

## 第四章习题（基本）

- 基本题目考察详细的解答过程，直接给出答案不得分。答案正确性和过程合理性是作业的重要评分依据。
- 在作答时请务必清楚标明题号。
- 相比前几次作业，本章习题的答案形式较为复杂。请让你的答案尽可能简洁，这有助于防止助教出现误判。不过请注意，你设出的变量不能保留在答案中，不要通过使用额外变量的方式让答案变短。

4.1. 设  $G_n = F_{2n}$  ( $n \geq 0$ )，其中  $F_n$  是第  $n$  个 Fibonacci 数。

- (1) 证明： $G_n - 3G_{n-1} + G_{n-2} = 0$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )；
- (2) 求数列  $\{G_n\}$  的母函数。

4.2. 已知数列  $\{a_n\}$  的母函数为  $\frac{1}{1-x+x^2}$ ，求  $\{a_n\}$  满足的二阶齐次线性常系数递推式，并求  $a_0, a_1$ 。

4.3. 已知  $a_n = c \cdot 3^n + d \cdot (-1)^n$  ( $n \geq 0$ )，其中  $c, d$  是常数，求  $\{a_n\}$  满足的一个不含  $c, d$  的线性常系数递推关系。

4.4. 求解递推关系：

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 5 & (n \geq 2) \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

4.5. 由  $A, B, C, D$  四个字母组成允许重复的  $n$  位字符串，其中子串  $AB$  至少出现一次，求满足要求的字符串数目。

4.6. 考虑如下汉诺塔问题的变种：有  $A, B, C$  三根柱子，初始时  $A$  柱上有  $n$  个圆盘，按直径从小到大的顺序编号为 1 到  $n$ ；最终目标是将所有偶数编号的盘套在  $B$  柱上、所有奇数编号的盘套在  $C$  柱上。移动圆盘时的规则不变，求所需的最小移动次数。

4.7. 使用  $k$  种字母组成长度为  $n$  的字符串，但不允许相同字母连续出现 3 次，求方案数。

4.8. 计算： $\sum_{k=1}^n k^4$ 。

4.9. 从 1 到  $n$  的正整数中选取  $k$  个不同且不相邻的数，方案数记为  $f(n, k)$ 。

- (1) 求  $f(n, k)$  满足的一个线性常系数递推关系；
- (2) 用数学归纳法求  $f(n, k)$  的通项表示；
- (3) 若规定 1 与  $n$  是相邻的数，并在此前提下令从 1 到  $n$  的正整数中选取  $k$  个不同且不相邻的数的方案数为  $g(n, k)$ ，利用  $f(n, k)$  求  $g(n, k)$ 。

**4.10.** 使用尺寸为  $1 \times 1$  的方砖、直角边长为 1 的等腰直角三角形砖，以及斜边长为 2 的等腰直角三角形砖，铺设  $1 \times n$  的路径，求：

- (1) 所有可能的铺砖方案数；
- (2) 每一种可能的铺砖方案中使用的砖数相加，得到的砖数的总和.