

第七章习题（进阶）

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性. 请你在做题的同时, 仔细审阅每一道题目, 对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价. 你可以选择打分和 (或) 给出评语, 或采取你喜欢的任何一种评价手段. 若有余力, 你还可以尝试总结每道题考察的知识点, 或尝试用多种本质上不同的手段求解问题. 你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据.
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数. 这些分数按作业给分比例折算后, 将会直接加到总评成绩上.
- 在作答时请务必清楚标明题号.

7.7. 使用 2 种颜色对一个 $n \times n$ 正方形棋盘的 n^2 个棋盘格进行染色, 允许旋转, 禁止翻转, 求不等价的染色方案数.

7.8. 将正六面体的各棱的中点相连, 切掉八个角, 得到一个新的多面体.

- (1) 求该多面体的面数、顶点数、棱数;
- (2) 使用红、黄、蓝 3 种颜色对该多面体的面染色, 要求 4 个面为红色、4 个面为黄色、其余面为蓝色, 并且所有红色面形状均相同、所有黄色面形状也均相同. 允许旋转, 求不等价的染色方案数;
- (3) 用火柴搭建该多面体, 允许旋转, 求不等价的方案数.

7.9. 现有一个 $2 \times 2 \times 2$ 正方体, 其每个面均划分为 4 个 1×1 小正方形. 有 24 张相同的 1×1 大小的肖像画, 将其贴到正方体表面上的每个小正方形上. 允许旋转, 求不等价的方案数.

7.10. 现有一个包含 5 个节点的无向完全图, 各节点之间没有区别. 使用 3 种颜色对各条边进行染色, 求不等价的染色方案数.

7.11. 现有一个 $1 \times 1 \times 2$ 的小魔方, 表面有 10 个色块. 该魔方的两个 $1 \times 1 \times 1$ 小块间由转轴连接, 可以旋转; 同时整个魔方也可在空间中任意旋转. 使用 2 种颜色对此魔方的每个色块染色, 每种颜色分别恰好染 5 个色块, 求不等价的染色方案数.

7.12. 现有一个正方体和 6 张中心分别写有数字 2, 3, 4, 5, 6, 7 的正方形贴纸, 贴纸边长均等于正方形棱长. 将其贴到正方体的六个面上, 允许旋转, 求不等价的方案数.