第二章习题（进阶 A）

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性．请你在做题的同时，仔细审阅每一道题目，对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价．你可以选择打分和（或）给出评语，或采取你喜欢的任何一种评价手段．若有余力，你还可以尝试总结每道题考察的知识点，或尝试用多种本质上不同的手段求解问题．你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据．
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数．这些分数按作业给分比例折算后，将会直接加到总评成绩上．
- 在作答时请务必清楚标明题号．

2.6. 证明或证伪：序列 $\{23, 2323, 232323, \cdots\}$ 中存在一个数能被 233 整除．

2.7. 证明：

(1) 在线段 $[0,1]$ 上任取 $n \geq 2$ 个点，则必有两点间的距离不大于 $\dfrac{1}{n-1}$；

(2) 在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上任取 $n \geq 2$ 个点，则必有两点间的距离不大于 $\dfrac{\sqrt{2}}{\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor - 1}$.

2.8. 设有正整数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{77}\}$，其中任意连续 7 项之和不大于 12．证明数列中存在连续若干项之和为 22．

2.9. 设 $S = \{1, 2, \cdots, 10^6\}$，$A \subseteq S$，$|A| = 101$．证明：总能找到 $B \subseteq S$，满足 $|B| = 100$，且集合 $\{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$ 中包含恰好 $|A| \cdot |B| = 10\,100$ 个元素．

2.10. 构造一个最大的由正整数构成的集合，使其中任意 3 个不同元素之和均为质数．