第二章习题（进阶A）

潘子睿 2024310675

> 按照要求，我对于每道题的难度进行了打分。我认为这些题目都很适合组合数学。$1\le$打分≤ 5，分数越高代表越难。

2.6

> 难度：2

下证明序列$\{23,2323,232323,\cdots\}$中存在一个数能被233整除。

首先，设序列$\{23,2323,232323,\cdots\}=\{a_n\}_{n\ge 0}$，有

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}23\cdot 100^k \tag{1}$$

根据鸽巢原理，一定存在$0\le i<j$，$a_i\equiv a_j \pmod{233}$。也即

$$\begin{aligned} & 233|(a_j-a_i) && (2)\\ \implies\quad & 233|\sum_{k=i+1}^{j}23\cdot 100^k && (3)\\ \implies\quad & 233|\ 100^{i+1}\sum_{k=0}^{j-i-1}23\cdot 100^k && (4)\end{aligned}$$

而$(100,233)=1$。故

$$233|\sum_{k=0}^{j-i-1}23\cdot 100^k=a_{j-i-1} \tag{5}$$

从而得证。

2.7

> 第一小题难度1；第二小题难度4

(1)

反证法。假设存在取出的n个点为$0\le a_1<a_2<\cdots<a_n\le 1$，满足$\forall 1\le i<j\le n$，$a_j-a_i>\frac{1}{n-1}$，则

$$a_n=a_1+\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_{i-1})>(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}=1 \tag{6}$$

矛盾。从而必有两点间的距离不大于$\frac{1}{n-1}$，得证。

(2)

$n=2,3$时，命题显然成立（$\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1=0$）。下设$n\geq 4$。

反证法。假设存在取出的n个点$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，使得$\forall 1\leq i<j\leq n$，$d(a_i,a_j)>\frac{\sqrt{2}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}=R$。其中$d(a_i,a_j)$表示两个点$a_i$，$a_j$之间的距离。

则考虑以某个a_i为圆心，半径为$\frac{R}{2}$的圆C_i，$1\leq i\leq n$。若存在$1\leq i<j\leq n$，使得C_i与C_j相交，则$d(a_i,a_j)\leq\frac{R}{2}*2=R$，矛盾。故下假设所有$C_i$均不相交。

由于所有a_i均落在正方形$[0,1]\times[0,1]$内，因此所有圆C_i落在的区域C为原先的正方形向外延展$\frac{R}{2}$。有区域C的面积

$$S_C=1+4\times(1\times\frac{R}{2})+\pi(\frac{R}{2})^2=1+2R+\frac{\pi R^2}{4} \tag{7}$$

而n个圆C_i的面积$S=n\pi(\frac{R}{2})^2=\frac{n\pi R^2}{4}$。有

$$\begin{aligned}
S-S_C=&\frac{n\pi R^2}{4}-(1+2R+\frac{\pi R^2}{4}) &(8)\\
=&\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}-1-\frac{2\sqrt{2}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2} &(9)\\
=&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}\left[\frac{n\pi}{2}-(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2-2\sqrt{2}(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)-\frac{\pi}{2}\right] &(10)\\
=&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}\left[\frac{n\pi}{2}-(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2-(2\sqrt{2}-2)\lfloor\sqrt{n}\rfloor+2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}\right] &(11)\\
\geq&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}\left[\frac{n\pi}{2}-n-(2\sqrt{2}-2)\sqrt{n}+2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}\right] &(12)\\
=&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}\left[\sqrt{n}[(\frac{\pi}{2}-1)\sqrt{n}-(2\sqrt{2}-2)]+2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}\right] &(13)\\
\underset{n=4}{\geq}&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}\left[2[(\frac{\pi}{2}-1)2-2\sqrt{2}+2]+2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}\right] &(14)\\
=&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2} &(15)\\
=&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}(\frac{3}{2}\pi-2\sqrt{2}-1) &(16)\\
>&\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}(\frac{3}{2}\cdot 3-2\sqrt{2}-1)=\frac{1}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2}(3.5-2\sqrt{2})>0 &(17)
\end{aligned}$$

但是$C_i\subset C$，因此有$S_C\geq\sum_{i=1}^{n}S_{C_i}=S$，矛盾。

从而原命题得证。

2.8

> 难度：3

令$S_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$，$1\leq i\leq 77$。考虑序列

$$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_{77},S_1+22,S_2+22,\cdots,S_{77}+22\} \tag{18}$$

有$S_{77}+22\leq 11\times 12+22=154$。

若序列S中存在两项相等，则只能是存在$1\leq i<j\leq 77$，$S_i+22=S_j$，也即$\sum_{k=i+1}^{j}a_i=22$，原题得证。

反之，假设序列S中元素两两不相等。考虑到$|S|=154$，因此

$$S=\{1,2,3\cdots,154\} \tag{19}$$

为不超过154的正整数序列。又因为$S_1<S_2<\cdots S_{77}$，因此$\max\{S\}=S_{77}+22$。从而$S_{77}=132$。

下考虑元素153。因为$S_{77}<153$，因此$S_{76}+22=153$，得到$S_{76}=131$。依次类推，可得到

$$\begin{cases} S_{77}+22=154, & S_{77}=132 \\ S_{76}+22=153, & S_{76}=131 \\ \vdots & \vdots \\ S_{56}+22=133, & S_{56}=111 \end{cases} \tag{20}$$

至此，所有不小于111的元素已全部得到分配。

下考虑元素110。S中剩下的元素中最大的是$S_{55}+22$，因此$S_{55}+22=110$，从而$S_{55}=88$。依次类推，有

$$\begin{cases} S_{55}+22=110, & S_{55}=88 \\ S_{54}+22=109, & S_{54}=87 \\ \vdots & \vdots \\ S_{34}+22=89, & S_{34}=67 \end{cases} \tag{21}$$

至此，所有不小于67的元素已全部得到分配。

进一步地，考虑元素66，同理，有$S_{33}+22=66$，得到$S_{33}=44$，依次类推，有：

$$\begin{cases} S_{33}+22=66, & S_{33}=44 \\ S_{32}+22=65, & S_{32}=43 \\ \vdots & \vdots \\ S_{12}+22=45, & S_{34}=23 \end{cases} \tag{22}$$

至此，所有不小于23的元素已全部得到分配。

下考虑元素22，而S中剩余最大的元素为$S_{11}+22$，得到$S_{11}+22=22$，也即$S_{11}=0$，矛盾。

从而序列S中一定存在两项相等，原命题得证。

2.9

> 难度：4；我感觉因为比较抽象，所以比较难想

证明：

原命题等价于$\{a+b|a\in A,b\in B\}$中的元素两两不相同。设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{101}\}$，
$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{100}\}$，且$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{101}\leq 10^6$。则原命题也等价于
$\forall 1\leq i<j\leq 101,1\leq u<v\leq 100$，有$a_i+b_u\neq a_j+b_v\Leftrightarrow a_i-a_j\neq b_v-b_u$。

考虑集合$D=\{0\}\cup\{a_i-a_j\}_{1\leq i<j\leq 101}$，其最多包含$C_{101}^2+1=5051$个元素。下构造满足题意的集合$B$。

首先，令$b_1=1$。令$c_i=b_i-b_1$，$1\leq i\leq 100$。有$c_i\in C=\{1,2,\cdots,10^6-1\}$。

1. 考虑b_2，此时只需保证$c_2 = b_2 - b_1 \notin D$。而$|C/D| \geq 10^6 - 1 - 5051 > 0$，因此取$c_2 \in C/D$，$b_2 = b_1 + c_2$即可。
2. 考虑b_3，此时只需保证$c_3 = b_3 - b_1 \notin D$，且$b_3 - b_2 = c_3 - c_2 \notin D$，$b_2 - b_3 = c_2 - c_3 \notin D$。定义集合操作$D + x = \{a_i - a_j + x\}_{1 \leq i < j \leq 101}$，$\forall x \in \mathbb{Z}$，以及$x - D = \{x - (a_i - a_j)\}_{1 \leq i < j \leq 101}$。此时$c_3$需要满足$c_3 \in (C/[D \cup (c_2 + D) \cup (c_2 - D)])$。注意到$|C/[D \cup (c_2 + D) \cup (c_2 - D)]| \geq 10^6 - 1 - 5051 \times 3 > 0$。因此此时存在这样的$c_3$，进而存在满足题意的$b_3$
3. 一般的，考虑b_i，$2 \leq i \leq 100$。假设此时$B_{i-1} = \{b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}\}$满足$|\{a + b | a \in A, b \in B_{i-1}\}| = 101 \times (i - 1)$，即其中元素两两不同。此时需要保证$c_i = b_i - b_1 \notin D$，且$\forall 1 < j < i$，$b_i - b_j = c_i - c_j \notin D$，$b_j - b_i = c_j - c_i \notin D$。从而此时$c_i$需要满足$c_i \in W_i = C/[D \cup (\cup_{j=2}^{i-1}((c_j + D) \cup (c_j - D)))]$。考虑$|W_i|$，有

$$
\begin{aligned}
|W_i| \geq & |C| - |D| - \sum_{j=2}^{i-1}(|c_j + D| + |c_j - D|) && (23)\\
\geq & 10^6 - 1 - 5051 \times (1 + 2 \times (i - 2)) && (24)\\
= & 10^6 - 1 - 5051 \times (2i - 3) && (25)\\
\geq & 10^6 - 1 - 5051 \times 197 = 4952 > 0 && (26)
\end{aligned}
$$

从而存在这样的c_i，进而我们就找到了满足题意的b_i。

综上，按照以上步骤我们可以依次找到b_i，$2 \leq i \leq 100$。则存在满足题意的B，得证。

2.10

> 难度：3

对任意一个正整数z，z模3的结果只有三种可能$\{0, 1, 2\}$。设满足题意的集合为$S = \{a_n\}_{n \geq 1}$。

首先证明$|S| \leq 4$。

1. 若$|S| \geq 7$，则由鸽巢原理，必存在$i, j, k \geq 1$，使得a_i，a_j，a_k模3的余数相同，从而$3 | (a_i + a_j + a_k)$，矛盾。
2. 若$5 \leq |S| \leq 6$，由1中知，S中不能存在三个数，它们模3的余数相同。

   令$S_t = \{a \in S \mid a \equiv t \pmod 3\}$，则$|S_t| \leq 2$，$\forall t \in \{0, 1, 2\}$。

   那么根据鸽巢原理，必存在$i, j, k \geq 1$，使得a_i，a_j，a_k模3的余数互不相同，即分别模3余1，2，0。从而$3 | (a_i + a_j + a_k)$，矛盾。

因此$|S| \leq 4$。

而取$S = \{1, 3, 7, 9\}$，其中任意三个数的和为11，13，17，19，均为质数。

综上，构造的一个最大的满足题意的集合为$S = \{1, 3, 7, 9\}$，$|S| = 4$。