

**Questão 1.**

[1,0 pt] (a) Determine a representação de  $(222)_{10}$  na base  $b = 3$ .

[1,5 pt] (b) Defina uma função  $J: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$J((d_m d_{m-1} \dots d_1 d_0)_2) = (d_{m-1} d_{m-2} \dots d_0 d_m)_2.$$

Calcule  $J(22)$ . Expresse a resposta na base 10.

*Solução 1(a):*

$$222 \div 3 = 74 \quad \text{resto } 0$$

$$74 \div 3 = 24 \quad \text{resto } 2$$

$$24 \div 3 = 8 \quad \text{resto } 0$$

$$8 \div 3 = 2 \quad \text{resto } 2$$

$$2 \div 3 = 0 \quad \text{resto } 2$$

Portanto  $222_{10} = 22020_3$ .

*Solução 1(b):* Convertendo 22 à base 2 antes de aplicar a função  $J$ :

$$22 \div 2 = 11 \quad \text{resto } 0$$

$$11 \div 2 = 5 \quad \text{resto } 1$$

$$5 \div 2 = 2 \quad \text{resto } 1$$

$$2 \div 2 = 1 \quad \text{resto } 0$$

$$1 \div 2 = 0 \quad \text{resto } 1$$

Como  $22_{10} = 10110_2$ , segue imediatamente da definição de  $J$  que

$$J(22) = J(10110_2) = 01101_2 = 1101_2.$$

Convertendo este último à base 10:

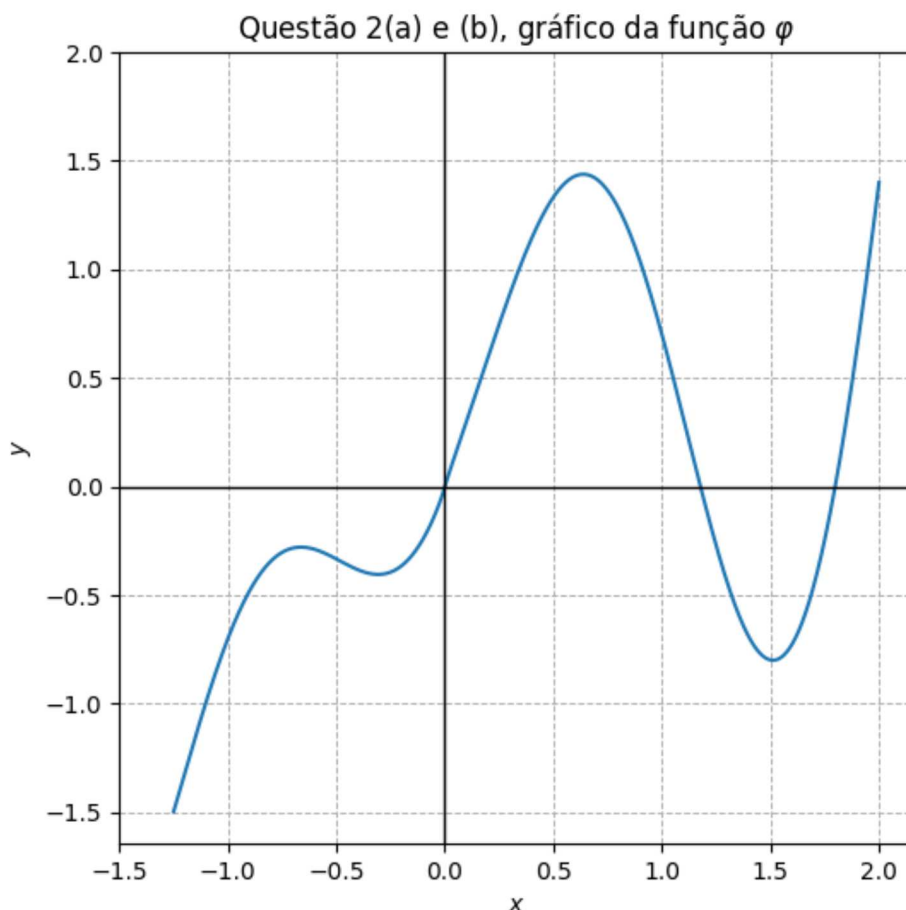
$$n \leftarrow 1$$

$$n \leftarrow 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$n \leftarrow 2 \cdot 3 + 0 = 6$$

$$n \leftarrow 2 \cdot 6 + 1 = 13$$

Conclusão:  $J(22) = 13$ .



**Questão 2.** Exclusivamente nos itens (a) e (b) desta questão, não é necessário justificar sua resposta. A figura acima ilustra o gráfico de uma função diferenciável  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I = [-1.25, 2.0]$ .

[1,0 pt] (a) Marque na figura todos os pontos fixos de  $\varphi$ .

[1,5 pt] (b) Classifique cada um deles como atrator, repulsor ou nenhum dos dois.

*Solução 2:* Para encontrar os pontos fixos, basta tomar as coordenadas- $x$  dos pontos de intersecção do gráfico de  $\varphi$  com a reta de equação  $y = x$ . Por sua vez, esta reta pode ser desenhada na figura conectando-se  $(-1.5, -1.5)$  a  $(2.0, 2.0)$  por um segmento de reta. Obtemos assim quatro pontos fixos no total. (Note que estes pontos nada têm a ver com os pontos críticos de  $\varphi$  nem com os zeros dela!)

Recorde que um ponto fixo é dito *atrator* ou *repulsor* conforme o valor absoluto da derivada da função seja menor ou maior que 1 aí. Há pelo menos duas maneiras de classificar os pontos encontrados:

- Comparar a inclinação do gráfico de  $\varphi$  com as das retas de inclinação  $\pm 1$  passando pelo ponto fixo em questão. Novamente, estas retas podem ser desenhadas com auxílio do quadriculado.
- Aplicar geometricamente uma única iteração do método do ponto fixo, começando com uma estimativa inicial próxima. Se o resultado estiver mais próximo (resp. afastado) do ponto fixo do que a estimativa inicial, deduzimos que este deve ser atrator (resp. repulsor).

Resumindo, obtemos que há quatro pontos fixos no intervalo dado:

- Um repulsor entre  $-1.5$  e  $-1.0$ , próximo de  $-1.1$ .
- Um atrator entre  $-0.5$  e  $0.0$ , próximo de  $-0.4$ .
- Um repulsor em  $0.0$ .
- Outro repulsor logo à esquerda de  $1.0$ .

**Questão 3.**

- [1,0 pt] (a) Dado que  $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 50x^2 - 5x - 56$  tem ao menos uma raiz não-real, encontre o número de raízes positivas e o número de raízes negativas (contadas com multiplicidades).
- [1,0 pt] (b) Deflacione  $f(z) = z^3 - (1 - i)z^2 - (4 - 5i)z + (4 + 6i)$  a um polinômio de grau 2, sabendo que  $z = 3 - 2i$  é uma raiz.

**Solução 3(a):** As seqüências dos sinais dos coeficientes de  $p(x)$  e de  $p(-x)$  são:

$$+ - - - - \quad e \quad + + - + -$$

respectivamente. Portanto, a regra dos sinais de Descartes garante que há:

- Exatamente um zero positivo, pois na primeira seqüência há uma troca de sinal.
- Um ou três zeros negativos, pois na segunda seqüência há três trocas de sinal.

Mas também foi dado no enunciado que  $p$  possui ao menos uma raiz não-real. Como o número total de raízes (contadas com multiplicidade) é exatamente 4 pelo teorema fundamental da álgebra, concluímos que só pode haver um zero negativo.

*Solução 3(b):* Basta aplicar a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1+i & -4+5i & 4+6i \\ \zeta=3-2i & & 3-2i & 4-7i & -4-6i \\ \hline & 1 & 2-i & -2i & 0 \end{array}$$

Concluimos que o quociente  $q(z)$  de grau 2 (resultado da deflação de  $f$ ) é dado por:

$$q(z) = z^2 + (2 - i)z - 2i.$$

**Questão 4.** Sejam  $P(x) = (x, x^2)$  um ponto genérico sobre a parábola de equação  $y = x^2$  e  $Q = (1, 0)$ . Seja  $d(x)$  a distância de  $P(x)$  a  $Q$ .

- [1,0 pt] (a) Obtenha uma expressão para  $d(x)^2$  e calcule sua derivada  $f(x)$ . *Dica:* Esboce uma figura.  
[1,5 pt] (b) Observe que o ponto sobre a parábola que minimiza  $d$  (ou equivalentemente  $d^2$ ) deve ser um zero de  $f$ . Calcule a derivada de  $f(x)$  e mostre que  $f$  possui um único zero real.  
[1,0 pt] (c) Utilize duas iterações do método de Newton para aproximar o zero de  $f$  usando a estimativa inicial  $x_0 = 0$ .

*Solução 4(a):* Recorde que a distância entre dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  no plano é dada por:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Isto pode ser visto considerando-se um triângulo retângulo tendo estes dois pontos e  $(x_0, y_1)$  como vértices e aplicando-se o teorema de Pitágoras. Portanto, no nosso caso,

$$d(x)^2 = (x - 1)^2 + x^4.$$

Derivando esta expressão, vem que:

$$f(x) = 2(x - 1) + 4x^3.$$

*Solução 4(b):* Derivando mais uma vez, obtemos:

$$f'(x) = 12x^2 + 2.$$

Em particular, a derivada de  $f$  é sempre positiva, o que significa que  $f$  é estritamente crescente. Sendo assim,  $f$  possui no máximo um zero em  $\mathbb{R}$ . Como além disto

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{enquanto} \quad f(1) = 4 > 0,$$

o teorema do valor intermediário garante que  $f$  possui um zero no intervalo  $(0, 1)$ .

*Solução 4(c):* A fórmula para a próxima estimativa no método de Newton é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

No nosso caso,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n - 1) + 4x_n^3}{12x_n^2 + 2}.$$

Portanto

$$x_1 = 0 - \frac{-2}{2} = 1.$$

E finalmente

$$x_2 = 1 - \frac{4}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$