

第一章习题 (进阶 A)

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性. 请你在做题的同时, 仔细审阅每一道题目, 对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价. 你可以选择打分和 (或) 给出评语, 或采取你喜欢的任何一种评价手段. 若有余力, 你还可以尝试总结每道题考察的知识点, 或尝试用多种本质上不同的手段求解问题. 你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据.
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数. 这些分数按作业给分比例折算后, 将会直接加到总评成绩上.
- 在作答时请务必清楚标明题号.

1.13. 考虑平面上的一个任意凸 n 边形 ($n \geq 6$):

- (1) 作 2 条不同的对角线, 要求它们仅有一个位于多边形顶点处的公共点, 求方案数;
- (2) 作 2 条不同的对角线, 要求它们无公共点, 求方案数.

1.14. 设 $\{a_i\}$ 是一长度为 60 的正整数列 ($1 \leq i \leq 60$), 其中 $a_1 = 1, a_{60} = 20^{20}$, 并且数列中每一项都是其后面一项的约数.

- (1) 求满足要求的数列 $\{a_i\}$ 的数目;
- (2) 若进一步要求 $\{a_i\}$ 严格递增, 求满足条件的序列数目.

1.15. 现有 23 个不同的物体, 将其放入 25 个不同的箱子, 每个箱子中至多放入一个物体, 且禁止出现相邻的空箱子, 求方案数.

1.16. 直线分圆是一个非常有趣的组合数学问题, 考虑下列直线分圆问题:

- (1) 在平面上作一个圆和 n 条直线, 求这些直线最多将圆分为多少个部分;
- (2) 在平面上作一个圆并在圆周上任取 n 个点, 这些点两两连线得到一系列圆内的线段, 假设任意三条线段不共点, 求这些线段在圆内的交点数目;
- (3) 在第 (2) 问的基础上, 考察所有三边均在这些线段上的三角形, 这些三角形可能有 0 个、1 个、2 个或 3 个顶点在圆上, 求每种三角形的数目;
- (4) 在第 (2) 问的基础上, 求这些线段将圆分为多少个部分 (提示: 利用欧拉公式, 即平面图形的顶点数 V 、边数 E 和面数 F 之间满足关系 $V + F - E = 1$).

1.17. 完全二分图 $K_{n,n}$ 指的是一个简单无向图 $G = (V, E)$, 其中点集 $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$, 边集 $E = \{(i, n+j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. 图上的简单回路指的是不含重复顶点或重复边的回路. 设正整数 k 满足 $1 \leq k \leq n$, 求 $K_{n,n}$ 上长度为 $2k$ 的简单回路的数目.

1.18. 使用 $1, 2, \dots, 9$ 构造一个 n 位正整数, 使此数从高位到低位, 每一位数都小于等于前一位数, 求满足条件的整数数目.

1.19. 现有甲、乙、丙三类物品各 $2n$ 件，同类物品之间没有区别。现要将它们分给两个人，要求每个人分得 $3n$ 件物品，求共有多少种分法。

1.20. 从字典 $\{c_1, c_2, \dots, c_D\}$ 中选出 n 个字符组成字符串，要求字符 c_i 出现次数为 f_i ，保证 $\sum_{i=1}^D f_i = n$ 。设非负整数 k 满足 $D(k+1) > n$ ，求子串 $c_1 c_2 \dots c_D$ 的出现次数恰好为 k 的字符串的数目。

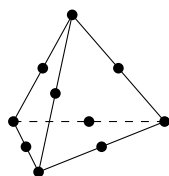
1.21. 某只“千足虫”有左右两侧各 100 只脚，假设它要为每只脚穿鞋子和袜子。

- (1) 若要求穿所有袜子在所有鞋子之前，穿所有左脚袜子、鞋子分别在所有右脚袜子、鞋子之前，求穿鞋袜的方案数。
- (2) 若要求穿每只脚袜子在每只脚鞋子之前，穿每一对脚中的左脚袜子、鞋子分别在右脚袜子、鞋子之前，求穿鞋袜的方案数。

1.22. 设 n 是正整数，非负整数 k 满足 $2^k \mid P(2n, n)$ ，求 k 的最大值。

1.23. 设有一无穷正整数列 $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ，其中每一项均大于 1。以此数列定义一种进制：当第 n 位达到 a_n 时，向第 $n+1$ 位进一。按此定义，二进制、十进制等即为常数列定义的进制，我们在讨论全排列生成算法时介绍的递增进位制即为基于等差数列定义的进制。证明：任意正整数在此进制下的表示唯一。

1.24. 在正四面体的顶点和各棱中点这 10 个点（如右图所示）中选取 4 个，求使这 4 点不共面的方案数。



习题 24 示意图