第一章习题（进阶B）

潘子睿 2024310675

> 按照要求，我对于每道题的难度进行了打分。我将打分分为两个维度，分别为**思维**和**计算**。**思维**表示拿到题目后思考得到解法的难度，**计算**表示有思路后完成计算过程的难度。我认为这些题目都很适合组合数学。$1 \leq$打分≤ 5，分数越高代表越难。

1.25

> 难度：思维2，计算3

证明：

考虑$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，令$A_i = \{A | A \in S, \min A = i\}$。由于$|A| = r$，故首先有$i \leq n - r + 1$。

有

$$|A_i| = C_{n-i}^{r-1}, i \leq n - r + 1 \tag{1}$$

所以

$$\begin{align}
\sum_{A \in S} \min A &= \sum_{i=1}^{n-r+1} i \cdot C_{n-i}^{r-1} \tag{2}\\
&= C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r) \cdot C_r^{r-1} + (n-r+1) \cdot C_{r-1}^{r-1} \tag{3}\\
&= (C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r) \cdot C_r^{r-1} + (n-r) \cdot C_{r-1}^{r-1}) + C_{r-1}^{r-1} \tag{4}\\
&= (C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r) \cdot (C_r^{r-1} + C_r^r)) + C_r^r \tag{5}\\
&= (C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r-1) C_{r+1}^{r-1} + (n-r) \cdot C_{r+1}^r) + C_r^r \tag{6}\\
&= (C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r-1)(C_{r+1}^{r-1} + C_{r+1}^r)) + C_{r+1}^r + C_r^r \tag{7}\\
&= (C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r-1) C_{r+2}^r) + C_{r+1}^r + C_r^r \tag{8}\\
&\cdots \tag{9}\\
&= C_n^r + C_{n-1}^r + \cdots + C_{r+1}^r + C_r^r \tag{10}\\
&= C_n^r + C_{n-1}^r + \cdots + C_{r+1}^r + C_{r+1}^{r+1} \tag{11}\\
&= C_n^r + C_{n-1}^r + \cdots + C_{r+2}^{r+1} \tag{12}\\
&\cdots \tag{13}\\
&= C_{n+1}^{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \tag{14}
\end{align}$$

这里在推导时用到了两个恒等式：

1. $C_{r-1}^{r-1} = 1 = C_r^r$
2. $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$

原命题得证。

1.26

> 难度：思维1，计算2

原命题等价于将除dog，p，q中出现的五个字母外的其他字母插入下面四个空中：

$$\underset{1号空隙}{\underline{\quad}}\ p\ \underset{2号空隙}{\underline{\quad}}\ dog\ \underset{3号空隙}{\underline{\quad}}\ q\ \underset{4号空隙}{\underline{\quad}} \tag{15}$$

因此我们考虑将剩下的21个字母做全排列后，在其空隙（包括首尾）中插入三个隔板，共有

$$A_{21}^{21} \cdot C_{22}^3 = 78680050944432537600000 \tag{16}$$

种排列方案数。

1.27

> 难度：思维2，计算2

设

$$\underset{1\text{号空隙}}{\underline{\quad}}\ a\ \underset{2\text{号空隙}}{\underline{\quad}}\ b\ \underset{3\text{号空隙}}{\underline{\quad}}\ c\ \underset{4\text{号空隙}}{\underline{\quad}}\ d\ \underset{5\text{号空隙}}{\underline{\quad}}\ e\ \underset{6\text{号空隙}}{\underline{\quad}} \tag{17}$$

所形成的六个间隙中分别有x_i个字母，$1 \le i \le 6$，则有

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 95, x_1 \ge 0, x_2 \ge 3, x_3 \ge 5, x_4 \ge 7, x_5 \ge 9, x_6 \ge 0 \tag{18}$$

考虑上不定方程解的个数。令

$$\begin{cases} x_1^{'} &= x_1 + 1, \\ x_2^{'} &= x_2 - 2, \\ x_3^{'} &= x_3 - 4 \\ x_4^{'} &= x_4 - 6 \\ x_5^{'} &= x_5 - 8 \\ x_6^{'} &= x_6 + 1 \end{cases} \tag{19}$$

则上不定方程可变形为

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^{'} = 77, x_i \ge 1, 1 \le i \le 6 \tag{20}$$

由隔板法，其解的个数为C_{76}^{5}。

另一方面，将19个f,g,h,i,j做全排列的个数为

$$\frac{A_{95}^{95}}{(A_5^5)^5} \tag{21}$$

故原题总的排列方案数为：

$$\frac{A_{95}^{95}}{(A_5^5)^5} \cdot C_{76}^{5} \tag{22}$$

1.28

> 难度：思维2，计算1

证明：
考虑不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n \tag{23}$$

其非负整数解的个数即为$C_{n+m}^{m} = \binom{n+m}{m}$。

另一方面，不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k \tag{24}$$

的非负整数解个数为$C_{k+m-1}^{m-1} = \binom{k+m-1}{m-1}$。

因此，我们对（23）式中x_{m+1}的数值进行枚举，令$x_{m+1} = n - k$，$0 \le k \le n$，此时

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n - x_{m+1} = k \tag{25}$$

统计x_{m+1}取不同值时不定方程（25）的解的个数，即有

$$\binom{n+m}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m-1}{m-1} \tag{26}$$

1.29

> 难度：思维2，计算3

-5，-4，-3，-2，-1，1，2，3，4这9个数字中，共有5个负数，4个正数。若要求取出的四个数的乘积为正数，可分为以下三种情况：

1. 取出的四个数均为正数
2. 取出的四个数中恰好有两个负数
3. 取出的四个数均为负数

(1)

根据上述分析，若选择的数字互不相同，则方案数为

$$C_4^4+C_4^2C_5^2+C_5^2=71 \tag{27}$$

(2)

根据上述分析，若选择的数字允许相同，分情况进行讨论：

1. 取出的四个数均为正数，等价于不定方程

   $$\sum_{i=1}^{4}x_i=4,x_i\geq 0 \tag{28}$$

   的解的个数。这是因为，我们可以设取出的四个数中1、2、3、4的个数分别为x_i，$1\leq i\leq 4$。因此方案数为$C_7^3=35$。
2. 取出的四个数中恰好有两个负数。取出正数的方案数为$C_4^2+4=10$，取出负数的方案数为$C_5^2+5=15$。故总方案数为25。
3. 取出的四个数全为负数，等价于不定方程

   $$\sum_{i=1}^{5}x_i=4,x_i\geq 0 \tag{29}$$

   的解的个数，为$C_8^4=70$。

因此总的方案数为

$$35+25+70=130 \tag{30}$$

1.30

> 难度：思维2，计算2

首先考虑正整数解，有

$$1000000=2^6\cdot 5^6 \tag{31}$$

设

$$\begin{cases}x=2^{u_1}5^{v_1}\\ y=2^{u_2}5^{v_2},\\ z=2^{u_3}5^{v_3}\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{3}u_i=6,\sum_{i=1}^{3}v_i=6,\quad u_i\geq 0,v_i\geq 0 \tag{32}$$

因此，考虑两个不定方程：

$$\sum_{i=1}^{3}u_i=6,\sum_{i=1}^{3}v_i=6,\quad u_i\geq 0,v_i\geq 0 \tag{33}$$

各自的解的个数，均为$C_8^2=28$。因此正整数解的总个数为$28\times 28=784$种。

再考虑整数解，容易发现，若$(x,y,z),x>0,y>0,z>0$是原方程的一组解，则$(-x,-y,z),(-x,y,-z),(x,-y,-z)$也为原方程的解。因此原方程的整数解数目为$784*4=3136$。

1.31

> 难度：思维5，计算2

证明：

$$\text{原式}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot P(n,k)}{n^{k+1}}=1\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{n}n^{n-k}\cdot k\cdot P(n,k)=n^{n+1}\tag{34}$$

我们通过其组合意义来对这一式子进行证明。考虑有n种球，我们将这些球放进$n+1$个盒子中，每个盒子都必须放且只能放一个球。形式化地，设第i个盒子中放的球属于第a_i种，$1\le a_i\le n$，$1\le i\le n$，考虑$(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})$的不同情况的集合S。很明显，由于每个盒子都可以放n种球中的任何一种，因此$|S|=n^{n+1}$。

另一方面，我们证明

$$|S|=\sum_{k=1}^{n}n^{n-k}\cdot k\cdot P(n,k)\tag{35}$$

首先，有

$$\begin{aligned}T=\sum_{k=1}^{n}n^{n-k}\cdot k\cdot P(n,k)=\sum_{k=1}^{n}T_k&\qquad(36)\\=\underbrace{n^{n-1}\cdot P(n,1)}_{k=1}+\underbrace{n^{n-2}\cdot 2\cdot P(n,2)}_{k=2}+\underbrace{n^{n-3}\cdot 3\cdot P(n,3)}_{k=3}+\cdots+\underbrace{n^{0}\cdot n\cdot P(n,n)}_{k=n}&\qquad(37)\end{aligned}$$

考虑原问题。当$a_1=a_2$时，满足题意的情况数为

$$|S_1|=n\cdot n^{(n+1)-2}=n\cdot n^{n-1}=n^{n-1}P(n,1)=T_1\tag{38}$$

当$a_1\ne a_2$，而$a_3=a_1$或$a_3=a_2$时，也即a_1,a_2,a_3中有两者相同，但是a_1和a_2不同，满足题意的情况数为：

$$|S_2|=P(n,2)\cdot 2\cdot n^{n-2}=T_2\tag{39}$$

一般地，设S_k表示$a_1,a_2,\cdots,a_k$两两不同，$a_{k+1}=a_i$，$1\le i\le k$的情况，$1\le k\le n$，则

$$|S_k|=P(n,k)\cdot k\cdot n^{(n+1)-(k+1)}=P(n,k)\cdot k\cdot n^{n-k}=T_k\tag{40}$$

而显然$\{S_i|1\le i\le n\}$两两不交。另一方面，根据抽屉/鸽巢原理，一定存在i，$1\le i\le n$，使得$a_{n+1}=a_i$，因此S_n实际上表示了$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$中前n个两两不同的全部情况。进一步地，$S_{n-1}\cup S_n$就表示了$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$中前$n-1$个两两不同的全部情况。依次类推，可以发现$S_2\cup S_3\cup\cdots\cup S_n$表示了$a_1$和$a_2$不同的全部情况。它们和$S_1$一起，表示出了所有满足题意的序列。从而

$$S=\cup_{i=1}^{n}S_i\tag{41}$$

因此

$$n^{n+1}=|S|=|\cup_{i=1}^{n}S_i|=\sum_{i=1}^{n}|S_i|=\sum_{i=1}^{n}T_i=T\tag{42}$$

原题得证。

1.32

> 难度：思维3，计算1

首先，考虑1，2，3，4的全排列，共有$4!=24$种。而对于每一种全排列

$$x_1x_2x_3x_4,x_i\in\{1,2,3,4\}\tag{43}$$

由于5的中介数为3，因此5的位置是确定的，一定落在x_1，x_2之间。因此，$\{1,2,3,4,5\}$的所有排列中满足5的中介数为3的排列方案数就是24。

数字6没有限制，可以插在任意位置，因此包含6的方案数为$24\times 6=144$。而与数字5同理，数字7的中介数为3，因此数字7一定被插在$\{1,2,3,4,5,6\}$的任意排列中位列第三的数字之后，从而数字7的位置是确定的。数字8同理。

综上，原题的答案为144。

1.33

> 难度：思维4，计算2

原题可以拆分为两个问题：首先从m个不同的盒子中取出n个互不相邻的盒子，然后将r个相同的小球放入这n个盒子中，且满足每盒至少包含k个球。

1. 从m个不同的盒子中取出n个互不相邻的盒子

   给原来的m个不同的盒子标号为$1,2,\cdots,m$，设取出的n个盒子的标号为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，且$1\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le m$，则$\{x_i\}$互不相邻等价于$\{x_i-i\}$互不相同。

   > 这是因为，若存在i，$1\le i<n$，满足$x_i-i=x_{i+1}-i-1$，则有$x_{i+1}=x_i+1$，即x_i和x_{i+1}相邻。反过来，若x_i和x_{i+1}相邻，则$x_i-i=x_{i+1}-i+1$，即x_i-i和$x_{i+1}-i-1$相同。

   因此这等价于从$\{1,2,\cdots,m-n\}$中取出n个不同的数，共有C_{m-n}^n种方案。

2. 将r个相同的小球放入这n个盒子中，且满足每盒至少包含k个球

   这对应不定方程

   $$x_1+x_2+\cdots x_n=r,x_i\ge k,x_i\in\mathbb{N} \tag{44}$$

   的解的个数。令$x_i^{'}=x_i-(k-1)\in\mathbb{N}^+$，则上不定方程化为

   $$x_1^{'}+x_2^{'}+\cdots+x_n^{'}=r-n\cdot(k-1)=r+n-nk,x_i\in\mathbb{N}^+ \tag{45}$$

   其解的个数为$C_{r+n-nk-1}^{n-1}$。

综上，原题中的放球方案数为$C_{m-n}^n\cdot C_{r+n-nk-1}^{n-1}$。

1.34

> 难度：思维3，计算3

首先，对于任意回文串，其中奇数个的字母种数不超过1。

因此，若$\{a_i\}$中中奇数个的种数超过1，则不存在符合要求的字符串数目。下分两种情况讨论：

1. $\{a_i\}$中恰好有一个为奇数，设为a_k，其中$1\le k\le 26$。则必须让字母$\tau(k)$放置在回文串的正中间，其将该回文串分成完全对称的两部分。从而我们只需考虑前半部分，其中包括$a_i/2$个字母$\tau(i)$，$1\le i\le 26$，$i\ne k$，以及$(a_k-1)/2$个字母$\tau(k)$。令$N_1=\frac{(\sum_{i=1}^{26}a_i)-1}{2}$表示此时字母的总数，则这些字母的全排列方案数共有

   $$\frac{P(N_1,N_1)}{\prod_{i=1,i\ne k}^{26}P(\frac{a_i}{2},\frac{a_i}{2})\cdot P(\frac{a_k-1}{2},\frac{a_k-1}{2})}=\frac{N_1!}{\prod_{i=1,i\ne k}^{26}(\frac{a_i}{2})!\cdot(\frac{a_k-1}{2})!} \tag{46}$$

2. $\{a_i\}$中均为偶数。此时回文串的长度为偶数，其前半部分和后半部分构成两个完全对称的序列。同样的，我们只考虑前半部分，其中包括$\frac{a_i}{2}$个字母$\tau(i)$，$1\le i\le 26$。令$N_2=\frac{\sum_{i=1}^{26}a_i}{2}$，则这些字母的全排列方案数共有

   $$\frac{P(N_2,N_2)}{\prod_{i=1}^{26}P(\frac{a_i}{2},\frac{a_i}{2})}=\frac{N_2!}{\prod_{i=1}^{26}(\frac{a_i}{2})!} \tag{47}$$

综上，设$\{a_i\}$中奇数的个数为t，$t\ge 0$，则符合要求的字符串数目为

$$\begin{cases} \frac{N_2!}{\prod_{i=1}^{26}(\frac{a_i}{2})!}, & \text{其中}N_2=\frac{\sum_{i=1}^{26}a_i}{2}, & t=0 \\ \frac{N_1!}{\prod_{i=1,i\neq k}^{26}(\frac{a_i}{2})!\cdot(\frac{a_k-1}{2})!}, & \text{其中}N_1=\frac{(\sum_{i=1}^{26}a_i)-1}{2}, a_k\text{为唯一的奇数}, & t=1 \\ 0, & & t>1 \end{cases} \tag{48}$$

1.35

> 难度：思维4，计算2

考虑将一个三阶魔方的角块和棱块全部拆下，再随机拼回的情况总数。

首先考虑角块，三阶魔方一共有8个角块，对于每一个角，其均落在三个不同颜色中心块所在的面上，因此每个角的位置都是不同的。而每个角块有三个面，通过旋转角块可知，每个角块在某个角上的状态数为3，因此随机拼回角块的方案数为：

$$P(8,8)\cdot 3^8=8!\cdot 3^8 \tag{49}$$

其次，考虑棱块，三阶魔方一共有12个棱块。对于每一条棱，其均落在两个不同颜色中心块所在的面上，因此每个棱块的位置也都是不同的。而每个棱块有两个面，通过旋转棱块可知，每个棱块在某条棱上的状态数为2，因此随机拼回棱块的方案数为：

$$P(12,12)\cdot 2^{12}=12!\cdot 2^{12} \tag{50}$$

从而三阶魔方的总状态数为$8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12}$。

另一方面，随机拼回后魔方能复原的概率为$\frac{1}{12}$，因此三阶魔方的合法状态数应为总状态数的$\frac{1}{12}$，即

$$\frac{8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12}}{12} \tag{51}$$

1.36

> 难度：思维3，计算3

(1)

若所有同学都回答了此题，则可能出现的统计结果数目等价于不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=147 \tag{52}$$

的非负整数解个数，为$C_{150}^3=551300$。

(2)

若每位同学均可能没有回答此题，则可能出现的统计结果数目为一系列不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=k, 0\le k\le 147 \tag{53}$$

的非负整数解个数的和，为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{147}C_{k+3}^3 &= C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{150}^3 && (54)\\ &= C_4^4+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{150}^3 && (55)\\ &= C_5^4+C_5^3+\cdots+C_{150}^3 && (56)\\ &= C_{151}^4=20811575 && (57) \end{aligned}$$

(3)

原题等价于以下一系列不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=k, 0\le k\le 147, x_3\ge\lceil\frac{k}{2}\rceil \tag{58}$$

的非负整数解的个数的和。其中$\lceil\frac{k}{2}\rceil$表示$\frac{k}{2}$的上取整。

因此，总结果数目为

$$\sum_{k=0}^{147} C^3_{k-\lceil \frac{k}{2} \rceil+3} = \underbrace{C^3_3}_{k=0} + \underbrace{C^3_3}_{k=1} + \underbrace{C^3_4}_{k=2} + \underbrace{C^3_4}_{k=3} + \cdots + \underbrace{C^3_{76}}_{k=147} \tag{59}$$

$$= 2(C^3_3 + C^3_4 + \cdots + C^3_{76}) \tag{60}$$

$$= 2C^4_{77} = 2706550 \tag{61}$$