Questão 1.

[1,5 pt] (a) Encontre a representação de $x = \frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$ na base 2.

[1,0 pt] (b) Utilizando um sistema de ponto flutuante com base decimal, três dígitos significativos na mantissa e expoentes entre -9 e 9 (o mesmo usado nas aulas), calcule o produto de 1.23×10^2 e 4.51×10^{-1}, utilizando arredondamento com desempate por dígito menos significativo par.

Solução 1(a): Basta converter separadamente 7 e $\frac{1}{7}$ para base 2 e depois concatenar as duas representações. Começamos com a parte inteira:

$$\begin{array}{lll} 7 \div 2 = 3 & \text{resto} & 1 \\ 3 \div 2 = 1 & \text{resto} & 1 \\ 1 \div 2 = 0 & \text{resto} & 1 \end{array}$$

Portanto, $7_{10} = 111_2$.

Agora convertendo a parte fracionária $\frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7} & \text{parte inteira} & 0 & \text{parte fracionária} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \times 2 = \frac{4}{7} & \text{parte inteira} & 0 & \text{parte fracionária} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} \times 2 = \frac{8}{7} & \text{parte inteira} & 1 & \text{parte fracionária} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7} & \text{parte inteira} & 0 & \text{parte fracionária} & \frac{2}{7} \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Observe que a seqüencia das partes fracionárias se repete com período 3, logo $\frac{1}{7} = 0.\overline{001}_2$.

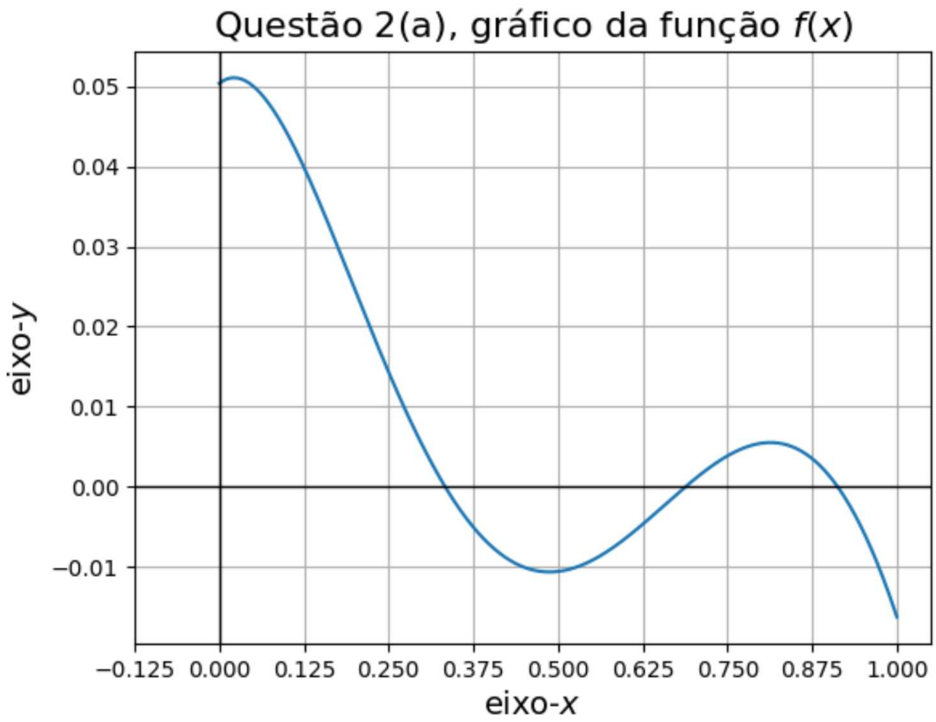
Concluímos que a representação de $x = \frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$ na base 2 é

$$(111.001001001...)_2 \,.$$

Solução 1(b):

$$\begin{array}{lllr} & 1.23 & \times 10^2 & \\ \times & 4.51 & \times 10^{-1} & \text{(mutiplicando mantissas)} \\ \hline = & (4.92 & & \\ + & .615 & & \\ + & .0123) & \times 10^{2-1} & \text{(adicionando expoentes)} \\ = & 5.5473 & \times 10^1 & \text{(arredondando)} \\ = & 5.55 & \times 10^1 & \text{(resultado)} \end{array}$$

Neste caso o modo de desempate é irrelevante, pois não há empate (i.e., o número 5.55 está mais próximo que 5.54 do resultado 5.5473 da multiplicação das mantisass).



Questão 2. Queremos aproximar um zero de uma função contínua f cujo gráfico se encontra na figura acima aplicando o método da bissecção no intervalo $[0, 1]$.

[1,5 pt] (a) No primeiro passo, o método fornece a estimativa $0.5 = \frac{1}{2}$ para o zero. Qual é o valor da estimativa fornecida pelo quarto passo? (Você pode expressar sua resposta como um número racional se preferir.)

[1,5 pt] (b) Encontre o menor número n de passos necessário para garantir que a estimativa fornecida pelo método da bissecção está a uma distância menor que ou igual a 10^{-6} de um zero (não é necessário calcular n explicitamente, mas simplifique ao máximo uma expressão para ele).

Solução 2(a): No método da bissecção, uma das extremidades do novo intervalo a ser considerado é o ponto médio $m = \frac{a+b}{2}$ das extremidades do intervalo $[a, b]$ anterior. A outra é escolhida dentre a ou b de modo que ainda haja troca de sinal no novo intervalo. No nosso caso, a seqüência de estimativas é:

1. $m \leftarrow \frac{1}{2} = 0.5, \quad [a, b] \leftarrow [0, 0.5]\,.$
2. $m \leftarrow \frac{1}{4} = 0.25, \quad [a, b] \leftarrow [0.25, 0.5]\,.$
3. $m \leftarrow \frac{3}{8} = 0.375, \quad [a, b] \leftarrow [0.25, 0.375]\,.$
4. $m \leftarrow \frac{5}{16} = 0.3125\,.$

Portanto a quarta estimativa é

$$\frac{5}{16} = 0.3125\,.$$

Solução 2(b): Podemos garantir que há sempre um zero ζ no intervalo considerado. Sejam I_n o n-ésimo intervalo e m_n o ponto médio dele, que é a estimativa para este zero no n-ésimo passo. Então a distância de ζ a m_n é no máximo metade do comprimento de I_n. E a cada passo cortamos o comprimento do intervalo por um fator $\frac{1}{2}$, começando com $I_1 = [0, 1]$, que tem comprimento 1. Logo precisamos encontrar o menor inteiro n tal que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-6}\,,$$

ou seja,

$$n \geq \lg\left(10^6\right) = 6 \lg 10 \qquad (\text{onde } \lg = \log_2)\,.$$

O menor inteiro que satisfaz esta desigualdade é

$$n = \lceil 6 \lg 10 \rceil\,.$$

(O valor preciso é $n = 20$ pois $6 \lg 10 \approx 19.93$.)

Questão 3.

[1,5 pt] (a) Encontre o único polinômio de grau ≤ 2 passando pelos pontos $(-1, a)$, $(0, b)$ e $(1, c)$, onde a, b, $c \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

[1,0 pt] (b) Deflacione $f(z) = z^4 - (1-i)z^3 - (4+i)z^2 - (2+6i)z - 12$ a um polinômio de grau 3, sabendo que $z = 3$ é uma raiz.

Solução 3(a): Seja $p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ o polinômio que estamos procurando. Substituindo os valores dados, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{rcccccc} p(-1) = & c_2(-1)^2 + c_1(-1) + c_0 & = & c_2 - c_1 + c_0 & = & a \\ p(0) = & c_2\,0^2 + c_1\,0 + c_0 & = & c_0 & = & b \\ p(1) = & c_2\,1^2 + c_1\,1 + c_0 & = & c_2 + c_1 + c_0 & = & c \end{array}$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{a+c}{2} - b \\ c_1 = \frac{c-a}{2} \\ c_0 = b \end{cases}$$

Concluímos que

$$p(x) = \left(\frac{a+c}{2} - b\right)x^2 + \frac{c-a}{2}x + b\,.$$

Solução 3(b): Basta aplicar a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1+i & -4-i & -2-6i & -12 \\ 3 & & 3 & 6+3i & 6+6i & 12 \\ \hline & 1 & 2+i & 2+2i & 4 & 0 \end{array}$$

Assim, o polinômio deflacionado é

$$z^3 + (2+i)z^2 + (2+2i)z + 4\,.$$

Questão 4.

[1,0 pt] (a) Use duas iterações do método de Newton para aproximar $\sqrt{2}$ como zero de uma função $f(x)$ apropriada, usando a estimativa inicial $x_0 = 1$.

[1,5 pt] (b) Encontre o maior $r > 0$ tal que é possível garantir que o método de Newton aplicado a f converge a $\sqrt{2}$ para qualquer estimativa inicial no intervalo aberto de raio r centrado em $\sqrt{2}$.

Solução 4(a): Observe que $\sqrt{2}$ é a única raiz positiva de $f(x) = x^2 - 2$. Para esta função, $f'(x) = 2x$. Logo as estimativas fornecidas pelo método de Newton são dadas por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\,.$$

Em particular, tomando $x_0 = 1$ como estimativa inicial,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1)^2 - 2}{2(1)} = \frac{3}{2} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2} - \frac{(\frac{3}{2})^2 - 2}{2(\frac{3}{2})} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}\,. \end{aligned}$$

Solução 4(b): Precisamos encontrar o maior r tal que dentro do intervalo de centro $\sqrt{2}$ e raio r valha

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1$$

em todo ponto. Substituindo $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$, obtemos

$$\frac{|x^2 - 2| \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{2}{x^2}\right| < 1 \qquad (x \neq 0)\,.$$

Agora,

$$\begin{aligned} & \left|1 - \frac{2}{x^2}\right| < 2 \qquad (x \neq 0) \\ \iff & -2 < 1 - \frac{2}{x^2} < 2 \qquad (x \neq 0) \\ \iff & \quad -1 < \frac{2}{x^2} < 3 \qquad (x \neq 0) \end{aligned}$$

A primeira desigualdade é trivialmente válida, e a segunda é válida desde que

$$x < -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < x\,.$$

Concluímos portanto que o maior raio r como no enunciado é

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$