

第一章习题 (进阶 B)

- 进阶题目的考核指标不仅仅是你答案的准确性. 请你在做题的同时, 仔细审阅每一道题目, 对其难度和作为《组合数学》课程教材习题的适合程度进行评价. 你可以选择打分和 (或) 给出评语, 或采取你喜欢的任何一种评价手段. 若有余力, 你还可以尝试总结每道题考察的知识点, 或尝试用多种本质上不同的手段求解问题. 你对题目的评估结果和认真程度是作业的重要评分依据.
- 保质保量地完成进阶题目将使你获得额外的作业分数. 这些分数按作业给分比例折算后, 将会直接加到总评成绩上.
- 在作答时请务必清楚标明题号.

1.25. 设 n, r 是正整数, 令 S 是由 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全体 r 元子集构成的集合, 证明:

$$\sum_{A \in S} \min A = \binom{n+1}{r+1}$$

1.26. 对 26 个小写英文字母作全排列, 要求单词 dog 出现在排列中, 并且字母 p 在字母 q 前面、dog 在 p 和 q 之间, 求满足上述条件的排列方案数.

1.27. 有 100 个英文字母, 其中 a、b、c、d、e 各有 1 个, f、g、h、i、j 各有 19 个. 现将这 100 个字母排成一列, 要求字母 a、b、c、d、e 按照字母表顺序排列, 并且 a、b 之间相隔至少 3 个字母, b、c 之间相隔至少 5 个字母, c、d 之间相隔至少 7 个字母, d、e 之间相隔至少 9 个字母. 求满足上述要求的排列方案数.

1.28. 从不定方程非负整数解数目的视角, 证明下列等式成立:

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^n \binom{k+m-1}{m-1} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

1.29. 从 $-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ 这 9 个数中选出 4 个, 要求其乘积为正数.

- (1) 若选择的数字互不相同, 求方案数;
- (2) 若选择的数字允许相同, 求方案数.

1.30. 求不定方程 $xyz = 1\,000\,000$ 的整数解数目.

1.31. 设 n 是正整数, 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot P(n, k)}{n^{k+1}} = 1$.

1.32. 设 $a_1 a_2 \dots a_n$ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列, 我们将排在 a_i 后面且比 a_i 小的数的个数称为 a_i 的中介数. 例如, 对于排列 364521, 4 的中介数为 2. 求 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的所有排列中, 满足 8 的中介数为 2、7 的中介数为 3、5 的中介数为 3 的排列方案数.

1.33. 有 m 个不同的盒子，将 r 个相同的小球放入其中的 n 个盒子中，要求这 n 个盒子互不相邻且每盒至少包含 k 个球 ($r \geq nk, m \geq 2n - 1$)。求满足要求的放球方案数。

1.34. 有 n 个小写英文字母，其中第 k 种字母的出现次数为 a_k ，保证 $\sum_{k=1}^{26} a_k = n$ 。现使用这些字母组成一个字符串，要求不能为回文串（即逆序后与原串相同的字符串）。通过讨论各 a_i 的奇偶性，求符合要求的字符串数目。

1.35. 若将一个三阶魔方的角块和棱块全部拆下，然后再随机拼回，则魔方能复原的概率为 $\frac{1}{12}$ 。根据这一条件，求三阶魔方的合法状态（即能复原的状态）数目。

1.36. 某份试卷中有一道包含四个选项 A, B, C, D 的选择题，共有 147 位同学交卷。现需要统计选择了每个选项的同学人数。例如，统计结果可能是 $\{A : 100, B : 0, C : 42, D : 5\}$ 。

(1) 若所有同学都回答了此题，求可能出现的统计结果数目。

(2) 若每位同学均可能没有回答此题，求可能出现的统计结果数目。

(3) 假设此题的正确答案是 C ，为了提高平均分，规定若做对此题的人不足交卷同学的一半，则此题不算分。每位同学均可能没有回答此题，求使此题算分的统计结果数目。