
2. $\forall s\geq 0$，$t\geq 0$，$X_{s+t}-X_s\sim\mathcal{N}(0,tI)$为一个$n$维正态分布，即$X_{s+t}-X_s$有概率密度

$$f(t,\vec{x})=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2t}) \tag{694}$$

3. 对每个$\omega\in\Omega$，$X_t(\omega)$是t连续函数

则称X是**n维标准布朗运动**。

若$X_0\in\mu$，$P(X_0\in A)=\mu(A)$，（μ是$(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$）上概率测度，而$X_t=X_t-X_0+X_0$，且$X_0$与$X_t-X_0$独立，有

$$P_\mu(X_t\in A)=\int_A\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\{-\frac{||\vec{y}-\vec{x}||^2}{2t}\}\mu(d\vec{x})dy \tag{695}$$

$X=\{X_t:t\geq 0\}$是一个零初值n维布朗运动$\Leftrightarrow$ $\{X_{i,t}:t\geq 0\}$，$i=1,2,\cdots,n$是n个相互独立一维零初值布朗运动。

性质：

1. 设$H\in\mathbb{R}_{n\times n}$正交阵，则$HX\triangleq\{HX_t:t\geq 0\}$，也是$n$维布朗运动。
2. 给定$a\in\mathbb{R}^n$，则$\{X_t+a:t\geq 0\}$也是布朗运动。
3. 给定常数$c>0$，则$\{\frac{X_{ct}}{\sqrt{c}}:t\geq 0\}$也是布朗运动。

证明1：

$$HX_{s+t}-HX_s=H(X_{s+t}-X_s) \tag{696}$$

因为$\forall 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$，$X_{t_1}-X_0$，$\cdots$，$X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$独立，因此$HX_{t_1}-HX_0=H(X_{t_1}-X_0)$，$\cdots$，$HX_{t_n}-HX_{t_{n-1}}=H(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})$也独立。

考虑特征函数

$$E\exp\{i(X_{s+t}-X_s),\vec{y}\}=\exp\{-\frac{t}{2}\sum_i^n y_i^2\},\quad\forall\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n \tag{697}$$

而H正交，因此H^{-1}也正交，$||H^{-1}\vec{y}||^2=||\vec{y}||^2$。所以$H(X_{s+t}-X_s)$的特征函数

$$E\exp\{i(H(X_{s+t}-X_s)),\vec{y}\}=E\exp\{i(X_{s+t}-X_s),H^{-1}\vec{y}\}=\exp\{\frac{t}{2}(H^{-1}\vec{y},H^{-1}\vec{y})\}=\exp\{\frac{t}{2}\sum_i^n y_i^2\} \tag{698}$$

因此$H(X_{s+t}-X_s)\sim\mathcal{N}(0,tI)$。

> 另一方面：

$$
\begin{aligned}
EH(X_{s+t}-X_s)=HE(X_{s+t}-X_s)=0\\
\text{协方差阵}H(tI)H^T=tHH^T=tI
\end{aligned} \tag{699}
$$

第七章 随机积分与随机微分方程

$$
\begin{aligned}
dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t\quad(\text{加上扰动})\\
X_t=X_0+\int_0^t b(X_s)ds+\int_0^t\sigma(X_s)dB_s
\end{aligned} \tag{700}
$$

7.1 H空间与均方收敛

定义：$H\triangleq\{(\Omega,\mathcal{F}_1,P)\text{上随机变量序列}X:EX^2<+\infty\}=L^2(\Omega,\mathcal{F}_1,P)$，则$H$是线性空间，即$\forall X_1,X_2\in H$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$，$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2\in H$，因为

$$
\begin{aligned}
E(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)^2=&\alpha_1^2EX_1^2+\alpha_2^2EX_2^2+2\alpha_1\alpha_2EX_1X_2 && (701)\\
\le&\alpha_1^2EX_1^2+\alpha_2^2EX_2^2+2|\alpha_1\alpha_2||EX_1X_2| && (702)\\
\overset{Cauchy-Schwarz\text{不等式}}{\le}&\alpha_1^2EX_1^2+\alpha_2^2EX_2^2+2|\alpha_1\alpha_2|(EX_1^2)^{\frac{1}{2}}(EX_2^2)^{\frac{1}{2}}<+\infty && (703)
\end{aligned}
$$

下面引入内积。$\forall X,Y\in H$，定义$(X,Y)\triangleq EXY$。（复时取共轭$E X\bar{Y}$）。其有性质

1. $(Y,X)=(X,Y)$
2. $(c_1X_1+c_2X_2,Y)=c_1(X_1,Y)+c_2(X_2,Y)$
3. $(X,X)=EX^2\ge0$，且$(X,X)=0\Leftrightarrow X=0,a.s.$。

称(X,Y)为H空间中X与Y的内积。若$(X,Y)=0$，则称X与Y正交，$X\perp Y$。

若$EX=EY=0$，则$(X,Y)=0\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$即$X$与$Y$不相关。

$\forall X\in H$，记$||X||=(EX^2)^{\frac{1}{2}}=(X,X)^{\frac{1}{2}}$。有$||\cdot||$满足

1. $||X||>0$，$||X||=0\Leftrightarrow X=0,a.s.$
2. $||cX||=c||X||$，$\forall c\in\mathbb{R}$
3. $||X_1+X_2||\le||X_1||+||X_2||$

称$||X||$为X的范数。

命题：$|EX|\le E|X|\le|X|$。

证明：令$g(x)=|x|$为凸函数，则由Jensen不等式，$E|X|\ge|EX|$。另一方面，令$g(x)=x^2$为凸函数，由Jensen不等式，$E|X|^2\ge|E|X||^2$，即$|X|\ge E|X|$。

记$d(X,Y)=||X-Y||=(E(X-Y)^2)^{\frac{1}{2}}$。

1. $d(X,Y)\ge0$，$d(X,Y)=0\Leftrightarrow X=Y,a.s.$
2. $d(X,Y)=d(Y,X)$
3. $d(X,Z)\le d(X,Y)+d(Y,Z)$

称$d(X,Y)$为H上X与Y的距离。

由上可知，H是一个**内积空间、赋范线性空间、距离空间**。

定义：

1. 设$\{X_n:n\ge1\}$是一个二阶矩有限的随机变量序列，$X\in H$，使得$\lim_{n\to\infty}d(X_n,X)=0$，即

$$
\lim_{n\to\infty}||X_n-X||=\lim_{n\to\infty}(E(X_n-X)^2)^{\frac{1}{2}}=0 \tag{704}
$$

   则称$\{X_n:n\ge1\}$均方收敛到X。记为$\lim_{n\to\infty}X_n\overset{m.s.}{=}X$。或$X_n\xrightarrow{L_2}X$。或$L_2-\lim_{n\to\infty}X_n=X$。

2. 若$\lim_{m,n\to\infty}d(X_m,X_n)=0$，则称$\{X_n:n\ge1\}$是$H$中**柯西列/基本列**。

例：$B=\{B_t:t\ge0\}$是一个标准布朗运动，$B_0=0$，$\forall0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，$\lambda\triangleq\max_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1})$考虑

$$
\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2\overset{m.s.}{=}t \tag{705}
$$

命题：设$\{X_n:N\ge1\}$是H中Cauchy列，则$\exists X\in H$使得$X_n\xrightarrow{L_2}X$。反过来，$\{X_n:n\ge1\}$在H中均方收敛$\Leftrightarrow\{X_n:n\ge1\}$是$H$中Cauchy列。（**完备性**，Hilbert空间，Banach空间，Polish空间）

命题7.1.2：假设$\{X_n:n\ge1\}\subset H$，$\{Y_n:n\ge1\}\subset H$，$X,Y\in H$，$X_n\xrightarrow{L_2}X$，$Y_n\xrightarrow{L_2}Y$
则

1. $EX = E\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} EX_n$，$EX^2 = \lim_{n\to\infty} EX_n^2$
2. $\lim_{m,n\to\infty}(X_m, Y_n) = (X, Y)$
3. $\lim_{n\to\infty} \alpha X_n + \beta Y_n \overset{m.s.}{=} \alpha X + \beta Y$，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

证明：证明2

$$\begin{aligned}|(X_m, Y_n) - (X, Y)| =& |(X_m - X, Y) + (X, Y_n - Y) + (X_m - X, Y_n - Y)| && (706)\\ \le& |(X_m - X, Y)| + |(X, Y_n - Y)| + |(X_m - X, Y_n - Y)| && (707)\\ \le& ||X_m - X||||Y|| + ||X||||Y_n - Y|| + ||X_m - X||||Y_n - Y|| \to 0 \quad (m, n \to \infty) && (708)\end{aligned}$$

7.1 H空间与均方收敛

命题7.1.3：$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{m.s.}{=} X \Leftrightarrow \lim_{m,n\to\infty}(X_m, X_n)$存在，此时$\lim_{m,n\to\infty}(X_m, X_n) = EX^2$

证明：必要性已经证明。考虑充分性。设$\lim_{m,n\to\infty}(X_m, X_n) = C$，有

$$E(X_n - X)^2 = (X_n - X, X_n - X) = (X_n, X_n) - (X_n, X) - (X, X_n) + (X, X) \to C - C - C + C = 0 \tag{709}$$

因此$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{m.s.}{=} X$。

命题7.1.4：若$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{m.s.}{=} X$，则

1. $X_n \xrightarrow{P} X$
2. $X_n \xrightarrow{d} X$

证明：

1. $\forall \epsilon > 0$，有

$$P(|X_n - X| \ge \epsilon) \le \frac{E(X_n - X)^2}{\epsilon^2} \to 0(n \to \infty) \tag{710}$$

所以$E(X_n - X)^2 \to 0$，因此$X_n \xrightarrow{P} X$

2. $\forall X$分布函数F的连续点x，只需证$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le F(x)$，以及$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \ge F(x)$。有

$$\begin{aligned}F_n(x) =& P(X_n \le x) && (711)\\ =& P(X_n \le x, |X_n - X| < \epsilon) + P(X_n \le x, |X_n - X| \ge \epsilon) && (712)\\ \le& P(X \le x + \epsilon) + P(|X_n - X| \ge \epsilon) && (713)\\ \to& P(X \le x + \epsilon) \quad (n \to \infty) && (714)\end{aligned}$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le P(X \le x + \epsilon) \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} F(x) \tag{715}$$

另一方面，$\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}F(x - \epsilon) =& P(X \le x - \epsilon) && (716)\\ =& P(X \le x - \epsilon, |X_n - X| < \epsilon) + P(X \le x - \epsilon, |X_n - X| \ge \epsilon) && (717)\\ \le& P(X_n \le x) + P(|X_n - X| \ge \epsilon) && (718)\\ (n \to \infty) \to& P(X_n \le x) && (719)\end{aligned}$$

因此

$$F(x - \epsilon) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} P(X_n \le x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \tag{720}$$

再令$\epsilon \downarrow 0$，有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \ge F(x - 0) = F(x) \quad (x\text{是}F\text{的连续点}) \tag{721}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \text{即}X_n \xrightarrow{d} X \tag{722}$$

定义：$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{(\Omega, \mathcal{F}, P)\text{上随机变量}X : E|X| < +\infty\}$。定义其范数$\forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$||X||_1 \triangleq E|X|$，则$||\cdot||$是$L^1$上的范数。（验证范数的三个性质即可）

定义距离$d_1(X, Y) = ||X - Y||_1 = E|X - Y|$。$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$在$d_1$下是完备的（Cauchy是收敛列）。且

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftarrow X_n \xrightarrow{P} X \Leftarrow X_n \xrightarrow{L_1} X \Leftrightarrow E|X_n - X| \to 0 \tag{723}$$

7.2 均方分析

若随机过程$X=\{X_t:t\in T\}\in H$，即$\forall t\in T$，$E|X_t|^2<+\infty$，则称X是二阶矩过程。

7.2.1 均方连续

定义：设X是二阶矩过程，对给定的$t_0\in T$，

$$\lim_{t\to t_0} X_t \overset{m.s}{=} X_{t_0} \tag{724}$$

则称X在t_0处均方连续。

若$\forall t\in T$，X在t处均方连续，则称X均方连续。

例：均方连续的例子。

1. 设$N=\{N_t:t\geq 0\}\sim PP(\lambda)$。

   $\forall t\geq 0$，$E(N_{t+s}-N_t)^2=\lambda|s|+(\lambda|s|)^2\xrightarrow{s\to 0}0$。因此泊松过程$N$是均方连续的。
2. 设$B=\{B_t:t\geq 0\}$是一个标准布朗运动。

   $\forall t\geq 0$，$E(B_{t+s}-B_t)^2=|s|\xrightarrow{s\to 0}0$。因此布朗运动$B$也是均方连续的。

定理：记$R(s,t)=(X_s,X_t)=EX_sX_t$（相关函数，当均值为0的时候此为协方差）。则$X=\{X_t:t\geq 0\}$在t_0处均方连续$\Leftrightarrow R(s,t)$在(t_0,t_0)处连续。

证明：必要性：有$\lim_{t\to t_0} X_t \overset{m.s.}{=} X_{t_0}$，则

$$\lim_{s,t\to t_0} R(s,t)=\lim_{s,t\to t_0}(X_s,X_t)=(X_{t_0},X_{t_0})=R(t_0,t_0) \tag{725}$$

也即$R(s,t)$在(t_0,t_0)处连续。

充分性：有

$$E(X_t-X_{t_0})^2=(X_t-X_{t_0},X_t-X_{t_0})=R(t,t)-R(t_0,t)-R(t,t_0)+R(t_0,t_0) \tag{726}$$

而$R(s,t)$在(t_0,t_0)处连续，因此

$$\lim_{t\to t_0} E(X_t-X_{t_0})^2=0 \tag{727}$$

推论：$X=\{X_t:t\geq T\}$均方连续$\Leftrightarrow R(s,t)$在$\{(t,t):t\in T\}$上连续。

推论：若$R(s,t)$在$\{(t,t):t\in T\}$上连续，则它在$T\times T$上连续。

7.2.2 均方导数

定义：对二阶矩过程$\{X_t:t\in T\}$，$t_0\in T$，若$\lim_{h\to 0}\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h}\overset{m.s.}{=}X_{t_0}^{'}$存在，则称$X$在$t_0$处均方可导。$X_{t_0}^{'}$称为$X$在$t_0$处的均方导数，记为$\left.\frac{dX_t}{dt}\right|_{t=t_0}\triangleq X_{t_0}^{'}$。若$\forall t\in T$，$X$在$T$处均方可导，则称$X$均方可导。

定理：$X=\{X_t:t\in T\}$在t点均方可导$\Leftrightarrow \lim_{h,l\to 0}\frac{R(t_0+h,t_0+l)-R(t_0,t_0+l)-R(t_0+h,t_0)+R(t_0,t_0)}{hl}$存在，即$R(s,t)$在$(t_0,t_0)$处广义二次可导。

证明：

$$\frac{R(t_0+h,t_0+l)-R(t_0,t_0+l)-[R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0)]}{hl}=\left(\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h},\frac{X_{t_0+l}-X_{t_0}}{l}\right) \tag{728}$$

而

$$\lim_{h\to 0}\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h}\text{存在}\Leftrightarrow \lim_{h,l\to 0}\left(\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h},\frac{X_{t_0+l}-X_{t_0}}{l}\right)\text{存在} \tag{729}$$

因此得证。

定理7.2.3：若$\{X_t:t\in T\}$，$\{X_{1,t}:t\in T\}$，$\{X_{2,t}:t\in T\}$均方可导，f普通函数在T上可导，则

1. $X=\{X_t:t\in T\}$在T上均方连续。
2. $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$，$\{c_1X_{1,t}+c_2X_{2,t}:t\in T\}$均方可导且

$$(c_1X_{1,t}+c_2X_{2,t})^{'}=c_1X_{1,t}^{'}+c_2X_{2,t}^{'} \tag{730}$$

3. 与普通函数乘积的导数

$$\frac{d}{dt}(f(t)X_t)=\frac{df}{dt}X_t+f(t)X_t^{'} \tag{731}$$

4. 导数的期望

$$EX_t' = \frac{d}{dt}EX_t \tag{732}$$

5. 二元导数

$$(X_s', X_t') = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}R(s,t), \quad 其中R(s,t) = (X_s, X_t) = EX_sX_t \tag{733}$$

证明：

1. $\forall t_0 \in T$，$\lim_{h\to 0}\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h}$存在，得到$\lim_{h\to 0}(X_{t_0+h}-X_{t_0}) \overset{m.s.}{=} 0$，也即$\lim_{h\to 0}X_{t_0+h} \overset{m.s.}{=} X_{t_0}$。
2. 直接验证即得。
3. 有

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}X_t + f(t)X_t' =& \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}X_t + f(t)\lim_{h\to 0}\frac{X_{t+h}-X_t}{h} & (734)\\
=& \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}X_t + \lim_{h\to 0}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}f(t+h) \quad (第一项中的普通极限也看成均方极限) & (735)\\
=& \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)X_{t+h}-f(t)X_t}{h} = \frac{d}{dt}(f(t)X_t) & (736)
\end{aligned}$$

4. 有

$$E\lim_{h\to 0}\frac{X_{t+h}-X_t}{h} = \lim_{h\to 0}E\frac{X_{t+h}-X_t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{EX_{t+h}-EX_t}{h} = \frac{d}{dt}EX_t \tag{737}$$

5. 有

$$\begin{aligned}
(X_s', X_t') =& (\lim_{h\to 0}\frac{X_{s+h}-X_s}{h}, \lim_{l\to 0}\frac{X_{t+l}-X_l}{l}) = \lim_{h,l\to 0}(\frac{X_{s+h}-X_s}{h}, \frac{X_{t+l}-X_l}{l}) & (738)\\
=& \lim_{h,l\to 0}\frac{[R(s+h,t+l)-R(s+h,t)-R(s,t+l)+R(s,t)]}{hl} & (739)\\
=& \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(s,t) & (740)
\end{aligned}$$

7.2.3 均方积分

定义：设$X=\{X_t : t\in T\}$是一个二阶矩过程，$f(t)$是T上实值函数。$\forall a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，令$\lambda=\max_{1\le k\le n}\{t_k-t_{k-1}\}$，$\forall u_k\in[t_{k-1},t_k]$，若

$$L_2-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1}) \tag{741}$$

存在，则称$f(t)X_t$在区间$[a,b]$上均方可积，上述极限称为$f(t)X_t$在区间$[a,b]$上的Riemann均方积分，记为$\int_a^b f(t)X_tdt$。

若$\lim\limits_{\substack{a\to\infty\\ b\to -\infty}}\displaystyle\int_a^b f(t)X_tdt$存在，则称$f(t)X(t)$在$\mathbb{R}$上均方可积，记为$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)X_tdt$。

定理7.2.4（充分条件）：若$\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R(s,t)dsdt$存在，则$f(t)X_t$在$[a,b]$上均方可积。

证明：$f(t)X_t$在$[a,b]$上均方可积$\Leftrightarrow L_2-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(u_k)X_{t_k}(t_k-t_{k-1})$存在。这等价于

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda,\lambda'\to 0}(\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1}), \sum_{k=1}^{m}f(v_k)X_{v_k}(s_l-s_{l-1})) & (742)\\
=& \lim_{\lambda,\lambda'\to 0}\sum_{k,l}f(u_k)f(v_l)R(u_k,v_l)(t_k-t_{k-1})(s_l-s_{l-1})存在 \quad (注意到这是二重积分对应的一个特殊分割（矩形分割）) & (743)\\
\Leftarrow& \int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R(s,t)dsdt存在 & (744)
\end{aligned}$$

推论：若$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)f(t)R(s,t)dsdt$存在，则$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)X_tdt$存在。

定理：设$f(t)X_t$，$f_k(t)X_k(t)$，$k=1,2$，在$[a,b]$上均方可积，则

1. $E\int_a^b f(t)X_tdt = \int_a^b f(t)EX_tdt$
   $E\int_a^b f_1(t)X_{1,t}dt\int_a^b f_2(t)X_{2,t}dt = \int_a^b\int_a^b f_1(s)f_2(t)EX_{1,s}X_{2,t}dsdt$
2. $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$，$\int_a^b[c_1f_1(t)X_{1,t}+c_2f_2(t)X_{2,t}]dt = c_1\int_a^b f_1(t)X_{1,t}dt + c_2\int_a^b f_2(t)X_{2,t}dt$。
3. $\forall c\in[a,b]$，$\int_a^b f(t)X_tdt = \int_a^c f(t)X_tdt + \int_c^b f(t)X_tdt$。

证明1。

有

$$E\int_a^b f(t)X_tdt = E(L_2-\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})) = \lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n f(u_k)EX_{u_k}(t_k-t_{k-1}) = \int_a^b f(t)EX_tdt \tag{745}$$

另一条同样根据黎曼和定义直接验证即可。

> 均方收敛时期望可以和极限换次序。

7.2.3 均方积分

定理：设$X=\{X_t:t\geq0\}$在$[a,b]$上均方连续，则

1. X在$[a,b]$上均方可积
2. $||\int_a^b X_tdt||\leq\int_a^b||X_t||dt$
3. 令$Y_t=\int_a^t X_udu$，则$\{Y_t\}$在区间$[a,b]$上均方连续、均方可导，$Y_t^{'}=X_t$，$t\in[a,b]$

证明：由定理7.2.1及其推论，有$R(s,t)=(X_s,X_t)$在$[a,b]\times[a,b]$上二元连续。因此

$$\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt \tag{746}$$

存在。由定理7.2.4可知，X在$[a,b]$上均方可积。均方连续⇒均方可积！

证明第二条：

$$||X_t||=(EX_t^2)^{\frac12}=(X_t,X_t)^{\frac12}=R(t,t)^{\frac12} \tag{747}$$

在$[a,b]$连续，$\int_a^b||X_t||dt$存在。

而

$$\begin{aligned}||\int_a^b X_tdt|| &=||L_2-\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n X_{uk}(t_k-t_{k-1})|| &(748)\\ &=\lim_{\lambda\to0}||\sum_{k=1}^n X_{uk}(t_k-t_{k-1})|| &(749)\\ &\leq\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^n||X_{uk}||(t_k-t_{k-1})=\int_a^b||X_t||dt &(750)\end{aligned}$$

证明第三条：

$$\begin{aligned}||Y_{t+h}-Y_t|| &=||\int_a^{t+h}X_udu-\int_a^t X_udu|| &(751)\\ &=||\int_t^{t+h}X_udu|| &(752)\\ &\leq\int_t^{t+h}||X_u||du\to0(h\downarrow0) &(753)\end{aligned}$$

所以$\{Y_t\}$均方连续，及

$$\begin{aligned}||\frac{Y_{t+h}-Y_t}{h}-X_t|| &=\frac1h||\int_t^{t+h}(X_u-X_t)du|| &(754)\\ &\leq\frac1h\int_t^{t+h}||X_u-X_t||du &(755)\\ &\leq\max_{t\leq u\leq t+h}||X_u-X_t||\to0(h\downarrow0) &(756)\end{aligned}$$

因此$\{Y_t\}$均方可导，且导数就是X_t。

推论：设$X_t^{'}$在$[a,b]$上均方连续，则$X_t-X_a=\int_a^t X_s^{'}ds$。

例：$B=\{B_t:t\geq0\}$是一个标准BM，$\forall\omega\in\Omega$，$B_t(\omega)$关于t连续，$S_t(\omega)=\int_a^t B_s(\omega)ds$。$B$均方连续，$Y_t=\int_a^t B_sds$（均方积分）。则有$Y_t=S_t,a.s.$。

因为B是正态过程，因此$S_t(\omega)=\int_0^t B_s(\omega)ds$服从正态分布。从而$\{Y_t\}$是一个正态过程，即$\forall0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(Y_{t_1},Y_{t_2},\cdots,Y_{t_n})$服从正态分布。从而$\{Y_t\}$均方连续，均方可导，且$Y_t^{'}=B_t$。

7.3 伊藤随机积分

定义：若可测空间$(\Omega,\mathcal{F}_1)$上子σ域族$\{\mathcal{F}_t:t\geq0\}$，满足$\forall0\leq s\leq t$，$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$。则称$\{F_t:t\geq0\}$为$\sigma$域流（filtration）。

给定随机过程$X=\{X_t:t\geq0\}$，令$\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s:0\leq s\leq t)=\sigma(\cup_{0\leq s\leq t}X_s^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$。其中

$$\sigma(X_S^{-1}(-\infty,x):x\in\mathbb{R})=X_s^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\{X_s^{-1}B:B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}\subset\mathcal{F} \tag{757}$$

定义：若$(\Omega,\mathcal{F})$上随机过程$X=\{X_t:t\geq 0\}$及σ域流$\{\mathcal{F}_t:t\geq 0\}$，满足$\forall t\geq 0$，$X_t$关于$\mathcal{F}_t$可测。即

$$X_t^{-1}(-\infty,x]=\{\omega\in\Omega:X_t(\omega)\leq x\}\in\mathcal{F}_t \tag{758}$$

记为$X_t\in\mathcal{F}_t$。则称X是$\{\mathcal{F}_t\}$适应的（adapted）。

定义：若概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上 连续轨道$\{\mathcal{F}_t:t\geq 0\}$适应的实值随机过程$B=\{B_t:t\geq 0\}$满足：

1. $B_0=0$
2. $\forall 0\leq s<t$，B_t-B_s与$\mathcal{F}_s$独立，即$\forall A\in\mathcal{F}_s$，$B_t-B_s$与$\mathit{1}_A$独立，且$B_t-B_s\sim\mathcal{N}(0,t)$

则称B是$\{\mathcal{F}_t\}$布朗运动。

考虑乘积空间$[0,T]\times\Omega$上乘积σ域$\mathcal{B}_{[0,T]}\times\mathcal{F}=\sigma(\{B\times A\}:B\in\mathcal{B}_{[0,T]},A\in\mathcal{F})$（可测矩形）。

定义：若$\mathcal{F}_t$是$(\Omega,\mathcal{F})$上σ域流，$(\Omega,\mathcal{F})$上随机过程$X=\{X_t:t\geq 0\}$满足：$\forall t>0$，$X:([0,T]\times\Omega,\mathcal{B}_{[0,t]}\times\mathcal{F}_t)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$可测，即$\forall x\in\mathbb{R}$，$\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega:X(s,\omega)\leq x\}\in\mathcal{B}_{[0,t]}\times\mathcal{F}_t$。则称$X$是$\{\mathcal{F}_t\}$循序可测（循序过程）。

> 这里的可测可以理解成**规范性的要求**，也即首先$g(s,\omega)$的定义域为$[0,T]\times\Omega$，其次对于$\forall x$，确保其原像集$\{(s,\omega):X(s,\omega)\leq x\}$都在$\mathcal{B}_{[0,t]}\times\mathcal{F}_t$内。这里$\mathcal{B}_{[0,t]}$针对$t$，是$[0,T]$上一些开区间的并集，$\mathcal{F}_t$针对$\omega$。这一要求的实际含义，是保证$P(X(s,\omega)\leq x)$有定义。

可以证明，$X_t\in\mathcal{F}_t$，也即X是$\{\mathcal{F}_t\}$适应的。

给定$T>0$，记$\mathcal{L}_T^2\triangleq\{(\Omega,\mathcal{F})$上$\{\mathcal{F}_t\}$循序过程$g(t,w)$使得$\int_0^T Eg^2(t,\omega)dt<+\infty\}$。令

$$\mathcal{L}_0\triangleq\{g(t,\omega)=f_0(\omega)\mathit{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\omega)\mathit{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t):0=t_0<t_1<\cdots<t_n\uparrow\infty\} \tag{759}$$

其中要求$f_0\in\mathcal{F}_0,f_k\in\mathcal{F}_k$，以及$Ef_0^2<+\infty$，$Ef_k^2<+\infty$。称其为**阶梯过程集合**。

令

$$\mathcal{L}_2=\cap_{T\geq 0}\mathcal{L}_T^2=\{(\Omega,\mathcal{F})\text{上循序可测过程}g(t,\omega)\text{使得}\forall T>0,\int_0^T Eg(t,\omega)^2dt<+\infty\} \tag{760}$$

$\forall g\in\mathcal{L}_2$，$||g||_2\triangleq\frac{||g||_{2,n}\wedge 1}{2^n}$，其中$||g||_{2,n}=(\int_0^n Eg(t,\omega)^2dt)^{\frac{1}{2}}$。称其为准范数。定义$d(g-g^{'})\triangleq||g-g^{'}||_2$。

可证明：$\mathcal{L}_0$在$||\cdot||_2$下是$\mathcal{L}_2$的**线性稠密子集**。（也即可以使用$\mathcal{L}_0$去逼近$\mathcal{L}_2$）

7.4.1阶梯过程的伊藤（$It\hat{o}$）积分

设$B=\{B_t:t\geq 0\}$，$\{\mathcal{F}_t\}$ BM。$\forall g\in\mathcal{L}_0$，

$$g(t,\omega)=f_0(\omega)\mathit{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\omega)\mathit{1}_{(t_k,t_{k+1}]} \tag{761}$$

定义：

$$\int_0^t g_sdB_s=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(B_{t_{k+1}\wedge t}-B_{t_k\wedge t})\quad(\text{取 }t_{n-1}\leq t<t_n) \tag{762}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}f_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})+f_{n-1}(B_t-B_{t_{n-1}}) \tag{763}$$

给定$t\geq 0$，不妨将t加入$\{t_k\}$，设$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$。从而

$$g(s,\omega)=f_0(\omega)\mathit{1}_{\{0\}}(s)+\sum_{k=0}^{n-1}f_k\mathit{1}_{(t_k,t_{k+1}]},\quad 0\leq s\leq t \tag{764}$$

进一步，

$$\int_0^t g_sdB_s=\sum_{k=0}^{n-1}f_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}) \tag{765}$$

阶梯过程$It\hat{o}$积分的性质：

1. **线性**：$\forall g_1,g_2\in\mathcal{L}_0$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$，有

$$\int_0^t(\alpha_1g_{1,s}+\alpha_2g_{2,s})dB_s=\alpha_1\int_0^t g_{1,s}dB_s+\alpha_2\int_0^t g_{2,s}dB_s \tag{766}$$

2. 期望$E\int_0^t g_sdB_s=0$
3. 方差$E(\int_0^t g_sdB_s)^2=\int_0^t Eg_s^2ds$
4. $\{\int_0^t g_sdB_s:t\geq 0\}$关于$\{\mathcal{F}_t\}$是鞅

证明：

$$E\int_0^t g_s dB_s = E\sum_{k=0}^{n-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \tag{767}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} Ef_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \tag{768}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(E(f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k})) \tag{769}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k E((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k})) \tag{770}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) = 0 \tag{771}$$

另一方面，

$$E(\int_0^t g_s dB_s)^2 = E(\sum_{k=0}^{n-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))^2 \tag{772}$$

$$= E(\sum_{k=0}^{n-1} f_k^2(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 + 2\sum_{i<j} f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) \tag{773}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(E(f_k^2(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2|\mathcal{F}_{t_k})) \tag{774}$$

$$+2\sum_{i<j} E(E(f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j})) \tag{775}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k^2 E((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2|\mathcal{F}_{tk})) \tag{776}$$

$$+2\sum_{i<j} E(f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})E((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_{tj})) \tag{777}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k^2 E((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)) + 2\sum_{i<j} E(f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) \tag{778}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k^2 E((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)) \tag{779}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(f_k^2(t_{k+1} - t_k)) = \int_0^t Eg_s^2 ds \tag{780}$$

下面证明关于鞅的性质。只需证$\forall 0 \le s < t$，$E(\int_0^t g_u dB_u|\mathcal{F}_s) = \int_0^s g_u dB_u$。将$s, t$加入$\{t_k\}$，不妨设$s = t_m < t_l = t$，则

$$E(\int_0^t g_u dB_u|\mathcal{F}_s) = E(\sum_{k=0}^{n-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s) \tag{781}$$

$$= E(\sum_{k=0}^{m-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s) + E(\sum_{k=m}^{n-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s) \tag{782}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) + \sum_{k=m}^{n-1} E(E(f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_s}) \tag{783}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) + \sum_{k=m}^{n-1} E(f_j E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s) \tag{784}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) = \int_0^s g_u dB_u \tag{785}$$

得证。

7.4.2

$\forall g \in \mathcal{L}_2$，因$\mathcal{L}_0$在$||\cdot||_2$下是$\mathcal{L}_2$线性稠密子集，$\exists g_n \mathcal{L}_0$，使得$\lim_{n\to\infty}||g_n - g||_2 = 0$，从而$\lim_{n,m\to\infty}||g_n - g_m||_2 = 0$，而$g_n - g_m \in \mathcal{L}_0$，

$$||g_n - g_m||_{2,t}^2 = \int_0^t E|g_{n,u} - g_{m,u}|^2 du = E(\int_0^t g_{n,u} dB_u - \int_0^t g_{m,u} dB_u)^2 \to 0 (n, m \to \infty) \tag{786}$$

因此$\{\int_0^t g_{n,u} dB_u - \int_0^t g_{m,u} dB_u\}$是$\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$上基本列，因此其均方收敛。即$\exists$随机变量$I_g(t) \in \mathcal{F}_t$，使得

$$\int_0^t g_u dB_u \triangleq I_g(t) = L_2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^t g_{n,u} dB_u \tag{787}$$

7.3 $It\hat{o}$随机积分

$It\hat{o}$积分定义如下：

$$Ig(t) \overset{m.s.}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1})) = \int_0^t g(s,\omega)dB(s,\omega) \tag{788}$$

$\forall g\in\mathcal{L}_2$，$\exists\{g_n : n\geq 1\}\subset\mathcal{L}_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}||g_n-g||_2=0 \tag{789}$$

及

$$\int_0^t g_s dB_s \triangleq L_2-\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_{n,s}ds \tag{790}$$

考虑$\mathcal{L}_2$过程中$It\hat{o}$积分性质

1. $E\int_0^t g_s dB_s=0$。这是因为

$$E\int_0^t g_s dB_s = 0 = E(L_2-\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_{n,s}dB_s)=\lim_{n\to\infty}E\int_0^t g_{n,s}dB_s=0 \tag{791}$$

2. $\forall g\in\mathcal{L}_2$,

$$E(\int_0^t gdB_s)^2=\int_0^t Eg_s^2ds \tag{792}$$

3. $\forall 0\leq s\leq t$

$$E\int_0^s g_u dB_u\int_0^t g_u dB_u = \int_0^s Eg_u^2du \tag{793}$$

证明：

$$\begin{aligned}&E\int_0^s g_{n,u}dB_u\int_0^t g_{n,u}dB_u &(794)\\ =&E(\sum_{k=0}^{m-1}f_{n,k}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}))^2+E(\sum_{k=0}^{m-1}f_{n,k}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}))(\sum_{l=m}^{n-1}f_{n,l}(B_{t_{l+1}}-B_{t_l})) &(795)\\ =&\sum_{k=0}^{m-1}Ef_{n,k}^2(t_{k+1}-t_k)+E(E(\sum_{k=0}^{m-1}f_{n,k}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}))(\sum_{l=m}^{n-1}f_{n,l}(B_{t_{l+1}}-B_{t_l}))|\mathcal{F}_{tm}) &(796)\\ =&\int_0^s Eg_{n,u}^2du &(797)\end{aligned}$$

类似的，

$$\begin{aligned}E\int_0^s g_u dB_u\int_0^t g_u dB_u =&E\lim_{n\to\infty}\int_0^s g_{n,u}dB_u\int_0^t g_{n,u}dB_u &(798)\\ =&\lim_{n\to\infty}E\int_0^s g_{n,u}dB_u\int_0^t g_{n,u}dB_u &(799)\\ =&\lim_{n\to\infty}\int_0^s Eg_{n,u}^2du=\int_0^s Eg_u^2du &(800)\end{aligned}$$

4. $\forall g_1,g_2\in\mathcal{L}_2$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^t(\alpha_1g_{1,s}+\alpha_2g_{2,s})dB_s=\alpha_1\int_0^t g_{1,s}dB_s+\alpha_2\int_0^t g_{2,s}dB_s \tag{801}$$

$$E\int_0^s\alpha_1g_{1,u}dB_u\int_0^t\alpha_2g_{2,u}dB_u=\alpha_1\alpha_2\int_0^s Eg_{1,u}g_{2,u}du\quad(0\leq s\leq t) \tag{802}$$

5. $\int_0^t g_u dB_u=\int_0^s g_u dB_u+\int_s^t g_u dB_u$。
6. $\{\int_0^t g_s dB_s : t\geq 0\}$关于$\mathcal{F}_t$是鞅。即$\forall 0\leq s\leq t$，$E(\int_0^t g_u dB_u|\mathcal{F}_s)=\int_0^s g_u dB_u$。.

$$E(L_2-\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_{n,u}dB_u|\mathcal{F}_s)=\lim_{n\to\infty}E(\int_0^t g_{n,u}dB_u|\mathcal{F}_s=\lim_{n\to\infty}\int_0^s g_{n,u}dB_u)=\int_0^s g_u dB_u \tag{803}$$

7. $X_t=\int_0^t g_u dB_u$，则$\lambda>1$，$p\geq 1$，有

$$P(\max_{0\leq u\leq t}|X_u|>\lambda)\leq\frac{E|X_t|^p}{\lambda^p}\quad(Doob\text{极大值不等式}) \tag{804}$$

例：设$\{\phi_t : t\geq 0\}$均方连续，$\{\mathcal{F}_t\}$循序可测（轨道连续），取

$$\phi_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{m_n-1}\phi_{t_k^{(n)}}1_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t)+\phi_0 1_{\{0\}}(t)\quad 0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots t_{m_n}^{(n)}=t \tag{805}$$

令$\lambda_n\triangleq\max_{0\le k\le m_n-1}(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})\to 0$时，$\phi^{(n)}\xrightarrow{\mathcal{L}_2,t}\phi$

有

$$\int_0^t\phi_s dB_s=L_2-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n-1}\phi_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}}) \tag{806}$$

特别地

$$\int_0^t B_s dB_s=L_2-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n-1}B_{t_k^{(n)}}(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}})=\frac{1}{2}(B_t^2-t) \tag{807}$$

7.4 $It\hat{o}$随机过程与$It\hat{o}$公式

定义：设随机过程$X=\{X_t:t\ge 0\}$满足积分方程$\forall 0\le t_0<t<T$，$X_t=X_{t_0}+\int_{t_0}^t b(s,X_s)ds+\int_{t_0}^t\sigma(s,X_s)dB_s$（7.4.1），其中，$b(s,X_s)$和$\sigma(s,X_s)$是$[t_0,T]\times\mathbb{R}$上二元函数，使得$b(t,X_t)$均方连续，$\sigma(t,X_t)\in\mathcal{L}_T^2$（也即，一个是均方积分，一个是伊藤积分）。

等价地，可以表示成随机微分方程SDE的形式：

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \tag{808}$$

此时称X_t为**伊藤随机过程**。

考虑这样一个问题：设$f(t,x)$是一个二元函数，$Y_t\triangleq f(t,X_t)$，$t_0\le t\le T$。

定理（$It\hat{o}$公式）：设$\{X_t:t\ge 0\}$满足方程(7.4.1)，$f(t,x):[t_0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足$\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$存在连续，令$Y_t=f(t,X_t)$，则$\{Y_t:t_0\le t\le T\}$满足下列$It\hat{o}$随机积分方程：

$$Y_t=Y_{t_0}+\int_{t_0}^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}+b\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(s,X_s)ds+\int_{t_0}^t\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\right)(s,X_s)dB_s \tag{809}$$

或者等价的微分方程形式：

$$dY_t=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+b\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(t,X_t)dt+\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,X_t)dB_t \tag{810}$$

例1：计算

$$\int_0^t B_s dB_s \tag{811}$$

有$dB_s=0\cdot dt+1\cdot dB_t$，即$b=0,\sigma=1$，则取$f(t,x)=\frac{x^2}{2}$，令$Y_t=f(t,B_t)=\frac{B_t^2}{2}$有

$$dY_t=d(\frac{B_t^2}{2})=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+b\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(t,X_t)dt+\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,X_t)dB_t=\frac{1}{2}dt+B_t dB_t \tag{812}$$

从而

$$\frac{B_t^2}{2}-\frac{B_0^2}{2}=\frac{1}{2}\int_0^t ds+\int_0^t B_s dB_s\Rightarrow\int_0^t B_s dB_s=\frac{B_t^2}{2}-\frac{1}{2} \tag{813}$$

例2（人口增长模型）：设N_t是t时刻人口数（设为实数值），且$\{N_t:t\ge 0\}$满足$dN_t=\gamma N_t dt+\alpha N_t dB_t$，其中$\alpha,\gamma$为常数。求$N_t$显式表达。

不妨设$B_0=0$，取$f(t,x)=\ln x$。则$\frac{\partial f}{\partial t}=0$，$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}$。令$Y_t=\ln N_t$，$t\ge 0$，由伊藤公式，得

$$dY_t=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+b\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(t,X_t)dt+\left(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,X_t)dB_t=(\frac{\gamma N_t}{N_t}-\frac{\alpha^2N_t^2}{2N_t^2})dt+\alpha N_t\cdot\frac{1}{N_t}dB_t=(\gamma-\frac{\alpha^2}{2})dt+\alpha dB_t \quad ($$

从而

$$\ln N_t-\ln N_0=Y_t-Y_0=(\gamma-\frac{\alpha^2}{2})t+\alpha B_t\Rightarrow N_t=N_0\exp\{(\gamma-\frac{\alpha^2}{2})t+\alpha B_t\} \tag{815}$$

根据重对数律，有

$$\begin{cases}\gamma>\frac{\alpha^2}{2},\lim_{t\to\infty}N_t=+\infty,a.s.\\ \gamma<\frac{\alpha^2}{2},\lim_{t\to\infty}N_t=0,a.s.\\ \gamma=\frac{\alpha^2}{2},N_t=N_0e^{\alpha B_t}\text{为一个几何布朗运动}\end{cases} \tag{816}$$

若N_0与B独立，则

$$EN_t=EN_0\cdot Ee^{\alpha B_t}\cdot e^{(\gamma-\frac{\alpha^2}{2})t}=EN_0\cdot e^{\frac{\alpha^2}{2}t}\cdot e^{(\gamma-\frac{\alpha^2}{2})t}=EN_0e^{\gamma t} \tag{817}$$

> 考虑复合函数的微分，$df(t,y)$。设$y=\phi(t)$，有$df(t,\phi(t))=\frac{df}{dt}dt+\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dt}dt$。
>
> 对布朗运动B，当$t\ll 1$时，$dB_t\sim\sqrt{dt}$。此时对$f(t,X_t)$泰勒展开到$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2$
>
> $\forall[t,t+\Delta t]\subset[0,T]$，$x\in\mathbb{R}$，由微分中值定理，存在$\alpha,\beta\in[0,1]$，使得
>
> $$f(t+\Delta t,x+\Delta x)=f(t,x)+\frac{\partial f}{\partial t}(t+\alpha\Delta t,x)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x+\beta\Delta x)(\Delta x)^2 \tag{818}$$
>
> 令$\Delta X_t=(X_{t+\Delta t}-X_t)$，$$，则
>
> $$\begin{aligned}\Delta Y_t=&Y_{t+\Delta t}-Y_t=f(t+\Delta t,X_{t+\Delta t})-f(t,X_t) &(819)\\ =&\frac{\partial f}{\partial t}(t+\Delta t,X_t)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\Delta X_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t+\beta\Delta X_t)(\Delta X_t)^2 &(820)\\ =&A+B+C &(821)\end{aligned}$$
>
> 有
>
> $$A=\frac{\partial f}{\partial t}(t+\alpha\Delta t,X_t)\Delta t=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\Delta t+o(\Delta t),m.s.$$
>
> $$\begin{aligned}B=&\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\Delta X_t=\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)(b(t,X_t)\Delta t+\sigma(t,X_t)\Delta B_t+o(\Delta t)) &(822)\\ =&\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)b(t,X_t)\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\sigma(t,X_t)\Delta B_t+o(\Delta t) &(823)\end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned}C=&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t+\beta\Delta X_t)(\Delta X_t)^2 &(824)\\ =&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t+\beta\Delta X_t)(b(t,X_t)\Delta t+\sigma(t,X_t)\Delta B_t)^2 &(825)\\ =&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\sigma(t,X_t)^2\Delta t+o(\Delta t) &(826)\end{aligned}$$

考虑高维形式的伊藤积分。设

$$\vec{b}(t,\vec{x})=\begin{vmatrix}b_1(t,\vec{x})\\ b_2(t,\vec{x})\\ \vdots\\ b_n(t,\vec{x})\end{vmatrix},\Sigma(t,\vec{x})=(\sigma_{ij}(t,\vec{x}))_{n\times m} \tag{827}$$

设$\{B_t:t\geq 0\}$，以及m维的$\{\mathcal{F}_t:t\geq 0\}$。若$\{X_t=(X_{1,t},X_{2,t},\cdots,X_{n,t})^T:t\geq 0\}$满足

$$\begin{pmatrix}dX_{1,t}=b_1(t,\vec{X}_t)dt+\sum_{j=1}^m\sigma_{1j}(t,\vec{X}_t)dB_t^j\\ dX_{2,t}=b_2(t,\vec{X}_t)dt+\sum_{j=1}^m\sigma_{2j}(t,\vec{X}_t)dB_t^j\\ \vdots\\ dX_{n,t}=b_n(t,\vec{X}_t)dt+\sum_{j=1}^m\sigma_{nj}(t,\vec{X}_t)dB_t^j\end{pmatrix} \tag{828}$$

即

$$d\vec{X}_t=\vec{b}(t,\vec{X}_t)dt+\Sigma(t,\vec{X}_t)d\vec{B}_t \tag{829}$$

则称$\vec{X}$是一个n维的伊藤过程。

定理7.4.2（多维伊藤公式）：设$\{\vec{X}_t:t\geq 0\}$为n维伊藤过程，满足SDE

$$d\vec{X}_t=\vec{b}(t,\vec{X}_t)dt+\Sigma(t,\vec{X}_t)d\vec{B}_t \tag{830}$$

取$f(t,\vec{x}):[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$满足$\frac{\partial f_k}{\partial t},\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i^2}$存在连续，则$\{\vec{Y}_t=f(t,\vec{X}_t):t\geq 0\}$是$d$维伊藤过程，满足：

$$dY_{k,t}=\left(\frac{\partial f_k}{\partial t}+\Sigma b_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_{il}\sigma_{jl}\right)(t,\vec{X}_t)dt+\sum_{l=1}^m\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\sigma_{il}\right)(t,\vec{X}_t)dB_t^l \tag{831}$$

> 注意这里$EdB_t^kdB_t^l=0$，当$l\neq k$时，因此第一个括号里两个σ的第二维下标应当相同。

例3（二维伊藤公式）：设$\vec{X}_t=(X_{1,t},X_{2,t})^T$满足$\begin{pmatrix}dX_{1,t}\\ dX_{2,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1(t,\vec{X}_t)\\ b_2(t,\vec{X}_t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_1(t,\vec{X}_t)&0\\ 0&\sigma_2(t,\vec{X}_t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_t^1\\ dB_t^2\end{pmatrix}$

令$\{Y_t=X_{1,t}X_{2,t}:t\geq 0\}$，$f(t,\vec{x})=x_1x_2$，则$\frac{\partial f}{\partial t}=0,\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2,\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2}=1,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=0$。

所以

$$dY_t=[b_1(t,\vec{X}_t)X_{2,t}+b_2(t,\vec{X}_t)X_{1,t}]dt+\sigma_1(t,\vec{X}_t)X_{2,t}dB_t^{(1)}+\sigma_2(t,\vec{X}_t)X_{1,t}dB_t^{(2)} \tag{832}$$

7.5 伊藤随机微分方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{833}$$

7.5.1常系数线性SDE

例1：设$\{X_t : t \geq 0\}$满足Ovnstein-Uhlenbeck方程（O-U过程）

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t \tag{834}$$

解：有

$$dX_t + \mu X_t dt = \sigma dB_t \Rightarrow e^{\mu t}dX_t + \mu e^{\mu t}X_t dt = \sigma e^{\mu t}dB_t \tag{835}$$

取$f(t,x) = e^{\mu t}x$。有$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu e^{\mu t}x, \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\mu t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$，则由伊藤公式：

$$d(e^{\mu t}X_t) = \sigma e^{\mu t}dB_t \Rightarrow e^{\mu t}X_t = e^{\mu t_0}X_{t_0} + \int_{t_0}^t \sigma e^{\mu s}dB_s \tag{836}$$

也即

$$X_t = e^{-\mu(t-t_0)}X_{t_0} + \int_{t_0}^t \sigma e^{-\mu(t-s)}dB_s \tag{837}$$

7.5.2线性齐次SDE

例2：Black-Scholes模型。设S_t表示t时刻某股票价格，适当条件下满足下随机微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{838}$$

其中μ, σ是常数。根据之前的结果，有

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \tag{839}$$

7.5伊藤随机微分方程

7.5.3一般线性非齐次SDE

设$\{X_t : t \geq 0\}$满足

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dB_t \quad (7.5.6) \tag{840}$$

B_t为一维标准布朗运动，$a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t)$为普通函数，Borel可测，$X_{t_0} \in \mathcal{F}_{t_0}$，求$X_t$显示表达式。

若$a_2(t) = b_2(t) = 0$，则上式化为齐次的线性SDE：

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dB_t \quad (7.5.7) \tag{841}$$

若$b_1(t) = 0$，则化为狭义的线性SDE：

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + b_2(t)dB_t \quad (7.5.8) \tag{842}$$

（1）先求解$dX_t = a_1(t)X_t dt \quad (7.5.9)$

有

$$\frac{dX_t}{X_t} = a_1(t)dt \Rightarrow d\ln X_t = a_1(t)dt \Rightarrow X_t = X_{t_0} \cdot \exp\{\int_0^t a_1(s)ds\} \tag{843}$$

取$X_{t_0} = 1$，得到特解$\rho_{t_0,(0)}(t) = \exp\{\int_{t_0}^t a_1(s)ds\}$。

（2）考虑求解（7.5.8）

令$y = f(t,x) = \rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)x = \exp(-\int_0^t a_1(s)ds)x$，则$\frac{\partial f}{\partial t} = -a_1(s)\rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)x$，$\frac{\partial f}{\partial x} = \rho^{-1}_{t_0,(0)}(x)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$。根据伊藤公式，$b(t) \triangleq a_1(t)X_t + a_2(t)$，$\sigma(t) = b_2(t)$。令$Y_t = f(t, X_t)$，$t \geq 0$，有

$$\begin{aligned} dY_t =& [-a_1(t)\rho^{-1}_{t_0,(0)}X_t + \rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)(a_1(t)X_t + a_2(t))]dt + \rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)b_2(t)dB_t & (844) \\ =& a_2(t)\rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)dt + b_2(t)\rho^{-1}_{t_0,(0)}dB_t & (845) \end{aligned}$$

所以

$$Y_t = \rho^{-1}_{t_0,(0)}(t)X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\rho^{-1}_{t_0,(0)}(s)ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\rho^{-1}_{t_0,(0)}(s)dB_s \tag{846}$$

所以

$$X_t = \rho_{t_0,(0)}(t)\left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\rho^{-1}_{t_0,(0)}(s)ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\rho^{-1}_{t_0,(0)}dB_s\right] \tag{847}$$

（3）求解（7.5.7）

取$f(t,x)=\ln x$，则$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial f}{\partial t}=0$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}$。令$Y_t=f(t,X_t)=\ln X_t$，$t\geq 0$，由伊藤公式，有

$$\begin{aligned} dY_t =&[a_1(t)X_t\frac{1}{X_t}+\frac{1}{2}(b_1(t)X_t)^2(-\frac{1}{X_t^2})]dt+b_1(t)X_t\frac{1}{X_t}dB_t \qquad (848)\\ =&(a_1(t)-\frac{1}{2}b_1^2(t))dt+b_1(t)dB_t \qquad (849)\end{aligned}$$

两边积分，得到

$$\ln X_t-\ln X_{t_0}=\int_{t_0}^t(a_1(s)-\frac{1}{2}b_1^2(s))ds+\int_{t_0}^t b_1(s)dB_s \tag{850}$$

得到

$$X_t=X_{t_0}\exp\{\int_{t_0}^t(a_1(s)-\frac{1}{2}b_1^2(s))ds+\int_{t_0}^t b_1(s)dB_s\} \tag{851}$$

取$X_{t_0}=1$，得到一个特解

$$\rho_{t_0}(t)=\exp\{\int_{t_0}^t(a_1(s)-\frac{1}{2}b_1^2(s))ds+\int_{t_0}^t b_1(s)dB_s\} \tag{852}$$

其满足

$$\begin{gathered} d\rho_{t_0}(t)=a_1(t)\rho_{t_0}(t)dt+b_1(t)\rho_{t_0}(t)dB_t \quad (7.5.10)\\ \rho_{t_0}(t_0)=1 \end{gathered} \tag{853}$$

（4）求解（7.5.6）

引理：设$\{X_{i,t}:t\geq 0\}$，$i=1,2$满足

$$dX_{i,t}=b_i(t)dt+\sigma_i(t)dB_t,\quad i=1,2 \tag{854}$$

取$f(t,x_1,x_2)=x_1x_2$，$Y_t=f(t,X_{1,t},X_{2,t})=X_{1,t}X_{2,t}$，$t\geq 0$。则

$$dY_t=[\sigma_1(t)X_{2,t}+\sigma_2(t)X_{1,t}]dB_t+[b_1(t)X_{2,t}+b_2(t)X_{1,t}+\sigma_1(t)\sigma_2(t)]dt \tag{855}$$

继续求解（7.5.6）

取$f(t,x_1,x_2)=x_1x_2$，$Y_t=f(t,\rho_{t_0}^{-1},X_t)=\rho_{t_0}^{-1}(t)X_t$

取$g(t,x)=\frac{1}{x}$，则$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}$，$\frac{\partial g}{\partial t}=0$，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3}$。所以

$$d\rho_{t_0}^{-1}(t)=[-\rho_{t_0}^{-2}(t)a_1(t)\rho_{t_0}(t)+2\frac{\rho_{t_0}^{-3}(t)}{2}b_1(t)^2\rho_{t_0}^2(t)]dt+[-\rho_{t_0}^{-2}(t)b_1(t)\rho_{t_0}(t)]dB_t=\rho_{t_0}^{-1}(t)[(-a_1(t)+b_1^2(t))dt-b_1(t)dB_t] \quad (85$$

由引理，

$$\begin{aligned} dY_t =&[(a_1(t)X_t+a_2(t))\rho_{t_0}^{-1}(t)+\rho_{t_0}^{-1}(t)(-a_1(t)+b_1^2(t))X_t+(b_1(t)X_t+b_2(t))(-b_1(t)\rho_{t_0}^{-1}(t))]dt \qquad (857)\\ &+[(b_1(t)X_t+b_2(t))\rho_{t_0}^{-1}(t)+(-b_1(t)\rho_{t_0}^{-1}(t))X_t]dB_t \qquad (858)\\ &=[a_2(t)-b_1(t)b_2(t)]\rho_{t_0}^{-1}(t)dt+b_2(t)\rho_{t_0}^{-1}(t)dB_t \qquad (859)\end{aligned}$$

所以

$$X_t=\rho_{t_0}(t)\left[X_{t_0}+\int_{t_0}^t(a_2(s)-b_1(s)b_2(s))\rho_{t_0}^{-1}(s)ds+\int_{t_0}^t b_2(s)\rho_{t_0}^{-1}(s)dB_s\right] \tag{860}$$

此即为一般线性非齐次随机微分方程的显式解。

例4. 设$\{X_t:t\geq 0\}$满足SDE

$$dX_t=\left(\frac{2}{1+t}X_t+b(1+t)^2\right)dt+b(1+t)^2dB_t\quad (b>0,\text{为一个常数}) \tag{861}$$

对应的齐次线性SDE的特解$\rho_{t_0}(t)=\exp\int_{t_0}^t\frac{2}{1+u}du=\left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2$。

代入特解至7.5.8的公式，有

$$
\begin{aligned}
X_t &= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t b(1+s)^2 \left(\frac{1+s}{1+t_0}\right)^{-2} ds + \int_{t_0}^t b(1+s)^2 \left(\frac{1+s}{1+t_0}\right)^{-2} dB_s\right] && (862)\\
&= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t b ds + \int_{t_0}^t b dB_s\right] && (863)\\
&= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 \left[X_{t_0} + b(1+t_0)^2(t-t_0+B_t-B_{t_0})\right], \quad t > t_0 && (864)
\end{aligned}
$$

7.6 SDE解的存在性和唯一性

定理：设$b(t,x),\sigma(t,x)$满足**整体Lipschiitz条件**，也即：

$$
|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K|x-y| \tag{865}
$$

以及**线性增长条件**，也即：

$$
|b(t,x)|+|\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|), \quad \forall t \in [0,\infty), x, y \in \mathbb{R} \tag{866}
$$

设$B=\{B_t : t \geq 0\}$是$\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$布朗运动，$\xi$在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，$\xi$与$B$相互独立，$E|\xi|^2 < +\infty$，则SDE

$$
\begin{gathered}
dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\
X_0 = \xi
\end{gathered} \tag{867}
$$

存在唯一（强）解。而且存在$C=C(K,T)$使得$E|X_t|^2 \leq C_1(1+E|\xi|^2)e^{C_2 t}$，$\forall 0 \leq t \leq T$。

期末考试：时间2025.1.10 14:30-16:30

7.7 扩散过程

考虑随机微分方程

$$
dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{868}
$$

定义：设连续时间参数实值马氏过程$X=\{X_t : t \geq 0\}$，满足

1. $\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h}-x| > \epsilon \mid X_t = x) = 0$
2. $\lim_{h\downarrow 0} \frac{E(X_{t+h}-X_t|X_t=x)}{h} = \mu(t,x)$
3. $\lim_{h\downarrow 0} \frac{E((X_{t+h}-x)^2|X_t=x)}{h} = \sigma^2(t,x) < +\infty$

其中$\mu(t,x)$，$\sigma^2(t,x)$有限。则称X是**扩散过程**，$\mu(t,x)$和$\sigma^2(t,x)$分别称为**漂移系数**和**扩散系数**。

例1：漂移布朗运动$X=\{X_t = \mu t + \sigma B_t : t \geq 0\}$，其中$\mu,\sigma$是常数，$\sigma > 0$。则$X$是扩散过程，且$\mu$是漂移系数，$\sigma$是漂移系数

证明：

第一条：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h}-x| > \epsilon \mid X_t = x) && (869)\\
=&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|\mu h + \sigma(B_{t+h}-B_t)| > \epsilon | X_t = x = \mu t + \sigma B_t) && (870)\\
=&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|\mu h + \sigma(B_{t+h}-B_t)| > \epsilon) && (871)\\
\leq&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} P(|\sigma(B_{t+h}-B_t)| > \frac{\epsilon}{2}) && (872)\\
\leq&\lim_{h\downarrow 0} \frac{E|B_{t+h}-B_t|^4}{h(\frac{\epsilon}{2\sigma})^4} && (873)\\
=&\lim_{h\downarrow 0} \frac{3h^2}{h(\frac{\epsilon}{2\sigma})^4} = 0 && (874)
\end{aligned}
$$

第二条：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0} \frac{E(X_{t+h}-X_t \mid X_t = x)}{h} && (875)\\
=&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E(\mu h + \sigma(B_{t+h}-B_t)) = \mu && (876)
\end{aligned}
$$

第三条：

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{E((X_{t+h}-x)^2\mid X_t=x)}{h} \tag{877}$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E((\mu h+\sigma(B_{t+h}-B_t))^2) \tag{878}$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E(\mu^2h^2+\sigma^2(B_{t+h}-B_t)^2+2\mu h\sigma(B_{t+h}-B_t)) \tag{879}$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(\mu^2h^2+\sigma^2h)=\sigma^2 \tag{880}$$

得证。

定理：定理7.6.1随机微分方程的解是一个扩散过程。且具有漂移系数$b(t,x)$和扩散系数$\sigma(t,x)$。

例2：随机微分方程$dX_t=-\mu X_tdt+\sigma dB_t$，其中$\mu\in\mathbb{R},\sigma,\mu>0$。它的解是O-U过程：

$$X_t=X_0e^{-\mu t}+\sigma\int_0^t e^{-\mu(t-s)}dB_s \tag{881}$$

根据定理，它应当是一个漂移系数为$-\mu x$，扩散系数为σ的扩散过程。

设初始值X_0与$B=\{B_t:t\geq 0\}$独立。则$\{X_t:t\geq 0\}$是**时齐马氏的**。

$\forall 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，$A\in\mathcal{B}_R$，考虑

$$P(X_{n+1}\in A|X_{t_n}=x_n,\cdots,X_{t_1}=x_1) \tag{882}$$
$$=P((X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)}+\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-\mu(t_{n+1}-s)}dB_s)\in A\mid X_{t_n}=x_n,\cdots,X_{t_1}=x_1) \tag{883}$$
$$=P((X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)}+\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-\mu(t_{n+1}-s)}dB_s)\in A) \tag{884}$$
$$=P(X_{t_{n+1}}\in A|X_{t_n}=x_n) \tag{885}$$

因此其为马氏的。X为马氏过程。注意到

$$\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-\mu(t_{n+1}-s)}dB_s \tag{886}$$

是一系列正态分布的线性和，因此其还是正态分布，均值为$X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)}$。方差为$\int_{t_n}^{t_{n+1}}E\sigma^2e^{-2\mu(t_{n+1}-s)}ds=\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu(t_{n+1}-t_n)})$。

因此

$$X_{n+1}=X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)}+\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-\mu(t_{n+1}-s)}dB_s\sim\mathcal{N}(X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)},\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu(t_{n+1}-t_n)})) \tag{887}$$

因此

$$p(t,x,y)=\mathcal{N}(X_ne^{-\mu(t_{n+1}-t_n)},\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu(t_{n+1}-t_n)}))\text{的概率密度} \tag{888}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu t})}}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\mu t})^2}{2(1-e^{-2\mu t})\frac{\sigma^2}{2\mu}}\right\} \tag{889}$$

当$\mu>0$，$\sigma>0$时，令$t\to\infty$，有

$$\lim_{t\to\infty}p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\mu}}}exp\left\{-\frac{y^2}{2\cdot\frac{\sigma^2}{2\mu}}\right\} \tag{890}$$

因此$\mathcal{N}(0,\frac{\sigma^2}{2\mu})$是O-U过程$\{X_t:t\geq 0\}$的不变分布。可以验证：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(t,x,y)dx=f(y) \tag{891}$$