HOMEWORK_5

潘子睿 2024310675

3.4

有状态转移方程

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.35 & 0.30 & 0.35 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

该马尔可夫链为有限状态，时齐，因此一定存在一个不变分布，设$\Pi = \{\pi_1\ \pi_0\ \pi_{-1}\}$为其不变分布。

则有

$$\begin{cases} \Pi\mathbb{P} = \Pi \\ \sum_{i=-1}^{1} \pi_i = 1 \end{cases} \tag{2}$$

解得

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{14}{29} \\ \pi_0 = \frac{8}{29} \\ \pi_{-1} = \frac{7}{29} \end{cases} \tag{3}$$

从而平均返回时间

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{29}{14} \\ \mu_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{29}{8} \\ \mu_{-1} = \frac{1}{\pi_{-1}} = \frac{29}{7} \end{cases} \tag{4}$$

考虑在稳定经济条件下的增长趋势。设初始状态为1。则

$$E(\text{增长趋势}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times (0.8)^{k-1} \times 0.2 = 0.2 \sum_{k=1}^{\infty} k \times (0.8)^{k-1} = 5 \quad (\text{年}) \tag{5}$$

考虑在稳定经济条件下的减少趋势。设初始状态为-1，则

$$E(\text{减少趋势}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times (0.6)^{k-1} \times 0.4 = 0.4 \sum_{k=1}^{\infty} k(0.6)^{k-1} = 2.5 \quad (\text{年}) \tag{6}$$

所以

$$E(\text{增长趋势}) > E(\text{减少趋势}) \tag{7}$$

3.5

由于这一马尔可夫链为时齐的、有限状态，因此其一定存在一个不变分布，设为$\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$。从而有

$$\begin{cases} \Pi\mathbb{P} = \Pi \\ \sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1 \end{cases} \tag{8}$$

带入$\mathbb{P}$，得.

$$\begin{cases} \begin{array}{lllllllll} \pi_1 & = 0.1 & \pi_1 & + & 0.3\pi_2 & +0.1\pi_3 & & \\ \pi_2 & = 0.1 & \pi_1 & + & 0.2\pi_2 & +0.2\pi_3 & +0.1\pi_4 & +0.1\pi_5 \\ \pi_3 & = 0.3 & \pi_1 & + & 0.2\pi_2 & +0.4\pi_3 & +0.2\pi_4 & +0.1\pi_5 \\ \pi_4 & = 0.5 & \pi_1 & + & 0.2\pi_2 & +0.2\pi_3 & +0.4\pi_4 & +0.4\pi_5 \\ \pi_5 & = & & & 0.1\pi_2 & +0.1\pi_3 & +0.3\pi_4 & +0.4\pi_5 \\ 1 & = & \pi_1 & + & \pi_2 & +\pi_3 & +\pi_4 & +\pi_5 \end{array} \end{cases} \tag{9}$$

解得：

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1377}{98} \approx 14.05 \tag{10}$$

3.6

状态转移方程为

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & & & & \cdots \\ 0 & & \cdots & & \ddots \end{pmatrix} \tag{11}$$

当存在稳定分布时，设稳定分布为$\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$，有

$$\Pi\mathbb{P} = \Pi \tag{12}$$

即

$$\begin{cases} \pi_0 = a_0\pi_0 + a_0\pi_1 \\ \pi_1 = a_1\pi_0 + a_1\pi_1 + a_0\pi_2 \\ \pi_2 = a_2\pi_0 + a_2\pi_1 + a_1\pi_2 + a_0\pi_3 \\ \vdots \end{cases} \quad (*) \tag{13}$$

由于该马尔可夫链X是不可约的，因此稳定分布存在$\Leftrightarrow$ X中至少有一个状态是正常返态$\Leftrightarrow$ X中所有状态都是正常返态$\Leftrightarrow$状态0是正常返态$\Leftrightarrow$ $\pi_0 > 0$。

取母函数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \tag{14}$$

由$(*)$得：

$$\begin{cases}\pi_0 z^0 = a_0\pi_0 z^0 + a_0\pi_1 z^0 \\ \pi_1 z^1 = a_1\pi_0 z^1 + a_1\pi_1 z_1 + a_0\pi_2 z^1 \\ \pi_2 z^2 = a_2\pi_0 z^2 + a_2\pi_1 z^2 + a_1\pi_2 z^2 + a_0\pi_3 z^2 \\ \vdots \end{cases} \tag{15}$$

两边分别相加，得：

$$\begin{aligned} g(z) =& \pi_0\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \pi_1\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \pi_2\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} + \pi_3\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2} + \cdots && (16)\\ =&(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\pi_0 + \pi_1 + z\pi_2 + z^2\pi_3 + \cdots) && (17)\\ =&\frac{1}{z}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\pi_0(z-1) + \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k z^k) && (18)\\ =&\frac{1}{z}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)(\pi_0(z-1) + g(z)) && (19)\end{aligned}$$

解得

$$g(z) = \frac{\pi_0 h(z)(z-1)}{z - h(z)} \tag{20}$$

其中$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，有$h(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$。

注意到$g(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1$，而$z = 1$时$g(z)$的分子分母均为0，因此根据洛必达法则，有

$$\begin{aligned} 1 = g(1) =& \frac{(\pi_0 h(z)(z-1))'|_{z=1}}{(z-h(z))'|_{z=1}} && (21)\\ =& \frac{\pi_0(h'(z)(z-1) + h(z))|_{z=1}}{(1-h'(z))|_{z=1}} && (22)\\ =& \frac{\pi_0 h(1)}{1-h'(1)} && (23)\\ =& \frac{\pi_0}{1-h'(1)} && (24)\end{aligned}$$

故

$$\pi_0 = 1 - h'(1) \tag{25}$$

则平稳分布存在$\Leftrightarrow 1 - h'(1) > 0$，代入$h(z)$即知这等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k < 1 \tag{26}$$

下求平衡时等待顾客的平均队长，也即

$$
\begin{aligned}
EX_n =& \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = g^{'}(1) && (27)\\
=& (\frac{\pi_0 h(z)(z-1)}{z-h(z)})^{'}\Big|_{z=1} && (28)\\
=& \frac{\pi_0(h^{'}(z)z(z-1)-h(z)(h(z)-1))}{(z-h(z))^2}\Bigg|_{z=1} && (29)\\
\text{(洛必达法则)} =& \frac{\pi_0(h^{''}(z)(z^2-z)+h^{'}(z)2z-2h(z)h^{'}(z))}{2(z-h(z))(1-h^{'}(z))}\Bigg|_{z=1} && (30)\\
\text{(洛必达法则)} =& \pi_0 \frac{h^{(3)}(z)(z^2-z)+h^{''}(z)(4z-2h(z)-1)-2(h^{'}(z))^2+2h^{'}(z)}{2(h^{'}(z))^2+2-4h^{'}(z)-2zh^{''}(z)+2h(z)h^{''}(z)}\Bigg|_{z=1} && (31)\\
=& \pi_0 \frac{h^{''}(z)+2h^{'}(z)(1-h^{'}(z))}{2(h^{'}(z)-1)^2}\Bigg|_{z=1} && (32)
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
h^{'}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\Bigg|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \\
h^{''}(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(k-1) a_k z^{k-2}\Bigg|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k
\end{aligned} \tag{33}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
EX_n =& \pi_0 \frac{h^{''}(1)+2h^{'}(1)(1-h^{'}(1))}{2(h^{'}(1)-1)^2} = \frac{h^{''}(1)+2h^{'}(1)(1-h^{'}(1))}{2(1-h^{'}(1))} && (34)\\
=& \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k + 2(\sum_{k=0}^{\infty} ka_k)(1-\sum_{k=0}^{\infty} ka_k)}{2(1-\sum_{k=0}^{\infty} ka_k)} && (35)\\
=& \sum_{k=0}^{\infty} ka_k + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k}{2(1-\sum_{k=0}^{\infty} ka_k)} && (36)
\end{aligned}
$$

3.7

(1)

设平稳分布$\Pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，则有

$$
\begin{cases}
\Pi\mathbb{P} = \Pi \\
\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1
\end{cases} \tag{37}
$$

得到方程组

$$
\begin{cases}
\pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 \\
\pi_2 = 0.4\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{cases} \tag{38}
$$

解得

$$
\begin{cases} \pi_1 = \frac{21}{62} \\ \pi_2 = \frac{23}{62} \\ \pi_3 = \frac{9}{31} \end{cases} \tag{39}
$$

由于该马尔可夫链是常返、非周期的，且$\pi_i > 0$，即$\mu_i < \infty$，$\forall i \in S$，因此其是正常返的，从而有$\forall i, j \in S$，

$$
\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \tag{40}
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{21}{62} & \frac{23}{62} & \frac{9}{31} \\ \frac{21}{62} & \frac{23}{62} & \frac{9}{31} \\ \frac{21}{62} & \frac{23}{62} & \frac{9}{31} \end{pmatrix} \tag{41}
$$

(2)

当该马尔可夫链是平稳序列的时候，有

$$
\pi(0) = \pi(0)\mathbb{P} \tag{42}
$$

从而$\pi(0) = \pi = \{\frac{21}{62} \quad \frac{23}{62} \quad \frac{9}{31}\}$。有

$$
\pi(n) = \pi(0)\mathbb{P}^n = \pi(0) \tag{43}
$$

从而

$$
\begin{aligned} EX_n &= \sum_{i=1}^{3} i\pi_i = \frac{121}{62} \\ EX_n^2 &= \sum_{i=1}^{3} i^2\pi_i = \frac{275}{62} \\ DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 &= \frac{2409}{3844} \approx 0.627 \end{aligned} \tag{44}
$$

3.20(1)

有状态转移矩阵

$$
\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \tag{45}
$$

假设其平稳分布存在，设为$\Pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$，则有

$$
\begin{cases} \Pi\mathbb{P} = \Pi \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \end{cases} \tag{46}
$$

代入$\mathbb{P}$，得：

$$
\begin{cases}\frac{5}{8}\pi_1+\frac{2}{6}\pi_2+\frac{3}{4}\pi_3=\pi_1\\ \frac{2}{8}\pi_1+\frac{3}{6}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_3=\pi_2\\ \frac{1}{8}\pi_1+\frac{1}{6}\pi_2=\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases} \tag{47}
$$

解得

$$
\begin{cases}\pi_1=\frac{44}{81}\\ \pi_2=\frac{1}{3}\\ \pi_3=\frac{10}{81}\end{cases} \tag{48}
$$

故平稳分布存在，$\Pi=\begin{pmatrix}\frac{44}{81} & \frac{1}{3} & \frac{10}{81}\end{pmatrix}$。这说明原马尔可夫链存在正常返态。而原马尔可夫链是一个不可约链，从而所有状态均是正常返的，因此$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$存在，且

$$
\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}=\pi_j,\quad \forall i,j\in S \tag{49}
$$

即

$$
\begin{cases}\lim_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}=\pi_1=\frac{44}{81},\quad \forall i\in S\\ \lim_{n\to\infty}p_{i2}^{(n)}=\pi_2=\frac{1}{3},\quad \forall i\in S\\ \lim_{n\to\infty}p_{i3}^{(n)}=\pi_3=\frac{10}{81},\quad \forall i\in S\end{cases} \tag{50}
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty}E(X_n|X_0=1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{3}i\cdot p_{1i}^{(n)} \tag{51}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{3}i\cdot\lim_{n\to\infty}p_{1i}^{(n)} \tag{52}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{3}i\cdot\pi_i=\frac{128}{81} \tag{53}
$$

Q2.1

1. $(N(t)<n)$与$(S_n>t)$：$\{N(t)<n\}=\{S_n>t\}$，因为$N(t)<n$相当于事件第一次发生n次的时刻在t之后，也即$S_n>t$。
2. $(N(t)\le n)$与$(S_n\ge t)$：
    1. 当N是泊松过程时，$\{S_n\ge t\}\subset\{N(t)\le n\}$，因为首先当$S_n\ge t$时，一定有$N(t)\le n$。反之，当$N(t)\le n$时，可能有$S_n<t$。例如$N(t-1)=N(t)=n$，则$S_n\le t-1<t$。
    2. 当N是普通计数过程时，可能存在同一时刻事件发生两次的情况，例如$S_n=S_{n+1}=t$，$N(t)=n+1$，此时二者互不包含。
3. $(N(t)>n)$与$(S_n<t)$：此为2中两个集合的补集，因此当N是泊松过程时，有$\{N(t)>n\}\subset\{S_n<t\}$。当$N$是普通计数过程时，二者互不包含。

4. $(W(t)>x)$与$(N(t+x)-N(t)=0)$：$\{W(t)>x\}=\{N(t+x)-N(t)=0\}$，因为 $\{W(t)>x\}=\{S_{N_t+1}>t+x\}=\{N(t+x)<N(t)+1\}=\{N(t+x)-N(t)=0\}$。

Q2.2

证明：

设$\{N(t),t\geq 0\}\sim PP(\lambda t)$有

$$
\begin{aligned}
P(N(s)=k|N(t)=n)=&\frac{P(N(s)=k,N(t)=n)}{P(N(t)=n)} &(54)\\
=&\frac{P(N(s)=k)P(N(t)-N(s)=n-k)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} &(55)\\
=&\frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} &(56)\\
=&\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n} &(57)\\
=&C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} &(58)
\end{aligned}
$$

得证。

Q2.3

(1)

有

$$
\begin{aligned}
E\{N(t)N(s+t)\}=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}nkP(N(t)=k),N(s+t)=n) &(59)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}nkP(N(t)=k|N(s+t)=n)\cdot P(N(s+t)=n) &(60)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}nkC_n^k(\frac{t}{s+t})^k(\frac{s}{s+t})^{n-k}\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)} &(61)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}\cdot n\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(\frac{t}{s+t})^k(\frac{s}{s+t})^{n-k} &(62)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}n^2\frac{t}{s+t} &(63)\\
=&\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda(s+t))^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda(s+t)} &(64)\\
=&\lambda t(\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}) &(65)\\
=&\lambda t(\lambda s+\lambda t+1) &(66)
\end{aligned}
$$

(2)

有

$$
\begin{aligned}
P(N(s+t)=n|N(s)=k)=&\frac{P(N(s)=k|N(s+t)=n)\cdot P(N(s+t)=n)}{P(N(s)=k)} && (67)\\
=&\frac{C_n^k(\frac{s}{s+t})^k(\frac{t}{s+t})^{n-k}\cdot\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}}{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}} && (68)\\
=&\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t} && (69)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E(N(s+t)|N(s)=k)=&\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t} && (70)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t}+k && (71)\\
=&\lambda t+k && (72)
\end{aligned}
$$

所以

$$E(N(s+t)|N(s))=\lambda t+N(s) \tag{73}$$

其分布律

$$P(E(N(s+t|N(s)))=n)=P(N(s)=n-\lambda t)=\begin{cases}\frac{(\lambda s)^{n-\lambda t}}{(n-\lambda t)!}e^{-\lambda s}, & n-\lambda t\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{74}$$

(4)

1. 当$\epsilon\in(0,1)$时

$$\lim_{t\to s}P\{N(t)-N(s)>\epsilon\}=\lim_{t\to s}P\{N(t)-N(s)\geq 1\}=\lim_{t\to s}\lambda(t-s)+o(t-s)=0 \tag{75}$$

2. 当$\epsilon\geq 1$时

$$\lim_{t\to s}P\{N(t)-N(s)>\epsilon\}=\lim_{t\to s}P\{N(t)-N(s)\geq 2\}=\lim_{t\to s}o(t-s)=0 \tag{76}$$

Q2.10

考虑一泊松过程$N=\{N_t:t\geq 0\}$，N_t表示t时刻通过的汽车数。则原题即为求$P(S_n>x)=P(N(x)<n)$。

以秒为单位，则强度$\lambda=\frac{1}{2}$，从而

$$P(N(x)<n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x} \tag{77}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{dP(N(x)<n)}{dx} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}-\lambda\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}\right] \quad (78)\\ &= -\lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} \quad (79)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(N(x)<n) =& P(N(0)<n)-\int_0^x\lambda^n\frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-\lambda u}du \quad (80)\\ =& 1-\int_0^x\lambda^n\frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-\lambda u}du \quad (81)\\ =& \lambda^n\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty u^{n-1}e^{-\lambda u}du \quad (82)\\ =& \frac{1}{2^n(n-1)!}\int_x^\infty u^{n-1}e^{-\frac{u}{2}}du \quad (83)\end{aligned}$$

Q2.27(1)

证明：

首先，$N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0$。

其次，任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，考虑$N(t_1),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$的独立性。设$t_0=0$，$\forall 0\le i<j\le n$，有

$$\begin{aligned}&P(N(t_i)-N(t_{i-1})=u,N(t_j)-N(t_{j-1})=v) \quad (84)\\ =&\sum_{x=0}^{u}\sum_{y=0}^{v}P(N_1(t_i)-N_1(t_{i-1})=x,N_2(t_i)-N_2(t_{i-1})=u-x, \quad (85)\\ &N_1(t_j)-N_1(t_{j-1})=y,N_2(t_j)-N_j(t_{j-1})=v-y) \quad (86)\\ =&(\sum_{x=0}^{u}P(N_1(t_i)-N_1(t_{i-1})=x)P(N_2(t_i)-N_2(t_{i-1})=u-x)) \quad (87)\\ &(\sum_{y=0}^{v}P(N_2(t_j)-N_2(t_{j-1})=y)P(N_2(t_j)-N_2(t_{j-1})=v-y)) \quad (88)\\ =&P(N(t_i)-N(t_{i-1})=u)P(N(t_j)-N(t_{j-1})=v) \quad (89)\end{aligned}$$

因此$N(t_1),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立。

最后，$\forall t\ge 0$，$s>0$有

$$
\begin{aligned}
P(N(t+s)-N(t)=k) =& P(N_1(t+s)-N_1(t)+N_2(t+s)-N_2(t)=k) && (90)\\
=& \sum_{n=0}^{k} P(N_1(t+s)-N_1(t)=n, N_2(t+s)-N_2(t)=k-n) && (91)\\
=& \sum_{n=0}^{k} P(N_1(t+s)-N_1(t)=n)P(N_2(t+s)-N_2(t)=k-n) && (92)\\
=& \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda_1 s)^n}{n!} e^{-\lambda_1 s} \cdot \frac{(\lambda_2 s)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda_2 s} && (93)\\
=& s^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda_1^n \lambda_2^{k-n}}{n!(k-n)!} && (94)\\
=& \frac{s^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}}{k!} \sum_{n=0}^{k} C_k^n \lambda_1^n \lambda_2^{k-n} && (95)\\
=& \frac{(s(\lambda_1+\lambda_2))^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2) && (96)
\end{aligned}
$$

所以$\{N(t): t \geq 0\}$是参数为$\lambda_1+\lambda_2$的时齐泊松过程。