

**Questão 1.** Um estudante costuma dizer que “cada xícara de café são duas horas extras de estudo”. O resultado de seu experimento ao longo de uma semana está registrado na tabela abaixo:

Café (xícaras)	Estudo (horas)
7	12
3	6
10	15
5	9
5	8

[2,0 pt] (a) Ajuste uma reta aos dados usando o método dos mínimos quadrados.

[1,0 pt] (b) De acordo com o modelo linear encontrado, quantas xícaras de café um estudante precisaria consumir para estudar 0 horas num dia?

*Solução:*

- (a) Começamos estendendo a tabela de modo a obter os coeficientes do sistema que define a reta de mínimos quadrados. Para simplificar, sejam  $x$  e  $y$  o número de xícaras consumidas e o número de horas de estudo, respectivamente. Então

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
7	12	49	84
3	6	9	18
10	15	100	150
5	9	25	45
5	8	25	40
$\sum_i$	<b>30</b>	<b>50</b>	<b>208</b>
			<b>337</b>

Observe que o número de dados é 5. Portanto, se  $\hat{p}(x) = a_0 + a_1 x$  é o polinômio ajustado, os seus coeficientes devem satisfazer as equações normais:

$$\begin{cases} 5a_0 + 30a_1 = 50 \\ 30a_0 + 208a_1 = 337 \end{cases}$$

Fazendo a operação elementar  $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1$ , transformamos este sistema no equivalente:

$$\begin{cases} 5a_0 + 30a_1 = 50 \\ \phantom{5a_0} + 28a_1 = 37 \end{cases}$$

Daí deduzimos que

$$a_1 = \frac{37}{28} \quad \text{e} \quad a_0 = 10 - 6\frac{37}{28} = \frac{140 - 3 \cdot 37}{14} = \frac{29}{14}.$$

Concluimos que a equação da reta procurada é

$$\boxed{y = \frac{1}{28}(37x + 58) = \frac{37}{28}x + \frac{29}{14}}$$

- (b) Mantendo a notação acima, basta resolver a equação

$$y = \frac{1}{28}(37x + 58) = 0.$$

Assim, de acordo com o modelo, o número  $x$  de xícaras consumidas num dia necessárias para suportar 0 horas de estudo seria

$$\boxed{x = -\frac{58}{37}}$$

**Questão 2.** [2,0 pt] Um projétil tem sua altura acima do solo (em metros) dada por uma função quadrática do tempo. Considerando as medições abaixo, estime sua altura em  $t = 2$  segundos:

posição	tempo
78 m	1 s
58 m	3 s
18 m	4 s

*Solução:* Podemos estimar esta posição através do polinômio  $p$  de grau  $\leq 2$  que interpola os dados. Denotemos o tempo por  $t$ . Pela fórmula de Lagrange,

$$\begin{aligned} p(t) &= 78 \frac{(t-3)(t-4)}{(1-3)(1-4)} + 58 \frac{(t-1)(t-4)}{(3-1)(3-4)} + 18 \frac{(t-1)(t-3)}{(4-1)(4-3)} \\ &= 13(t-3)(t-4) - 29(t-1)(t-4) + 6(t-1)(t-3). \end{aligned}$$

Substituindo  $t = 2$  nesta fórmula, encontramos que a altura do projétil no instante  $t = 2$  s é aproximadamente

$$p(2) = 26 + 58 - 6 = \boxed{78 \text{ metros}}$$

*Observação:* Para encontrar  $p$  também poderia ter sido empregado o método de Newton ou o método direto (resolvendo-se o sistema consistindo das três condições  $p(1) = 78$ ,  $p(3) = 58$  e  $p(4) = 18$ ), porém por esta última opção as contas seriam mais extensas.

Alternativamente, como o grau do polinômio mais 1 coincide com o número de dados, o polinômio  $\hat{p}$  ajustado aos dados pelo método dos mínimos quadrados coincide com o polinômio interpolador  $p$ . Portanto este método também leva à solução. Mas novamente as contas seriam bem mais trabalhosas.

**Questão 3.** [2,0 pt] Encontre a fatoração  $LU$  da matriz abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Solução:* Para encontrar  $\mathbf{U}$  (a parte triangular superior), basta escalonar  $\mathbf{A}$  utilizando-se somente de operações do tipo

$$L_i \leftarrow L_i - \lambda_{ij}L_j \quad \text{com } i > j$$

(ou seja, subtração de um múltiplo de uma linha ( $L_j$ ) de outra linha abaixo dela ( $L_i$ )):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_1}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

A matriz  $\mathbf{L}$  é triangular inferior com entradas diagonais todas iguais a 1. Suas demais entradas (com  $i > j$ ) são os coeficientes  $\lambda_{ij}$  das operações realizadas. Portanto

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato, verifica-se diretamente que

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

**Questão 4.** Considere a integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx.$$

[1,5 pt] (a) Aproxime  $I$  usando a regra do trapézio com 3 subdivisões.

[1,5 pt] (b) Encontre o menor número  $N$  de subdivisões que garante que o módulo do erro  $E$  cometido ao se aproximar  $I$  pela regra do trapézio não excede  $10^{-4}$ . *Dica:* Recorde que

$$E = \int_a^b f(x) \, dx - \langle \text{regra do trapézio} \rangle = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(c) \quad \text{para algum } c \in [a, b].$$

*Solução:*

(a) Foram dados  $N = 3$ ,  $a = 0$  e  $b = \frac{\pi}{2}$ . Logo o tamanho do passo  $h$  será

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{6}$$

e os nodos serão

$$x_i = a + ih = i\frac{\pi}{6} \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, 3.$$

Pela regra do trapézio para  $f(x) = x \sin x$ ,

$$\begin{aligned} I &\approx h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right] \\ &= \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ &= \boxed{\frac{\pi^2}{36} (2 + \sqrt{3})} \approx 1.0232. \end{aligned}$$

O valor exato da integral, que pode facilmente ser obtido por integração por partes, é  $I = 1$ .

(b) Tomando valores absolutos na fórmula para o erro, concluímos que

$$|E| \leq \frac{|b-a|^3}{12N^2} \max_{[a,b]} |f''|.$$

No nosso caso  $f(x) = x \sin x$ , portanto

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \quad \text{e}$$

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x.$$

Observe que em  $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ , esta segunda derivada é decrescente (pois tanto  $\cos x$  quanto  $-x \sin x$  são decrescentes). Logo o maior valor do módulo de  $f''(x)$  deve ser assumido em uma das extremidades deste intervalo. Como

$$|f''(0)| = 2 \quad \text{e} \quad \left| f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{\pi}{2},$$

vale

$$\max_{[a,b]} |f''(x)| = 2.$$

Deduzimos que, para que  $|E|$  não exceda  $10^{-4}$ , basta que

$$\begin{aligned} \frac{|b-a|^3}{12N^2} \max_{[a,b]} |f''| &= \frac{\pi^3}{8 \cdot 12 \cdot N^2} \cdot 2 \\ &= \frac{\pi^3}{2^4 \cdot 3 \cdot N^2} \\ &\leq 10^{-4}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$N \geq \frac{100\pi\sqrt{\pi}}{4\sqrt{3}} = \frac{25\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}.$$

Como  $N$  deve ser inteiro, o menor número de subdivisões que garante que o erro seja menor que ou igual a  $10^{-4}$  é o teto da última expressão:

$$N = \left\lceil \frac{25\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \right\rceil$$