

第二章习题 (进阶 B)

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性. 请你在做题的同时, 仔细审阅每一道题目, 对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价. 你可以选择打分和 (或) 给出评语, 或采取你喜欢的任何一种评价手段. 若有余力, 你还可以尝试总结每道题考察的知识点, 或尝试用多种本质上不同的手段求解问题. 你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据.
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数. 这些分数按作业给分比例折算后, 将会直接加到总评成绩上.
- 在作答时请务必清楚标明题号.

2.11. 设非空有限集 S 中的元素均为实数, $|S| = n$. 证明: 存在非空的 $A \subseteq S$ 和整数 m , 使得

$$\left| m + \sum_{x \in A} x \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

2.12. 设有整数列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 数列长度 n 为奇数. 对于任意一个 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列 $p = p_1 p_2 \dots p_n$, 定义

$$f(p) = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

证明: 存在两个不同的 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列 p, q , 使得 $f(p) - f(q)$ 是 $n!$ 的倍数.

2.13. 平面上有 6 个整点 (x_i, y_i) , 满足 $|x_i|, |y_i| \leq 2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 证明: 必能从中选取 3 个点构成三角形, 其面积不超过 2 (若三点共线, 面积即视为 0).

2.14. 设 m, n 是任意正整数, M 是 $1, 2, \dots, m$ 的最小公倍数, 且 $n+1$ 不能被 M 整除. 证明: 存在 $x, y \in \{1, 2, \dots, m\}$, 满足 $x \neq y$, 且 $n \bmod x = n \bmod y$.

2.15. 有 101 个正整数, 其和为 300, 证明其中某些数之和恰好为 200.