Questão 1.

[1,0 pt] (a) Determine a representação de $(222)_{10}$ na base $b = 3$.

[1,5 pt] (b) Defina uma função $J\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$J((d_m\, d_{m-1} \ldots d_1\, d_0)_2) = (d_{m-1}\, d_{m-2} \ldots d_0\, d_m)_2.$$

Calcule $J(22)$. Expresse a resposta na base 10.

Solução 1(a):

$$\begin{aligned} 222 \div 3 &= 74 && \text{resto} && 0 \\ 74 \div 3 &= 24 && \text{resto} && 2 \\ 24 \div 3 &= 8 && \text{resto} && 0 \\ 8 \div 3 &= 2 && \text{resto} && 2 \\ 2 \div 3 &= 0 && \text{resto} && 2 \end{aligned}$$

Portanto $222_{10} = 22020_3$.

Solução 1(b): Convertendo 22 à base 2 antes de aplicar a função J:

$$\begin{aligned} 22 \div 2 &= 11 && \text{resto} && 0 \\ 11 \div 2 &= 5 && \text{resto} && 1 \\ 5 \div 2 &= 2 && \text{resto} && 1 \\ 2 \div 2 &= 1 && \text{resto} && 0 \\ 1 \div 2 &= 0 && \text{resto} && 1 \end{aligned}$$

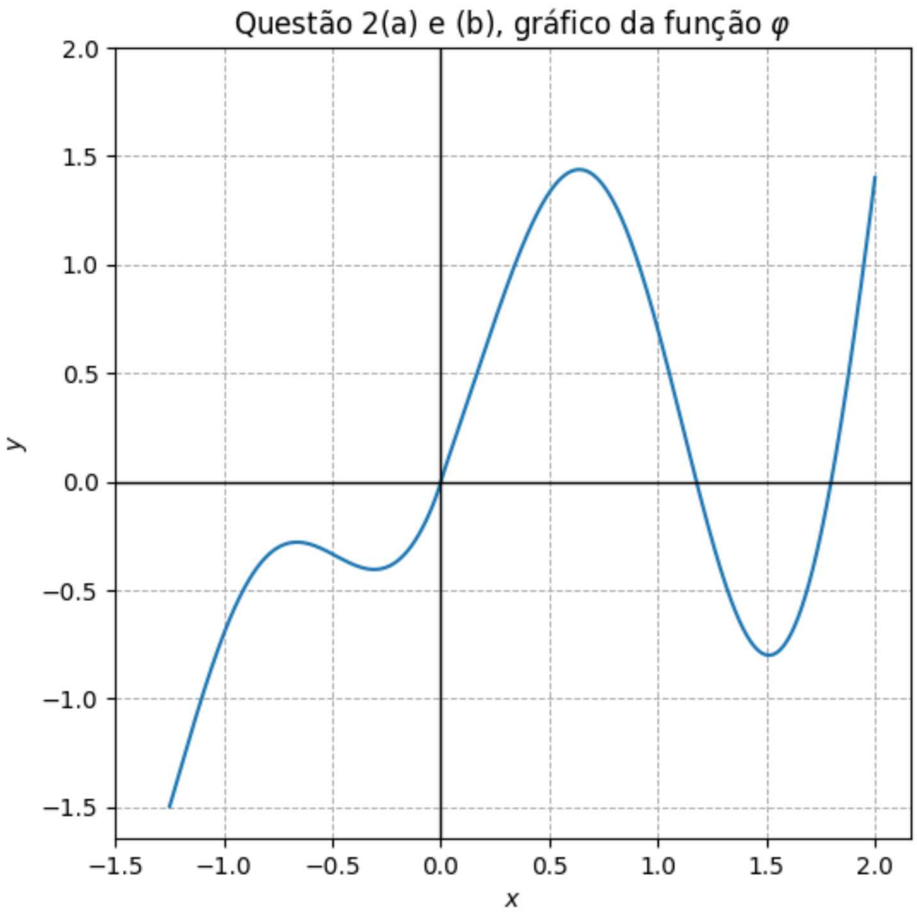
Como $22_{10} = 10110_2$, segue imediatamente da definição de J que

$$J(22) = J(10110_2) = 01101_2 = 1101_2\,.$$

Convertendo este último à base 10:

$$\begin{aligned} n &\leftarrow 1 \\ n &\leftarrow 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ n &\leftarrow 2 \cdot 3 + 0 = 6 \\ n &\leftarrow 2 \cdot 6 + 1 = 13 \end{aligned}$$

Conclusão: $J(22) = 13$.



Questão 2. Exclusivamente nos itens (a) e (b) desta questão, não é necessário justificar sua resposta. A figura acima ilustra o gráfico de uma função diferenciável $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, onde $I = [-1.25, 2.0]$.

[1,0 pt] (a) Marque na figura todos os pontos fixos de φ.

[1,5 pt] (b) Classifique cada um deles como atrator, repelente ou nenhum dos dois.

Solução 2: Para encontrar os pontos fixos, basta tomar as coordenadas-x dos pontos de intersecção do gráfico de φ com a reta de equação $y = x$. Por sua vez, esta reta pode ser desenhada na figura conectando-se $(-1.5, -1.5)$ a $(2.0, 2.0)$ por um segmento de reta. Obtemos assim quatro pontos fixos no total. (Note que estes pontos nada têm a ver com os pontos críticos de φ nem com os zeros dela!)

Recorde que um ponto fixo é dito *atrator* ou *repelente* conforme o valor absoluto da derivada da função seja menor ou maior que 1 aí. Há pelo menos duas maneiras de classificar os pontos encontrados:

- Comparar a inclinação do gráfico de φ com as das retas de inclinação ± 1 passando pelo ponto fixo em questão. Novamente, estas retas podem ser desenhadas com auxílio do quadriculado.
- Aplicar geometricamente uma única iteração do método do ponto fixo, começando com uma estimativa inicial próxima. Se o resultado estiver mais próximo (resp. afastado) do ponto fixo do que a estimativa inicial, deduzimos que este deve ser atrator (resp. repelente).

Resumindo, obtemos que há quatro pontos fixos no intervalo dado:

- Um repelente entre -1.5 e -1.0, próximo de -1.1.
- Um atrator entre -0.5 e 0.0, próximo de -0.4.
- Um repelente em 0.0.
- Outro repelente logo à esquerda de 1.0.

Questão 3.

[1,0 pt] (a) Dado que $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 50x^2 - 5x - 56$ tem ao menos uma raiz não-real, encontre o número de raízes positivas e o número de raízes negativas (contadas com multiplicidades).

[1,0 pt] (b) Deflacione $f(z) = z^3 - (1-i)z^2 - (4-5i)z + (4+6i)$ a um polinômio de grau 2, sabendo que $z = 3 - 2i$ é uma raiz.

Solução 3(a): As seqüências dos sinais dos coeficientes de $p(x)$ e de $p(-x)$ são:

$$+ - - - - \qquad \text{e} \qquad + + - + -$$

respectivamente. Portanto, a regra dos sinais de Descartes garante que há:

- Exatamente um zero positivo, pois na primeira seqüência há uma troca de sinal.
- Um ou três zeros negativos, pois na segunda seqüência há três trocas de sinal.

Mas também foi dado no enunciado que p possui ao menos uma raiz não-real. Como o número total de raízes (contadas com multiplicidade) é exatamente 4 pelo teorema fundamental da álgebra, concluímos que só pode haver um zero negativo.

Solução 3(b): Basta aplicar a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1+i & -4+5i & 4+6i \\ \zeta = 3-2i & & 3-2i & 4-7i & -4-6i \\ \hline & 1 & 2-i & -2i & 0 \end{array}$$

Concluímos que o quociente $q(z)$ de grau 2 (resultado da deflação de f) é dado por:

$$q(z) = z^2 + (2-i)z - 2i\,.$$

Questão 4. Sejam $P(x) = (x, x^2)$ um ponto genérico sobre a parábola de equação $y = x^2$ e $Q = (1, 0)$. Seja $d(x)$ a distância de $P(x)$ a Q.

[1,0 pt] (a) Obtenha uma expressão para $d(x)^2$ e calcule sua derivada $f(x)$. *Dica:* Esboce uma figura.

[1,5 pt] (b) Observe que o ponto sobre a parábola que minimiza d (ou equivalentemente d^2) deve ser um zero de f. Calcule a derivada de $f(x)$ e mostre que f possui um único zero real.

[1,0 pt] (c) Utilize duas iterações do método de Newton para aproximar o zero de f usando a estimativa inicial $x_0 = 0$.

Solução 4(a): Recorde que a distância entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) no plano é dada por:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,.$$

Isto pode ser visto considerando-se um triângulo retângulo tendo estes dois pontos e (x_0, y_1) como vértices e aplicando-se o teorema de Pitágoras. Portanto, no nosso caso,

$$d(x)^2 = (x - 1)^2 + x^4\,.$$

Derivando esta expressão, vem que:

$$f(x) = 2(x - 1) + 4x^3\,.$$

Solução 4(b): Derivando mais uma vez, obtemos:

$$f'(x) = 12x^2 + 2\,.$$

Em particular, a derivada de f é sempre positiva, o que significa que f é estritamente crescente. Sendo assim, f possui no máximo um zero em $\mathbb{R}$. Como além disto

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{enquanto} \quad f(1) = 4 > 0\,,$$

o teorema do valor intermediário garante que f possui um zero no intervalo $(0, 1)$.

Solução 4(c): A fórmula para a próxima estimativa no método de Newton é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

No nosso caso,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n - 1) + 4x_n^3}{12x_n^2 + 2}\,.$$

Portanto

$$x_1 = 0 - \frac{-2}{2} = 1\,.$$

E finalmente

$$x_2 = 1 - \frac{4}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}\,.$$